Das Auswahlaxiom im Prädikatenkalkül zweiter Stufe

Dissertation
(fertiggestellt 1984, verteidigt 1985, kopiert 1986, gescannt 2018)

Christine Gaßner

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Eine kurze Zusammenfassung wurde in folgender Arbeit veröffentlicht.

C. Gaßner: **The Axiom of Choice in Second-Order Predicate Logic**.
Mathematical Logic Quarterly, Volume 40, Issue 4, 533–546 (1994).
DOI: 10.1002/malq.19940400410

"Das Auswahlaxiom im Prädikatenkalkül zweiter Stufe"

D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktor eines Wissenschaftszweiges (Dr. rer. nat.)

des

Wissenschaftlichen Rates

der

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

vorgelegt von
Christine Gaßner
geboren am [redacted]

Greifswald, den 31. 10. 1984

Dekan: Prof. Dr. sc. TEUSCHER

1. Gutachter: Prof. Dr. sc. ASSER

2. Gutachter: Doz. Dr. sc. SCHREIBER

3. Gutachter: Dr. sc. KÜHNRICH

Tag der Promotion: 26. 11. 1985

Ich möchte an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. G. ASSER, für die gute fachliche Betreuung und die wertvollen Hinweise bei der Fertigstellung dieser Dissertation danken.
Insbesondere geht die in Kapitel III vorgestellte Methode zur Konstruktion von Henkin-Strukturen auf eine Idee von Herrn Prof. G. ASSER zurück.

Unterschrieben von Christine Gaßner

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

Aufbauend auf die drei Bände der "Einführung in die mathematische Logik" von Prof. Dr. G. ASSER ([1], [2], [3]) beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit Aussagen des Prädikatenkalküls zweiter Stufe, durch die das Auswahlaxiom, einige andere Auswahlprinzipien und weitere Aussagen, von denen aus der Mengenlehre bekannt ist, daß sie schwächer oder stärker als das Auswahlaxiom bzw. äquivalent zum Auswahlaxiom sind, formalisiert werden. Es wird die Stärke dieser Aussagen in der Klasse der Henkin-Strukturen untersucht. Die Klasse der Henkin-Strukturen ist eine elementar charakterisierbare Klasse von Interpretationen, die die Klasse der Standard-Strukturen umfaßt. Die Henkin-Strukturen sind bis auf Isomorphie die Modelle der Ausdrücke, die "man in gewissem Sinne als die elementaren Sätze der Logik höherer Stufe auffassen [kann], während die darüber hinausgehenden Sätze von mehr oder minder problematischen mengentheoretischen Annahmen in der Metatheorie Gebrauch machen." 1)

Im Kapitel II wird eine kurze Einführung in den einsortigen Prädikatenkalkül zweiter Stufe ohne Operationsvariablen, auf den sich die Untersuchungen beschränken sollen, gegeben. An diese Einführung schließt sich eine kurze Charakterisierung der Henkin-Strukturen an. Außerdem wird auf eine in [3] beschriebene Methode zur Konstruktion von Henkin-Strukturen mit Hilfe von Permutationen eingegangen.

Es ist aber auch möglich, Henkin-Strukturen mit Hilfe bestimmter Mengen eines Modells der Zermelo-Fraenkel-Mengentheorie (ZFA) mit Atomen zu konstruieren. Der Beweis dafür wird im

---

1) Vgl.: [3], S. 4.

Kapitel III geliefert. Durch die Konstruktion von Henkin-Strukturen auf diese Weise kann bis zu einem gewissen Grad auch die Forcing-Methode bei der Konstruktion von Henkin-Strukturen Anwendung finden. Abschließend behandelt Kapitel III ein Transfer-Theorem, nach dem für eine Aussage H des Prädikatenkalküls zweiter Stufe aus der Nichtableitbarkeit einer H entsprechenden Aussage der elementaren Sprache aus dem Axiomensystem der ZFA-Theorie die Existenz einer Henkin-Struktur, die ein Modell für $\neg$ H ist, folgt.

Im Kapitel IV werden zunächst das Auswahlaxiom und einige andere häufig in der Literatur zu findenden Auswahlprinzipien durch Ausdrücke des Prädikatenkalküls zweiter Stufe formalisiert. Danach werden die Kontinuumhypothese, der Wohlordnungssatz, der Vergleichbarkeitssatz und einige andere Sätze der Mengenlehre formalisiert. Die jeweiligen historischen Bemerkungen und Angaben über die Bedeutung dieser Sätze bzw. die Stellung dieser Sätze zum Auswahlaxiom in der gewöhnlichen Mengenlehre sind gleichzeitig eine Begründung dafür, warum hier ihre Formulierungen im Prädikatenkalkül zweiter Stufe untersucht werden.

Bei der Formalisierung der interessierenden Sätze werden die in [3] eingeführten Abkürzungen kh. übernommen. Vor ihrem erstmaligen Gebrauch wird angegeben, wo die Definition der benutzten Abkürzung zu finden ist. Im Anschluß an die Formalisierung wird die Stärke der verschiedenen Aussagen untereinander in der Klasse der Henkin-Strukturen untersucht. Bei der Formulierung der Kontinuumhypothese und bei der Formulierung des Axioms der multiplen Auswahl müssen Endlichkeitsdefinitionen benutzt werden. Da es im Prädikatenkalkül zweiter Stufe keine Endlichkeitsdefinition gibt, die in jeder Henkin-Struktur gerade die Attribute der Stellenzahl m ($m \geq 1$) charakterisiert, die nur auf endlich viele m-Tupel von Individuen zutreffen, werden verschieden starke, aus [3] bekannte Endlichkeitsdefinitionen benutzt. Die Änderung der Stärke von Aussagen durch Änderung der Endlichkeitsdefinition wird hier aber i. a. nicht näher untersucht.

Im Kapitel V werden 14 Henkin-Strukturen konstruiert, die Modelle für ganz bestimmte Ausdrücke sind. Damit liefert Kapitel V eine Reihe von Sätzen über die Stärke der in dieser Arbeit betrachteten Aussagen.

Als Metasprache wird die mathematische Umgangssprache benutzt. Dabei werden folgende Zeichen verwendet:

&, $\vee$, =>, <=>, $\neg$ (Konjunktion, Alternative, Implikation, Äquivalenz, Negation);

$\exists$, $\forall$ (Existenzquantor, Allquantor);

$\exists!$ (es existiert genau ein);

$\cup$, $\bigcup$; $\cap$, $\bigcap$; $\times$; $-$ (Vereinigung, Durchschnitt, Mengenprodukt, Mengendifferenz);

$\mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge von X); $\subset$ (Inklusion);

X^2 $(X \times X)$; X^3 $(X^2 \times X)$; ...;

$=$, $\neq$ (Identität, Negation der Identität);

$\in$, $\notin$ (Elementbeziehung, Negation der Elementbeziehung);

$\{x_1, x_2, \ldots\}$ (Menge der Objekte $x_1, x_2, \ldots$);

$\{x: H(x)\}$ (Menge der Objekte x mit der Eigenschaft H(x));

$\leq$ (übliche totale Ordnung in $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$);

min X, max X (Minimum bzw. Maximum von X bezüglich $\leq$);

$]x,y[$; $]x,y]$, $[x,y[$; $[x,y]$ (offenes, halboffenes bzw. abgeschlossenes Intervall);

$f: X \to Y$ (f ist eine (eindeutige !) Funktion von X in Y);

$f(x_1, \ldots, x_n)$ (Bild des n-Tupels $(x_1, \ldots, x_n)$ bezüglich der

Funktion f);

f"X (Menge der Bilder der Elemente der Menge X bezüglich der Funktion f);

$\mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen);

$\mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen);

$\mathbb{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen).

Vorausgesetzt werden bei den folgenden Betrachtungen die bekannten Sätze der gewöhnlichen Mengenlehre, d.h., es wird angenommen, daß das Auswahlaxiom in jeder Form (also auch der Wohlordnungssatz usw.) ein Satz der Metatheorie ist.

II. Der einsortige Prädikatenkalkül der zweiten Stufe und die Henkin-Interpretation

---

1. Die Ausdrücke

Die Ausdrücke des einsortigen Prädikatenkalküls zweiter Stufe ohne Operationsvariablen sind die Ausdrücke einer mehrsortigen Sprache mit der Sortenmenge $N = \{0,1,2,\ldots\}$, in der es bei beliebigem $n \geqq 1$ genau ein $(n+1)$-stelliges Relationssymbol R_n der Sorte $r_n = (n,0,0,\ldots,0)$ und keine Individuen- und keine Operationssymbole gibt, d.h. der Sprache der Signatur $\sigma^{(2)} = (N, \emptyset, \{r_n, n \geqq 1\}, \emptyset)$ über der Basis $B^{(2)} = (N, \emptyset, \{R_n, n \geqq 1\}, \emptyset)$ (vgl. [3], §1.). Sie werden als $B^{(2)}$-Ausdrücke bezeichnet.

Die Variablen der Sorte 0 heißen Individuenvariablen und die Variablen der Sorte $n \geqq 1$ heißen n-stellige Attributen- oder Prädikatenvariablen. $x_0, x_1, \ldots$ seien Individuenvariablen, und $A^n_0, A^n_1, A^n_2, \ldots$ seien für $n \geqq 1$ n-stellige Attributenvariablen.

Statt $R_n A^n_i x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ wird in einem $B^{(2)}$-Ausdruck kurz $A^n_i x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ geschrieben.

Folglich läßt sich die Definition der $B^{(2)}$-Ausdrücke so angeben:

1) $A^n_i x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ ist für beliebige natürliche Zahlen $n \geqq 1$ und $i, i_1, \ldots, i_n$ ein $B^{(2)}$-Ausdruck.

$x_i = x_j$ ist für i,j aus $\mathbb{N}$ ein $B^{(2)}$-Ausdruck.

$A^n_i = A^n_j$ ist für $n \geqq 1$, i und j aus $\mathbb{N}$ ein $B^{(2)}$-Ausdruck.

2) Ist H ein $B^{(2)}$-Ausdruck, so ist auch $\neg H$ ein $B^{(2)}$-Ausdruck.

Mit den $B^{(2)}$-Ausdrücken H_1 und H_2 sind auch $H_1 \rightarrow H_2$, $H_1 \leftrightarrow H_2$, $H_1 \wedge H_2$ und $H_1 \vee H_2$ $B^{(2)}$-Ausdrücke.

Ist $H(x_k)$ ein $B^{(2)}$-Ausdruck, in dem x_k vollfrei vorkommt, so sind auch $\bigwedge_{x_k} H(x_k)$ und $\bigvee_{x_k} H(x_k)$ $B^{(2)}$-Ausdrücke.

Ist $H(A^n_k)$ ein $B^{(2)}$-Ausdruck, in dem A^n_k vollfrei vorkommt, so sind auch $\bigwedge_{A^n_k} H(A^n_k)$ und $\bigvee_{A^n_k} H(A^n_k)$ $B^{(2)}$-Ausdrücke.

3) H ist nur dann ein $B^{(2)}$-Ausdruck, wenn das aufgrund von 1) und 2) der Fall ist.

Die Menge der $B^{(2)}$-Ausdrücke wird mit $ausd^{(2)}$ bezeichnet.

Der Wert $Wert_{\Sigma}(H,f)$ eines $B^{(2)}$-Ausdruckes H in einer Struktur $\Sigma=((J_n,\ n\geqq 0),\emptyset,(\mathcal{P}_n,\ n\geqq 1),\emptyset)$ der Signatur $\sigma^{(2)}$ bei einer sortengerechten Belegung f der Individuenvariablen mit Objekten aus J_0 und der n-stelligen Attributenvariablen für jedes $n \geqq 1$ mit Objekten aus J_n wird analog zum Prädikatenkalkül erster Stufe definiert, wobei R_n für beliebige $n \geqq 1$ als $\mathcal{P}_n$ interpretiert wird. Damit ist $Wert_{\Sigma}(H,f)$ für jede Struktur Σ der Signatur $\sigma^{(2)}$, jeden $B^{(2)}$-Ausdruck H und jede Belegung f über Σ ein eindeutig bestimmter Wahrheitswert; und es ist leicht einzusehen, daß $Wert_{\Sigma}(H,f)$ außerdem nur von den Werten der Interpretation für die in H effektiv auftretenden Symbole R_n ($n \geqq 1$) und von den Werten der Belegung f für die in H frei vorkommenden Individuen- und Attributenvariablen abhängt.

$f'\left\langle \begin{matrix} A_{i_1}^{n_1}\ldots A_{i_k}^{n_k} & x_{j_1}\ldots x_{j_l} \\ \alpha_1\ \ldots\alpha_k & \xi_1\ \ldots\xi_l \end{matrix} \right\rangle$ sei für eine beliebige Struktur $\Sigma=((J_n,\ n\geqq 0),\emptyset,(\mathcal{P}_n,\ n\geqq 1),\emptyset)$, eine Belegung f' über Σ und α_1 aus $J_{n_1}, \ldots, \alpha_k$ aus J_{n_k} und ξ_1 bis ξ_l aus J_0 die Belegung f über Σ, für die

$$f(A_r^s)=\begin{cases} \alpha_m, & \text{falls } 1 \leqq m \leqq k,\ s=n_m \text{ und } r=i_m, \\ f'(A_r^s), & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$f(x_r)=\begin{cases} \xi_m, & \text{falls } 1 \leqq m \leqq l \text{ und } r=j_m, \\ f'(x_r), & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt.

f_{Σ} sei für jede Struktur Σ der Signatur $\sigma^{(2)}$ eine beliebige, eindeutig bestimmte Belegung über Σ.

Kommen in einem $B^{(2)}$-Ausdruck H nur die Variablen $A_{i_1}^{n_1},\dots,A_{i_k}^{n_k}$ und $x_{j_1},\dots,x_{j_l}$ frei vor, so gilt für eine Struktur Σ der Signatur $\sigma^{(2)}$ und eine Belegung f über Σ:

$$\mathrm{Wert}_\Sigma(H,f)=\mathrm{Wert}_\Sigma\left(H,f\left\langle\begin{matrix} A_{i_1}^{n_1} & \dots & A_{i_k}^{n_k} & x_{j_1} & \dots & x_{j_l} \\ f(A_{i_1}^{n_1}) & \dots & f(A_{i_k}^{n_k}) & f(x_{j_1}) & \dots & f(x_{j_l})\end{matrix}\right\rangle\right).$$

Ein Ausdruck H heißt allgemeingültig in Σ, wenn für jede Belegung f über Σ $\mathrm{Wert}_\Sigma(H,f)=W$ gilt.

$ag_\Sigma^{(2)}$ ist die Menge aller in Σ allgemeingültigen Ausdrücke.

2. Die Henkin-Interpretation

Eine Struktur $\Sigma=((J_n,\ n\geq 0),\emptyset,(P_n,\ n\geq 1),\emptyset)$ der Signatur $\sigma^{(2)}$, bei der J_0 ein beliebiger nichtleerer Individuenbereich I ist und für beliebige $n\geq 1$ J_n eine nichtleere Teilmenge der Menge $\mathrm{att}^n(I)$ aller n-stelligen Attribute über I ist und für $n\geq 1$ die Relation P_n durch (1) definiert ist, heißt Attributen-Struktur.

(1) Ist α aus $\mathrm{att}^n(I)$ und sind $\xi_1,\dots,\xi_n$ aus I, so gelte

$$P_n(\alpha,\xi_1,\dots,\xi_n)=\alpha(\xi_1,\dots,\xi_n).$$

In einer mehrsortigen Struktur Σ der Signatur $\sigma^{(2)}$ sind alle Extensionalitätsaussagen

$$\bigwedge_{A_0^n,A_1^n}(A_0^n=A_1^n \leftrightarrow \bigwedge_{x_1,\dots,x_n}(A_0^n x_1\dots x_n \leftrightarrow A_1^n x_1\dots x_n))$$

genau dann wahr, wenn Σ zu einer Attributen-Struktur isomorph ist.

Σ sei nun eine beliebige Attributen-Struktur mit dem Individuenbereich I und den Attributenbereichen J_n $(n\geq 1)$, und f sei eine Belegung der Individuen- und Attributenvariablen in Σ. H sei ein beliebiger Ausdruck (aus $\mathrm{ausd}^{(2)}$). Dann wird durch

$$\alpha_{f,H}(\xi_1,\dots,\xi_n)=\mathrm{Wert}_\Sigma\left(H(x_{i_1},\dots,x_{i_n}),f\left\langle\begin{matrix}x_{i_1}\dots x_{i_n}\\ \xi_1\dots\xi_n\end{matrix}\right\rangle\right)$$

ein n-stelliges Attribut $\alpha_{f,H}$ über I definiert. Dieses wird das in Σ durch H bzgl. $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ bei der Belegung f definierte Attribut genannt und mit $Att_\Sigma(H\ ;\ x_{i_1},\ldots,x_{i_n}\ ;\ f)$ bezeichnet. Offenbar hängt $Att_\Sigma(H\ ;\ x_{i_1},\ldots,x_{i_n}\ ;\ f)$ nur von den Werten der Belegung f für die in H frei vorkommenden Individuenvariablen, die verschieden von $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ sind, und für die in H frei vorkommenden Attributenvariablen ab.

Ein n-stelliges Attribut α über I heißt in Σ definierbar, wenn es einen Ausdruck $H(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$ in den vollfreien Variablen x_{i_1}, $\ldots,x_{i_n}$ und eine Belegung f über Σ gibt, so daß

$\alpha = Att_\Sigma(H\ ;\ x_{i_1},\ldots,x_{i_n}\ ;\ f)$ gilt.

Eine Attributen-Struktur Σ, für die jedes in Σ definierbare Attribut zu Σ gehört, heißt Henkin-Struktur.

Es gilt der folgende Satz:

In einer mehrsortigen Struktur Σ der Signatur $\sigma^{(2)}$ sind alle Extensionalitätsaussagen und alle Komprehensionsausdrücke

$$\bigvee_{A_0^n} \bigwedge_{x_1,\ldots,x_n} (A_0^n x_1 \ldots x_n \leftrightarrow H(x_1,\ldots,x_n))$$

für einen $B^{(2)}$-Ausdruck H, in dem mindestens die Individuenvariablen $x_1,\ldots,x_n$ vollfrei vorkommen und die Prädikatenvariable A_0^n nicht vorkommt, genau dann allgemeingültig, wenn Σ zu einer Henkin-Struktur isomorph ist.

Damit ist die Klasse $\mathfrak{H}^{(2)}$ aller Henkin-Strukturen elementar charakterisierbar, und es gilt

$E(\mathfrak{H}^{(2)}) = Mod^{(2)}(ext^{(2)} \cup komp^{(2)})$,

wobei $E(\mathfrak{H}^{(2)})$ die Klasse aller Strukturen Σ der Signatur $\sigma^{(2)}$ ist, für die ein Σ' aus $\mathfrak{H}^{(2)}$ existiert, so daß $ag_\Sigma^{(2)} = ag_{\Sigma'}^{(2)}$ erfüllt ist, und $Mod^{(2)}(ext^{(2)} \cup komp^{(2)})$ die Klasse aller Modelle von der Menge $ext^{(2)}$ der Extensionalitätsaussagen und von der Menge $komp^{(2)}$ aller Komprehensionsausdrücke, die die Signatur $\mathcal{O}^{(2)}$ haben, ist.

Es bietet sich folglich für den Prädikatenkalkül zweiter Stufe eine Interpretationseinschränkung im Sinne von § 2. in [3] auf die Klasse $\mathfrak{H}^{(2)}$ aller Henkin-Strukturen an.

Für das $\mathfrak{H}^{(2)}$-Folgern gilt dann der folgende Satz:

1) Für jedes $X \subseteq ausd^{(2)}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
{}^{h}Fl^{(2)}(X) &= Fl^{(2)}(\, ext^{(2)} \cup komp^{(2)} \cup X \,)\\
&= Bw^{(2)}(\, ext^{(2)} \cup komp^{(2)} \cup X \,)\\
&= Ab^{(2)}(\, {}^{h}ax^{(2)} \cup X \,),
\end{aligned}
$$

wobei ${}^{h}ax^{(2)} = axa^{(2)} \cup axi^{(2)} \cup ext^{(2)} \cup komp^{(2)}$.

2) ${}^{h}ag^{(2)} = Ab^{(2)}(\, {}^{h}ax^{(2)} \,)$.

Dabei ist $Fl^{(2)}(X)$ (bzw. ${}^{h}Fl^{(2)}(X)$) für eine beliebige Menge $X \subseteq ausd^{(2)}$ die Menge der $B^{(2)}$-Ausdrücke, die in allen Modellen von X der Signatur $\mathcal{O}^{(2)}$ (bzw. in allen $\mathfrak{H}^{(2)}$-Modellen von X) allgemeingültig sind. $Ab^{(2)}(X)$ ist für $X \subseteq ausd^{(2)}$ die Menge der $B^{(2)}$-Ausdrücke, die mit den bekannten (hier dem Prädikatenkalkül der zweiten Stufe entsprechenden) Schlußregeln (vgl. [3], S. 35) aus X abgeleitet werden können. Außerdem gilt für $X \subseteq ausd^{(2)}$ $Bw^{(2)}(X) = Ab^{(2)}(\, axa^{(2)} \cup axi^{(2)} \cup X \,)$, wobei $axa^{(2)}$ und $axi^{(2)}$ die Mengen der aussagenlogischen Axiome der Signatur $\mathcal{O}^{(2)}$ bzw. der identitätstheoretischen Axiome der Signatur $\mathcal{O}^{(2)}$ (vgl. [3], S. 35) sind. ${}^{h}ag^{(2)}$ ist die Menge $\bigcap \{ ag^{(2)}_{\Sigma} : \Sigma \in \mathfrak{H}^{(2)} \}$.

3. Verschiedene Henkin-Strukturen

3.1. Eine Methode zur Konstruktion von Henkin-Strukturen mit Hilfe von Permutationen und einem Normal-Filter

$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe von Permutationen eines Individuenbereiches I, und $\mathfrak{F}$ sei ein System von Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{F}$ heißt Normal-Filter in $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{F}$ folgende fünf Eigenschaften hat:

(i) $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$;

(ii) wenn $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{H}_2 \supseteq \mathcal{H}_1$, so $\mathcal{H}_2 \in \mathcal{F}$;

(iii) wenn $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{F}$, so $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \in \mathcal{F}$;

(iv) wenn $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ und $\pi \in \mathcal{G}$, so $\pi \mathcal{H} \pi^{-1} \in \mathcal{F}$;

(v) für jede endliche Teilmenge P von I gilt $\mathcal{G}(P) \in \mathcal{F}$.

Dabei sei für eine beliebige Teilmenge P von I

$\mathcal{G}(P) = \{\pi : \pi \in \mathcal{G} \ \& \ \forall \xi(\xi \in P \ \Rightarrow \ \pi(\xi) = \xi)\}$.

$\mathcal{G}(P)$ ist eine Untergruppe von $\mathcal{G}$.

α^π sei für ein beliebiges $\pi \in \mathcal{G}$ und $\alpha \in att^n(I)$ ($n \geqq 1$) das n-stellige Attribut, das für beliebige $\xi_1, \ldots, \xi_n$ aus I durch

$\alpha^\pi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \alpha(\pi(\xi_1), \ldots, \pi(\xi_n))$ definiert ist.

Für jedes $n \geqq 1$ sei nun $J_n(I, \mathcal{G}, \mathcal{F}) = \{\alpha : \alpha \in att^n(I) \ \& \ sym_{\mathcal{G}}(\alpha) \in \mathcal{F}\}$, wobei für beliebige Attribute α über I $sym_{\mathcal{G}}(\alpha)$ durch

$sym_{\mathcal{G}}(\alpha) = \{\pi : \pi \in \mathcal{G} \ \& \ \alpha^\pi = \alpha\}$ definiert sei.

$J_n(I, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ ($n \geqq 1$) ist gegenüber allen $\pi_0 \in \mathcal{G}$ abgeschlossen, d.h., daß für beliebige $\alpha \in J_n(I, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ auch $\alpha^{\pi_0} \in J_n(I, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ gilt. Denn für beliebige $\pi \in sym_{\mathcal{G}}(\alpha)$ gilt $\alpha^\pi = \alpha$ und damit auch $\alpha^{\pi\pi_0} = \alpha^{\pi_0}$. Folglich gilt für $\pi' = \pi_0^{-1}\pi\pi_0 \in \pi_0^{-1} sym_{\mathcal{G}}(\alpha)\pi_0$ die Gleichung

$$(\alpha^{\pi_0})^{\pi'} = \alpha^{\pi_0\pi'} = \alpha^{\pi_0\pi_0^{-1}\pi\pi_0} = \alpha^{\pi\pi_0} = \alpha^{\pi_0};$$

also gilt $sym_{\mathcal{G}}(\alpha^{\pi_0}) \supseteq \pi_0^{-1} sym_{\mathcal{G}}(\alpha)\pi_0$ und damit $\alpha^{\pi_0} \in J_n(I, \mathcal{G}, \mathcal{F})$.

$\Sigma(I, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ sei die Attributen-Struktur mit dem Individuenbereich I und den Attributenbereichen $J_n(I, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ ($n \geqq 1$). Es gilt der

Satz: Für jeden Individuenbereich I, jede Gruppe $\mathcal{G}$ von Permutationen von I und jeden Normal-Filter $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ ist die Attributen-Struktur $\Sigma = \Sigma(I, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ eine Henkin-Struktur.

(Vgl. [3], S. 114.)

Beweis: Es ist zu zeigen, daß jedes in Σ definierbare Attribut zu Σ gehört.

$H(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ sei ein beliebiger $B^{(2)}$-Ausdruck, in dem mindestens die n Individuenvariablen $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ vollfrei vorkommen, und f sei ein beliebige Belegung über Σ.

$x_{j_1},\dots,x_{j_m}$ seien alle in H frei vorkommenden Individuenvariablen, die verschieden von $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ sind, und $A^{n_1}_{k_1},\dots,A^{n_l}_{k_l}$ seien alle in H frei vorkommenden Prädikatenvariablen.

Es sei

$$\mathcal{G}^* = \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(f(A^{n_1}_{k_1}))\cap\dots\cap\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(f(A^{n_l}_{k_l}))\cap\mathcal{G}(f(x_{j_1}))\cap\dots\cap\mathcal{G}(f(x_{j_m})).$$

Da $\mathcal{G}^*\in\mathfrak{F}$, genügt es, $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Att}_{\Sigma}(H;\, x_{i_1},\dots,x_{i_n};f))\supseteq\mathcal{G}^*$ zu zeigen.

Es sei also $\pi\in\mathcal{G}^*$ beliebig.

Da die Attributenbereiche von Σ gegenüber π abgeschlossen sind, ist die Belegung f^{π}, die für alle $i\geq 0$ durch $f^{\pi}(x_i)=\pi^{-1}(f(x_i))$ und für alle $n\geq 1$ und alle $i\geq 0$ durch $f^{\pi}(A^n_i)=(f(A^n_i))^{\pi}$ definiert ist, eine Belegung über Σ, und es gilt

(1) $(\mathrm{Att}_{\Sigma}(H;\, x_{i_1},\dots,x_{i_n};f))^{\pi}=\mathrm{Att}_{\Sigma}(H;\, x_{i_1},\dots,x_{i_n};f^{\pi})$

(vgl. [3], S. 112).

Da $\pi\in\mathcal{G}^*$, gilt außerdem für $\mu\in\{1,\dots,m\}$ $f^{\pi}(x_{j_\mu})=f(x_{j_\mu})$ und für $\lambda\in\{1,\dots,l\}$ $f^{\pi}(A^{n_\lambda}_{k_\lambda})=f(A^{n_\lambda}_{k_\lambda})$, was gerade

(2) $\mathrm{Att}_{\Sigma}(H;\, x_{i_1},\dots,x_{i_n};f^{\pi})=\mathrm{Att}_{\Sigma}(H;\, x_{i_1},\dots,x_{i_n};f)$

bedeutet.

(1) und (2) liefern $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Att}_{\Sigma}(H;\, x_{i_1},\dots,x_{i_n};f)\supseteq\mathcal{G}^*$.

3.2. Eine Methode zur Konstruktion von Henkin-Strukturen mit Hilfe von Permutationen und einem Normal-Ideal

I sei wieder ein beliebiger Individuenbereich, $\mathcal{G}$ eine Gruppe von Permutationen von I und $\mathfrak{I}$ ein System von Teilmengen von I.

$\mathfrak{I}$ heißt Normal-Ideal in I bzgl. $\mathcal{G}$, wenn $\mathfrak{I}$ folgende Eigenschaften hat:

(i) $\emptyset\in\mathfrak{I}$;

(ii) wenn $P_1\in\mathfrak{I}$ und $P_2\subseteq P_1$, so $P_2\in\mathfrak{I}$;

(iii) wenn $P_1,P_2\in\mathfrak{I}$, so $P_1\cup P_2\in\mathfrak{I}$;

(iv) wenn $P \in \mathfrak{J}$ und $\pi \in \mathfrak{G}$, so π"$P \in \mathfrak{J}$;

(v) für jede endliche Teilmenge P von I gilt $P \in \mathfrak{J}$.

Es sei $J_n(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) = \{\alpha : \alpha \in att^n(I)\ \&\ \exists P(P \in \mathfrak{J}\ \&\ sym_{\mathfrak{G}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{G}(P))\}$ für $n \geq 1$ und $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ die Attributen-Struktur mit dem Individuenbereich I und den Attributenbereichen $J_n(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ $(n \geq 1)$.

Dann gilt der

<u>Satz:</u> Für jeden Individuenbereich I, jede Gruppe $\mathfrak{G}$ von Permutationen von I und jedes Normal-Ideal $\mathfrak{J}$ in I bzgl. $\mathfrak{G}$ ist die Attributen-Struktur $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ eine Henkin-Struktur.

Beweis: Es sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{H} : \exists P(P \in \mathfrak{J}\ \&\ \mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{G}(P))\}$. Es ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{F}$ ein Normal-Filter ist (vgl. [4], Kap. 4).
Offensichtlich gilt $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) = \sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$. Also ist $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ eine Henkin-Struktur.

Ein Beispiel für ein Normal-Ideal in I bzgl. $\mathfrak{G}$ ist das Ideal $\mathfrak{J}_0(I)$ aller endlichen Teilmengen von I.

III. Die Zermelo-Fraenkel-Mengentheorie und ein Transfer-Theorem

Es ist möglich, mit Hilfe spezieller Mengen eines Modells der Zermelo-Fraenkel-Mengentheorie (ZFA) mit Atomen eine Henkin-Struktur anzugeben.

Die Sprache von ZFA ist die elementare Sprache der Signatur $\delta' = (2, \{2\}, \emptyset)$ mit den Individuensymbolen U und O und dem zweistelligen Attributensymbol $\in$, also die elementare Sprache über der Basis $(\{U, O\}, \{\in\}, \emptyset)$ (vgl. [2], § 2.). Die Menge der Ausdrücke dieser Sprache wird im folgenden mit ausd' bezeichnet.

Die Symbole U, O und $\in$ werden als Konstanten A, $\emptyset$ und ε einer gegebenen Struktur $W = (V, \{A, \emptyset\}, \{\varepsilon\}, \emptyset)$ der Signatur δ' interpretiert und die Individuenvariablen a,b,c,...,x,y,z als Variablen für die Elemente der Trägermenge V.

Ist Γ aus ausd' und g eine Belegung der Individuenvariablen a,b,... mit Individuen aus V, so ist $Wert_W(\Gamma, g)$ gleich dem Wert von Γ in W im Sinne des Prädikatenkalküls bei der Interpretation h, die durch $h(a) = g(a)$, $h(b) = g(b)$ usw., $h(O) = \emptyset$, $h(U) = A$ und $h(\in) = \varepsilon$ gegeben wird.

Ein Ausdruck Γ heißt allgemeingültig in W, wenn $Wert_W(\Gamma, g) = W$ für jede Belegung g der Individuenvariablen mit Elementen aus V gilt.

ZFA liegt folgendes Axiomensystem zugrunde:

(A0) Axiom der leeren Menge:

$$\neg \bigvee_x (x \in O) .$$

(AA) Axiom der Menge der Atome:

$$\bigwedge_z (z \in U \leftrightarrow z \neq O \wedge \neg \bigvee_x (x \in z)) .$$

(A1) Extensionalitätsaxiom:

$$\bigwedge_{x,y} (\neg(x \in U) \wedge \neg(y \in U) \rightarrow (\bigwedge_z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)).$$

(A2) Aussonderungsaxiom:

$$\bigwedge_x \bigvee_y \bigwedge_z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \Gamma(z)).$$

Hierbei ist $\Gamma(z)$ ein Ausdruck aus ausd', in dem die Variable z vollfrei vorkommt.

Bezeichnung: $y = \{z:\ z \in x \wedge \Gamma(z)\}$;

$x \cap y = \{z:\ z \in x \wedge z \in y\}$.

(A3) Axiom der Zweiermenge:

$$\bigwedge_{u,v} \bigvee_{y} \bigwedge_{z} (z \in y \leftrightarrow z = u \vee z = v).$$

Bezeichnung: $y = \{u,v\}$;

$u = \{u,u\}$;

$(u,v) = \{\{u\},\{u,v\}\}$;

$(u,v,w) = ((u,v),w)$;

usw..

(A4) Axiom der Vereinigungsmenge:

$$\bigwedge_{x} \bigvee_{y} \bigwedge_{z} (z \in y \leftrightarrow \bigvee_{u} (u \in x \wedge z \in u)).$$

Bezeichnung: $y = \bigcup x = \{z:\ \bigvee_{u} (u \in x \wedge z \in u)\}$;

$x \cup y = \bigcup \{x,y\}$.

(A5) Axiom der Potenzmenge:

$$\bigwedge_{x} \bigvee_{y} \bigwedge_{z} (z \in y \leftrightarrow \bigwedge_{u} (u \in z \rightarrow u \in x)).$$

Bezeichnung: $y = Px = \{z:\ \bigwedge_{u} (u \in z \rightarrow u \in x)\}$;

$x \times y = \{z:\ z \in PP(x \cup y) \wedge \bigvee_{u,v} (z = (u,v) \wedge u \in x \wedge v \in y)\}$;

$x^2 = x \times x$;

$x^3 = x^2 \times x$;

usw..

(A6) Ersetzungsaxiom:

$$\bigwedge_{u} \bigvee_{v}! \,\Gamma(u,v) \rightarrow \bigwedge_{x} \bigvee_{y} \bigwedge_{z} (z \in y \leftrightarrow \bigvee_{u} (u \in x \wedge \Gamma(u,z))).$$

Hierbei ist $\Gamma(u,v)$ ein Ausdruck aus ausd', in dem u und v vollfrei vorkommen.

(A7) Unendlichkeitsaxiom:

$$\bigvee_{y} (0 \in y \wedge \bigwedge_{x} (x \in y \rightarrow \{x\} \in y)).$$

(A8) Fundierungsaxiom:

$$\bigwedge_x (\neg(x=0) \wedge \neg(x \in U) \rightarrow \bigvee_y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Wird diesem Axiomensystem das Axiom U=0 zugefügt, erhält man mit Hilfe der üblichen logischen Schlußregeln die Zermelo-Fraenkel-Mengentheorie ZF ohne Atome.

Die Struktur $\mathbb{V}=(V,\{A,\emptyset\},\{\varepsilon\},\emptyset)$ ist ein ZFA-Modell, wenn die Axiome (A0), (AA), (A1) bis (A8) in $\mathbb{V}$ allgemeingültig sind.

Die Struktur $\mathbb{V}=(V,\{A,\emptyset\},\{\varepsilon\},\emptyset)$ sei nun ein ZFA-Modell und ι aus $V-(A \cup \{\emptyset\})$. Für $\varepsilon(\nu_1,\nu_2)=W$ wird kurz $\nu_1 \varepsilon \nu_2$ geschrieben.

Es sei $J_0(\mathbb{V},\iota)= I = \{\xi : \xi \varepsilon \iota\}$.

Für $n \geqq 1$, $\alpha \in att^n(I)$ und ν aus V sei

$$\Phi_n(\alpha,\nu) =_{Df} \nu \,\varepsilon\, P(\iota^n) \;\&\; \forall(\xi_1,\dots,\xi_n)(\,(\xi_1,\dots,\xi_n) \in I^n$$
$$\Rightarrow (\alpha(\xi_1,\dots,\xi_n)=W \Leftrightarrow (\xi_1,\dots,\xi_n)\,\varepsilon\,\nu)).$$

Für $n \geqq 1$ gelte $J_n(\mathbb{V},\iota)=\{\alpha : \exists\nu\,(\Phi_n(\alpha,\nu))\}$. $\Sigma(\mathbb{V},\iota)$ sei die Attributen-Struktur mit dem Individuenbereich $J_0(\mathbb{V},\iota)$ und den Attributenbereichen $J_n(\mathbb{V},\iota)$ $(n \geqq 1)$. Dann gilt der

Satz: Ist $\mathbb{V}= (V,\{A,\emptyset\},\{\varepsilon\},\emptyset)$ ein ZFA-Modell und ι aus $V-(A \cup \{\emptyset\})$, so ist die Attributen-Struktur $\Sigma=\Sigma(\mathbb{V},\iota)$ eine Henkin-Struktur.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß Σ in bezug auf Definierbarkeit abgeschlossen ist.

$H(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$ sei ein $B^{(2)}$-Ausdruck, in dem genau die Individuenvariablen $x_{j_1},\dots,x_{j_m}$ vorkommen und von diesen die Individuenvariablen $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ vollfrei vorkommen sowie genau die Prädikatenvariablen $A^{n_1}_{k_1},\dots,A^{n_l}_{k_l}$ vorkommen. f sei eine beliebige Belegung über Σ. Es ist zu zeigen, daß $Att_{\Sigma}(H: x_{i_1},\dots,x_{i_n}; f)$ zu $J_n(\mathbb{V},\iota)$ gehört.

Es sei $M = \{1,\dots,m\}$ und $L = \{1,\dots,l\}$.

Zunächst wird für einen beliebigen $B^{(2)}$-Ausdruck H^* der Ausdruck Γ_{H^*} definiert. Diese Definition erfolgt über die Stufe von H^*.

Dabei seien s, r und t $(t \neq 0)$ und $s_1,\dots,s_t$ jeweils natürliche Zahlen.

1) Wenn $H' = A^t_r x_{s_1} \dots x_{s_t}$ gilt, so sei $\Gamma_{H'} = (x_{s_1} \dots x_{s_t}) \in a^t_r$.

Wenn $H' = x_r = x_s$ gilt, so sei $\Gamma_{H'} = x_r = x_s$.

Wenn $H' = A^t_r = A^t_s$ gilt, so sei $\Gamma_{H'} = a^t_r = a^t_s$.

2) Wenn $H' = \neg H''$ oder für ein o aus $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ $H' = H_1 \circ H_2$ gilt und $\Gamma_{H''}$, Γ_{H_1} und Γ_{H_2} schon definiert sind, so sei im ersten Fall $\Gamma_{H'} = \neg \Gamma_{H''}$ und im zweiten Fall $\Gamma_{H'} = \Gamma_{H_1} \circ \Gamma_{H_2}$.

Wenn für einen $B^{(2)}$-Ausdruck H'', in dem x_r vollfrei vorkommt, $H' = \bigvee_{x_r} H''(x_r)$ (bzw. $H' = \bigwedge_{x_r} H''(x_r)$) gilt und $\Gamma_{H''}$ schon definiert ist, so kommt in $\Gamma_{H''}$ die Variable x_r ebenfalls vollfrei vor, und es sei $\Gamma_{H'} = \bigvee_{x_r} (x_r \in b \wedge \Gamma_{H''}(x_r))$ (bzw. $\Gamma_{H'} = \bigwedge_{x_r} (x_r \in b \rightarrow \Gamma_{H''}(x_r))$).

Wenn für einen $B^{(2)}$-Ausdruck H'', in dem A^t_r vollfrei vorkommt, $H' = \bigvee_{A^t_r} H''(A^t_r)$ (bzw. $H' = \bigwedge_{A^t_r} H''(A^t_r)$) gilt und $\Gamma_{H''}$ schon definiert ist, so kommt in $\Gamma_{H''}$ die Variable a^t_r ebenfalls vollfrei vor, und es sei $\Gamma_{H'} = \bigvee_{a^t_r} (a^t_r \in Pb^t \wedge \Gamma_{H''}(a^t_r))$ (bzw. $\Gamma_{H'} = \bigwedge_{a^t_r} (a^t_r \in Pb^t \rightarrow \Gamma_{H''}(a^t_r))$).

Damit ist Γ_{H^*} definiert. Die Variablen $x_0, x_1, x_2, \dots$ und $a^1_0, a^1_1, \dots, a^2_0, a^2_1, \dots$ stehen anstelle der Individuenvariablen a, c, d, e, ...

Denn ist klar, daß Γ_{H^*} ein Ausdruck aus ausd' ist.

Es ist weiterhin klar, daß in Γ_H nur die Variablen x_{j_μ} für μ aus

M und $a_{k_\lambda}^{n_\lambda}$ für λ aus L vorkommen.

Aufgrund des Extensionalitätsaxioms, das in W allgemengültig ist, existiert für jedes $n \geqq 1$ und für jedes $\alpha \in \mathfrak{J}_n(V,\iota)$ genau ein ν mit $\Phi_n(\alpha,\nu)$, welches im folgenden mit $\tilde{\alpha}$ bezeichnet wird; und wegen der Extensionalitätsaussagen, die in $\sum(V,\iota)$ allgemeingültig sind, existiert für jedes $n \geqq 1$ und für jedes ν mit $\nu \in P(\iota^n)$ genau ein n-stelliges Attribut α mit $\Phi_n(\alpha,\nu)$, welches im folgenden mit $\tilde{\nu}_n$ oder auch kurz mit $\tilde{\nu}$, falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind, bezeichnet wird. $\emptyset_n$ sei für ein beliebiges $n \geqq 1$ das leere Attribut aus $\mathfrak{J}_n(V,\iota)$.

f' sei eine beliebige Belegung über $\sum(V,\iota)$, und $g_{f'}$ sei in Abhängigkeit von f' eine Belegung über V, für die gilt:

$g_{f'}(x_{j_\mu}) = f'(x_{j_\mu})$ für alle μ aus M,

$g_{f'}(a_{k_\lambda}^{n_\lambda}) = \widetilde{f'(A_{k_\lambda}^{n_\lambda})}$ für alle λ aus L und

$g_{f'}(b) = \iota$.

Dann gilt $\mathrm{Wert}_{\sum}(H,f') = \mathrm{Wert}_V(\Gamma_H, g_{f'})$. Der Beweis dafür erfolgt problemlos durch Induktion über die Stufe von H.

Da in H die Individuenvariablen $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ nach Voraussetzung vollfrei vorkommen, gilt dies auch für Γ_H. Es sei für irgendwelche $\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n}$ aus I $f_1 = f\left\langle \begin{matrix} x_{i_1}\ldots x_{i_n} \\ \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_n} \end{matrix} \right\rangle$; dann gilt auch $g_{f_1}(x_{i_1}) = \xi_{i_1},\ldots, g_{f_1}(x_{i_n}) = \xi_{i_n}$. Folglich gilt wegen $\mathrm{Wert}_{\sum}(H,f_1) = \mathrm{Wert}_V(\Gamma_H, g_{f_1})$ für $\alpha_0 = \mathrm{Att}_{\sum}(H;\ x_{i_1},\ldots,x_{i_n};f)$ $\alpha_0(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n}) = W$ genau dann, wenn $\mathrm{Wert}_V(\Gamma_H, g_{f_1}) = W$ gilt.

Es sei nun $\nu_0 =_{Df}$

Universitätsbibliothek
Greifswald

$$\left\{(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n}) : \mathrm{Wert}_{\mathbb{V}}((x_{i_1},\ldots,x_{i_n})\in b^n \wedge \Gamma_H, g_{f\left\langle \substack{x_{i_1}\ldots x_{i_n} \\ \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_n}} \right\rangle}) = W\right\}$$

$$= \left\{(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n}) : (\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n}) \in I^n \;\&\; \mathrm{Wert}_{\mathbb{V}}(\Gamma_H, g_{f\left\langle \substack{x_{i_1}\ldots x_{i_n} \\ \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_n}} \right\rangle}) = W\right\}.$$

Offensichtlich ist ν_0 wegen (A2) aus V, und für $\nu_0 \neq \emptyset$ gilt $\overline{\nu_0} = \alpha_0$, und für $\nu_0 = \emptyset$ gilt $\overline{\emptyset}_n = \alpha_0$.

Also ist $\alpha_0 = \mathrm{Att}_{\sum}(H;\, x_{i_1},\ldots,x_{i_n};f)$ aus $J_n(\mathbb{V},\iota)$.

Ist H aus $\mathrm{ausd}^{(2)}$, so sei Γ_H wie im obigen Beweis definiert.

Es gilt der folgende

Satz (Transfer-Theorem):

Ist Γ_H für eine beliebige Aussage H aus $\mathrm{ausd}^{(2)}$ in einem ZFA-Modell $\mathbb{V} = (V, \{A,\emptyset\}, \{\varepsilon\}, \emptyset)$ allgemeingültig, so ist H für jedes ι aus $V-(A \cup \{\emptyset\})$ in der Henkin-Struktur $\sum(\mathbb{V},\iota)$ allgemeingültig; gilt aber für eine Belegung g über $\mathbb{V}$ mit $g(b) \notin (A \cup \{\emptyset\})$ und eine Aussage H aus $\mathrm{ausd}^{(2)}$ $\mathrm{Wert}_{\mathbb{V}}(\Gamma_H, g) = F$, so ist H in der Henkin-Struktur $\sum(\mathbb{V}, g(b))$ falsch.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist unmittelbar klar, weil in Γ_H alle Variablen gebunden vorkommen und sich die Quantifizierungen auf b bzw. Pb^n $(n \geq 1)$ beziehen.

IV. Das Auswahlaxiom und einige andere Aussagen

1. Die Formalisierung durch $B^{(2)}$-Ausdrücke

n und m seien natürliche Zahlen und ungleich 0.

A, A_k, B, C, D, R, R_k, S, S_k, T und U (k aus einer Indexmenge K) werden im weiteren als Prädikatenvariablen benutzt. Ihre Stellenzahl hängt dabei von den jeweils gegebenen n und m ab, deren Werte entweder extra angegeben werden oder sich aus dem Zusammenhang ergeben. $A_{(k)}$ und B seien n-stellig, C und D m-stellig, $R_{(k)}$ und $S_{(k)}$ (n+m)-stellig und T und U 2n-stellig. x, y und z (auch mit Indizes) werden als Individuenvariablen benutzt. $\overline{x}_i$ ($i \geq 0$) steht für das Variablentupel $(x_1^{(i)},\ldots,x_n^{(i)})$, $\overline{x}$ für $(x_1,\ldots,x_n)$, $\overline{y}_i$ ($i \geq 0$) für $(y_1^{(i)},\ldots,y_m^{(i)})$ und $\overline{y}$ für $(y_1,\ldots,y_m)$. Abkürzungen wie $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$, $\bigwedge_{\overline{y}} H(\overline{y})$ usw. werden wie üblich benutzt.

Zunächst werden für einige $B^{(2)}$-Ausdrücke, die u.a. bei der Formalisierung mehrerer Auswahlprinzipien durch Ausdrücke des Prädikatenkalküls zweiter Stufe benötigt werden, Abkürzungen eingeführt. n und m seien jeweils beliebig.

Die Abkürzungen $[A \subseteq B]$, $[A \subset B]$, $[A \neq \emptyset]$, $[A = \emptyset]$, Disj(A,B), Rel(T,A), Kor(R,A,C), Kor*(R,A,C), Abb(R,A,C), Sur(R,A,C), Inj(R,A,C), Bij(R,A,C), $[A \lesssim B]$, $[A < B]$, NZ(A,$\overline{x}_0$,T), H^+(A,B), $H^\wedge$(A,B), PO(T,A), TO(T,A), WO(T,A) und Sup($\overline{x}$,B,T,A) seien die naheliegenden Verallgemeinerungen der in [3] (S. 36/37/41/39/43/48/124/125) eingeführten Abkürzungen.

Fin_i(C) sei für $i \in \{1,2\}$ die Endlichkeitsdefinition $[C = \emptyset] \vee H_i$, wobei H_i die Verallgemeinerung von H_i' ist und H_i' die Relativierung der Endlichkeitsaussage Fin_i auf eine einstellige Prädikatenvariable ist (vgl. [3], S. 95/110), und für $i \in \{3,4\}$ die in [3] (S. 118/119) angegebene Endlichkeitsdefinition bzw. ihre Verallgemeinerung.

Weiterhin seien:

$\mathrm{Kor}(R,A) \quad =_{Df} \quad \bigvee_{C} \mathrm{Kor}(R,A,C)$;

$\mathrm{Kor}^{1}(R,A) \quad =_{Df} \quad \bigvee_{C} \mathrm{Kor}^{*}(R,A,C)$;

$\mathrm{Abb}(R,A) \quad =_{Df} \quad \bigvee_{C} \mathrm{Abb}(R,A,C)$;

$\mathrm{Kor}^{2}(R,A) \quad =_{Df} \quad \mathrm{Kor}(R,A) \wedge \bigwedge_{\bar{x}} (A\bar{x} \rightarrow \bigvee_{\bar{y}_1,\bar{y}_2} (\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2 \wedge R\bar{x}\bar{y}_1 \wedge R\bar{x}\bar{y}_2))$;

$\mathrm{Kor}^{\mathrm{Fin}_i}(R,A) =_{Df} \mathrm{Kor}^{1}(R,A) \wedge \bigwedge_{\bar{x}} (A\bar{x} \rightarrow \bigwedge_{C} (\bigwedge_{\bar{y}} (C\bar{y} \leftrightarrow R\bar{x}\bar{y}) \rightarrow \mathrm{Fin}_i(C)))$

$(i \in \{1,2,3,4\})$;

$\mathrm{Kor}^{1}_{\omega}(R,A) \quad =_{Df} \quad \mathrm{Kor}^{1}(R,A) \wedge \bigvee_{T,\bar{x}_0} \mathrm{NZ}(A,\bar{x}_0,T)$;

$\mathrm{Kor}^{1}_{LO}(R,A) \quad =_{Df} \quad \mathrm{Kor}^{1}(R,A) \wedge \bigvee_{T} \mathrm{TO}(T,A)$;

$\mathrm{Kor}^{1}_{Disj}(R,A) =_{Df} \mathrm{Kor}^{1}(R,A) \wedge \bigwedge_{\bar{x}_1,\bar{x}_2} (A\bar{x}_1 \wedge A\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

$\rightarrow \neg \bigvee_{\bar{y}} (R\bar{x}_1\bar{y} \wedge R\bar{x}_2\bar{y}))$;

$\mathrm{Rel}_{W \subsetneqq D}(T) \quad =_{Df} \quad \bigvee_{A} \mathrm{Kor}^{*}(T,A,A)$;

$\mathrm{Abb}_{W \subsetneqq D}(T) \quad =_{Df} \quad \bigvee_{A} \mathrm{Abb}(T,A,A)$.

Die den folgenden Ausdrücken beigefügte Leseart entspricht ihrer inhaltlichen Bedeutung.

$\mathrm{CF}(A,R,S) \quad =_{Df} \quad \mathrm{Abb}(S,A) \wedge [S \subseteqq R]$

("S ist eine Auswahlfunktion für A und R") ;

$\mathrm{MCC}^{(i)}(A,R,S) =_{Df} \mathrm{Kor}^{\mathrm{Fin}_i}(S,A) \wedge [S \subseteqq R]$

("S ist eine multiple Auswahlkorrespondenz" - oder "eine multiple Auswahlrelation" für n=m - "für A und R bzgl. der Endlichkeitsdefinition $\mathrm{Fin}_i(C)$", $i \in \{1,2,3,4\}$);

$\mathrm{Sel}(A,R,S) \quad =_{Df} \quad \mathrm{Kor}^{1}(S,A) \wedge \bigwedge_{\bar{x}} \bigvee_{\bar{y}} (A\bar{x} \rightarrow \neg S\bar{x}\bar{y} \wedge R\bar{x}\bar{y}) \wedge [S \subseteqq R]$

("S ist ein Selektor für A und R");

$\mathrm{DCF}(\bar{x}_0,T,U) \quad =_{Df} \quad \mathrm{Abb}_{W \subsetneqq D}(U) \wedge \bigvee_{\bar{x}_1} U\bar{x}_0\bar{x}_1 \wedge [U \subseteqq T]$

("U ist eine bedingte Auswahlfunktion für $\bar{x}_0$ und T").

1.1. Einige Auswahlprinzipien für (n+m)-stellige Attribute

1.1.1.

$$Ch_{n,m} =_{Df} \bigwedge_{A,R} \bigvee_{S} (Kor^1(R,A) \rightarrow CF(A,R,S)) .$$

Durch $Ch_{n,m}$ kann das Auswahlaxiom, das besagt, daß für jede Familie nichtleerer Mengen eine Auswahlfunktion existiert, formalisiert werden. Zermelo formulierte dieses Axiom 1904 erstmalig in ähnlicher Form.

1.1.2.

$$AC^{Disj}_{n,m} =_{Df} \bigwedge_{A,R} \bigvee_{S} (Kor^1_{Disj}(R,A) \rightarrow CF(A,R,S)) .$$

Durch $AC^{Disj}_{n,m}$ wird auf gleiche Weise wie unter 1.1.1. das Auswahlprinzip formalisiert, nach dem für jede Familie nichtleerer paarweise disjunkter Mengen eine Auswahlfunktion existiert. Dieses Auswahlprinzip wurde 1906 von B. Russell in ähnlicher Form formuliert.

1.1.3.

$$AC^{\omega}_{n,m} =_{Df} \bigwedge_{A,R} \bigvee_{S} (Kor^1_{\omega}(R,A) \rightarrow CF(A,R,S)) .$$

$AC^{\omega}_{n,m}$ ist eine Formulierung des Auswahlaxioms für abzählbare Familien von Mengen im Prädikatenkalkül zweiter Stufe. Das Auswahlaxiom für abzählbare Familien von Mengen ist unter der Bezeichnung AC_{ω} bekannt.

1.1.4.

$$MC(i)_{n,m} =_{Df} \bigwedge_{A,R} \bigvee_{S} (Kor^1(R,A) \rightarrow MCC^{(i)}(A,R,S)) \; (i \in \{1,2,3,4\}) .$$

Das Axiom MC der multiplen Auswahl, das durch $MC(i)_{n,m}$ bei Benutzung der Endlichkeitsdefinition $Fin_i(C)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$ formalisiert werden kann, wurde 1962 von A. Levy eingeführt. Mit dem Axiom MC forderte Levy für eine beliebige Familie nichtleerer Mengen die Existenz einer Funktion, die jeder dieser Mengen eine endliche Teilmenge von sich zuordnet. Anwendung findet das Axiom MC auf dem Gebiet der Funktionalanalysis.

1.1.5.

Eine formale Abschwächung von $MC(i)_{n,m}$ ist

$$MC(i)^{\omega}_{n,m} =_{Df} \bigwedge_{A,R} \bigvee_{S} (Kor^1_{\omega}(R,A) \;\rightarrow\; MCC^{(i)}(A,R,S)) \quad (i \in \{1,2,3,4\}) .$$

Durch $MC(i)^{\omega}_{n,m}$ kann das Axiom MC^{ω} der multiplen Auswahl für abzählbare Familien von Mengen formalisiert werden. MC^{ω} wurde einem Artikel von Brunner entnommen.

1.1.6.

Analog dazu wird durch

$$MC(i)^{LO}_{n,m} =_{Df} \bigwedge_{A,R} \bigvee_{S} (Kor^1_{LO}(R,A) \;\rightarrow\; MCC^{(i)}(A,R,S)) \quad (i \in \{1,2,3,4\})$$

das Axiom MC_{LO} der multiplen Auswahl für linear geordnete Familien von Mengen formalisiert. MC_{LO} wurde 1977 von P.E. Howard und J.E. Rubin definiert.

1.1.7.

$$KW\text{-}AC_{n,m} =_{Df} \bigwedge_{A,R} \bigvee_{S} (Kor^2(R,A) \;\rightarrow\; Sel(A,R,S)) .$$

$KW\text{-}AC_{n,m}$ ist ein Selektionsprinzip des Prädikatenkalküls zweiter Stufe. Es besteht eine Analogie zwischen $KW\text{-}AC_{n,m}$ und dem Selektionsprinzip von Kuratowski (1922), welches besagt, daß für jede Familie nichtleerer Mengen mit mindestens zwei Elementen eine Funktion existiert, die jeder dieser Mengen eine echte Teilmenge von sich zuordnet.

Dieses Prinzip wird mit KW-AC nach Kinna und Wagner bezeichnet, die 1955 zeigten, daß dieses Prinzip äquivalent dazu ist, daß jede Menge eineindeutig in die Potenzmenge einer Ordinalzahl abgebildet werden kann.

1.1.8.

$$DC_n =_{Df} \bigwedge_{\bar{x}_0,T} \bigvee_{U} (Rel_W \subseteq_D(T) \wedge \bigvee_{\bar{x}_1} T\bar{x}_0\bar{x}_1 \;\rightarrow\; DCF(\bar{x}_0,T,U)) .$$

Durch DC_n wird das Axiom DC der bedingten Auswahl, das 1942 von Bernays eingeführt wurde, formalisiert. Das Axiom DC besagt, daß für jede Relation T, deren Wertebereich $W = \{y : \exists x(xTy)\}$ im Definitionsbereich $D = \{x : \exists y(xTy)\}$ liegt, und für jedes x_0 aus D eine Folge $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $z_0 = x_0$ und $z_i T z_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ existiert. Das Axiom DC wird in der analytischen Topologie häufig anstelle des allgemeinen Auswahlaxioms angewendet.

1.2. Die Kontinuumhypothese für n-stellige Attribute

$$GCH(i)_n =_{Df} \bigwedge_A (\neg Fin_i(A) \rightarrow \bigwedge_B (H^+(A,B) \leftrightarrow H^\wedge(A,B))) \quad (i \in \{1,2,3,4\}) .$$

$GCH(i)_n$ ist eine Formulierung der verallgemeinerten Kontinuumhypothese GCH im Prädikatenkalkül zweiter Stufe. GCH sagt aus, daß der unmittelbare Nachfolger der transfiniten Mächtigkeit μ die Mächtigkeit 2^μ ist, d.h. die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge der Mächtigkeit μ. Mit dieser Hypothese beschäftigten sich Cantor, Hilbert, Gödel, Cohen u.a.. Lindenbaum und Tarski behaupteten 1926, daß aus der verallgemeinerten Kontinuumhypothese GCH das Auswahlaxiom folgt. Der Beweis wurde 1947 von Sierpinski geliefert.

1.3. Der Wohlordnungssatz für n-stellige Attribute

$$WO_n =_{Df} \bigwedge_A \bigvee_T WO(T,A) .$$

WO_n kann als Wohlordnungssatz des Prädikatenkalküls zweiter Stufe betrachtet werden. Der Wohlordnungssatz WO, nach dem jede Menge wohlgeordnet werden kann, wurde vor 1904 als selbstverständlich angesehen und ohne Bedenken angewendet. 1904 bewies Zermelo, daß WO aus dem Auswahlaxiom folgt. Die Umkehrung gilt ebenfalls, d.h., daß WO äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

1.4. Der Vergleichbarkeitssatz für n-stellige Attribute

$$VS_n =_{Df} \bigwedge_{A,B} ([A \lesssim B] \vee [B \lesssim A]) .$$

VS_n ist eine Formulierung des Vergleichbarkeitssatzes VS im Prädikatenkalkül zweiter Stufe, VS besagt, daß für beliebige zwei Mengen eine eineindeutige Funktion von einer dieser Mengen in die andere existiert. 1915 zeigte Hartogs die Äquivalenz des Vergleichbarkeitssatzes zum Auswahlaxiom. Davor wurde VS als selbstverständlich angesehen.

1.5. Das Zornsche Lemma für n-stellige Attribute

$$ZL_n =_{Df} \bigwedge_{T,A} (PO(T,A) \wedge \bigwedge_{B} ([B \subseteq A] \wedge \bigwedge_{\bar{x}_1,\bar{x}_2} (B\bar{x}_1 \wedge B\bar{x}_2 \rightarrow T\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee T\bar{x}_2\bar{x}_1) \rightarrow \bigvee_{\bar{x}} Sup(\bar{x},B,T,A))$$
$$\rightarrow \bigvee_{\bar{x}_0} (A\bar{x}_0 \wedge \bigwedge_{\bar{x}_1} (A\bar{x}_1 \wedge T\bar{x}_0\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_0 = \bar{x}_1))) .$$

Durch ZL_n wird eine schwächere Form des Zornschen Lemmas ZL formalisiert. ZL besagt, daß jede durch ein T partiell geordnete Menge, deren durch T linear geordnete Teilmengen eine obere Schranke in dieser Menge haben, ein bzgl. T maximales Element hat. Diese Formulierung von ZF geht auf Bourbaki (1939) und Tukey (1940) zurück. In anderer Formulierung war ZL schon 1914 bei Hausdorff zu finden, der es aus dem Wohlordnungssatz ableitete. 1935 gab Zorn ohne Beweis an, daß ZL äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Er benutzte es auch als erster in der Algebra.

1.6. Der Ordnungssatz für n-stellige Attribute

$$LO_n =_{Df} \bigwedge_{A} \bigvee_{T} TO(T,A) .$$

LO_n ist die naheliegende Formulierung des Ordnungsprinzips im Prädikatenkalkül zweiter Stufe. Das Ordnungsprinzip, nach dem jede Menge linear geordnet werden kann, folgt aus dem Auswahlaxiom und sogar aus dem Selektionsprinzip, wie Kinna und Wagner 1955 zeigten.

1.7. Der Satz von Rubin für n-stellige Attribute

$$LW_n =_{Df} \bigwedge_{A} (\bigvee_{T} (TO(T,A)) \rightarrow \bigvee_{T} (WO(T,A))) .$$

Durch LW_n wird der Satz formalisiert, nach dem jede linear geordnete Menge wohlgeordnet werden kann. Dieser Satz ist von Rubin (1960). Rubin zeigte, daß dieser Satz äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

2. Die Stärke dieser Aussagen bzgl. ${}^{h}ax^{(2)}$

Besondere Berücksichtigung sollen im folgenden die Frage nach der Stärke der Aussagen $Ch_{1,1}$, $AC^{Disj}_{1,1}$ usw. bzgl. ${}^{h}ax^{(2)}$ untereinander, die Frage nach der Stärke von $Ch_{1,1}$ gegenüber den Auswahlprinzipien für (n+m)-stellige Attribute bzgl. ${}^{h}ax^{(2)}$ und die Frage nach der Änderung der Stärke der Aussagen $Ch_{n,m}$, $AC^{Disj}_{n,m}$ usw. bei Änderung von n und m bzgl. ${}^{h}ax^{(2)}$ finden.

Die Änderung der Stärke der Aussagen $GCH(i)_n$ und $MC(i)_{n,m}$ bzgl. ${}^{h}ax^{(2)}$ bei Änderung von i soll dabei nicht näher untersucht werden.

Außerdem wird hier nicht im einzelnen auf die Stärke der verschiedenen Aussagen gegenüber $MC(i)^{LO}_{n,m}$ und $MC(i)^{\omega}_{n,m}$ bzgl. ${}^{h}ax^{(2)}$ eingegangen. Es wird aber gezeigt, daß für einige Aussagen H nicht nur $H \rightarrow MC(i)_{1,1}$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar ist, sondern sogar eine der schwächeren Aussagen $H \rightarrow MC(i)^{LO}_{1,1}$ oder $H \rightarrow MC(i)^{\omega}_{1,1}$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar ist.

Für die weiteren Untersuchungen werden nun noch einige Bezeichnungen eingeführt.

$\tilde{\alpha}$ sei für das n-stellige Attribut α $(n \geq 1)$ durch die Gleichung $\tilde{\alpha} = \{\xi : \alpha(\xi) = W\}$ definiert.

Ist P für einen Individuenbereich I eine nichtleere Teilmenge von I^n $(n \geq 1)$, so sei $\overline{P}_{(n)}$ das n-stellige Attribut über I, das genau auf die Elemente von P zutrifft. $\overline{\emptyset}_n$ sei das n-stellige leere Attribut.

Ist α_k für jedes k aus der Indexmenge K ein n-stelliges Attribut, so seien

$\bigcup_{k \in K} \alpha_k = \overline{(\bigcup_{k \in K} \tilde{\alpha}_k)_n}$ und

$\bigcap_{k \in K} \alpha_k = \overline{(\bigcap_{k \in K} \tilde{\alpha}_k)_n}$.

Sind α und β zwei n-stellige Attribute, so sei

$\alpha - \beta = \overline{(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})_n}$.

Statt $\tilde{\alpha}$ wird im weiteren für jedes Attribut α kurz α geschrieben.

Neben den als Prädikatenvariablen benutzten A, A_k, B, C, D, R, R_k, S, S_k, T und U (k aus einer Indexmenge K), deren Stellenzahl von den jeweils gegebenen n und m abhängt, werden A^l, A_k^l, R^l, R_k^l, S^l und S_k^l ($l \geq 1$) als l-stellige Prädikatenvariablen benutzt.

2.1. Die Stärke verschiedener Aussagen für 1- bzw. (1+1)-stellige Attribute

Satz 2.1.1: Folgende Implikationen sind aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar:

a) $WO_1 \rightarrow Ch_{1,1}$;
b) $WO_1 \rightarrow VS_1$;
c) $WO_1 \rightarrow LO_1$;
d) $WO_1 \rightarrow LW_1$;
e) $Ch_{1,1} \rightarrow ZL_1$;
f) $Ch_{1,1} \rightarrow DC_1$;
g) $Ch_{1,1} \rightarrow AC^{\omega}_{1,1}$;
h) $Ch_{1,1} \rightarrow AC^{Disj}_{1,1}$;
i) $Ch_{1,1} \rightarrow KW\text{-}AC_{1,1}$;
j) $Ch_{1,1} \rightarrow MC(2)_{1,1}$;

k) $AC^{\omega}_{1,1} \to MC(2)^{\omega}_{1,1}$;

l) $MC(i)_{1,1} \to MC(i)^{\omega}_{1,1}$;

m) $MC(i)_{1,1} \to MC(i)^{LO}_{1,1}$;

n) $H_{MC}(2)_{1,1} \to H_{MC}(1)_{1,1}$;

o) $H_{MC}(1)_{1,1} \to H_{MC}(3)_{1,1}$;

p) $H_{MC}(3)_{1,1} \to H_{MC}(4)_{1,1}$;

q) $GCH(2)_1 \to GCH(1)_1$;

r) $GCH(1)_1 \to GCH(3)_1$;

s) $GCH(3)_1 \to GCH(4)_1$.

Dabei sei i aus $\{1,2,3,4\}$ und $H_{MC}(i)_{1,1}$ eine beliebige Aussage aus $\{MC(i)_{1,1}, MC(i)^{\omega}_{1,1}, MC(i)^{LO}_{1,1}\}$.

Daß die Implikationen a), b) und e) aus $^h{ax}^{(2)}$ abgeleitet werden können, ist schon aus [3] (S. 125/128) bekannt. Die Implikationen c), d) und f) bis m) können aus den aussagenlogischen Axiomen des Prädikatenkalküls zweiter Stufe und damit auch aus $^h{ax}^{(2)}$ abgeleitet werden. Die Ableitbarkeit der Implikationen n) bis s) aus $^h{ax}^{(2)}$ folgt aus der Ableitbarkeit der Aussage

$$\bigwedge_C ((Fin_2(C) \to Fin_1(C)) \wedge (Fin_1(C) \to Fin_3(C)) \wedge (Fin_3(C) \to Fin_4(C)))$$

aus $^h{ax}^{(2)}$, die aus [3] (S. 118/119) bekannt ist.

Aus 2.1.1 folgt sofort der

<u>Satz 2.1.2:</u> Folgende Implikationen sind aus $^h{ax}^{(2)}$ ableitbar:

a) $WO_1 \to ZL_1$;

b) $WO_1 \to DC_1$;

c) $WO_1 \to AC^{\omega}_{1,1}$;

d) $WO_1 \to AC^{Disj}_{1,1}$;

e) $WO_1 \to MC(i)_{1,1}$;

f) $WO_1 \to KW\text{-}AC_{1,1}$;

g) $WO_1 \to MC(i)^{\omega}_{1,1}$;

h) $WO_1 \rightarrow MC(i)^{LO}_{1,1}$;

i) $Ch_{1,1} \rightarrow MC(i)_{1,1}$;

j) $Ch_{1,1} \rightarrow MC(i)^{\omega}_{1,1}$;

k) $Ch_{1,1} \rightarrow MC(i)^{LO}_{1,1}$;

l) $AC^{\omega}_{1,1} \rightarrow MC(i)^{\omega}_{1,1}$.

Dabei sei i aus $\{1,2,3,4\}$.

<u>Satz 2.1.3:</u> Ist in der folgenden Tabelle in der Zeile für die Aussage H_1 und in der Spalte für die Aussage H_2 das Zeichen " x " eingetragen, so ist die Implikation $H_1 \rightarrow H_2$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar. Ist dagegen in der Tabelle in der Zeile für H_1 und in der Spalte für H_2 ein " - " eingetragen, so ist $H_1 \rightarrow H_2$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

H_1 \ H_2	WO_1	VS_1	$Ch_{1,1}$	LO_1	LW_1	ZL_1	DC_1	$AC^{\omega}_{1,1}$	$AC^{Disj}_{1,1}$
WO_1		x	x	x	x	x	x	x	x
VS_1	$\bar{F}$		$\bar{F}$	$\bar{M}(1)$	$\bar{M}(3)$	?	?	?	$\bar{M}(3)$
$Ch_{1,1}$	$\bar{F}$	$\bar{M}(2)$		$\bar{M}(1)$	$\bar{M}(2)$	x	x	x	x
LO_1	$\bar{F}$	$\bar{M}(2)$	$\bar{F}$		$\bar{M}(2)$	$\bar{M}(7)$	$\bar{M}(7)$	$\bar{F}$ *)	$\bar{M}(3)$
LW_1	$\bar{F}$	$\bar{M}(6)$	$\bar{F}$	$\bar{M}(1)$		$\bar{M}(8)$	$\bar{M}(5)$	$\bar{F}$ *)	$\bar{M}(5)$
ZL_1	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$		$\bar{M}(5)$	$\bar{F}$ *)	$\bar{M}(5)$
DC_1	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{M}(14)$		?	$\bar{M}(3)$
$AC^{\omega}_{1,1}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{M}(7)$	$\bar{M}(7)$		$\bar{M}(3)$
$AC^{Disj}_{1,1}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{M}(7)$	$\bar{M}(7)$	?	
$MC(i)_{1,1}$, $i=2$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{M}(8)$	$\bar{M}(8)$	$\bar{M}(8)$	$\bar{M}(8)$
$MC(i)_{1,1}$, $i=1$, $i=3$, $i=4$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$
$KW\text{-}AC_{1,1}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{M}(9)$	$\bar{M}(9)$	$\bar{M}(9)$	$\bar{M}(9)$
$GCH(i)_1$, $i=2$	$\bar{F}$	$\bar{M}(6)$	$\bar{F}$	$\bar{M}(6)$	?	?	?	?	$\bar{M}(6)$
$GCH(i)_1$, $i=1$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{M}(7)$	$\bar{M}(7)$	$\bar{M}(7)$	?	$\bar{F}$
$GCH(i)_1$, $i=3$, $i=4$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	?	$\bar{F}$

Tab. 1a

*) Die Henkin-Strukturen, die in den Abschnitten 11 und 5 des Kap. V untersucht werden, sind Modelle für $\neg MC(4)^{\omega}_{1,1}$ und für LO_1 bzw. für LW_1 und ZL_1.

H_1 \ H_2	$MC(i)_{1,1}$ i=2	$MC(i)_{1,1}$ i=1	$MC(i)_{1,1}$ i=3	$MC(i)_{1,1}$ i=4	$KW\text{-}AC_{1,1}$	$GCH(i)_1$ i=2, i=1, i=3	$GCH(i)_1$ i=4
WO_1	x	x	x	x	x	$\overline{F}$	$\overline{M(13)}$
VS_1	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{M(3)}$ *)	$\overline{M(3)}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
$Ch_{1,1}$	x	x	x	x	x	$\overline{F}$	$\overline{F}$
LO_1	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{M(3)}$ *)	$\overline{M(3)}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
LW_1	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{M(5)}$ *)	$\overline{M(5)}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
ZL_1	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{M(5)}$ *)	$\overline{M(5)}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
DC_1	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{M(3)}$ *)	$\overline{M(3)}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
$AC^{\omega}_{1,1}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{M(3)}$ *)	$\overline{M(3)}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
$AC^{Disj}_{1,1}$	$\overline{F}$	$\overline{M(10)}$ *)	?	?	$\overline{M(10)}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
$MC(i)_{1,1}$ i=2					$\overline{M(8)}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
$MC(i)_{1,1}$ i=1, i=3, i=4					$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
$KW\text{-}AC_{1,1}$	?	?	?	?		$\overline{F}$	$\overline{F}$
$GCH(i)_1$ i=2	?	?	?	?	$\overline{M(6)}$		
$GCH(i)_1$ i=1	$\overline{M(7)}$ *)	?	?	?	$\overline{F}$		
$GCH(i)_1$ i=3, i=4	$\overline{F}$	?	?	?	$\overline{F}$		

Tab. 1b

*) Die angegebenen Henkin-Strukturen sind nicht nur Modelle für $\neg MC(4)_{1,1}$, $\neg MC(1)_{1,1}$ oder $\neg MC(2)_{1,1}$, sondern sogar für $\neg MC(4)^{LO}_{1,1}$, $\neg MC(1)^{LO}_{1,1}$ oder $\neg MC(2)^{LO}_{1,1}$. Die im Abschnitt 5 des Kap.V untersuchte Henkin-Struktur ist außerdem ein Modell für $\neg MC(4)^{\omega}_{1,1}$.

Geht aus der Tabelle hervor, daß eine Implikation aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar ist, so ist das eine Folgerung aus Satz 2.1.1 oder aus Satz 2.1.2.

Ist in einer Zeile und einer Spalte, die der Implikation $H_1 \to H_2$ entsprechen, das Zeichen " - " und darunter für ein k aus $\{1,\ldots,14\}$ die Abkürzung "M(k)" zu finden, so ist die im k-ten Abschnitt des Kapitels V untersuchte Henkin-Struktur ein Modell für H_1 und für $\neg H_2$ und aus diesem Grund die Implikation $H_1 \to H_2$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar. Ist unter dem Zeichen " - " ein "F" zu finden, so folgt die Nichtableitbarkeit der entsprechenden Implikation aus ${}^{h}ax^{(2)}$ sofort aus der Nichtableitbarkeit anderer Implikationen aus ${}^{h}ax^{(2)}$; denn es gilt:

1. Ist $H \to H'$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar und $H \to H''$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar, so ist auch $H' \to H''$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.
2. Ist $H' \to H''$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar und $H \to H''$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar, so ist auch $H \to H'$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

Das Zeichen " ? " ist in der Tabelle zu finden, wenn für die entsprechende Implikation noch nicht geklärt werden konnte, ob sie aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar ist oder nicht.

In der abschließenden Übersicht ist zwischen zwei Aussagen H_1 und H_2 ein " $\longrightarrow$ " zu finden, wenn die Aussage $H_1 \to H_2$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar ist, und ein " $\xrightarrow{?}$ ", wenn noch nicht geklärt wurde, ob $H_1 \to H_2$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar ist oder nicht.

Sind zwei Aussagen H_1 und H_2 weder durch " $\longrightarrow$ " noch durch " $\xrightarrow{?}$ " verbunden und existiert auch keine dritte Aussage H_3, so daß aus der Übersicht die Ableitbarkeit von $H_1 \to H_3$ und von $H_3 \to H_2$ und damit von $H_1 \to H_2$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ folgt, so ist die Aussage $H_1 \to H_2$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

1) *Mehr dazu in:*

C. Gaßner: The Axiom of Choice in Second-Order Predicate Logic.

Mathematical Logic Quarterly, Volume 40, Issue 4, 533–546 (1994).

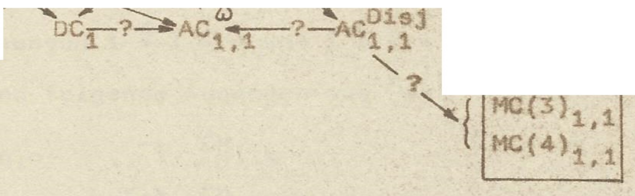


Abb. 1a

2)

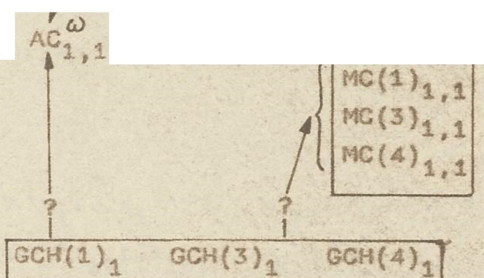


Abb. 1b

3)

Abb. 1c

2.2. Die Stärke von $Ch_{n,m}$ gegenüber einigen Auswahlprinzipien bei Änderung von n und m

Satz 2.2.1: Für die natürlichen Zahlen k, l, m und n seien die Ungleichungen $1 \leq l \leq n$ und $1 \leq k \leq m$ erfüllt.
Dann sind folgende Aussagen aus $^{h}ax^{(2)}$ ableitbar:

a) $Ch_{n,m} \rightarrow Ch_{l,k}$;

b) $Ch_{n,k} \leftrightarrow Ch_{n,m}$.

Beweis: Es gelte $1 \leq l \leq n$ und $1 \leq k \leq m$.
zu a): Σ sei eine beliebige Henkin-Struktur, in der die Aussage $Ch_{n,m}$ wahr ist.
α' sei ein l-stelliges Attribut aus Σ und ϱ' ein (l+k)-stelliges Attribut aus Σ; der Wert $Wert_{\Sigma}(Kor^{1}(R^{l+k},A^{l}), f_{\Sigma}\left\langle \begin{smallmatrix} R^{l+k} & A^{l} \\ \varrho' & \alpha' \end{smallmatrix} \right\rangle)$ sei wahr.
Es seien

$$H(A^{l},\bar{x}) =_{Df} A^{l}x_{1}\ldots x_{l} \wedge x_{l} = x_{l+1} \wedge \ldots \wedge x_{n-1} = x_{n} \quad \text{und}$$
$$H'(R^{l+k},\bar{x},\bar{y}) =_{Df} R^{l+k}x_{1}\ldots x_{l}y_{1}\ldots y_{k} \wedge x_{l} = x_{l+1} \wedge \ldots \wedge x_{n-1} = x_{n} \wedge y_{k} = y_{k+1} \wedge \ldots \wedge y_{m-1} = y_{m}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß für die Attribute

$$\alpha = Att_{\Sigma}(H(A^{l},\bar{x})\ ;\ \bar{x}\ ;\ f_{\Sigma}\left\langle \begin{smallmatrix} A^{l} \\ \alpha' \end{smallmatrix} \right\rangle) \text{ und}$$

$$\varrho = Att_{\Sigma}(H'(R^{l+k},\bar{x},\bar{y})\ ;\ \bar{x},\bar{y}\ ;\ f_{\Sigma}\left\langle \begin{smallmatrix} R^{l+k} \\ \varrho' \end{smallmatrix} \right\rangle)$$

der Wert $Wert_{\Sigma}(Kor^{1}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{smallmatrix} \right\rangle)$ wahr ist. Demzufolge existiert in Σ für α und ϱ eine Auswahlfunktion δ. Es sei

$$\delta' = Att_{\Sigma}(Sx_{1}\ldots x_{l}\ldots x_{l}y_{1}\ldots y_{k}\ldots y_{k};\ x_{1},\ldots,x_{l},y_{1},\ldots,y_{k}\ ;f_{\Sigma}\left\langle \begin{smallmatrix} S \\ \delta \end{smallmatrix} \right\rangle).$$

Da für jedes $(\xi_{1},\ldots,\xi_{l})$ aus α' das n-Tupel $(\xi_{1},\ldots,\xi_{l},\ldots,\xi_{l})$ aus α ist und folglich genau ein $(\eta_{1},\ldots,\eta_{m})$ existiert, so daß $(\xi_{1},\ldots,\xi_{l},\ldots,\xi_{l},\eta_{1},\ldots,\eta_{m})$ aus δ und damit aus ϱ ist und damit $(\xi_{1},\ldots,\xi_{l},\eta_{1},\ldots,\eta_{k})$ aus ϱ' ist und $\eta_{k} = \ldots = \eta_{m}$ gilt, ist δ' eine Auswahlfunktion für α' und ϱ'.

Also ist $Ch_{1,k}$ in Σ wahr.

Damit ist die Aussage a) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

zu b): Offensichtlich sind mit a) auch die Aussagen $Ch_{n,m} \rightarrow Ch_{n,k}$ und $Ch_{n,k} \rightarrow Ch_{n,1}$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar. Demzufolge genügt es zu zeigen, daß auch $Ch_{n,1} \rightarrow Ch_{n,m}$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar ist; denn dann ist auch b) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

Σ sei also eine Henkin-Struktur, in der die Aussage $Ch_{n,1}$ wahr ist. Außerdem gelte $m > 1$.

α und ϱ seien n- bzw. (n+m)-stellige Attribute aus Σ; und es gelte

$$\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^1(R,A), f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha\end{matrix}\right\rangle) = W.$$

Es ist leicht einzusehen, daß auch für das Attribut

$$\varrho_1 = \mathrm{Att}_\Sigma(\bigvee_{y_2,\ldots,y_m} R\bar{x}\bar{y} \;;\; \bar{x},y_1 \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R \\ \varrho\end{matrix}\right\rangle)$$

der Wert $\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^1(R_1^{n+1},A), f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R_1^{n+1} & A \\ \varrho_1 & \alpha\end{matrix}\right\rangle)$ wahr ist. Demzufolge existiert in Σ für α und ϱ_1 eine Auswahlfunktion σ_1.

Es sei nun i aus $\{2,\ldots,m\}$ und für alle j aus $\{1,\ldots,i-1\}$ das Attribut ϱ_j schon definiert und σ_j eine Auswahlfunktion für α und ϱ_j, die zu Σ gehört. Dann existiert für jedes $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ aus α genau ein $(\eta_1',\ldots,\eta_{i-1}')$, so daß für jedes j aus $\{1,\ldots,i-1\}$ die Beziehung $(\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_j') \in \sigma_j$ gilt und die Menge $\{(\eta_i,\ldots,\eta_m) : (\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1',\ldots,\eta_{i-1}',\eta_i,\ldots,\eta_m) \in \varrho\}$ nicht leer ist. Demzufolge ist für das Attribut

$$\varrho_i = \mathrm{Att}_\Sigma(H(S_1^{n+1},\ldots,S_{i-1}^{n+1},R,\bar{x},y_i) \;;\; \bar{x},y_i \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} S_1^{n+1} & \ldots & S_{i-1}^{n+1} & R \\ \sigma_1 & \ldots & \sigma_{i-1} & \varrho\end{matrix}\right\rangle)$$

wobei $H(S_1^{n+1},\ldots,S_{i-1}^{n+1},R,\bar{x},y_i)$ für den Ausdruck

$$\bigvee_{y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_m} (\bigwedge_{j=1}^{i-1} S_j^{n+1}\bar{x}y_j \wedge R\bar{x}\bar{y})$$

steht, der Wert

$\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^1(R_1^{n+1},A), f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R_1^{n+1} & A \\ \varrho_i & \alpha\end{matrix}\right\rangle)$ wahr. Also existiert auch für

α und ϱ_i in Σ eine Auswahlfunktion δ_i.

Damit ist das Attribut

$$\delta = \mathrm{Att}_{\Sigma}\left(\bigwedge_{i=1}^{m} S_i^{n+1} \overline{x} y_i \; ; \; \overline{x}, \overline{y} \; ; \; f_{\Sigma} \left\langle \begin{matrix} S_1^{n+1} & \ldots & S_m^{n+1} \\ \delta_1 & \ldots & \delta_m \end{matrix} \right\rangle \right)$$

eine Auswahlfunktion für α und ϱ.

Also ist $Ch_{n,m}$ in Σ wahr, wobei m ($m \neq 0$) wieder beliebig sei.

Damit ist $Ch_{n,1} \rightarrow Ch_{n,m}$ und folglich auch b) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

Satz 2.2.2: n ($n \neq 0$) und m ($m \neq 0$) seien beliebig. Dann sind folgende Implikationen aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar:

a) $Ch_{n,m} \rightarrow DC_n$;

b) $Ch_{n,m} \rightarrow AC^{\omega}_{n,m}$;

c) $Ch_{n,m} \rightarrow AC^{Disj}_{n,m}$;

d) $Ch_{n,m} \rightarrow KW\text{-}AC_{n,m}$;

e) $Ch_{n,m} \rightarrow MC(i)_{n,m}$;

f) $Ch_{n,m} \rightarrow MC(i)^{LO}_{n,m}$;

g) $Ch_{n,m} \rightarrow MC(i)^{\omega}_{n,m}$.

Dabei sei i aus $\{1,2,3,4\}$.

Die Ableitbarkeit der Implikationen $Ch_{n,n} \rightarrow DC_n$ und b) bis g) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ folgt sofort aus der Ableitbarkeit dieser Implikationen aus den aussagenlogischen Axiomen des Prädikatenkalküls zweiter Stufe. Damit folgt aus Satz 2.2.1 auch die Ableitbarkeit von a) aus ${}^{h}ax^{(2)}$.

Satz 2.2.3: n ($n \neq 0$) und m ($m \neq 0$) seien beliebige natürliche Zahlen. Für die natürlichen Zahlen k und n gelte die Ungleichung $k > n$. Dann ist

$$AC^{Disj}_{n,k} \leftrightarrow Ch_{n,m} \qquad \text{(I)}$$

aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

Beweis: Es gelte $1 \leq n < k$ und $1 \leq m$.

Die Ableitbarkeit der Aussage (I) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ folgt aus der Ableitbarkeit der folgenden Implikationen aus ${}^{h}ax^{(2)}$:

a) $AC^{Disj}_{n,k} \quad \rightarrow \quad AC^{Disj}_{n,n+1}$;

b) $AC^{Disj}_{n,n+1} \quad \rightarrow \quad Ch_{n,1}$;

c) $Ch_{n,1} \quad \rightarrow \quad Ch_{n,m}$;

d) $Ch_{n,m} \quad \rightarrow \quad Ch_{n,k}$;

e) $Ch_{n,k} \quad \rightarrow \quad AC^{Disj}_{n,k}$.

Denn mit a), b) und c) ist auch $AC^{Disj}_{n,k} \rightarrow Ch_{m,n}$ und mit d) und e) auch $Ch_{n,m} \rightarrow AC^{Disj}_{n,k}$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar. Die Ableitbarkeit der Implikationen c), d) und e) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ folgt aus den Sätzen 2.2.1 und 2.2.2. Die Ableitbarkeit von a) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ kann ähnlich wie die Ableitbarkeit der Implikation a) des Satzes 2.2.1 gezeigt werden. Es bleibt also nur die Ableitbarkeit von b) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ zu zeigen.

Σ sei also eine Henkin-Struktur, in der die Aussage $AC^{Disj}_{n,n+1}$ wahr ist.

α sei ein n-stelliges Attribut aus Σ und ϱ' ein (n+1)-stelliges Attribut aus Σ; und außerdem sei der Wert

$$Wert_\Sigma(Kor^1(R^{n+1},A), f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} R^{n+1} & A \\ \varrho' & \alpha \end{matrix} \right\rangle) \text{ wahr.}$$

Dann gilt für das Attribut

$$\varrho'' = Att_\Sigma(R^{n+1}\bar{x}_1 y \wedge \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \ ; \ \bar{x}_1, \bar{x}_2, y \ ; \ f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} R^{n+1} \\ \varrho' \end{matrix} \right\rangle)$$

ebenfalls $Wert_\Sigma(Kor^1(R^{2n+1},A), f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} R^{2n+1} & A \\ \varrho'' & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W$ und sogar

$Wert_\Sigma(Kor^1_{Disj}(R^{2n+1},A), f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} R^{2n+1} & A \\ \varrho'' & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W$, weil für jedes $(\xi_1,\dots,\xi_n)$, jedes $(\xi'_1,\dots,\xi'_n)$ und jedes $(\eta_1,\dots,\eta_n,\eta_{n+1})$ mit $(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_{n+1}) \in \varrho''$ und $(\xi'_1,\dots,\xi'_n,\eta_1,\dots,\eta_{n+1}) \in \varrho''$ die Beziehung $(\xi_1,\dots,\xi_n) = (\eta_1,\dots,\eta_n) = (\xi'_1,\dots,\xi'_n)$ gilt. Damit existiert für α und ϱ'' in Σ eine Auswahlfunktion σ''. Dieses Attribut trifft aufgrund der Definition von ϱ'' nur auf (2n+1)-Tupel $(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_{n+1})$ zu, für die $(\xi_1,\dots,\xi_n) = (\eta_1,\dots,\eta_n)$ und $(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_{n+1}) \in \varrho'$ gilt.

Folglich ist

$$\delta' = Att_\Sigma(S^{2n+1}{}_{\bar{x}\bar{x}y} ; \bar{x},y ; f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} S^{2n+1} \\ \delta'' \end{matrix} \right\rangle)$$

eine Auswahlfunktion für α und ϱ'.

Damit ist $Ch_{n,1}$ in Σ wahr.

Also ist auch b) und damit auch (I) aus ${}^h ax^{(2)}$ ableitbar.

<u>Satz 2.2.4:</u> Für die natürlichen Zahlen n, m und k gelte $n \geqq 2$, $m \geqq 1$ sowie $k \geqq 3$.

Dann sind folgende Implikationen <u>nicht</u> aus ${}^h ax^{(2)}$ ableitbar:

a) $Ch_{1,1} \rightarrow KW\text{-}AC_{n,m}$;

b) $Ch_{1,1} \rightarrow MC(i)^{LO}_{n,m}$;

c) $Ch_{1,1} \rightarrow MC(i)_{n,m}$;

d) $Ch_{1,1} \rightarrow Ch_{n,m}$;

e) $Ch_{1,1} \rightarrow AC^{Disj}_{n,k}$.

Dabei sei i aus $\{1,2,3,4\}$.

Beweis: Es gelte $n \geqq 2$, $m \geqq 1$ und $k \geqq 3$.

Dann sind folgende Implikationen aus ${}^h ax^{(2)}$ ableitbar:

1) $KW\text{-}AC_{n,m} \rightarrow KW\text{-}AC_{2,1}$;

2) $MC(i)^{LO}_{2,1} \rightarrow MC(4)^{LO}_{2,1}$;

3) $MC(i)^{LO}_{n,m} \rightarrow MC(i)^{LO}_{2,1}$;

4) $MC(i)_{n,m} \rightarrow MC(i)^{LO}_{n,m}$;

5) $Ch_{n,m} \rightarrow MC(i)_{n,m}$;

6) $AC^{Disj}_{2,k} \rightarrow Ch_{2,m}$;

7) $AC^{Disj}_{n,k} \rightarrow AC^{Disj}_{2,k}$.

Dabei sei i aus $\{1,2,3,4\}$.

Die Ableitbarkeit der Implikationen 1), 3) und 7) aus ${}^h ax^{(2)}$ kann auf gleiche Weise wie die der Aussage a) des Satzes 2.2.1 gezeigt werden.

Die Aussage 2) ist aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar, weil analog zu n), o) und p) des Satzes 2.1.1 für $H(i) =_{Df} MC(i)^{LO}_{2,1}$ $(i \in \{1,2,3,4\})$ die Aussage $(H(2) \rightarrow H(1)) \wedge (H(1) \rightarrow H(3)) \wedge (H(3) \rightarrow H(4))$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar ist.

Die Ableitbarkeit der Implikationen 4), 5) und 6) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ folgt aus ihrer Ableitbarkeit aus den aussagenlogischen Axiomen des Prädikatenkalküls zweiter Stufe bzw. aus Satz 2.2.2 bzw. aus Satz 2.2.3.

Die im 2. Abschnitt des Kapitels V untersuchte Henkin-Struktur ist ein Modell für $Ch_{1,1}$, für $\neg KW\text{-}AC_{2,1}$ und für $\neg MC(4)^{LO}_{2,1}$. Also sind die Implikationen $Ch_{1,1} \rightarrow KW\text{-}AC_{2,1}$ und $Ch_{1,1} \rightarrow MC(4)^{LO}_{2,1}$ nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

Folglich kann wegen der Ableitbarkeit der Aussage 1) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ die Aussage a) und wegen der Ableitbarkeit der Aussagen 2) und 3) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ die Aussage b) nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar sein.

Damit folgt aus der Ableitbarkeit von 4) aus ${}^{h}ax^{(2)}$, daß die Implikation c) nicht zu ${}^{h}ag^{(2)}$ gehört, und damit aus der Ableitbarkeit von 5) aus ${}^{h}ax^{(2)}$, daß die Implikation d) nicht zu ${}^{h}ag^{(2)}$ gehört, und damit aus der Ableitbarkeit von 6) und 7) aus ${}^{h}ax^{(2)}$, daß die Implikation e) nicht zu ${}^{h}ag^{(2)}$ gehört.

2.3. Die Stärke der verschiedenen Aussagen für n- bzw. (n+m)-stellige Attribute bei Änderung von n und m

Satz 2.3.1: Für die natürlichen Zahlen k, l, m und n gelte die Ungleichung $1 \leqq l \leqq n$ sowie die Ungleichung $1 \leqq k \leqq m$.

Dann sind die folgenden Implikationen aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar:

a) $AC^{Disj}_{n,m} \rightarrow AC^{Disj}_{l,k}$;

b) $AC^{\omega}_{n,m} \rightarrow AC^{\omega}_{l,k}$;

c) $MC(i)_{n,m} \rightarrow MC(i)_{l,k}$;

d) $KW\text{-}AC_{n,m}$ -> $KW\text{-}AC_{1,k}$;

e) DC_n -> DC_1 ;

f) $GCH(i)_n$ -> $GCH(i)_1$;

g) WO_n -> WO_1 ;

h) VS_n -> VS_1 ;

i) ZL_n -> ZL_1 ;

j) LO_n -> LO_1 ;

k) LW_n -> LW_1 .

i sei dabei jeweils aus $\{1,2,3,4\}$.

Die Ableitbarkeit dieser Implikationen aus $h_{ax}(2)$ kann auf gleiche Weise wie die der Aussage a) des Satzes 2.2.1 gezeigt werden.

Satz 2.3.2: Folgende Implikationen sind für beliebige n $(n \neq 0)$ und m $(m \neq 0)$ aus $h_{ax}(2)$ ableitbar:

a) $AC^{Disj}_{n,n+1}$ -> $AC^{Disj}_{n,m}$;

b) $AC^{\omega}_{n,1}$ -> $AC^{\omega}_{n,m}$;

c) $KW\text{-}AC_{n,1}$ -> $KW\text{-}AC_{n,m}$;

d) WO_1 -> WO_n ;

e) LO_1 -> LO_n .

Beweis: Es gelte $n \neq 0$ sowie $m \neq 0$.

Aus dem Satz 2.2.3 folgt die Ableitbarkeit von $AC^{Disj}_{n,n+1}$ -> $Ch_{n,m}$ aus $h_{ax}(2)$ und aus dem Satz 2.2.2 die Ableitbarkeit von $Ch_{n,m}$ -> $AC^{Disj}_{n,m}$ aus $h_{ax}(2)$. Also ist a) aus $h_{ax}(2)$ ableitbar.

Die Ableitbarkeit von b) aus $h_{ax}(2)$ kann ähnlich wie die von $Ch_{n,1}$ -> $Ch_{n,m}$ (Satz 2.2.1) gezeigt werden.

Daß die Aussage d) zu $h_{ag}(2)$ gehört, ist aus [3] (S. 124) bekannt.

Es ist auch leicht einzusehen, daß die Implikation e) zu $h_{ag}(2)$ gehört.

Es bleibt also nur noch die Ableitbarkeit von c) aus $h_{ax}(2)$ zu zeigen.

Σ sei also eine beliebige Henkin-Struktur, in der KW-AC$_{n,1}$ wahr ist.

α sei ein n-stelliges Attribut aus Σ und ϱ ein (n+m)-stelliges Attribut aus Σ, so daß der Wert $\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^2(R,A), f_\Sigma\left\langle{R \quad A \atop \varrho \quad \alpha}\right\rangle)$ wahr ist.

Für i aus $\{1,\dots,m\}$ seien

$\alpha_i = \mathrm{Att}_\Sigma(H_i(R,\bar{x})\ ;\ \bar{x}\ ;\ f_\Sigma\left\langle{R \atop \varrho}\right\rangle)$, wobei $H_i(R,\bar{x})$ für den Ausdruck

$$\bigwedge_{\bar{y}_1,\bar{y}_2} (R\bar{x}\bar{y}_1 \wedge R\bar{x}\bar{y}_2 \to (y_1^{(1)},\dots,y_{i-1}^{(1)}) = (y_1^{(2)},\dots,y_{i-1}^{(2)}))$$

$$\wedge \bigvee_{\bar{y}_1,\bar{y}_2} (R\bar{x}\bar{y}_1 \wedge R\bar{x}\bar{y}_2 \wedge y_i^{(1)} \neq y_i^{(2)})$$ steht,

$\varrho_i = \mathrm{Att}_\Sigma(A_i\bar{x} \wedge R\bar{x}\bar{y}\ ;\ \bar{x},\bar{y}\ ;\ f_\Sigma\left\langle{A_i \quad R \atop \alpha_i \quad \varrho}\right\rangle)$ und

$\varrho_i' = \mathrm{Att}_\Sigma(\bigvee_{y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_m} R_i\bar{x}\bar{y}\ ;\ \bar{x},y_i\ ;\ f_\Sigma\left\langle{R_i \atop \varrho_i}\right\rangle)$.

Nach Voraussetzung existieren für jedes $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ aus α zwei m-Tupel $(\eta_1,\dots,\eta_m)$ und $(\eta_1',\dots,\eta_m')$ mit $(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m) \in \varrho$ und $(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1',\dots,\eta_m') \in \varrho$ und $\eta_i \neq \eta_i'$ für ein i aus $\{1,\dots,m\}$.

Demzufolge gilt $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m} \alpha_i$. Andererseits sind für i und j aus $\{1,\dots,m\}$ mit $i \neq j$ die Attribute α_i und α_j disjunkt. Folglich genügt es zu zeigen, daß für jedes i aus $\{1,\dots,m\}$ in Σ ein Selektor σ_i für α_i und ϱ_i existiert, weil dann $\sigma = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i$ ein Attribut aus Σ und ein Selektor für α und ϱ ist.

Es ist leicht einzusehen, daß für jedes i aus $\{1,\dots,m\}$ der Wert $\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^2(R_i^{n+1},A_i), f_\Sigma\left\langle{R_i^{n+1} \quad A_i \atop \varrho_i' \quad \alpha_i}\right\rangle)$ wahr ist. Folglich existiert nach Voraussetzung in Σ für jedes i aus $\{1,\dots,m\}$ ein Selektor σ_i' für α_i und ϱ_i', für den das Attribut

$\sigma_i = \mathrm{Att}_\Sigma(S_i^{n+1}\bar{x}y_i \wedge R\bar{x}\bar{y} \; ; \; \bar{x},\bar{y} \; ; \; f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} S_i^{n+1} & R \\ \sigma_i' & \varrho \end{matrix} \right\rangle)$

aufgrund der Definition von ϱ_i' ein Selektor für α_i und ϱ_i ist.

$\sigma = \mathrm{Att}_\Sigma(\bigvee_{i=1}^{m} S_i\bar{x}\bar{y} \; ; \; \bar{x},\bar{y} \; ; \; f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} S_1 & \ldots & S_m \\ \sigma_1 & \ldots & \sigma_m \end{matrix} \right\rangle)$ ist

ein Selektor für α und ϱ.

Also ist auch $\mathrm{KW\text{-}AC}_{n,m}$ in Σ wahr.

Demzufolge ist die Implikation c) aus ${}^h ax^{(2)}$ ableitbar.

Satz 2.3.3: Für die natürlichen Zahlen k, l, m und n seien die Ungleichungen $k \neq 0$, $l \neq 0$, $1 < n$ und $1 < m$ erfüllt.

Dann sind folgende Implikationen nicht aus ${}^h ax^{(2)}$ ableitbar:

a) $AC_{1,1}^{Disj} \rightarrow AC_{1,m}^{Disj}$;

b) $AC_{1,m}^{Disj} \rightarrow AC_{n,n+k}^{Disj}$;

c) $MC(i)_{1,1} \rightarrow MC(i)_{n,k}$;

d) $\mathrm{KW\text{-}AC}_{1,k} \rightarrow \mathrm{KW\text{-}AC}_{n,k}$;

e) $VS_1 \rightarrow VS_n$;

f) $ZL_1 \rightarrow ZL_n$.

Dabei sei i aus $\{1,2,3,4\}$.

Beweis: Es gelte $k \neq 0$, $l \neq 0$, $1 < n$ und $1 < m$. Es sei $i \in \{1,2,3,4\}$.

Folgende Implikationen sind aus ${}^h ax^{(2)}$ ableitbar:

1) $AC_{1,m}^{Disj} \rightarrow AC_{1,2}^{Disj}$;

2) $Ch_{1,1} \rightarrow AC_{1,m}^{Disj}$;

3) $Ch_{1,1} \rightarrow MC(i)_{1,1}$;

4) $Ch_{1,1} \rightarrow \mathrm{KW\text{-}AC}_{1,k}$;

5) $VS_n \rightarrow VS_2$;

6) $ZL_n \rightarrow ZL_2$.

Die Ableitbarkeit der Implikationen 1), 5) und 6) aus ${}^h ax^{(2)}$ folgt aus Satz 2.3.1, die von 2) aus Satz 2.2.3, die von 3) aus Satz 2.1.2 und die von 4) aus Satz 2.1.1 und aus Satz 2.3.2.

Weiterhin sind folgende Implikationen <u>nicht</u> aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar:

I) $AC^{Disj}_{1,1}$ -> $AC^{Disj}_{1,2}$;

II) $Ch_{1,1}$ -> $AC^{Disj}_{n,n+k}$;

III) $Ch_{1,1}$ -> $MC(i)_{n,k}$;

IV) $Ch_{1,1}$ -> $KW\text{-}AC_{n,k}$;

V) VS_1 -> VS_2 ;

VI) ZL_1 -> ZL_2 .

Die Nichtableitbarkeit der Implikationen II), III) und IV) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ folgt aus dem Satz 2.2.4.

Die im 12. Abschnitt des Kapitels V untersuchte Henkin-Struktur ist ein Modell für $AC^{Disj}_{1,1}$, für $\neg AC^{Disj}_{1,2}$, für ZL_1 und für $\neg ZL_2$. Folglich gehören die Implikationen I) und VI) nicht zu ${}^{h}ag^{(2)}$.

Die im 4. Abschnitt des Kapitels V untersuchte Henkin-Struktur ist ein Modell für VS_1 und für $\neg VS_2$. Demzufolge ist auch V) nicht aus ${}^{h}ax^{(2)}$ ableitbar.

Offensichtlich folgt aus der Ableitbarkeit der Implikationen 1) bis 6) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ und der Nichtableitbarkeit der Implikationen I) bis VI) aus ${}^{h}ax^{(2)}$ die Nichtableitbarkeit von a) bis f) aus ${}^{h}ax^{(2)}$.

Die Stärke von $Ch_{n,m}$ bzgl. ${}^{h}ax^{(2)}$ bei Änderung von n und m ist aus dem vorhergehenden Abschnitt bekannt.

In der abschließenden Übersicht ist zwischen zwei Aussagen H_1 und H_2 ein " $\longrightarrow$ " zu finden, wenn H_1 -> H_2 zu ${}^{h}ag^{(2)}$ gehört, ein " $\not\longrightarrow$ ", wenn H_1 -> H_2 nicht zu ${}^{h}ag^{(2)}$ gehört, und ein " $\overset{?}{\longrightarrow}$ ", wenn nicht geklärt wurde, ob H_1 -> H_2 zu ${}^{h}ag^{(2)}$ gehört oder nicht. Für die natürlichen Zahlen n und m seien dabei wieder die Ungleichungen $1 < n$ und $1 < m$ erfüllt.

1)
$$\begin{tikzcd}
Ch_{n,m} \arrow[r, shift left] & Ch_{n,1} \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \\
Ch_{1,m} \arrow[r, shift left] & Ch_{1,1} \arrow[l, shift left] \arrow[u, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

Abb. 2a

2)

Mehr dazu in:

C. Gaßner: The Axiom of Choice in Second-Order Predicate Logic.

Mathematical Logic Quarterly, Volume 40, Issue 4, 533–546 (1994).

Abb. 2b

3)

Abb. 2c

4)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{MC}(i)_{n,m} \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right] & \mathrm{MC}(i)_{n,1} \arrow[l, shift right, "?"'] \arrow[d, shift right] \\
\mathrm{MC}(i)_{1,m} \arrow[u, shift right, "?"'] \arrow[r, shift right] & \mathrm{MC}(i)_{1,1} \arrow[l, shift right, "?"'] \arrow[u, shift right, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

$(i \in \{1,2,3,4\})$

Abb. 2d

5)

Abb. 2e

6)

Abb. 2f

7)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GCH}(i)_n \arrow[d, shift right] \\
\mathrm{GCH}(i)_1 \arrow[u, shift right, "?"']
\end{tikzcd}$$

$(i \in \{1,2,3,4\})$

Abb. 2g

8)

Abb. 2h

9)

Abb. 2i

10)

Abb. 2j

11) Abb. 2k

12) Abb. 2l

Mehr dazu in:

C. Gaßner: The Axiom of Choice in Second-Order Predicate Logic.

Mathematical Logic Quarterly, Volume 40, Issue 4, 533–546 (1994).

V. Beweise

Dieses Kapitel enthält die noch schuldig gebliebenen Beweise von Sätzen des letzten Kapitels.

Es werden einige Henkin-Strukturen untersucht, die Modelle für ganz bestimmte Aussagen sind. Ist H eine Aussage aus $ausd^{(2)}$, so sei $Mod_{\mathfrak{H}}(H)$ die Klasse aller Modelle von $\{H\}$ (kurz: für H), die einer Henkin-Struktur isomorph sind; d.h., es sei $Mod_{\mathfrak{H}}(H) = Mod^{(2)}(ext^{(2)} \cup komp^{(2)} \cup \{H\})$.

In den Abschnitten 1 bis 12 erfolgt die Konstruktion der betrachteten Henkin-Strukturen mit Hilfe von Permutationen.
Perm(M) sei dabei für eine beliebige Menge M die Gruppe aller Permutationen von M. $Perm_{m.w.}(M)$ sei für eine beliebige Teilmenge M von $\mathbb{Q}$ die Gruppe aller bezüglich "$\leqq$" monoton wachsenden Permutationen von M.

Die in den Abschnitten 7 und 12 betrachteten Henkin-Strukturen sind aus [3] bekannt. Die im Abschnitt 1 betrachtete Henkin-Struktur entspricht dem Basismodell von Fraenkel.

In den Abschnitten 13 und 14 erfolgt die Konstruktion der betrachteten Henkin-Strukturen mit Hilfe von Modellen der ZFA-Theorie. Dabei kann die in jedem ZFA-Modell existierende Menge $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$ als die Menge der natürlichen Zahlen aufgefaßt werden. $\nu + 1$ sei dabei für eine beliebige natürliche Zahl ν die natürliche Zahl $\nu \cup \{\nu\}$. Die bekannte Wohlordnung "$\leqq$" der natürlichen Zahlen gehört ebenfalls zu jedem ZFA-Modell. $\aleph_0$ und $\aleph_1$ seien die in der ZFA-Theorie wie üblich definierten Kardinalzahlen. $\aleph_0$ sei die Mächtigkeit der Menge ω der natürlichen Zahlen und $\aleph_1$ ihr unmittelbarer Nachfolger.

Mit Hilfe der Modelle der ZFA-Theorie wird die Nichtableitbarkeit der Implikationen $DC_1 \rightarrow ZL_1$ und $WO_1 \rightarrow GCH(4)_1$ aus ${}^{h}ax^{(2)}$ gezeigt. Es ist auch möglich, die Nichtableitbarkeit einiger anderer Implikationen aus ${}^{h}ax^{(2)}$ (z.B. die von $LW_1 \rightarrow Ch_{1,1}$, $LW_1 \rightarrow VS_1$, $LO_1 \rightarrow LW_1$, $LO_1 \rightarrow VS_1$, $LO_1 \rightarrow KW\text{-}AC_{1,1}$, $KW\text{-}AC_{1,1} \rightarrow Ch_{1,1}$, $MC(2)_{1,1} \rightarrow Ch_{1,1}$ usw.) mit Hilfe von Modellen der ZFA-Theorie zu zeigen. Jedoch ergibt sich die Nichtableitbarkeit dieser Implikationen aus ${}^{h}ax^{(2)}$ schon aus der Nichtableitbarkeit anderer Implikationen aus ${}^{h}ax^{(2)}$ oder aus der Betrachtung von Permutationsmodellen.

Für die im folgenden betrachteten Strukturen wird anstelle von $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ bzw. $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ bzw. $\Sigma(V,\iota)$ auch kurz Σ geschrieben.

$\underset{\smile}{P}$ stehe im folgenden für beliebige Teilmengen P eines Individuenbereiches I für den Ausdruck $P \cap I$.

1. Es seien $I = \mathbb{N}$, $\mathfrak{G} = Perm(I)$ und $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0(I)$. Dann gilt der

Satz 1.1: $\Sigma(I, \mathfrak{G}, \mathfrak{I})$ ist eine Henkin-Struktur.

Mehr dazu in:

C. Gaßner: The Axiom of Choice in Second-Order Predicate Logic.

Mathematical Logic Quarterly, Volume 40, Issue 4, 533–546 (1994).

Beweis: α und ϱ seien Attribute aus $\mathfrak{I}_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ bzw. $\mathfrak{I}_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$.

Mehr dazu in:

C. Gaßner: The Axiom of Choice in Second-Order Predicate Logic.

Mathematical Logic Quarterly, Volume 40, Issue 4, 533–546 (1994).

Mehr dazu in:

C. Gaßner: The Axiom of Choice in Second-Order Predicate Logic.

Mathematical Logic Quarterly, Volume 40, Issue 4, 533–546 (1994).

2. Es seien $I = \mathbb{Q}$ und $\mathcal{G} = \mathrm{Perm}_{m.w.}(I)$.

Weiterhin sei $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}^i$, und für jedes beliebige k $(k \geqq 1)$ sei $L_k = \bigcup_{i=1}^{k} \mathbb{Z}^i$. $<^*$ sei die zweistellige Relation in L, die einer lexikographischen Ordnung entspricht; und zwar gelte für beliebige i $(i \geqq 1)$ und i' $(i' \geqq 1)$ und beliebige $l = (l_1,\ldots,l_i)$ und $l' = (l'_1,\ldots,l'_{i'})$ die Beziehung $l <^* l'$ genau dann, wenn $i < i'$ und für alle $j' \in \{1,\ldots,i\}$ die Gleichung $l_{j'} = l'_{j'}$ gilt oder wenn in $\{1,\ldots,\max\{i,i'\}\}$ ein j mit $l_{j'} = l'_{j'}$ für alle $j' \in \{1,\ldots,j-1\}$ und $l_j < l'_j$ existiert. Für jedes i $(i \geqq 1)$ und jedes $l = (l_1,\ldots,l_i)$ aus L sei $l^o =_{Df} (l_1,\ldots,l_{i-1},l_i+1)$. Nun sei

$$F = \{f\colon f\colon L \to \mathbb{Q} \ \&\ \forall l \forall l'(l \in L \ \&\ l' \in L \ \&\ l <^* l' \ \Rightarrow\ f(l) < f(l'))$$
$$\&\ \forall g(g \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{g \to \infty} f(g) = \infty \ \&\ \lim_{g \to -\infty} f(g) = -\infty$$
$$\&\ \forall i(i \geqq 1 \Rightarrow \forall l(l \in \mathbb{Z}^i \Rightarrow \lim_{g \to \infty} f(l,g) = f(l^o)$$
$$\&\ \lim_{g \to -\infty} f(l,g) = f(l))))\},$$

und es sei $\mathfrak{J}_1 = \{P\colon \exists f \exists k(f \in F \ \&\ k \geqq 1 \ \Rightarrow\ P \subseteqq f"L_k)\}$. Dann gilt

<u>Hilfssatz 2.1:</u> $\mathfrak{J}_1$ ist bzgl. $\mathcal{G}$ ein Normal-Ideal in I.

Beweis: Eigenschaft (i) gilt, weil $F \neq \emptyset$ gilt. (ii) folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{J}_1$. (v) ist ebenfalls leicht einzusehen. zu (iii): P_1 und P_2 seien irgendwelche Elemente von $\mathfrak{J}_1$. Dann existieren in F ein f_1 und ein f_2 und zwei natürliche Zahlen k_1 $(k_1 \geqq 1)$ und k_2 $(k_2 \geqq 1)$, so daß die Beziehungen $P_1 \subseteqq (f_1)"L_{k_1}$ und $P_2 \subseteqq (f_2)"L_{k_2}$ erfüllt sind. Es sei $k = \max\{k_1,k_2\}$. Es soll nun ein f definiert werden, das zu F gehört und für das die Gleichung $f"L_k = (f_1)"L_k \cup (f_2)"L_k$ gilt. Offensichtlich gilt dann $P_1 \cup P_2 \subseteqq f"L_k$ und damit $P_1 \cup P_2 \in \mathfrak{J}_1$.
Es sei $P' = (f_1)"\mathbb{Z} \cup (f_2)"\mathbb{Z}$. f wird nun auf $\mathbb{Z}$ induktiv definiert, wobei hier $g \geqq 1$ sei:

(1) $f(0) = f_1(0)$;

(2a) $f(g) = \min (P' \cap]\!]f(g-1),\infty[\![)$;

(2b) $f(-g) = \max (P' \cap]\!]-\infty, f(-g+1)[\![)$.

Es gilt $f''\mathbb{Z} = P'$.

Es sei nun für $i \in \{2,\ldots,k\}$ f schon auf $\mathbb{Z}^{i-1}$ definiert. l sei ein beliebiges Element aus $\mathbb{Z}^{i-1}$. Es ist leicht einzusehen, daß in $P'' =_{Df}]\!]f(l),f(l^o)[\![\cap ((f_1)''\mathbb{Z}^i \cup (f_2)''\mathbb{Z}^i)$ eine Folge mit dem Grenzwert $f(l)$ und eine Folge mit dem Grenzwert $f(l^o)$ existiert und daß es in P'' keine Folge gibt, die einen Grenzwert in P'' hat. q_0 sei ein beliebiges Element aus P''. f wird nun auf $\{l\} \times \mathbb{Z}$ induktiv definiert, wobei hier $g_i \geqq 1$ sei:

(1) $f(l,0) = q_0$;

(2a) $f(l,g_i) = \min (P'' \cap]\!]f(l,g_i-1),\infty[\![)$;

(2b) $f(l,-g_i) = \max (P'' \cap]\!]-\infty, f(l,-g_i+1)[\![)$.

Es gilt $f''(\{l\} \times \mathbb{Z}) = P''$.

Folglich gilt $f''\mathbb{Z}^i = (f_1)''\mathbb{Z}^i \cup (f_2)''\mathbb{Z}^i$.

Also gilt $f''L_k = (f_1)''L_k \cup (f_2)''L_k$. Die Einschränkung von f auf $L - L_k$ sei irgendeine Abbildung, so daß f zu F gehört.

zu (iv): Für ein $f \in F$ und ein k ($k \geqq 1$) gelte $P \subseteqq f''L_k$. π sei aus $\mathfrak{G}$. f_π sei für jedes $l \in L$ durch $f_\pi(l) = \pi(f(l))$ definiert.

Da für jede Folge $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $q_i \in \mathbb{Q}$ und $q_i < q_{i+1}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, deren Grenzwert q aus $\mathbb{Q}$, $-\infty$ oder ∞ ist, die Folge $(\pi(q_i))_{i\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $\pi(q)$, $-\infty$ oder ∞ hat, gehört auch f_π zu F. Außerdem gilt $\pi''P \subseteqq (f_\pi)''L_k$. Also ist mit $P \in \mathfrak{I}_1$ für ein beliebiges π aus $\mathfrak{G}$ auch $\pi''P$ ein Element von $\mathfrak{I}_1$.

Folglich ist $\mathfrak{I}_1$ bzgl. $\mathfrak{G}$ ein Normal-Ideal in I.

Für $\mathfrak{I}_2 = \{P: \exists q(q \in \mathbb{Q} \; \& \; P \subseteqq \underline{]\!]-\infty,q]\!]})\}$ gilt offensichtlich der

<u>Hilfssatz 2.2:</u> $\mathfrak{I}_2$ ist bzgl. $\mathfrak{G}$ ein Normal-Ideal in I.

Daraus resultiert für $\mathfrak{I} = \{P: \exists P_1 \exists P_2 (P_1 \in \mathfrak{I}_1 \; \& \; P_2 \in \mathfrak{I}_2 \; \& \; P = P_1 \cup P_2)\}$

<u>Hilfssatz 2.3:</u> $\mathfrak{I}$ ist bzgl. $\mathfrak{G}$ ein Normal-Ideal in I.

Satz 2.4: $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ ist eine Henkin-Struktur.

Satz 2.5: $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{H}}(Ch_{1,1})$.

Beweis: α sei ein Attribut aus $\mathfrak{I}_1(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$, ϱ sei ein Attribut aus $\mathfrak{I}_2(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$, und es gelte $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Ker}^1(R,A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W$.
Dann existiert in $\mathfrak{I}$ eine Menge P, für die $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\varrho) \supseteq \mathfrak{g}(P)$ gilt.
Aufgrund der Voraussetzungen gilt dann auch $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{g}(P)$. Außerdem existiert in $\mathbb{Q}$ ein q, in F ein f und eine natürliche Zahl k ($k \geq 1$), so daß $P \subseteq \,]\!]-\infty,q]\!] \cup f"L_k$ gilt.

Es sind folgende Fälle möglich:

(x) $q \in f"L_k$, d.h., für ein $l_q \in L_k$ gilt $f(l_q) = q$.

(xx) Es existiert ein $l_q \in \mathbb{Z}^k$ mit $q \in \,]\!]f(l_q), f(l_q{}^o)[\![$.

f_q sei nun eine Abbildung aus F, die im Fall (x) gleich f ist und die im Fall (xx) auf $L_k - \{l_q\}$ gleich f ist und l_q auf q abbildet.
Es ist leicht einzusehen, daß die Gleichung
$(f_q)"L_k -]\!]-\infty,q]\!] = f"L_k -]\!]-\infty,q]\!]$ und damit auch $P \subseteq \,]\!]-\infty,q]\!] \cup (f_q)"L_k$ gilt. Es sei weiterhin $\mathbb{Z}^k_{l_q} = \mathbb{Z}^k \cap \{l : l_q <^* l \vee l = l_q\}$.
Dann sei $S_1 = \{1\} \times (\underbrace{]\!]-\infty,q]\!]} \cup f"L_k)$ und $S_2 = \{2\} \times (f_q)"\mathbb{Z}^k_{l_q}$. Außerdem sei $S = S_1 \cup S_2$.

Für jedes $s = (s_1,s_2)$ aus S sei $P_s = \begin{cases} \{s_2\}, & \text{falls } s_1 = 1 \\ \underbrace{]\!]f(s_2), f(s_2{}^o)[\![}, & \text{falls } s_1 = 2 \end{cases}$.

s und s' seien aus S_2, und es gelte $s \neq s'$. $\xi_1,\dots,\xi_r,\eta_1,\dots,\eta_r$ seien Individuen aus P_s mit $\xi_1 < \dots < \xi_r$ und $\eta_1 < \dots < \eta_r$. $\xi'_1,\dots,\xi'_r,\eta'_1,\dots,\eta'_r$ seien Individuen aus $P_{s'}$ mit $\xi'_1 < \dots < \xi'_r$ und $\eta'_1 < \dots < \eta'_r$. Dann existiert analog zum Hilfssatz 6 in [3] (S. 115) in $\mathfrak{g}(P)$ eine Permutation π mit $\pi(\xi_1) = \eta_1, \dots, \pi(\xi_r) = \eta_r$, $\pi(\xi'_1) = \eta'_1, \dots, \pi(\xi'_r) = \eta'_r$; denn sowohl P_s als auch $P_{s'}$ enthalten kein Element von P, außerdem sind P_s und $P_{s'}$ disjunkt. (A)

Andererseits wird P_s für jedes s aus S durch jedes π aus $\mathfrak{g}(P)$ auf sich abgebildet. (B)

Deshalb gilt für $\alpha_s = \alpha \cap P_s$ $(s \in S)$ $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha_s) \supseteq \mathfrak{g}(P)$, d.h., daß α_s zu $J_1(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ gehört. Wegen (A) gilt für jedes s aus S folgendes:

$\alpha_s \neq \emptyset \Rightarrow \alpha_s = P_s$. (C)

Außerdem gilt wegen $I = \bigcup_{s \in S} P_s$ die Beziehung $\alpha = \bigcup_{s \in S} \alpha_s$ (D)

Für beliebige s und s' aus S gilt wegen $P_s \cap P_{s'} = \emptyset$ die Beziehung

$\alpha_s \cap \alpha_{s'} = \emptyset$. (E)

Es sei $P_\sigma = \underline{]\!]-\infty, q]\!]} \cup f''L_{k+1}$.

Offensichtlich gilt $P_\sigma \supset P$ und damit $\mathfrak{g}(P_\sigma) \subset \mathfrak{g}(P)$. (F)

Es wird nun gezeigt, daß für jedes $s \in S$ ein σ_s mit folgenden Eigenschaften existiert:

(1) σ_s ist eine Auswahlfunktion für α_s und ϱ.

(2) $\sigma_s \subseteq \alpha_s \times I$.

(3) Es gilt $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma_s) \supseteq \mathfrak{g}(P_\sigma)$.

Denn dann gilt für $\sigma = \bigcup_{s \in S} \sigma_s$ wegen (1) und (2) für jedes $s \in S$, wegen (D) und (E) die Beziehung a) und wegen (3) die Beziehung b):

a) σ ist eine Auswahlfunktion für α und ϱ.

b) Es gilt $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{g}(P_\sigma)$.

a) und b) bedeuten aber $\sigma \in J_2(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ und

$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(CF(A,R,S), f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} A & R & S \\ \alpha & \varrho & \sigma \end{matrix}\right\rangle) = W.$

Um für jedes $s = (s_1, s_2) \in S$ die Existenz eines σ_s mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) nachzuweisen, werden folgende Fälle unterschieden:

1) $\alpha_s = \emptyset$.

2) Es existiert ein $(\xi', \eta') \in (\alpha_s \times I) \cap \varrho$.

2.1) Es existiert ein $s' = (s_1', s_2') \in S$ mit $s' \neq s$ und $\eta' \in P_{s'}$.

2.1.1) Es gilt $s' \in S_1$.

2.1.2) Es gilt $s' \in S_2$.

2.2) Es gilt $\eta' \in P_s$.

2.2.1) Es gilt $\xi' = \eta'$.

2.2.2) Es gilt $\xi' < \eta'$.

2.2.3) Es gilt $\xi' > \eta'$.

zu 1): Für $\sigma_s = \bar{\emptyset}_2$ ist (1), (2) und (3) erfüllt.

zu 2): Im folgenden wird für jeden Unterfall eine Abbildung σ_s von α_s in I definiert, für die $\sigma_s \in \mathrm{att}^2(I)$ sowie (1), (2) und (3) erfüllt sind. Dabei läßt sich jeweils leicht nachprüfen, daß wegen (A) für jedes (ξ,η) aus σ_s in $\mathfrak{g}(P)$ ein π mit $(\xi,\eta) = (\pi(\xi'),\pi(\eta'))$ existiert. Demzufolge gilt dann wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\varrho) \supseteq \mathfrak{g}(P)\ \sigma_s \subseteq \varrho$. Damit ist dann nach Definition von σ_s die Forderung (1) für σ_s erfüllt. (2) ergibt sich für das jeweils definierte σ_s aus (C). (3) folgt für σ_s teilweise schon aus (B) und (F). Im Fall 2.1.2) kann $\{f(s_2',0)\} \in P_\sigma$ als weitere Voraussetzung genutzt werden. In den Fällen 2.2.2) und 2.2.3) kann außerdem die Gültigkeit der Beziehungen $\{f(s_2',g)\} \in P_\sigma$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\underline{\overline{]\!]f(s_2',g),f(s_2',g+1)[\![}}) \supseteq \mathfrak{g}(P_\sigma)$ für jedes g aus $\mathbb{Z}$ genutzt werden.

zu 2.1.1): Es sei $\sigma_s = \overline{P_s \times P_{s'}}$.

zu 2.1.2): Es sei $\sigma_s = \overline{P_s \times \{f(s_2',0)\}}$.

zu 2.2.1): σ_s sei das zweistellige Attribut über I, das genau auf die Paare (ξ,η) zutrifft, für die $\xi = \eta \in P_s$ gilt.

zu 2.2.2): σ_s sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn ein $g \in \mathbb{Z}$ mit $\eta = f(s_2',g+1)$ und $\xi \in \underline{]\!]f(s_2',g),f(s_2',g+1)[\![}$ existiert.

zu 2.2.3): σ_s sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn ein $g \in \mathbb{Z}$ mit $\eta = f(s_2',g)$ und $\xi \in \underline{]\!]f(s_2',g),f(s_2',g+1)[\![}$ existiert. Damit existiert in jedem Fall für $s \in S$ ein σ_s, für das die Forderungen (1), (2) und (3) erfüllt sind. σ_s sei also für jedes $s \in S$ ein Attribut, für das (1), (2) und (3) erfüllt ist. Dann ist $\sigma = \bigcup_{s \in S} \sigma_s$ eine Auswahlfunktion für α und ϱ, die zu $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ gehört.

Demzufolge ist $Ch_{1,1}$ in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ wahr.

<u>Satz 2.6:</u> $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(LO_1)$.

Beweis: ϱ' sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn $\xi \leq \eta$ gilt. ϱ' gehört zu $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$.

weil $sym_{\mathfrak{g}}(\varrho') = \mathfrak{g}$ gilt. Offensichtlich ist ϱ' eine Totalordnung in $\alpha' = \overline{I}$. Da jedes beliebige einstellige Attribut α von $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ ein Teilattribut von α' ist, wird es ebenfalls durch ϱ' totalgeordnet. Demzufolge ist $\varrho = Att_{\sum}(Ax \wedge Ay \wedge R'xy\ ;\ x,y\ ;\ f_{\sum}\left\langle \begin{smallmatrix} A & R' \\ \alpha & \varrho' \end{smallmatrix} \right\rangle)$ eine Totalordnung in α.

Also ist LO_1 in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ wahr.

Satz 2.7: $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J}) \in Mod_{\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}}(\neg VS_1)$.

Beweis: f sei eine Abbildung aus F, deren Einschränkung auf $\mathbb{Z}$ die identische Abbildung ist. Offenbar gehört $P = f''L_1$ zu $\mathfrak{J}$. Außerdem gilt für das einstellige Attribut $\alpha = \overline{\bigcup_{g\in\mathbb{Z}}]2g,2g+1[}$ die Beziehung $sym_{\mathfrak{g}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{g}(P)$ und für das einstellige Attribut $\beta = \overline{\bigcup_{g\in\mathbb{Z}}]2g+1,2g[}$, $sym_{\mathfrak{g}}(\beta) \supseteq \mathfrak{g}(P)$ (analog zu (B) im Beweis des Satzes 2.5 dieses Kapitels). Damit gehören beide Attribute zu $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$.

Es wird nun angenommen, daß VS_1 in $\sum$ wahr ist. Dann existiert in $J_2(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ eine Injektion τ von α in β oder von β in α. Da in beiden Fällen auf gleiche Weise ein Widerspruch herbeigeführt werden kann, wird hier nur auf den Fall eingegangen, daß τ eine Injektion von α in β ist.

q sei ein Element aus $\mathbb{Q}$, f eine Abbildung aus F und k eine natürliche Zahl, so daß aus $P_\tau =_{Df} \overline{]-\infty,q]} \cup f''L_k$ die Beziehung $sym_{\mathfrak{g}}(\tau) \supseteq \mathfrak{g}(P_\tau)$ folgt. g_1 sei die kleinste ganze Zahl g, für die $2g > q$ gilt. Offensichtlich existiert in $\mathbb{Z}^k$ ein l, so daß $M =_{Df}]2g_1,2g_1+1[\cap]f(l),f(l^o)[$ nicht leer ist. Es seien ξ' und ξ'' zwei beliebige Individuen aus M. Auf diese Individuen ξ' und ξ'' trifft α zu, und folglich existiert ein $\eta' \in \beta$ mit $(\xi',\eta') \in \tau$. Aufgrund der Definition von α und β gilt $\xi' \neq \eta'$ und mit $\xi' < \eta'$ auch $\xi'' < \eta'$ und mit $\xi' > \eta'$ auch $\xi'' > \eta'$. Demzufolge existiert analog zu (A) im Beweis des Satzes 2.5 in $\mathfrak{g}(P_\tau)$ eine Permutation π mit $\pi(\xi') = \xi''$ und $\pi(\eta') = \eta'$. Das bedeutet, daß nicht nur $(\xi',\eta') \in \tau$ gilt, sondern auch $(\xi'',\eta') \in \tau$ gilt. Demzufolge kann τ

keine Injektion von α in β sein. Das ist ein Widerspruch.
Also ist VS_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ falsch.

Satz 2.8: $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) \in Mod_{\mathfrak{G}}(\neg LW_1)$.

Beweis: Nach Satz 2.6 kann jedes einstellige Attribut aus Σ totalgeordnet werden. Würde nun in Σ die Aussage LW_1 wahr sein, so könnte in Σ auch jedes einstellige Attribut wohlgeordnet werden, d.h., es würde WO_1 und damit auch VS_1 in Σ wahr sein. Das ist aber nach Satz 2.7 nicht der Fall. Also ist LW_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ falsch.

Satz 2.9: $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) \in Mod_{\mathfrak{G}}(\neg KW\text{-}AC_{2,1})$.

Beweis: α sei das zweistellige Attribut über I, das genau auf die Paare (ξ_1,ξ_2) zutrifft, für die $\xi_1 < \xi_2$ gilt. ϱ sei das dreistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Tripel (ξ_1,ξ_2,η) zutrifft, wenn $\xi_1 < \eta < \xi_2$ gilt. Da $sym_{\mathfrak{G}}(\alpha) = \mathfrak{G}$ und $sym_{\mathfrak{G}}(\varrho) = \mathfrak{G}$ erfüllt sind, gehören α und ϱ zu Σ. Es ist leicht einzusehen, daß auch $Wert_\Sigma(Kor^2(R,A), f_\Sigma\left\langle\begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha\end{smallmatrix}\right\rangle) = W$ gilt. Es wird nun von der Annahme ausgegangen, daß $KW\text{-}AC_{2,1}$ in Σ wahr ist. Folglich existiert für α und ϱ ein Selektor σ, der zu $J_3(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ gehört. q sei eine rationale Zahl, f eine Abbildung aus F und k eine natürliche Zahl, so daß für die Menge $P = \underline{]-\infty,q[} \cup f''L_k$ die Beziehung $sym_{\mathfrak{G}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{G}(P)$ gilt. l sei ein Element aus $\mathbb{Z}^k$, so daß $q < f(l)$ erfüllt ist. Offenbar enthält das Intervall $]f(l), f(l^o)[$ kein Element aus P.

Es sei nun $\xi_1' = f(l)$ und $\xi_2' = f(l^o)$ und η' ein beliebiges Individuum, für das $\xi_1' < \eta' < \xi_2'$ und damit $(\xi_1',\xi_2',\eta') \in \sigma$ gilt, und η'' ein Individuum, für das $\xi_1' < \eta'' < \xi_2'$ und $(\xi_1',\xi_2',\eta'') \notin \sigma$ gilt. Offenbar enthält das Intervall $]\xi_1',\xi_2'[=]f(l),f(l^o)[$ kein Element von P. Also existiert analog zu (A) im Beweis des Satzes 2.5 in $\mathfrak{G}(P)$ eine Permutation π mit $\pi(\eta') = \eta''$, für die außerdem natürlich $\pi(\xi_1') = \xi_1'$ und $\pi(\xi_2') = \xi_2'$ erfüllt sind. Demzufolge folgt aus $(\xi_1',\xi_2',\eta') \in \sigma$ auch $(\xi_1',\xi_2',\eta'') \in \sigma$. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $KW\text{-}AC_{2,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ falsch.

<u>Satz 2.10:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(\neg MC(4)^{LO}_{2,1})$.

Beweis: α und ϱ seien die im vorangehenden Beweis definierten Attribute. Wegen Satz 2.6 dieses Kapitels und Satz 2.3.2 des Kapitels IV kann α durch ein Attribut aus Σ totalgeordnet werden.

Demzufolge gilt

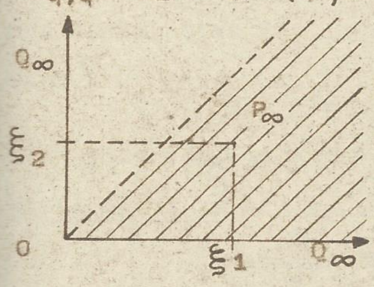
$$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^{1}_{LO}(R,A),f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix}\right\rangle) = W.$$

Es wird wieder von der Annahme ausgegangen, daß $MC(4)^{LO}_{2,1}$ in Σ wahr ist. Demzufolge existiert in Σ eine multiple Auswahlkorrespondenz δ für α und ϱ. Analog zum vorangegangenen Beweis gibt es ein Intervall $\underline{]\xi_1',\xi_2'[}$, so daß für alle η aus diesem Intervall $(\xi_1',\xi_2',\eta)\in\delta$ gilt. Es sei nun γ das einstellige Attribut aus Σ, daß auf alle Elemente dieses offenen Intervalls $\underline{]\xi_1',\xi_2'[}$ zutrifft. υ sei ein beliebiges dreistelliges Attribut über I, das eine Injektion von $\bar{\gamma}$ auf $\overline{\gamma\times\gamma}$ ist. Für υ gilt $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\upsilon) \supseteq \mathfrak{g}(\underline{]-\infty,q']})$, falls q' irgendeine rationale Zahl mit $q' > \xi_2'$ ist. Folglich ist υ ein Attribut aus Σ. D.h., daß $\neg Fin_4(C)$ in Σ bei Belegung von C mit γ wahr wird und damit δ in Σ keine multiple Auswahlkorrespondenz sein kann.

Das ist ein Widerspruch.

Also ist $MC(4)^{LO}_{2,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ falsch.

3. Es seien $Q_\infty = Q \cap [\![0,\infty[\![$ und $P_\infty = (Q_\infty)^2 \cap \{(\xi_1,\xi_2) : \xi_1 > \xi_2\}$.
Für $q \in Q_\infty$ seien $Q_q = Q_\infty \cap [\![0,q]\!]$ und $P_q = (Q_q)^2 \cap P_\infty$. Außerdem seien für q aus Q_∞ und q' aus Q_q $P1_q = (]\!]q,\infty[\![)^2 \cap P_\infty$ und $P2_{q,q'} = (]\!]q,\infty]\!] \times \{q'\}) \cap P_\infty$.



Q_∞ sei auf den Achsen durch "$\leqq$" geordnet.

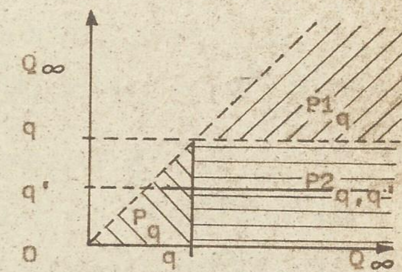


Abb. 3a und 3b

Es sei $I = P_\infty$. Offensichtlich ist

$$\mathcal{G} = \{\pi : \pi \in Perm(I) \;\&\; \exists \pi_0 (\pi_0 \in Perm_{m.w.}(Q_\infty) \;\&\; \forall(\xi_1,\xi_2)((\xi_1,\xi_2) \in I \Rightarrow \pi(\xi_1,\xi_2) = (\pi_0(\xi_1),\pi_0(\xi_2))))\}$$

eine Gruppe von Permutationen von I und
$\mathfrak{J} = \{P : \exists q(q \in Q_\infty \;\&\; P \subseteqq P_q)\}$ ein Normal-Ideal in I bzgl. $\mathcal{G}$.
Also gilt

<u>Satz 3.1:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$ ist eine Henkin-Struktur.

f sei die bijektive Abbildung von $\mathcal{G}$ auf $Perm_{m.w.}(Q_\infty)$, die jedes π aus $\mathcal{G}$ auf das π_0 aus $Perm_{m.w.}(Q_\infty)$ abbildet, für das für alle (ξ_1,ξ_2) aus I die Gleichung $\pi(\xi_1,\xi_2) = (\pi_0(\xi_1),\pi_0(\xi_2))$ gilt.
Offenbar gilt für alle $\pi \in \mathcal{G}(P_q)$ $(q \in Q_\infty)$ die Beziehung $(f(\pi))(q') = q'$, falls q' aus Q_q ist, und $(f(\pi))''\underline{]\!]q,\infty[\![} = \underline{]\!]q,\infty[\![}$.
Für beliebige $\alpha \in att^1(I)$ und $q \in Q_\infty$ sei Φ durch

$$\Phi(\alpha,q) = (\alpha \cap P1_q = \emptyset \vee P1_q \subseteqq \alpha) \;\&\; \forall q'(q' \in Q_q \Rightarrow (\alpha \cap P2_{q,q'} = \emptyset \vee P2_{q,q'} \subseteqq \alpha))$$

definiert. Dann gilt

<u>Hilfssatz 3.2:</u> $\{\alpha : \alpha \in att^1(I) \;\&\; \exists q(q \in Q_\infty \;\&\; \Phi(\alpha,q))\} \subseteqq \mathfrak{J}_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$.

Beweis: α sei ein Attribut aus $att^1(I)$. Es existiere ein $q \in Q_\infty$ mit $\Phi(\alpha,q)$. Es sei π aus $\mathcal{G}(P_q)$ und $\pi_0 = f(\pi)$.

Dann gilt für alle $(\xi_1,\xi_2)\in P_q$ die Beziehung $\pi(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1,\xi_2)$.
Außerdem gilt

$$\pi''P1_q=\pi''(I\cap(]q,\infty[)^2)=\pi''I\cap\pi''(]q,\infty[)^2=\pi''I\cap(\pi_0(]q,\infty[))^2$$
$$=I\cap(]q,\infty[)^2=P1_q$$

und analog dazu für jedes $q'\in Q_q$ auch $\pi''P2_{q,q'}=P2_{q,q'}$.
Da $\alpha\subseteq P_q\cup P1_q\cup\bigcup_{q'\in Q_q}P2_{q,q'}=I$ gilt, erhält man $\alpha^\pi=\alpha$. Folglich gilt $sym_{\mathcal{G}}(\alpha)\supseteq\mathcal{G}(P_q)$ und damit $\alpha\in J_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$.

<u>Hilfssatz 3.3:</u> Für beliebige $\alpha\in att^1(I)$ und $q\in Q_\infty$ folgt aus

$$sym_{\mathcal{G}}(\alpha)\supseteq\mathcal{G}(P_q)\text{ die Richtigkeit von }\Phi(\alpha,q).$$

Beweis: Für ein $\alpha\in att^1(I)$ und ein $q\in Q_\infty$ gelte $sym_{\mathcal{G}}(\alpha)\supseteq\mathcal{G}(P_q)$. Es wird nun der Fall angenommen, daß in $\alpha\cap P1_q$ ein (ξ_1',ξ_2') existiert. $(\xi_1,\xi_2)\in P1_q$ sei beliebig. Wegen $q<\xi_2'<\xi_1'$ und $q<\xi_2<\xi_1$ existiert in $\mathcal{G}(P_q)$ analog zu dem Hilfssatz 6 in [3] (S.115) ein π mit $f(\pi)(\xi_1')=\xi_1$ und $f(\pi)(\xi_2')=\xi_2$. Also gilt $(\xi_1,\xi_2)=\pi(\xi_1',\xi_2')\in\alpha$ und damit $P1_q\subseteq\alpha$. Es gilt deshalb $P1_q\subseteq\alpha$ oder $P1_q\cap\alpha=\emptyset$, falls die Annahme falsch ist.
Auf gleiche Weise kann für jedes $q'\in Q_q$ gezeigt werden, daß $P2_{q,q'}\subseteq\alpha$ oder $P2_{q,q'}\cap\alpha=\emptyset$ gilt.
Demzufolge gilt $\Phi(\alpha,q)$.
Daraus folgt

<u>Hilfssatz 3.4:</u> $J_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})=\{\alpha:\alpha\in att^1(I)\ \&\ \exists q(q\in Q_\infty\ \&\ \Phi(\alpha,q))\}$.

<u>Satz 3.5:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})\in Mod_{\mathfrak{hg}}(VS_1)$.

Beweis: α und β seien beliebige Attribute aus $J_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$.
Dann existieren in Q_∞ ein q_α und ein q_β, so daß $sym_{\mathcal{G}}(\alpha)\supseteq\mathcal{G}(P_{q_\alpha})$ und $sym_{\mathcal{G}}(\beta)\supseteq\mathcal{G}(P_{q_\beta})$ gelten. Offensichtlich gelten dann für $q=\max\{q_\alpha,q_\beta\}$ ebenfalls die Beziehungen $sym_{\mathcal{G}}(\alpha)\supseteq\mathcal{G}(P_q)$ und $sym_{\mathcal{G}}(\beta)\supseteq\mathcal{G}(P_q)$.
Es ist nun zu zeigen, daß für α und β eine Injektion von α in β bzw. von β in α existiert, die zu Σ gehört. Zu diesem Zweck wird eine Fallunterscheidung vorgenommen.

Es seien Q_α und Q_β Teilmengen von Q_q, und es gelte:

- $\bigcup_{q' \in Q_\alpha} P2_{q,q'} \subseteq \alpha$ und $\bigcup_{q' \in Q_\beta} P2_{q,q'} \subseteq \beta$;
- $\alpha \cap \bigcup_{q' \in (Q_q - Q_\alpha)} P2_{q,q'} = \emptyset$ und $\beta \cap \bigcup_{q' \in (Q_q - Q_\beta)} P2_{q,q'} = \emptyset$.

Q_α und Q_β sind nach Hilfssatz 3.3 eindeutig bestimmt.

Für $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ seien

$\Phi_1(\gamma) =_{Df} \gamma \cap P1_q = \emptyset$,

$\Phi_2(\gamma) =_{Df} P1_q \subseteq \gamma$,

$\Phi_3(\gamma) =_{Df} \gamma \cap \bigcup_{q' \in Q_q} P2_{q,q'} = \emptyset$ und

$\Phi_4(\gamma) =_{Df} Q_\gamma \neq \emptyset \;\&\; \bigcup_{q' \in Q_\gamma} P2_{q,q'} \subseteq \gamma$.

Aufgrund von Hilfssatz 3.4 sind für α und β diese und nur diese Fälle und o.B.d.A. nur die numerierten Kombinationen möglich:

	$\Phi_1(\beta)\&\Phi_3(\beta)$	$\Phi_1(\beta)\&\Phi_4(\beta)$	$\Phi_2(\beta)\&\Phi_3(\beta)$	$\Phi_2(\beta)\&\Phi_4(\beta)$
$\Phi_1(\alpha)\&\Phi_3(\alpha)$	1.	2.	3.	4.
$\Phi_1(\alpha)\&\Phi_4(\alpha)$	-	5.	6.	7.
$\Phi_2(\alpha)\&\Phi_3(\alpha)$	-	-	8.	9.
$\Phi_2(\alpha)\&\Phi_4(\alpha)$	-	-	-	10.

Tab. 3

Um zu zeigen, daß in allen Fällen eine Injektion von α in β bzw. von β in α existiert, werden zunächst einige Injektionen betrachtet, mit Hilfe derer die gewünschten Attribute definierbar sind.

a) $\tau_1 \in att^2(I)$ sei eine beliebige Injektion von $\alpha \cap P_q$ in $\beta \cap P_q$ oder umgekehrt. Dann gilt wegen $sym_{\mathfrak{g}}(\tau_1) \supseteq \mathfrak{g}(P_q)$ $\tau_1 \in \mathfrak{I}_2(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})$.

b) h sei eine Injektion von Q_α in Q_β bzw. von Q_β in Q_α. Für $\tau_2 \in att^2(I)$ gelte $((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)) \in \tau_2$ genau dann, wenn $h(\xi_2) = \eta_2$ und $\xi_1 = \eta_1$. τ_2 ist offensichtlich eine Injektion von $\bigcup_{q' \in Q_\alpha} P2_{q,q'}$ in $\bigcup_{q' \in Q_\beta} P2_{q,q'}$ bzw. umgekehrt. Außerdem gilt $sym_{\mathfrak{g}}(\tau_2) \supseteq \mathfrak{g}(P_q)$, also $\tau_2 \in \mathfrak{I}_2(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})$.

c) Durch Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens kann man eine Injektion h_1 von $\mathbb{N}$ auf $(Q_{2q}-Q_q)$, eine Injektion von $\mathbb{N}$ auf Q_q und analog dazu eine Injektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ konstruieren. Folglich existiert auch eine Injektion von $\mathbb{N}$ auf $Q_q\times Q_q$, aus der wiederum eine Injektion h_2 von $\mathbb{N}$ auf P_q konstruiert werden kann. $\tau_3^{q'}$ sei für ein beliebiges $q'\in Q_q$ das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf $((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn ein $i\in\mathbb{N}$ mit $(\xi_1,\xi_2)=h_2(i)$ und $(\eta_1,\eta_2)=(h_1(i),q')$ existiert. $\tau_3^{q'}$ ist eine Injektion von P_q in $P2_{q,q'}$. Außerdem gehört $\tau_3^{q'}$ wegen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau_3^{q'})\supseteq\mathcal{G}(P_{2q})$ zu $J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$.

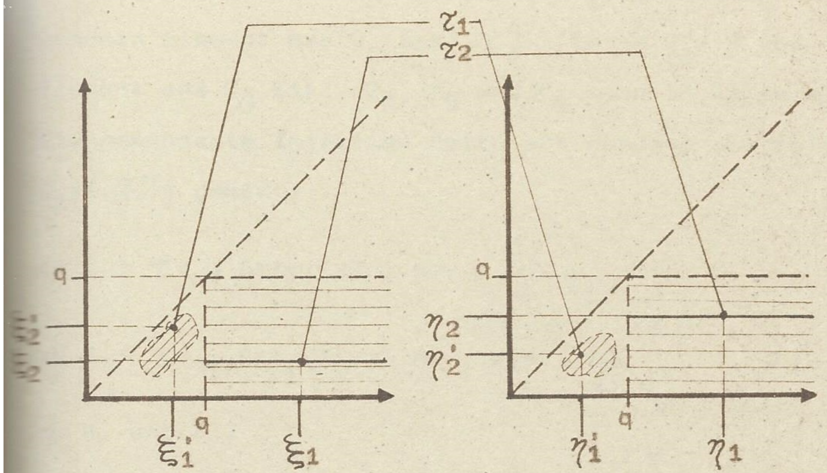
d) $\tau_4\in att^2(I)$ treffe genau dann auf ein Paar $((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ zu, wenn $(\xi_1,\xi_2)\in P_q$ und die Gleichung $(\xi_1,\xi_2)=(\eta_1-2q,\eta_2-2q))$ erfüllt ist. τ_4 ist eine Injektion von P_q in $P1_q$ und wegen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau_4)\supseteq\mathcal{G}(P_{3q})$ ein Element von $J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$.

e) τ_5 sei die Injektion aus $att^2(I)$, die genau dann auf $((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn $(\xi_1,\xi_2)\in(\bigcup_{q'\in Q_q}P2_{q,q'})\cap P_{3q}$ und $(\xi_1,\xi_2)=(\eta_1-4q,\eta_2-4q)$ gilt oder wenn (ξ_1,ξ_2) $\in(\bigcup_{q'\in Q_q}P2_{q,q'})-P_{3q}$ und $(\xi_1,\xi_2)=(\eta_1,\eta_2-2q)$ gilt. Es gilt $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau_5)\supseteq\mathcal{G}(P_{7q})$. Also gehört τ_5 zu $J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$.

f) $\tau_6\in att^2(I)$ sei die identische Abbildung von $P1_q$ auf $P1_q$. Diese trifft also genau auf die Paare der Form $((\xi_1,\xi_2),(\xi_1,\xi_2))$ aus $(P1_q)^2$ zu. Es gilt $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau_6)\supseteq\mathcal{G}(P_q)$ und damit $\tau_6\in J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$.

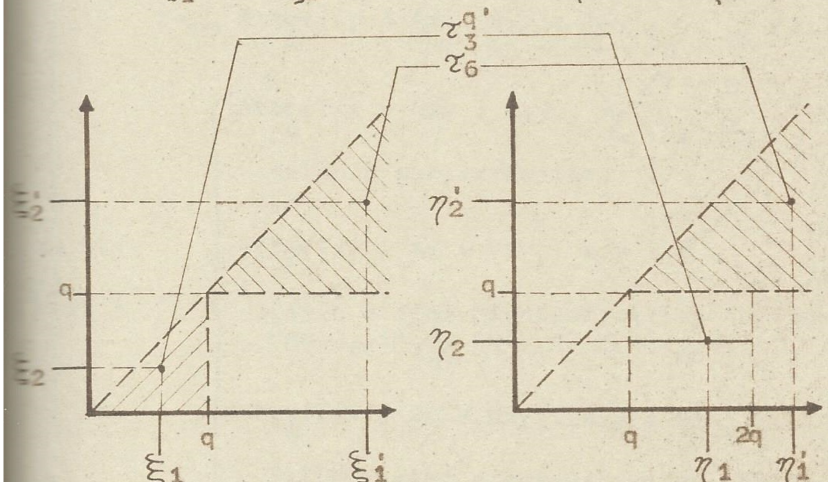
Die folgenden Skizzen sollen andeuten, wie die definierten Injektionen betrachtet werden können.

Ist ein Punkt der linken Ebene mit einem Punkt der rechten Ebene verbunden, so trifft die entsprechende Injektion auf die Paare von Individuen zu, die diesen Punkten entsprechen.



- $\eta_1 = \xi_1$;
- $\eta_2 = h(\xi_2)$;

Abb. 4a



- $\eta_1' = \xi_1'$;
- $\eta_2' = \xi_2'$;
- $(\xi_1, \xi_2) = h_2(j)$;
- $\eta_1 = h_1(j)$;
- $\eta_2 = q'$

Abb. 4b

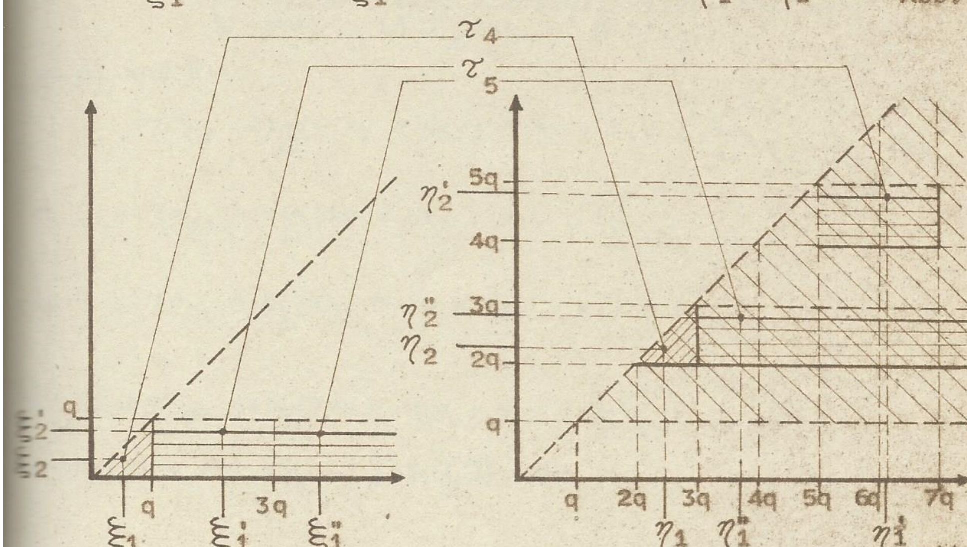


Abb. 4c

- $\eta_1 = \xi_1 + 2q$; $\eta_2 = \xi_2 + 2q$; $\eta_1' = \xi_1' + 4q$; $\eta_2' = \xi_2' + 4q$; $\eta_1'' = \xi_1''$; $\eta_2'' = \xi_2'' + 2q$.

Mit Hilfe der Injektionen $\tau_1, \tau_2, \tau_3^{q'}$ (falls $Q_\alpha \neq \emptyset$ und q' irgendein Element aus Q_α ist), $\tau_3^{q''}$ (falls $Q_\beta \neq \emptyset$ und q'' irgendein Element aus Q_β ist), τ_4, τ_5 und τ_6 kann in allen zehn Fällen die gewünschte Injektion definiert werden, die folglich auch zu $\mathcal{J}_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ gehört:

zu 1.: $\tau =_{Df} \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T \\ \tau_1 \end{matrix}\right\rangle\right)$;

zu 2.: $\tau =_{Df} \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \wedge Ax \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & A \\ \tau_3^{q''} & \alpha \end{matrix}\right\rangle\right)$;

zu 3. und 4.:

$$\tau =_{Df} \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \wedge Ax \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & A \\ \tau_4 & \alpha \end{matrix}\right\rangle\right);$$

zu 5.:

$$\tau =_{Df} \tau' = \begin{cases} \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \vee Uxy \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & U \\ \tau_1 & \tau_2 \end{matrix}\right\rangle\right), \\ \quad \text{falls } h \text{ surjektiv ist;} \\ \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \wedge Ax \vee Uxy \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & U & A \\ \tau_3^{q''} & \tau_2 & \alpha \end{matrix}\right\rangle\right), \\ \quad \text{falls } h \text{ eine nichtsurjektive Abbildung} \\ \quad \text{von } Q_\alpha \text{ in } Q_\beta \text{ ist, } q'' \notin h(Q_\alpha); \\ \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \wedge Bx \vee Uxy \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & U & B \\ \tau_3^{q'} & \tau_2 & \beta \end{matrix}\right\rangle\right), \\ \quad \text{falls } h \text{ eine nichtsurjektive Abbildung} \\ \quad \text{von } Q_\beta \text{ in } Q_\alpha \text{ ist, } q' \notin h(Q_\beta); \end{cases}$$

zu 6. und 7.:

$$\tau =_{Df} \mathrm{Att}_\Sigma\left((Txy \vee Uxy) \wedge Ax \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & U & A \\ \tau_4 & \tau_5 & \alpha \end{matrix}\right\rangle\right);$$

zu 8.: $\tau =_{Df} \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \vee Uxy \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & U \\ \tau_1 & \tau_6 \end{matrix}\right\rangle\right)$;

zu 9.: $\tau =_{Df} \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \wedge Ax \vee Uxy \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & U & A \\ \tau_3^{q''} & \tau_6 & \alpha \end{matrix}\right\rangle\right)$;

zu 10.: $\tau =_{Df} \mathrm{Att}_\Sigma\left(Txy \vee Uxy \;;\; x,y \;;\; f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & U \\ \tau' & \tau_6 \end{matrix}\right\rangle\right)$.

Demzufolge ist VS_1 in $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ wahr.

<u>Satz 3.6:</u> $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{G}}(DC_1)$.

Beweis: τ sei ein beliebiges Attribut aus $\mathfrak{J}_2(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$, so daß $\mathrm{Wert}_{\sum}(\mathrm{Rel}_W \subseteq D(T), f_{\sum}\left\langle \begin{smallmatrix} T \\ \tau \end{smallmatrix} \right\rangle) = W$ gilt. $\xi_0 = (\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)})$ sei ein Individuum, so daß ein ξ_1 mit $(\xi_0,\xi_1)\in\tau$ existiert.

q sei eine rationale Zahl aus Q_∞, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\tau) \supseteq \mathfrak{G}(P_q)$ gilt. $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von rationalen Zahlen, so daß $q_0 = \max\{\xi_1^{(0)},q\}$ gilt und eine rationale Zahl q' existiert, so daß für jedes $i\in\mathbb{N}$ die Beziehung $q_i < q_{i+1} < q'$ gilt. Es sei $\eta = (\eta_1,\eta_2)$ ein Individuum aus P_{q_i} $(i\in\mathbb{N})$, so daß ein $\eta' = (\eta_1',\eta_2')$ mit $(\eta,\eta')\in\tau$ existiert. Es wird nun gezeigt, daß für η ein $\eta'' = (\eta_1'',\eta_2'')$ mit $(\eta,\eta'')\in\tau$ und $\eta''\in P_{q_{i+1}}$ existiert. Ist η' aus $P_{q_{i+1}}$, so ist nichts zu zeigen. Deshalb kann nun vorausgesetzt werden, daß einer der folgenden Fälle gilt:

1) $\eta_2' < q_{i+1} < \eta_1'$;

2) $q_{i+1} < \eta_2' < \eta_1'$.

Es sei nun $\eta'' = (\eta_1'',\eta_2'')$ ein Individuum, so daß
im Fall 1) $\eta_2'' = \eta_2'$ und $\max\{\eta_2',q_i\} < \eta_1'' < q_{i+1}$ und
im Fall 2) $q_i < \eta_2'' < \eta_1'' < q_{i+1}$ gilt.

Weil $\eta_2 < \eta_1 < q_i < q_{i+1}$ gilt, existiert auch hier in jedem Fall in $\mathfrak{G}(P_q)$ ein π mit $\pi(\eta) = \pi(\eta_1,\eta_2) = (\eta_1,\eta_2) = \eta$ und $\pi(\eta') = \pi(\eta_1',\eta_2') = (\eta_1'',\eta_2'') = \eta''$. Damit gilt nicht nur $(\eta,\eta')\in\tau$ sondern auch $(\eta,\eta'')\in\tau$. Außerdem gilt $\eta''\in P_{q_{i+1}}$. Das bedeutet nun, daß für ξ_0 $(\in P_{q_0})$ ein ξ_1' mit $(\xi_0,\xi_1')\in\tau$ und $\xi_1'\in P_{q_1}$ existiert, für dieses ξ_1' wiederum ein ξ_2' mit $(\xi_1',\xi_2')\in\tau$ und $\xi_2'\in P_{q_2}$ usw..

Es existiert also eine Folge $(\xi_i')_{i\in\mathbb{N}}$, für die $\xi_0' = \xi_0$ und für jedes $i\in\mathbb{N}$ $(\xi_i',\xi_{i+1}')\in\tau$ und $\xi_i'\in P_{q_i}$ gilt.

Es sei $i' = \min(\{i : \exists!\,!j(j < i \;\&\; \xi_j' = \xi_i')\}\cup\{+\infty\})$. Ist $i' \neq +\infty$, so existieren in der Folge $(\xi_i')_{i\in\mathbb{N}}$ zwei Glieder $\xi_{j'}'$ und $\xi_{i'}'$, für die $\xi'_{j'} = \xi'_{i'}$ und folglich $(\xi'_{i'}, \xi'_{j'+1}) \in \tau$ gilt.

υ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn ein $i < i'$ mit $\xi = \xi'_i$ und $\eta = \xi'_{i+1}$ existiert. Offenbar ist υ eine bedingte Auswahlfunktion für τ und ξ_0. Außerdem gehört υ wegen $sym_{\mathfrak{G}}(\upsilon) \supseteq \mathfrak{G}(P_{q'})$ zu Σ.

Damit ist DC_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ wahr.

Satz 3.7: $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathfrak{H}}(LO_1)$.

Beweis: Es sei $\alpha' = \overline{I}$. τ' sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn $\xi_1 < \eta_1$ oder $\xi_1 = \eta_1$ und $\xi_2 \leq \eta_2$ gilt. Wegen $sym_{\mathfrak{G}}(\tau') \supseteq \mathfrak{G}$ gehört τ' zu Σ. Außerdem ist τ' eine Totalordnung in α'. Damit wird auch jedes andere einstellige Attribut α aus Σ durch τ' totalgeordnet. Das bedeutet, daß

$$\tau = Att_{\Sigma}(Ax \wedge Ay \wedge T'xy \,;\, x,y \,;\, f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} A & T' \\ \alpha & \tau' \end{matrix}\right\rangle)$$

eine Totalordnung in α ist.

Also ist LO_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ wahr.

Satz 3.8: $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathfrak{H}}(\neg AC^{Disj}_{1,1})$.

Beweis: q sei eine beliebige Zahl aus Q_{∞}. und q' sei aus Q_q. Es sei $\alpha = \overline{P2_{q,q'}}$. Offensichtlich gehört α wegen $sym_{\mathfrak{G}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{G}(P_q)$ zu $\mathfrak{I}_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$.

ϱ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn $\xi_1 = \eta_2$ und $\xi_2 = q$ gilt. Es ist leicht einzusehen, daß auch $sym_{\mathfrak{G}}(\varrho) \supseteq \mathfrak{G}(P_q)$ und damit $\varrho \in \mathfrak{I}_2(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ gilt.

Da für beliebige drei Individuen $\xi' = (\xi'_1,\xi'_2)$, $\xi'' = (\xi''_1,\xi''_2)$ und $\eta = (\eta_1,\eta_2)$ aus $(\xi',\eta) \in \varrho$ und $(\xi'',\eta) \in \varrho$ die Beziehungen $\eta_2 = \xi'_1 = \xi''_1$ und $\xi'_2 = \xi''_2 = q$ folgen, gilt für α und ϱ

$Wert_{\Sigma}(Kor^1_{Disj}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix}\right\rangle) = W$. Es wird nun angenommen, daß in Σ für α und ϱ eine Auswahlfunktion σ existiert. q_{σ} sei aus

Q_∞, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{g}(P_{q_\sigma})$ erfüllt ist. Es sei $q'' = \max\{q, q_\sigma\}+1$ und $\xi^0 = (q'', q)$. Da ξ^0 zu α gehört, existiert nun ein $\eta' = (\eta_1', \eta_2')$ mit $(\xi^0, \eta') \in \varrho$ und $(\xi^0, \eta') \in \sigma$. Aufgrund der Definition von ϱ gilt dann $q < q'' = \eta_2' < \eta_1'$. Es sei η_1'' eine rationale Zahl, für die $\eta_2' < \eta_1''$ gilt. Analog zu einem Satz aus [3] (S.115, Hilfssatz 6) existiert dann auch hier in $\mathfrak{g}(P_{q_\sigma})$ ein π mit $\pi(\xi^0) = \xi^0$ und $\pi(\eta_1', \eta_2') = (\eta_1'', \eta_2')$. Damit gilt für $\eta'' = (\eta_1'', \eta_2')$ nicht nur $(\xi^0, \eta'') \in \varrho$ sondern auch $(\xi^0, \eta'') \in \sigma$. Das bedeutet, daß σ keine Auswahlfunktion für α und ϱ ist. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $AC^{\mathrm{Disj}}_{1,1}$ in $\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})$ falsch.

<u>Satz 3.9:</u> $\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{P}}(\neg MC(4)^{LO}_{1,1})$.

Beweis: Es sei $\alpha = \mathrm{I}$. ϱ sei das zweistellige Attribut, das genau dann auf ein Paar $(\xi, \eta) = ((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2))$ zutrifft, wenn $\xi_2 < \eta_2 < \eta_1 < \xi_1$ gilt. Offensichtlich gilt $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \mathfrak{g}$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\varrho) = \mathfrak{g}$. Demzufolge gehören α und ϱ zu Σ. Außerdem gilt

$$\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^1(R,A), f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha\end{matrix}\right\rangle) = W$$ und wegen Satz 3.7 sogar

$$\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^1_{LO}(R,A), f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha\end{matrix}\right\rangle) = W.$$

Es wird nun angenommen, daß für α und ϱ bzgl. $\mathrm{Fin}_4(C)$ eine multiple Auswahlrelation σ in Σ existiert. Dann existiert in Q_∞ auch ein q_σ mit $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{g}(P_{q_\sigma})$. Es sei nun $\xi' = (\xi_1', \xi_2')$ ein Element von α mit $\xi_2' = q_\sigma$. Folglich existiert ein $\eta' = (\eta_1', \eta_2')$ mit $(\xi', \eta') \in \varrho$ und $(\xi', \eta') \in \sigma$. Dann gilt $\xi_2' < \eta_2' < \eta_1' < \xi_1'$. $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ sei ein beliebiges weiteres Individuum, für das $\xi_2' < \eta_2 < \eta_1 < \xi_1'$ gilt. Dann existiert wieder ein π aus $\mathfrak{g}(P_{q_\sigma})$ mit $\pi(\xi') = \xi'$ und $\pi(\eta') = \eta$. Damit trifft σ für jedes η aus der unendlichen Menge $M = \{(\eta_1, \eta_2) : \xi_2' < \eta_2 < \eta_1 < \xi_1'\}$ auf das Paar (ξ', η) zu. Es sei $\gamma_{\xi'} = \overline{M}$. Ist die Annahme richtig, so wird $\mathrm{Fin}_4(C)$ bei Belegung von C mit $\gamma_{\xi'}$ wahr, denn $\gamma_{\xi'}$ hat die Eigenschaften $\{\xi'\} \times \gamma_{\xi'} \subset \sigma$ und $\sigma \cap (\{\xi'\} \times (\mathrm{I} - \gamma_{\xi'})) = \emptyset$. Es sei υ ein dreistelliges Attribut, das eine Bijektion von $\gamma_{\xi'}$ auf $\overline{\gamma_{\xi'}}^2$ ist. Da $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\upsilon) \supseteq \mathcal{G}(P_{q_\upsilon})$ für $q_\upsilon = \xi_1'$ gilt, gehört υ zu Σ. Also wird $\neg \mathrm{Fin}_4(C)$ bei Belegung von C mit $\gamma_{\xi'}$ in Σ wahr. Das ist ein Widerspruch.

Demzufolge ist $\mathrm{MC}(4)^{\mathrm{LO}}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 3.10:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{G}}(\neg \mathrm{KW\text{-}AC}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien die im letzten Beweis definierten Attribute. Wird von der Annahme ausgegangen, daß für α und ϱ in Σ ein Selektor σ existiert, so kann auch hier die Existenz eines $\xi' = (\xi_1', \xi_2')$ nachgewiesen werden, für das $(\xi', \eta) \in \sigma$ für jedes $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ mit $\xi_2' < \eta_2 < \eta_1 < \xi_1'$ gilt. Das bedeutet, daß im Widerspruch zu der Annahme, daß σ ein Selektor für α und ϱ ist, für ξ' kein η'' mit $(\xi', \eta'') \in \varrho$ und $(\xi', \eta'') \notin \sigma$ existiert.

Demzufolge ist $\mathrm{KW\text{-}AC}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 3.11:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{G}}(\neg \mathrm{LW}_1)$.

Beweis: Nach Satz 3.7 ist LO_1 in Σ wahr. Wäre LW_1 in Σ ebenfalls wahr, so wäre auch WO_1 in Σ wahr. Das ist aber u.a. wegen Satz 3.8 nicht möglich.

Also ist LW_1 in $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 3.12:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{G}}(\mathrm{AC}^{\omega}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien Attribute aus $J_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ bzw. aus $J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$, so daß der Wert $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^1_{\omega}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{smallmatrix}\right\rangle)$ wahr ist. Dann existiert in $J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ ein τ und in I ein $\xi_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$, so daß $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{NZ}(A,x_0,T), f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix} A & x_0 & T \\ \alpha & \xi_0 & \tau \end{smallmatrix}\right\rangle) = W$ gilt. Außerdem existieren in Q_∞ ein q_ϱ und ein q_τ, für die $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\varrho) \supseteq \mathcal{G}(P_{q_\varrho})$ und damit auch $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\alpha) \supseteq \mathcal{G}(P_{q_\varrho})$ und $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau) \supseteq \mathcal{G}(P_{q_\tau})$ gelten. Es sei $q = \max\left\{q_\varrho, q_\tau, \xi_1^{(0)}\right\}$. Dann sind auch die Beziehungen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\varrho) \supseteq \mathcal{G}(P_q)$, $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\alpha) \supseteq \mathcal{G}(P_q)$ und $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau) \supseteq \mathcal{G}(P_q)$ erfüllt.

Nach Voraussetzung erfüllen α und τ die folgenden Bedingungen:

a) τ ist eine Injektion von α in α, und für ξ_0 existiert kein

Individuum η mit $(\eta,\xi_0)\in\tau$.

b) Wenn $\beta\in J_1(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ die nachstehenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, gilt $\beta=\alpha$.

(1) $\xi_0\in\beta$.

(2) Für alle ξ und η aus I folgt aus $\xi\in\beta$ und $(\xi,\eta)\in\tau$ die Beziehung $\eta\in\beta$.

(3) $\beta\subseteq\alpha$.

Aus a) folgt die Existenz einer Folge $(\zeta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, für die $\zeta_0=\xi_0$ ist und für alle $i\in\mathbb{N}$ das Attribut τ auf (ζ_i,ζ_{i+1}) zutrifft und die Glieder paarweise verschieden voneinander sind.

Es soll zunächst induktiv gezeigt werden, daß ζ_i für alle i aus $\mathbb{N}$ zu P_q gehört.

1) $\zeta_0=\xi_0$ gehört aufgrund der Definition von q zu P_q.

2) Für k aus $\mathbb{N}$ gehöre ζ_{k-1} zu P_q. Es wird nun angenommen, daß $\zeta_k=(\zeta_1^{(k)},\zeta_2^{(k)})$ nicht zu P_q gehört. Offensichtlich gilt dann $q<\zeta_1^{(k)}$. Für das Individuum $\zeta'=(\zeta_1',\zeta_2')$ gelte $\zeta_1^{(k)}<\zeta_1'$ sowie $\zeta_2^{(k)}=\zeta_2'$. Folglich gilt $\zeta_k\neq\zeta'$. Außerdem existiert in $\mathfrak{g}(P_q)$ analog zum Hilfssatz 6 aus [3] (S. 115) ein π mit $f(\pi)(\zeta_1^{(k)})=\zeta_1'$ und $f(\pi)(\zeta_2^{(k)})=\zeta_2'$, weil mit $q<\zeta_1^{(k)}$ auch $q<\zeta_1'$ gilt. Für π gilt also $\pi(\zeta_k)=\zeta'$ und aufgrund der Induktionsvoraussetzung $\pi(\zeta_{k-1})=\zeta_{k-1}$. Demzufolge ist mit (ζ_{k-1},ζ_k) auch (ζ_{k-1},ζ') aus τ. Das widerspricht der Injektivität von τ. Also ist die Annahme falsch. ζ_k gehört damit auch zu P_q.

Es sei $\beta=\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\zeta_i}$. Da ζ_i für jedes i aus $\mathbb{N}$ zu P_q gehört, ist die Beziehung $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\beta)\supseteq\mathfrak{g}(P_q)$ erfüllt. Also gehört β zu $J_1(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$. Außerdem erfüllt β die Bedingungen (1), (2) und (3). D.h., daß wegen b) $\beta=\alpha$ ist und daß α damit nur auf Individuen aus P_q zutrifft.

q_δ sei eine rationale Zahl, so daß $q<q_\delta$ gilt. Es wird nun gezeigt, daß für jedes ξ aus α in P_{q_δ} ein η' mit $(\xi,\eta')\in\varrho$ exi-

stiert. ξ sei ein beliebiges Individuum aus α. Zunächst gibt es nach Voraussetzung ein $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ mit $(\xi, \eta) \in \varrho$. Dann sind folgende Fälle möglich:

1) $\eta_2 < \eta_1 \leqq q_\sigma$;
2) $\eta_2 < q_\sigma < \eta_1$;
3) $q_\sigma \leqq \eta_2 < \eta_1$.

zu 2): Für das Individuum $\eta' = (\eta_1', \eta_2')$ gelte $\eta_2' = \eta_2$ und $\eta_1' \in]q, q_\sigma]$. Offensichtlich existiert dann in $\mathfrak{g}(P_q)$ ein π $(f(\pi) = \pi_0)$, für das $\pi(\xi) = \xi$ und $\pi(\eta) = (\pi_0(\eta_1), \pi_0(\eta_2)) = (\eta_1', \eta_2') = \eta'$ gilt. Demzufolge trifft ϱ auch auf (ξ, η') zu.

zu 3): Für das Individuum $\eta' = (\eta_1', \eta_2')$ mit $q < \eta_2' < \eta_1' < q_\sigma$ gilt analog zum Fall 2) $(\xi, \eta') \in \varrho$.

Folglich existiert für α und ϱ eine Auswahlfunktion σ, die für jedes ξ aus α auf ein Paar aus $\{\xi\} \times P_{q_\sigma}$ zutrifft. Diese Auswahlfunktion gehört wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{g}(P_{q_\sigma})$ zu Σ.

Also ist $AC^{\omega}_{1,1}$ in $\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{I})$ wahr.

4. Es sei $K = \{1,2,3\}$ und $I = \mathbb{N} \times K$. Dann ist

$$\mathcal{G} = \{\pi : \pi \in \mathrm{Perm}(I)$$
$$\& \exists \pi_0 (\pi_0 \in \mathrm{Perm}(\mathbb{N})$$
$$\& \forall \xi_1 (\xi_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \pi_{\xi_1} (\pi_{\xi_1} \in \mathrm{Perm}(K)$$
$$\& \forall \xi_2 (\xi_2 \in K$$
$$\Rightarrow \pi(\xi_1, \xi_2) = (\pi_0(\xi_1), \pi_{\xi_1}(\xi_2))))))\}$$

eine Gruppe von Permutationen von I. Es ist weiterhin $P_{<\omega}(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann ist leicht einzusehen, daß für $\mathfrak{I} = \{P : \exists M (M \in P_{<\omega}(\mathbb{N}) \ \& \ P \subseteq M \times K)\}$ die Gleichung $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0(I)$ gilt. Folglich gilt der

<u>Satz 4.1:</u> $\sum(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I})$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 4.2:</u> $\sum(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{H}}(VS_1)$.

Beweis: α und β seien aus $\mathfrak{I}_1(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I})$. M_α und M_β seien Elemente von $P_{<\omega}(\mathbb{N})$, so daß $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\alpha) \supseteq \mathcal{G}(M_\alpha \times K)$ und $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\beta) \supseteq \mathcal{G}(M_\beta \times K)$ gilt. Offensichtlich gehört auch $P = (M_\alpha \times K) \cup (M_\beta \times K)$ zu $\mathfrak{I}$. Außerdem gelten für P die Beziehungen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\alpha) \supseteq \mathcal{G}(P)$ und $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\beta) \supseteq \mathcal{G}(P)$. Ist $\xi' = (\xi_1', \xi_2')$ ein Individuum aus $(I-P) \cap \alpha$ (bzw. aus $(I-P) \cap \beta$) und $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ein Individuum aus I-P, so existiert in $\mathcal{G}(P)$ ein π mit $\pi(\xi') = \xi$, $\pi''(\{\xi_1'\} \times (K - \{\xi_2'\})) = \{\xi_1\} \times (K - \{\xi_2\})$, $\pi''(\{\xi_1\} \times K) = \{\xi_1'\} \times K$ und $\pi''(\{\eta_1\} \times K) = \{\eta_1\} \times K$ für alle η_1 aus $\mathbb{N} - \{\xi_1, \xi_1'\}$, woraus $\xi \in \alpha$ (bzw. $\xi \in \beta$) folgt. Das bedeutet, daß für α und β o.B.d.A. nur drei Fälle möglich sind und diese den im Beweis des Satzes 1.2 dieses Kapitels betrachteten Fällen entsprechen. Also existiert auch in diesem Permutationsmodell ein zweistelliges Attribut, das eine Injektion von α in β bzw. von β in α ist.

VS_1 ist damit in $\sum(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I})$ wahr.

<u>Satz 4.3:</u> $\sum(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{H}}(\neg VS_2)$.

Beweis: α sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ, η) zutrifft, wenn $\xi = \eta$ gilt. β sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ, η) $= ((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2))$ zutrifft, wenn $\xi \neq \eta$ und $\xi_1 = \eta_1$ gilt.

Es wird von der Annahme ausgegangen, daß eine Injektion τ von α in β bzw. von β in α in Σ existiert. M_τ sei ein Element von $P_{<\omega}(\mathbb{N})$, so daß die Beziehung $sym_{\mathfrak{g}}(\tau) \supseteq \mathfrak{g}(M_\tau \times K)$ erfüllt ist. υ sei ein vierstelliges Attribut über I und durch $\upsilon = \tau$ definiert, falls τ eine Injektion von α in β ist, und durch $\upsilon = \{(\xi',\xi'',\eta',\eta''): (\eta',\eta'',\xi',\xi'') \in \tau\}$ definiert, falls τ eine Injektion von β in α ist. Für υ gilt ebenfalls die Beziehung $sym_{\mathfrak{g}}(\upsilon) \supseteq \mathfrak{g}(M_\tau \times K)$. Außerdem ist υ eine Injektion von $\alpha' = \{(\xi',\xi''): \exists(\eta',\eta'')((\xi',\xi'',\eta',\eta'') \in \upsilon)\}$ in $\beta' = \{(\eta',\eta''): \exists(\xi',\xi'')((\xi',\xi'',\eta',\eta'') \in \upsilon)\}$. Da $\alpha' = \alpha$ oder $\beta' = \beta$ gilt, ist eine der Mengen α' und β' und damit auch die andere der beiden Mengen unendlich. Demzufolge existieren für die Injektion υ ein $(\xi^0,\xi^{00}) = ((\xi_1^0,\xi_2^0),(\xi_1^{00},\xi_2^{00}))$ aus $\alpha' - (M_\tau \times K)^2$ und ein $(\eta^0,\eta^{00}) = ((\eta_1^0,\eta_2^0),(\eta_1^{00},\eta_2^{00}))$ aus $\beta' - (M_\tau \times K)^2$, so daß $(\xi^0,\xi^{00},\eta^0,\eta^{00}) \in \upsilon$ erfüllt ist.

Dabei gelten folgende Beziehungen:

a) $\eta_1^0 = \eta_1^{00}$;

b) $\eta_2^0 \neq \eta_2^{00}$;

c) $\xi_1^0 = \xi_1^{00}$;

d) $\xi_2^0 = \xi_2^{00}$.

Es werden nun folgende Fälle unterschieden:

1) $\xi_2^0 = \eta_2^0$;

2) $\xi_2^0 = \eta_2^{00}$;

3) $\xi_2^0 \notin \{\eta_2^0, \eta_2^{00}\}$.

Es sei π_0 die identische Abbildung von $\mathbb{N}$. Außerdem sei π_{ξ_1} für alle $\xi_1 \in (\mathbb{N} - \{\xi_1^0, \eta_1^0\})$ die identische Abbildung von K und für $\xi_1 \in \{\xi_1^0, \eta_1^0\}$ eine Permutation π' von K, die auf $\{\eta_2^0, \eta_2^{00}\}$
im Fall 1) durch $\pi'(\eta_2^0) = \eta_2^0$ und $\pi'(\eta_2^{00}) = \eta_2^{000} \in K - \{\eta_2^0, \eta_2^{00}\}$,
im Fall 2) durch $\pi'(\eta_2^{00}) = \eta_2^{00}$ und $\pi'(\eta_2^0) = \eta_2^{000} \in K - \{\eta_2^0, \eta_2^{00}\}$ und
im Fall 3) durch $\pi'(\eta_2^0) = \eta_2^{00}$ und $\pi'(\eta_2^{00}) = \eta_2^0$
definiert ist.

Wegen b) ist π' für zwei Elemente aus K und damit auch für das dritte definiert.

Die Permutation π von I, für die für beliebige (ξ_1,ξ_2) aus I $\pi(\xi_1,\xi_2)=(\pi_0(\xi_1),\pi_{\xi_1}(\xi_2))$ gilt, gehört zu $\mathfrak{g}(M_\tau \times K)$. Da in allen Fällen $\pi(\xi^0)=\xi^0$ und wegen c) und d) damit auch $\pi(\xi^{00})=\xi^{00}$ gilt und außerdem wegen a)

im Fall 1) $\pi(\eta^0)=\eta^0$ und $\pi(\eta^{00})=\eta^{000}$,

im Fall 2) $\pi(\eta^0)=\eta^{000}$ und $\pi(\eta^{00})=\eta^{00}$ und

im Fall 3) $\pi(\eta^0)=\eta^{00}$ und $\pi(\eta^{00})=\eta^0$

gelten, wobei $\eta^{000}=(\eta_1^0,\eta_2^{000})$ sei, trifft v

im Fall 1) auf $((\xi^0,\xi^{00}),(\eta^0,\eta^{00}))$ und $((\xi^0,\xi^{00}),(\eta^0,\eta^{000}))$,

im Fall 2) auf $((\xi^0,\xi^{00}),(\eta^0,\eta^{00}))$ und $((\xi^0,\xi^{00}),(\eta^{000},\eta^{00}))$ und

im Fall 3) auf $((\xi^0,\xi^{00}),(\eta^0,\eta^{00}))$ und $((\xi^0,\xi^{00}),(\eta^{00},\eta^0))$ zu.

Demzufolge kann v keine Injektion von α' in β' sein, weil η^{000} nicht aus $\{\eta^0,\eta^{00}\}$ ist. Das ist ein Widerspruch.

Also ist VS_2 in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ falsch.

5. Es seien $K=\{(\xi_1,\xi_2): \xi_1\in\mathbb{N} \,\&\, \xi_2\in\mathbb{N} \,\&\, \xi_2 \leqq \xi_1\}$.
$\mathbb{L}=\{L: L\subset\{l: l:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \,\&\, \forall i(i\in\mathbb{N} \Rightarrow l(i)\leqq i)\} \,\&\, |L|<\omega\}$ und
$M: \mathbb{L}\to\mathcal{P}(K\times\mathbb{N})$ eine Abbildung, so daß für jedes L aus $\mathbb{L}$
$M(L)=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3): (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in K\times\mathbb{N} \,\&\, \exists l(l\in L \,\&\, l(\xi_1)=\xi_2)\}$ gilt.
Die folgende Abbildung verdeutlicht die Definitionen an einem Beispiel.

l_1, l_2 und l_3 seien Abbildungen, die an den Stellen 0 bis 5 durch die in der Tabelle angegebenen Werte definiert sind:

i	0	1	2	3	4	5
$l_1(i)$	0	0	1	0	1	0
$l_2(i)$	0	0	2	2	2	2
$l_3(i)$	0	1	1	3	3	5

Tab. 4

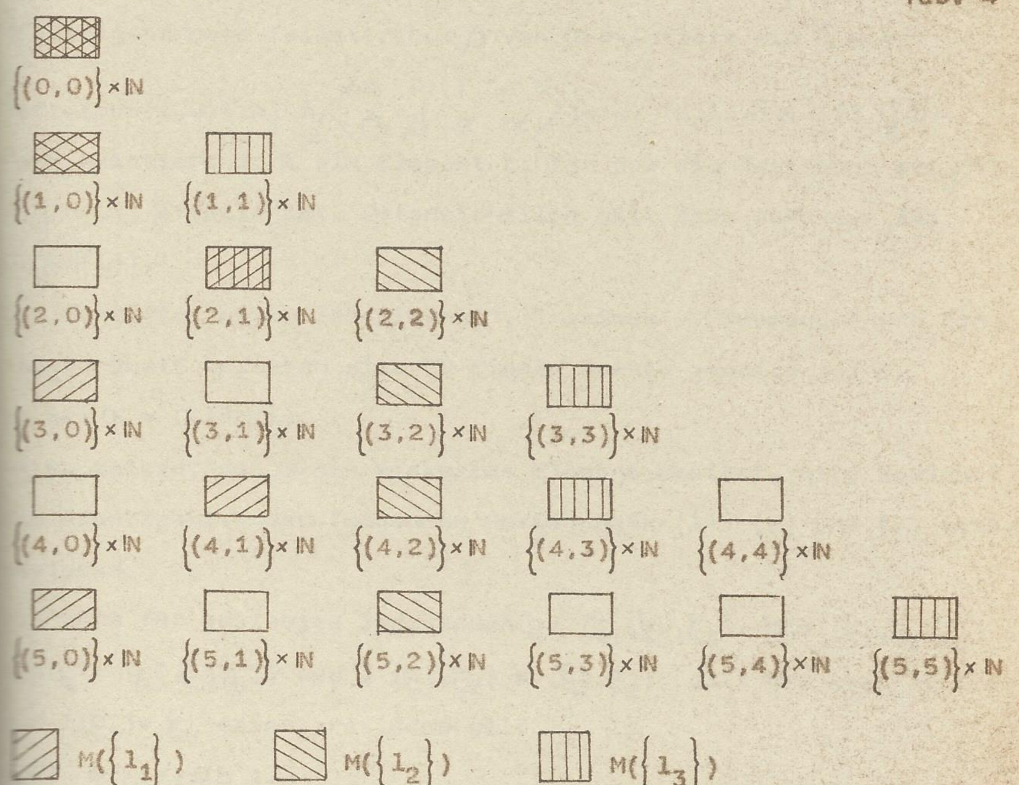


Abb. 5

Für $L=\{l_1,l_2,l_3\}$ gilt $M(L)=\bigcup_{j\in\{1,2,3\}} M(\{l_j\})$.

Es seien $I = K \times \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{G} = \{\pi : \pi \in \mathrm{Perm}(I) \;\&\; \forall(\xi_1,\xi_2)((\xi_1,\xi_2) \in K \Rightarrow \exists\pi_{(\xi_1,\xi_2)}(\pi_{(\xi_1,\xi_2)} \in \mathrm{Perm}(\mathbb{N}) \;\&\; \forall\xi_3(\xi_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow \pi(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (\xi_1,\xi_2,\pi_{(\xi_1,\xi_2)}(\xi_3)))))\}$$

und $\mathfrak{J} = \{P : \exists L(L \in \mathbb{L} \;\&\; P \subseteq M(L))\}$.

Es ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von Permutationen von I ist und $\mathfrak{J}$ ein Normal-Ideal in I bzgl. $\mathfrak{G}$ ist. Demzufolge gilt

<u>Satz 5.1:</u> $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 5.2:</u> $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{H}}(ZL_1)$.

Beweis: α und τ seien Attribute aus $J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ bzw. $J_2(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$. Außerdem sei τ eine partielle Ordnung in α, und für jedes durch τ totalgeordnete Teilattribut β von α existiere ein ζ mit

$$\mathrm{Wert}_{\sum}(\mathrm{Sup}(z,B,T,A), f_{\sum}\left\langle \begin{matrix} z & B & T & A \\ \zeta & \beta & \tau & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W, \text{ falls } \beta \in J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}).$$

Dann existiert in $\mathbb{L}$ ein Element L, für das die Beziehung $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\tau) \supseteq \mathfrak{G}(M(L))$ erfüllt ist. Offensichtlich gilt dann auch $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{G}(M(L))$.

Die Begriffe "maximales Element", "Maximum", "Supremum" und "totalgeordnet" beziehen sich in diesem Beweis jeweils auf τ.

Es sei $\alpha_1 = \alpha \cap M(L)$.

Um zu zeigen, daß α ein maximales Element besitzt, wird zunächst die Richtigkeit der folgenden Beziehungen (1), (2) und (3) nachgewiesen.

(1) Wenn für beliebige Individuen $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\xi' = (\xi_1,\xi_2,\xi_3')$ und $\xi'' = (\xi_1'',\xi_2'',\xi_3'')$ aus I $(\xi_1,\xi_2) \neq (\xi_1'',\xi_2'')$ gilt und kein $l \in L$ mit $l(\xi_1) = \xi_2$ existiert, dann gilt

(1a) $\alpha(\xi) = \alpha(\xi')$,

(1b) $(\xi,\xi') \in \tau$ genau dann, wenn $\xi_3 = \xi_3'$ gilt, und

(1c) $\tau(\xi,\xi'') = \tau(\xi',\xi'')$ und $\tau(\xi'',\xi) = \tau(\xi'',\xi')$.

(2) Wenn $\beta \in J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ ein totalgeordnetes Teilattribut von α ist, $\beta \neq \emptyset$ gilt und ζ ein Individuum aus α ist, so daß

$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Sup}(z,B,T,A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} z & B & T & A \\ \zeta & \beta & \tau & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W$ gilt, so gilt $\zeta \in M(L) \cup \beta$.

(3) Wenn $\alpha_1 \neq \emptyset$ gilt, so besitzt α_1 ein maximales Element.

Für ξ, ξ' und ξ'' seien die Voraussetzungen von (1) erfüllt. Dann sei π die Permutation von I, so daß $\pi(\xi) = \xi'$ und $\pi(\xi') = \xi$ gilt und deren Einschränkung auf $I - \{\xi, \xi'\}$ eine identieche Abbildung ist. Offenbar ist π aus $\mathcal{G}(M(L))$. Außerdem gilt $\pi(\xi'') = \xi''$. Damit sind (1a) und (1c) wegen $\alpha^{\pi} = \alpha$ und $\tau^{\pi} = \tau$ klar. Gilt $(\xi, \xi') \in \tau$, so gilt auch $(\pi(\xi), \pi(\xi')) = (\xi', \xi) \in \tau$, woraus $\xi_3 = \xi_3'$ folgt, weil τ antisymmetrisch ist. Also gilt auch (1b).

Für β und $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ seien die Voraussetzungen von (2) erfüllt. Es wird nun angenommen, daß $\zeta \notin M(L) \cup \beta$ gilt. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ sei ein beliebiges Individuum aus β. Da ζ nicht aus β ist, muß die Ungleichung $\zeta \neq \xi$ gelten. Wegen (1b) und $(\xi, \zeta) \in \tau$ ist dann sogar

$(\zeta_1, \zeta_2) \neq (\xi_1, \xi_2)$. (*)

Es sei $\zeta' = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3') \neq \zeta$. Wegen (1b) gilt $(\zeta', \zeta) \notin \tau$ und damit $\zeta' \notin \beta$, weil ζ das Supremum von β in α ist. Wegen (*) und (1c) gilt aber mit $(\xi, \zeta) \in \tau$ auch $(\xi, \zeta') \in \tau$ für alle ξ aus β. Folglich gilt $(\zeta, \zeta') \in \tau$, weil ζ das Supremum von β in α ist und weil ζ' wegen (1a) zu α gehört. Das ist ein Widerspruch zu (1b). Demzufolge gilt (2).

Es seien nun die Voraussetzungen von (3) erfüllt. Jedes Attribut β über I, das ein totalgeordnetes Teilattribut von α_1 ist, gehört wegen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\beta) \supseteq \mathcal{G}(M(L))$ zu Σ. Ist β nicht leer, so hat β nach Voraussetzung in α ein Supremum, welches aufgrund der Beziehung (2) zu $M(L) \cup \beta$, damit sogar zu $\alpha \cap (M(L) \cup \beta)$ und damit zu α_1 gehört. Damit besitzt α_1 aufgrund des Zornschen Lemmas[1] ein maximales Element, weil $\alpha_1 \neq \emptyset$ gilt. Also gilt auch (3).

Dann sind folgende Fälle möglich:

---

1) in der Metatheorie

1) Es gilt $\alpha_1 = \emptyset$.

2) Es gilt $\alpha_1 \neq \emptyset$. ξ_0 sei ein maximales Element von α_1.

2.1) $\{\xi : (\xi_0, \xi) \in \tau\} \neq \emptyset$.

2.2) $\{\xi : (\xi_0, \xi) \in \tau\} = \emptyset$.

Im Fall 2.2) ist ξ_0 ein maximales Element von α.

Im Fall 1) sei $\alpha_2 = \alpha$, und im Fall 2.1) gelte $\alpha_2 = \{\xi : (\xi_0, \xi) \in \tau\}$.

Da α nach Voraussetzung nicht leer ist, ist auch α_2 in beiden Fällen nicht leer. Um zu zeigen, daß α ein maximales Element besitzt, genügt es zu zeigen, daß α_2 ein maximales Element besitzt. Denn aufgrund der Definition von α_2 ist jedes maximale Element von α_2 auch ein maximales Element von α.

Es wird nun von der Annahme ausgegangen, daß α_2 kein maximales Element besitzt. Dann existiert ein einstelliges Attribut β' über I, das ein totalgeordnetes Teilattribut von α_2 ist und das in α_2 kein Supremum hat, weil α_2 nicht leer ist.

$l: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei die Abbildung, die für jedes $\xi_1 \in \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} l(\xi_1) = \max{}^{1)}\{\xi_2 : \exists \xi_3 ((\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \beta') \\ \& \neg \exists (\xi_2', \xi_3')(\xi_2' \neq \xi_2 \;\&\; (\xi_1, \xi_2', \xi_3') \in \beta' \\ \& ((\xi_1, \xi_2, \xi_3), (\xi_1, \xi_2', \xi_3')) \in \tau)) \\ \vee \xi_2 = 0\} \end{aligned}$$

definiert ist. Offensichtlich gehört $\{l\}$ zu L. Es sei $\beta'' = \beta' \cap \overline{M(\{l\})}$.

Es ist leicht einzusehen, daß auch β'' ein totalgeordnetes Teilattribut von α_2 ist und wegen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\beta'') \supseteq \mathcal{G}(M(\{l\}))$ zu $\mathfrak{I}_1(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I})$ gehört. Es wird nun angenommen, daß β'' ein Supremum ζ in α_2 hat. Dann gilt aufgrund von (2) $\zeta \in (\beta'' \cup M(L)) \cap \alpha_2$. Das bedeutet dann wegen $M(L) \cap \alpha_2 = \emptyset$, daß ζ zu β'' gehört. ζ ist aber kein Supremum von β'. Daraus folgt die Existenz

1. eines $\xi' = (\xi_1', \xi_2', \xi_3') \in \beta'$ mit $(\xi', \zeta) \notin \tau$ oder
2. eines ζ' mit $\zeta' \in \alpha_2$, $(\xi, \zeta') \in \tau$ für alle $\xi \in \beta'$ und $(\zeta, \zeta') \notin \tau$.

---

1) bzgl. der "$\leq$"-Beziehung in der Menge der natürlichen Zahlen

zu 1.: Aus $\xi' \in \beta'$ folgt, daß $\beta^0 = \beta' \cap (\{\xi_1'\} \times \{0,\ldots,\xi_1'\} \times \mathbb{N})$ nicht leer ist. Außerdem enthält das totalgeordnete β^0 wegen (1b) und wegen $\beta^0 \cap M(L) = \emptyset$ höchstens $\xi_1'+1$ Elemente. Damit hat β^0 ein Maximum $\xi'' = (\xi_1', \xi_2'', \xi_3'')$ das nach Definition von β'' zu β'' gehört. Es gilt dann aber $(\xi', \xi'') \in \tau$ und $(\xi'', \zeta) \in \tau$, woraus $(\xi', \zeta) \in \tau$ folgt. Das ist ein Widerspruch.

zu 2.: Aus 2. folgt für ζ' und alle $\xi \in \beta''$ die Beziehung $(\xi, \zeta') \in \tau$ und daraus $(\zeta, \zeta') \in \tau$, weil ζ das Supremum von β'' in α_2 ist. Das ist aber ebenfalls ein Widerspruch. Damit ist die Annahme, daß β'' in α_2 ein Supremum hat, falsch. β'' hat dann aufgrund der Definition von α_2 aber auch kein Supremum in α. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme, daß α_2 kein maximales Element besitzt, falsch.

α_2 besitzt demnach ein maximales Element, welches gleichzeitig ein maximales Element von α ist.

Also ist ZL_1 in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ wahr.

<u>Satz 5.3:</u> $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J}) \in Mod_{\mathfrak{g}}(LW_1)$.

Beweis: α sei ein Attribut aus $J_1(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$, das in $\sum$ totalgeordnet werden kann. τ sei ein Attribut aus $J_2(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$, das eine Totalordnung in α ist. L sei ein Element aus $\mathbb{L}$, so daß $sym_{\mathfrak{g}}(\tau) \supseteq \mathfrak{g}(M(L))$ gilt. Offensichtlich gilt dann auch $sym_{\mathfrak{g}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{g}(M(L))$. Analog zum letzten Beweis gilt für zwei Individuen $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ und $\zeta' = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3')$, für die kein $l \in L$ mit $l(\zeta_1) = \zeta_2$ existiert,

(a) $\alpha(\zeta) = \alpha(\zeta')$ und

(b) $(\zeta, \zeta') \in \tau$ genau dann, wenn $\zeta_3 = \zeta_3'$ gilt.

Es soll nun gezeigt werden, daß $\alpha \subseteq M(L)$ gilt. Dazu wird von der Annahme ausgegangen, daß $\alpha - M(L)$ nicht leer ist. $\xi' = (\xi_1', \xi_2', \xi_3')$ sei ein Element von $\alpha - M(L)$. Wegen (a) gilt dann für $\xi'' = (\xi_1', \xi_2', \xi_3'')$ mit $\xi_3' \neq \xi_3''$ ebenfalls die Beziehung $\xi'' \in \alpha - M(L)$. Wegen (b) gilt aber weder $(\xi', \xi'') \in \tau$ noch $(\xi'', \xi') \in \tau$. Das ist ein Widerspruch dazu, daß τ eine Totalordnung in α ist. Also gilt

$\alpha \subseteq M(L)$.

υ sei ein beliebiges zweistelliges Attribut über I, das eine Wohlordnung in α ist. Dann gilt $\upsilon \subset M(L)^2$ und damit $sym_{\mathcal{G}}(\upsilon) \supseteq \mathcal{G}(M(L))$. Demzufolge gehört υ zu Σ.

Damit ist LW_1 in $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ wahr.

<u>Satz 5.4:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}}(\neg MC(4)^{\omega}_{1,1})$.

Beweis: Es sei h eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf K. Eine solche Abbildung kann mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens definiert werden.

Es sei $\alpha = \overline{\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{N}}$ und ϱ das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\xi_1,\xi_2,\xi_3),(\eta_1,\eta_2,\eta_3))$ zutrifft, wenn $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ und $h(\xi_3) = (\eta_1,\eta_2)$ gilt. l sei die für jedes $i \in \mathbb{N}$ durch $l(i) = 0$ definierte Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Es ist leicht einzusehen, daß für die Menge $\{l\}$, die zu $\mathbb{L}$ gehört, die Beziehungen $sym_{\mathcal{G}}(\alpha) \supseteq \mathcal{G}(M(\{l\}))$ und $sym_{\mathcal{G}}(\varrho) \supseteq \mathcal{G}(M(\{l\}))$ gelten. Damit gehören α und ϱ zu Σ.

τ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\xi_1,\xi_2,\xi_3),(\eta_1,\eta_2,\eta_3))$ zutrifft, wenn $\xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ und $\eta_3 = \xi_3 + 1$ gilt. Wegen $sym_{\mathcal{G}}(\tau) \supseteq \mathcal{G}(M(\{l\}))$ gehört τ zu Σ. Offensichtlich gilt für $\xi_0 = (0,0,0)$ $Wert_{\Sigma}(NZ(x_0,T,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} x_0 & T & A \\ \xi_0 & \tau & \alpha \end{matrix}\right\rangle) = W$. Damit gilt auch $Wert_{\Sigma}(Kor^1_{\omega}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix}\right\rangle) = W$.

Es wird nun angenommen, daß für α und ϱ bzgl. der Endlichkeitsdefinition $Fin_4(C)$ eine multiple Auswahlrelation σ existiert, die zu Σ gehört. $L = \{l_1,\ldots,l_j\}$ $(j \geq 1)$ sei ein Element von $\mathbb{L}$, so daß $sym_{\mathcal{G}}(\sigma) \supseteq \mathcal{G}(M(L))$ gilt. Die Menge $J = \{j\} \times \bigcup_{j'=1}^{j} \{l_{j'}(j)\}$ enthält höchstens j Elemente; d.h., daß ein j^0 mit $j^0 \leq j$ und $(j,j^0) \in K-J$ existiert. Das bedeutet dann aber, daß $\{(j,j^0)\} \times \mathbb{N}$ und $M(L)$ disjunkt sind.

(*)

Es sei nun $\xi_3^0 = h^{-1}(j,j^0)$. Aufgrund der Annahme existiert für $\xi^0 = (0,0,\xi_3^0)$ ein $\eta^0 = (j,j^0,\eta_3^0)$ aus $\{(j,j^0)\} \times \mathbb{N}$, so daß $(\xi^0,\eta^0) \in \sigma$ gilt. Es sei $\eta = (j,j^0,\eta_3)$ ein beliebiges Element aus $\{(j,j^0)\} \times \mathbb{N}$. $\pi_{(\xi_1,\xi_2)}$ sei für beliebige $(\xi_1,\xi_2) \in K - \{(j,j^0)\}$ die Permutation von $\mathbb{N}$, die einer identischen Abbildung entspricht. $\pi_{(j,j^0)}$ sei eine Permutation von $\mathbb{N}$, die η_3^0 auf η_3 abbildet. Offensichtlich gehört die Permutation π, für die für jedes (ξ_1,ξ_2,ξ_3) aus I die Gleichung $\pi(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (\xi_1,\xi_2,\pi_{(\xi_1,\xi_2)}(\xi_3))$ gilt, wegen (*) zu $\mathfrak{g}(M(L))$. Außerdem gilt die Gleichung $\pi(\eta^0) = \eta$ und wegen $j \geqq 1$ die Gleichung $\pi(\xi^0) = \xi^0$. Damit trifft σ auf (ξ^0,η) für jedes beliebiges η aus $\{(j,j^0)\} \times \mathbb{N}$ zu. Es sei $\gamma = \overline{\{(j,j^0)\} \times \mathbb{N}}$. γ trifft auf unendlich viele Individuen zu; d.h., daß ein dreistelliges Attribut φ existiert, das eine Bijektion von γ auf $\overline{\gamma^2}$ ist.

Es sei l' die für jedes $i \in \mathbb{N} - \{j\}$ durch $l'(i) = 0$ und durch $l'(j) = j^0$ definierte Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\varphi) \supseteq \mathfrak{g}(M(\{l'\}))$. Damit ist φ ein Attribut, das zu Σ gehört. Es wird nun aber $Fin_4(C)$ in Σ bei Belegung von C mit γ falsch. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß σ in Σ bzgl. $Fin_4(C)$ eine multiple Auswahlrelation für α und ϱ ist.

Also ist $MC(4)^{\omega}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 5.5:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathfrak{H}}(\neg MC^{LO}_{1,1}(4))$.

Beweis: α und ϱ seien die im letzten Beweis definierten Attribute. l sei auch die Abbildung aus dem letzten Beweis. τ sei ein zweistelliges Attribut, das eine Totalordnung in α ist. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\tau) \supseteq \mathfrak{g}(M(\{l\}))$ gehört τ zu Σ. Damit gilt

$$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^{1}_{LO}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W.$$

Trotzdem existiert für α und ϱ in Σ bzgl. $Fin_4(C)$ keine multiple Auswahlrelation.

Also ist $MC^{LO}_{1,1}(4)$ in $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 5.6:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathfrak{H}}(\neg AC^{Disj}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien die Attribute aus dem Beweis des Satzes 5.4. Es ist leicht einzusehen, daß auch

$\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^1_{\mathrm{Disj}}(R,A), f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix}\right\rangle) = W$ gilt. Die Annahme, daß in Σ für α und ϱ eine Auswahlfunktion σ existiert, kann zum Widerspruch geführt werden, indem analog zum Beweis des Satzes 5.4 gezeigt wird, daß für ein ξ^o aus α ein (j,j^o) aus K existiert, so daß σ auf jedes (ξ^o,η) mit $\eta \in \{(j,j^o)\} \times \mathbb{N}$ zutrifft.

Also ist $AC^{\mathrm{Disj}}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ falsch.

Auf gleiche Weise kann auch der folgende Satz gezeigt werden.

<u>Satz 5.7:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{G}}(\neg KW\text{-}AC_{1,1})$.

<u>Satz 5.8:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{G}}(\neg DC_1)$.

Beweis: h sei die beim Beweis des Satzes 5.4 definierte Abbildung. τ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\xi_1,\xi_2,\xi_3),(\eta_1,\eta_2,\eta_3))$ zutrifft, wenn in $\mathbb{N}$ ein i existiert, so daß $h(i) = (\xi_1,\xi_2)$ und $h(i+1) = (\eta_1,\eta_2)$ gilt. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\tau) = \mathfrak{g}$ gehört τ zu Σ. ξ_0 sei ein Individuum aus $\{h(0)\} \times \mathbb{N}$.

Offensichtlich gilt $\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Rel}_W \subsetneq D(T) \wedge \bigvee_{x_1} Tx_0x_1, f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} T & x_0 \\ \tau & \xi_0 \end{matrix}\right\rangle)$ $= W$.

Es wird nun angenommen, das in Σ für τ und ξ_0 eine bedingte Auswahlfunktion υ existiert. L sei ein Element von $\mathbb{L}$, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\upsilon) \supseteq \mathfrak{g}(M(L))$ gilt und $\{h(0)\} \times \mathbb{N}$ eine Teilmenge von M(L) ist. Aus der Annahme folgt die Existenz einer Folge $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, für die $\eta_0 = \xi_0$ und für jedes i aus $\mathbb{N}$ $(\eta_i,\eta_{i+1}) \in \upsilon$ und $\eta_i \in \{h(i)\} \times \mathbb{N}$ gilt. Da υ eine Funktion ist, gilt für jedes π aus $\mathfrak{g}(M(L))$ nicht nur $\pi(\eta_0) = \eta_0$, sondern auch $\pi(\eta_i) = \eta_i$ für $i \in \{1,2,\ldots\}$. Demzufolge gilt für das Attribut $\gamma = \overline{\{\eta_i : i \in \mathbb{N}\}}$ die Beziehung $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\gamma) \supseteq \mathfrak{g}(M(L))$. Also gehört γ zu Σ. Offensichtlich ist dann aber das Attribut

$\sigma = \mathrm{Att}_\Sigma(Rxy \wedge Cy\ ;\ x,y\ ;\ f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R & C \\ \varrho & \gamma \end{matrix}\right\rangle)$

für die Attribute α und ϱ, die beim Beweis des Satzes 5.4 definiert wurden, eine Auswahlfunktion. Das ist ein Widerspruch; denn aus dem Beweis des Satzes 5.6 ist bekannt, daß für α und ϱ in Σ keine Auswahlfunktion existiert.

Damit ist die Annahme, daß für τ und ξ_0 eine bedingte Auswahlfunktion in Σ existiert, falsch.

Demzufolge ist DC_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

6. Es seien $K = \{1,2,3\}$, $I_1 = \mathbb{N} \times \{1\}$, $I_2 = \mathbb{N} \times \{2,3\}$ und $I = I_1 \cup I_2$.
Es ist dann leicht einzusehen, daß

$$\mathcal{G} = \{\pi : \pi \in \mathrm{Perm}(I)$$
$$\& \exists \pi_0 (\pi_0 \in \mathrm{Perm}(\mathbb{N})$$
$$\& \forall \xi_1 (\xi_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \pi(\xi_1,1) = (\pi_0(\xi_1),1)$$
$$\& \exists \pi_{\xi_1} (\pi_{\xi_1} \in \mathrm{Perm}(\{2,3\})$$
$$\& \pi(\xi_1,2) = (\pi_0(\xi_1), \pi_{\xi_1}(2))$$
$$\& \pi(\xi_1,3) = (\pi_0(\xi_1), \pi_{\xi_1}(3))))) \}$$

eine Gruppe von Permutationen von I ist. $P_{<\omega}(\mathbb{N})$ sei die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann gilt für das Ideal
$\mathcal{J} = \{ P : \exists M (M \in P_{<\omega}(\mathbb{N}) \; \& \; P \subseteq M \times K)\}$ die Gleichung $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0(I)$.
Daraus folgt der

<u>Satz 6.1:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathcal{J})$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 6.2:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathcal{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{H}}(GCH(2)_1)$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß für jedes einstellige Attribut α aus Σ die Aussage $\mathrm{Fin}_2(A)$ oder die Aussage $\bigwedge_B (H^{+}(A,B) \Leftrightarrow H^{\wedge}(A,B))$ bei Belegung vpn A mit α in Σ wahr ist.
Im folgenden wird gezeigt, daß für alle α aus $\mathcal{J}_1(I,\mathcal{G},\mathcal{J})$ der Wert $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Fin}_2(A), f_{\Sigma}\left\langle {A \atop \alpha} \right\rangle)$ wahr ist. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, daß in Σ ein einstelliges Attribut α' existiert, für das $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Fin}_2(A), f_{\Sigma}\left\langle {A \atop \alpha'} \right\rangle) = F$ gilt. Folglich gilt $\alpha' \neq \emptyset$, und es muß in Σ ein zweistelliges Attribut τ existieren, das folgende Eigenschaften hat:

1) für alle ξ aus α' gilt $(\xi,\xi) \notin \tau$;
2) für alle ξ, ξ' und ξ'' aus α' folgt aus $(\xi,\xi') \in \tau$ und $(\xi',\xi'') \in \tau$ die Beziehung $(\xi,\xi'') \in \tau$;
3) für alle ξ aus α' existiert in α' ein ξ' mit $(\xi,\xi') \in \tau$.

$M_{\alpha'}$ und M_{τ} seien endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$, so daß $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\alpha') \supseteq \mathcal{G}(M_{\alpha'} \times K)$, $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau) \supseteq \mathcal{G}(M_{\tau} \times K)$ gilt. Offensichtlich gelten für die endliche Menge $M = M_{\alpha'} \cup M_{\tau}$ die Beziehungen $sym_{\mathfrak{g}}(\alpha') \supseteq \mathfrak{g}(M \times K)$ und $sym_{\mathfrak{g}}(\tau) \supseteq \mathfrak{g}(M \times K)$.

Da $\alpha' \neq \emptyset$ gilt, existiert aufgrund von 3) eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so daß für alle $i \in \mathbb{N}$ die Beziehungen $f_i \in \alpha'$ und $(f_i, f_{i+1}) \in \tau$ gelten. Aufgrund von 2) gilt dann sogar für beliebige i und j aus $\mathbb{N}$ mit $i < j$ die Beziehung $(f_i, f_j) \in \tau$. Das bedeutet wegen der Beziehung 1), daß die Glieder der Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise verschieden sind. Da $M \times K$ endlich ist, existiert ein i', so daß für alle i mit $i' \leqq i$ das Glied f_i nicht zu $M \times K$ gehört. (*)

Da $L = \bigcup_{i=i'}^{\infty} \{f_i\}$ nun unendlich ist, ist $L \cap I_1$ oder $L \cap I_2$ unendlich.

D.h., daß einer der beiden folgenden Fälle gilt:

a) Es existiert ein (j', j'') mit $i' < j' < j''$, $f_{j'} \in I_2$ und $f_{j''} \in I_2$.

b) Es existiert ein (j', j'') mit $i' < j' < j''$, $f_{j'} \in I_1$ und $f_{j''} \in I_1$.

zu a): Es sei $\xi' = (\xi_1', \xi_2') = f_{j'}$ und $\xi'' = (\xi_1'', \xi_2'') = f_{j''}$. Dann gilt $\xi' \in \alpha'$, $\xi'' \in \alpha'$ und $(\xi', \xi'') \in \tau$. π_0 sei die Permutation von $\mathbb{N}$, so daß $\pi_0(\xi_1') = \xi_1''$ und $\pi_0(\xi_1'') = \xi_1'$ gilt und deren Einschränkung auf $\mathbb{N} - \{\xi_1', \xi_1''\}$ eine identische Abbildung ist. π_{ξ_1} sei für alle ξ_1 aus $\mathbb{N} - \{\xi_1', \xi_1''\}$ die identische Abbildung von $\{2,3\}$. π_{ξ_1} aus $Perm(\{2,3\})$ sei für ξ_1 aus $\{\xi_1', \xi_1''\}$ durch $\pi_{\xi_1}(\xi_2') = \xi_2''$ und $\pi_{\xi_1}(\xi_2'') = \xi_2'$ definiert. Offensichtlich gehört die Permutation π von I, für die für alle (ξ_1, ξ_2) aus I die Gleichung $\pi(\xi_1, \xi_2) = (\pi_0(\xi_1) \pi_{\xi_1}(\xi_2))$ gilt, wegen (*) zu $\mathfrak{g}(M \times K)$. Außerdem gilt $\pi(\xi') = \xi''$ und $\pi(\xi'') = \xi'$. Dann gilt aber mit $(\xi', \xi'') \in \tau$ auch $(\xi'', \xi') \in \tau$. Daraus folgt dann aber wegen 2) $(\xi', \xi') \in \tau$. Das ist ein Widerspruch zu 1). Damit kann der Fall a) nicht eintreten. Auf gleiche Weise kann aber auch gezeigt werden, daß der Fall b) nicht eintreten kann. Damit ist die Annahme, daß in Σ ein α' existiert, für das $Wert_{\Sigma}(Fin_2(A), f_{\Sigma}\left\langle {A \atop \alpha'} \right\rangle) = F$ gilt, falsch.

Also ist $GCH(2)_1$ in $\sum(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$ wahr.

Satz 6.3: $\sum(I,\mathcal{G},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{h}}(LW_1)$.

Beweis: α sei ein beliebiges Attribut aus $J_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$, das in Σ totalgeordnet werden kann. τ sei ein Attribut aus $J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{J})$, das eine Totalordnung in α ist. M sei ein Element von $P_{<\omega}(\mathbb{N})$, so daß $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau) \supseteq \mathcal{G}(M\times K)$ gilt. Es sei $P= M\times K$.

α trifft nur auf endlich viele Individuen von Σ zu. Um das zu zeigen, wird von der Annahme ausgegangen, daß α auf unendlich viele Individuen zutrifft. Dann trifft $\alpha_1 = \alpha \cap \overline{I_1}$ oder $\alpha_2 = \alpha \cap \overline{I_2}$ auf unendlich viele Individuen zu. Demzufolge muß einer der beiden folgenden Fälle erfüllt sein:

a) Es existieren in $\alpha_2 - P$ zwei Individuen $\xi' = (\xi_1', \xi_2')$ und $\xi'' = (\xi_1'', \xi_2'')$ mit $\xi' \neq \xi''$ und $(\xi', \xi'') \in \tau$.

b) Es existieren in $\alpha_1 - P$ zwei Individuen ξ' und ξ'' mit $\xi' \neq \xi''$ und $(\xi', \xi'') \in \tau$.

zu a): π_0 sei eine Permutation von $\mathbb{N}$, es gelte $\pi_0(\xi_1') = \xi_1''$ und $\pi_0(\xi_1'') = \xi_1'$, und die Einschränkung von π_0 auf $\mathbb{N} - \{\xi_1', \xi_1''\}$ sei eine identische Abbildung. π_{ξ_1} sei für alle ξ_1 aus $\mathbb{N} - \{\xi_1', \xi_1''\}$ die identische Abbildung von $\{2,3\}$. π_{ξ_1} sei für ξ_1 aus $\{\xi_1', \xi_1''\}$ eine Permutation von $\{2,3\}$ und durch die Gleichungen $\pi_{\xi_1}(\xi_2') = \xi_2''$ und $\pi_{\xi_1}(\xi_2'') = \xi_2'$ definiert. π sei eine Permutation von I und für alle (ξ_1, ξ_2) aus I durch $\pi(\xi_1,\xi_2) = (\pi_0(\xi_1)\, \pi_{\xi_1}(\xi_2))$ definiert.

Dann gilt $\pi(\xi') = \xi''$ und $\pi(\xi'') = \xi'$. Außerdem ist π aus $\mathcal{G}(P)$. Demzufolge ist mit $(\xi', \xi'') \in \tau$ auch $(\xi'', \xi') \in \tau$ erfüllt. Damit gilt $\xi' = \xi''$, weil τ antisymmetrisch ist. Das ist ein Widerspruch. Deshalb kann der Fall a) nicht eintreten.

Auf ähnliche Weise kann gezeigt werden, daß der Fall b) nicht eintreten kann. Demzufolge ist die Annahme, daß α auf unendlich viele Individuen zutrifft, falsch.

Also ist α endlich. Das bedeutet, daß τ nicht nur Totalordnung, sondern auch Wohlordnung in α ist.

Damit ist LW_1 in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ wahr.

Satz 6.4: $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(\neg LO_1)$.

Beweis: Es sei $\alpha' = \bar{I}$. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha') = \mathfrak{g}$ gehört α' zu $\sum$. Im letzten Beweis wurde gezeigt, daß jedes einstellige Attribut α aus $\sum$, für das in $\sum$ ein Attribut existiert, das eine Totalordnung in α ist, nur auf endlich viele Individuen zutrifft. Also existiert in $\sum$ kein Attribut, das eine Totalordnung in α' ist, weil α' auf unendlich viele Individuen zutrifft.

Demzufolge ist LO_1 in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ falsch.

Satz 6.5: $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(\neg VS_1)$.

Beweis: Es sei $\alpha = \overline{I_1}$ und $\beta = \overline{I_2}$. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \mathfrak{g}$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\beta) = \mathfrak{g}$ gehören α und β zu $J_1(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$. Es wird nun angenommen, daß in $\sum$ eine Injektion τ von α in β oder von β in α existiert. υ sei ein zweistelliges Attribut über I, und es gelte $\upsilon = \tau$, falls τ eine Injektion von α in β ist, und $\upsilon = \{(\xi,\eta) : (\eta,\xi) \in \tau\}$, falls τ eine Injektion von β in α ist. Offensichtlich gehört mit τ auch υ zu $\sum$. M sei ein Element von $P_{<\omega}(\mathbb{N})$, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\upsilon) \supseteq \mathfrak{g}(M \times K)$ gilt.

υ ist nun eine Injektion von der Menge $\alpha' = \{\xi : \exists\eta((\xi,\eta) \in \upsilon)\}$ auf die Menge $\beta' = \{\eta : \exists\xi((\xi,\eta) \in \upsilon)\}$. Dabei gilt $\alpha = \alpha'$ oder $\beta = \beta'$, je nachdem ob τ eine Injektion von α in β ist oder ob τ eine Injektion von β in α ist. Also ist die eine der Mengen α' und β' unendlich und damit auch die andere.

Es sei $\eta' = (\eta_1', \eta_2')$ ein Individuum aus $\beta' - (M \times K)$. Dann existiert ein ξ' mit $(\xi',\eta') \in \upsilon$ und $\xi' \in \alpha'$. Es sei $\eta_2'' \in \{2,3\} - \{\eta_2'\}$. $\eta'' = (\eta_1', \eta_2'')$ gehört ebenfalls nicht zu $M \times K$. Demzufolge gehört die Permutation π, für die die Einschränkung von π auf $I - (\{\eta_1\} \times \{2,3\})$ eine identische Abbildung ist und $\pi(\eta') = \eta''$ und $\pi(\eta'') = \eta'$ gilt, zu $\mathfrak{g}(M \times K)$. D.h., daß nicht nur $(\xi',\eta') \in \upsilon$, sondern auch (ξ',η'') $\in \upsilon$ gilt. Folglich kann υ keine Injektion von α' in β' sein.

Das ist ein Widerspruch. Also muß die Annahme falsch sein.

Damit ist VS_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

Satz 6.6: $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{H}}(\neg AC^{Disj}_{1,1})$.

Beweis: Es sei $\alpha = \overline{I_1}$. ϱ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn $\xi_1=\eta_1$, $\xi_2 = 1$ und $\eta_2 \in \{2,3\}$ gilt. Offensichtlich gilt $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\alpha) = \mathfrak{G}$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\varrho) = \mathfrak{G}$. Damit gehören α und ϱ zu Σ. Außerdem gilt

$$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^1_{Disj}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W.$$

Trotzdem existiert in Σ keine Auswahlfunktion für α und ϱ. Um das zu zeigen, wird von der Annahme ausgegangen, daß σ eine Auswahlfunktion für α und ϱ ist, die zu Σ gehört. M sei eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{G}(M \times K)$ gilt. $\xi' = (\xi_1, 1)$ sei ein Individuum aus $\alpha - (M \times K)$. Dann gilt entweder für $\eta' = (\xi_1, 2)$ die Beziehung $(\xi',\eta') \in \sigma$ oder für $\eta'' = (\xi_1, 3)$ die Beziehung $(\xi',\eta'') \in \sigma$. Für die Permutation π von I gelte $\pi(\eta') = \eta''$ und $\pi(\eta'') = \eta'$, und die Einschränkung von π auf $I - (\{\xi_1\} \times \{2,3\})$ sei eine identische Abbildung. Offensichtlich gehört π zu $\mathfrak{G}(M \times K)$. Demzufolge ist nicht nur eine der Beziehungen $(\xi',\eta') \in \sigma$ und $(\xi',\eta'') \in \sigma$ erfüllt, sondern es sind beide Beziehungen erfüllt.

Also kann σ im Widerspruch zur Annahme keine Auswahlfunktion sein.

Damit ist $AC^{Disj}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

Satz 6.7: $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{H}}(\neg KW\text{-}AC_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien die im letzten Beweis definierten Attribute. Da ϱ für jedes ξ aus α genau auf zwei Paare aus $\{\xi\} \times I$ zutrifft, ist jeder Selektor für α und ϱ sogar eine Auswahlfunktion. Da aber für α und ϱ in Σ keine Auswahlfunktion existiert, existiert für α und ϱ in Σ auch kein Selektor.

Damit ist $KW\text{-}AC_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

7. Es sei $I = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Dann ist

$$\mathfrak{g} = \{\pi : \pi \in Perm(I) \;\&\; \forall \xi_1 (\xi_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \pi_{\xi_1} (\pi_{\xi_1} \in Perm_{m.w.}(\mathbb{Q}) \;\&\; \forall \xi_2 (\xi_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pi(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \pi_{\xi_1}(\xi_2)))))\}$$

eine Gruppe von Permutationen von I.

Für $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0(I)$ gilt der

<u>Satz 7.1:</u> $\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 7.2:</u> $\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J}) \in Mod_{\mathfrak{H}}(GCH(1)_1)$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß für jedes einstelliges Attribut α in Σ $Fin_1(A)$ oder $(\bigwedge_B (H^+(A,B) \Leftrightarrow H^\wedge(A,B))$ bei Belegung von A mit α wahr wird.

Es wird im folgenden gezeigt, daß für alle α aus $J_1(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})$ $Wert_\Sigma(Fin_1(A), f_\Sigma\langle {A \atop \alpha} \rangle) = W$ gilt. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, daß in $J_1(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})$ ein α mit $Wert_\Sigma(Fin_1(A), f_\Sigma\langle {A \atop \alpha} \rangle) = F$ existiert. Dann existiert also in $J_2(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})$ eine Injektion τ von α in ein echtes Teilattribut von α. Das ist nur möglich, wenn für unendlich viele Individuen ξ, η aus α aus $(\xi, \eta) \in \tau$ die Ungleichung $\xi \neq \eta$ folgt.

Dann existiert in $\mathfrak{J}_0(I)$ eine endliche Menge P, für die die Beziehung $sym_{\mathfrak{g}}(\tau) \supseteq \mathfrak{g}(P)$ und damit auch $sym_{\mathfrak{g}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{g}(P)$ gilt. Folglich existiert ein $(\xi', \eta') = ((\xi_1', \xi_2'), (\eta_1', \eta_2')) \in \tau$ mit $\xi' \in \alpha - \overline{P}$ und $\xi' \neq \eta'$.

Es sind folgende Fälle möglich:

a) $\xi_1' \neq \eta_1'$;

b) $\xi_1' = \eta_1'$ und $\xi_2' < \eta_2'$;

c) $\xi_1' = \eta_1'$ und $\xi_2' > \eta_2'$.

Gilt a) oder b), so sei $M = \{\xi : \xi < \xi_2' \;\&\; (\xi_1', \xi) \in P\}$.

Gilt c), so sei $M = \{\xi : \xi > \xi_2' \;\&\; (\xi_1', \xi) \in P\}$.

$\xi'' = (\xi_1'', \xi_2'')$ sei ein Individuum, so daß $\xi_1'' = \xi_1'$ und $\max(M \cup \{-\infty\}) < \xi_2'' < \xi_2'$ in den Fällen a) und b) und $\xi_1'' = \xi_1'$ und $\xi_2' < \xi_2''$

$< \min(M \cup \{+\infty\})$ im Fall c) gilt.

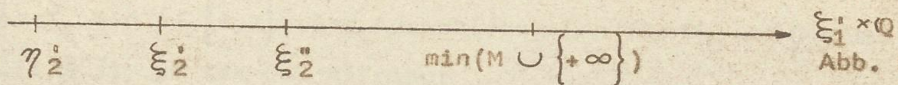


Abb. 6
(Fall c))

In allen Fällen existiert ein solches ξ'', weil P endlich ist. Offenbar gehört ξ'' nicht zu P, und es existiert sogar ein π aus $\mathfrak{G}(P)$ mit $\pi(\xi') = \xi''$ und $\pi(\eta') = \eta'$. Also gilt $(\xi', \eta') \in \tau$ ebenso wie $(\xi'', \eta') \in \tau$ und $\xi'' \in \alpha$. Also ist τ keine Injektion von α in α. Demzufolge führt die Annahme, daß $\neg Fin_1(A)$ in Σ bei Belegung von A mit α, einem Attribut aus $J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ wahr wird, zum Widerspruch, und $GCH(1)_1$ ist in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ wahr.

<u>Satz 7.3:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{G}}(LO_1)$.

Beweis: τ' sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $(\xi,\eta) = ((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn $\xi_1 < \eta_1$ oder $\xi_1 = \eta_1$ und $\xi_2 \leqq \eta_2$ gilt. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\tau') = \mathfrak{G}$ gehört τ' zu $J_2(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$. Offensichtlich ist τ' eine Totalordnung in $\alpha' = \bar{I}$.

α sei ein beliebiges Attribut aus $J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$. Dann ist α ein Teilattribut von α' und wird damit durch τ' totalgeordnet. D.h., daß

$\tau = \mathrm{Att}_{\Sigma}(Ax \wedge Ay \wedge R'xy : x,y : f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix} A & R' \\ \alpha & \tau' \end{smallmatrix}\right\rangle)$ eine Totalordnung in α ist. Damit ist LO_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ allgemeingültig.

<u>Satz 7.4:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{G}}(AC^{Disj}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien Attribute aus $J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ bzw. $J_2(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$, so daß

$$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^1_{Disj}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{smallmatrix}\right\rangle) = W \qquad (I)$$

gilt.

P_α und P_ϱ seien endliche Teilmengen von I, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{G}(P_\alpha)$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\varrho) \supseteq \mathfrak{G}(P_\varrho)$ gelten. Offenbar gelten für $P = P_\alpha \cup P_\varrho$ die Beziehungen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{G}(P)$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\varrho) \supseteq \mathfrak{G}(P)$. Offensichtlich sind $\alpha_1 = \alpha \cap \bar{P}$ und $\alpha_2 = \alpha - \bar{P}$ Attribute aus $J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$. Es sei weiterhin für i aus $\{1,2\}$

$\varrho_1 = \mathrm{Att}_\Sigma(Rxy \wedge Ax\ ;\ x,y\ ;\ f_\Sigma\left\langle \begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha_1 \end{smallmatrix} \right\rangle)$.

Ist σ_i für $i \in \{1,2\}$ eine Auswahlfunktion für α_i und ϱ_i und aus $\mathfrak{I}_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$, so ist das Attribut

$\sigma = \mathrm{Att}_\Sigma(S_1xy \vee S_2xy\ ;\ x,y\ ;\ f_\Sigma\left\langle \begin{smallmatrix} S_1 & S_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{smallmatrix} \right\rangle)$ eine Auswahlfunktion für α und ϱ. Es genügt also, entsprechende σ_1 und σ_2 zu finden.

1) σ_1 sei eine beliebige Auswahlfunktion für α_1 und ϱ_1, für die dann $\sigma_1 \subsetneq \varrho_1$ gilt. Dann ist die Menge $P_{\sigma_1} = P \cup \{\eta : \exists \xi((\xi,\eta) \in \sigma_1)\}$ eine endliche Teilmenge von I, so daß $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\sigma_1) \supseteq \mathcal{G}(P_{\sigma_1})$ erfüllt ist.

2) Es sei $\sigma_2 = \varrho_2$. Dann gilt $\sigma_2 \in \mathfrak{I}_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$. Außerdem ist σ_2 eine Auswahlfunktion für α_2 und ϱ_2, weil ϱ_2 eine Abbildung ist. Denn angenommen, ϱ_2 ist keine Abbildung, so existieren für ein $\xi' = (\xi_1', \xi_2')$ aus α_2 zwei Individuen $\eta' = (\eta_1', \eta_2')$ und $\eta'' = (\eta_1'', \eta_2'')$ mit $(\xi', \eta') \in \varrho_2$ und $(\xi', \eta'') \in \varrho_2$. Es sei o.B.d.A. $\eta' \in \{\eta', \eta''\} - \{\xi'\}$. Dann gilt $(\xi', \eta') \in \varrho$, $\xi' \in \alpha - \overline{P}$ und $\xi' \neq \eta'$. Daraus folgt analog zum Beweis des Satzes 7.2 dieses Kapitels $(\xi', \eta') \in \varrho$ und $(\xi'', \eta') \in \varrho$ für ein ξ'' mit $\xi'' \neq \xi'$. Das ist aber ein Widerspruch zu (I). Also ist ϱ_2 eine Abbildung und σ_2 eine Auswahlfunktion für α_2 und ϱ_2.

Folglich ist $AC_{1,1}^{Disj}$ in $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ wahr.

<u>Satz 7.5:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{H}}(\neg ZL_1)$.

Beweis: Es seien $\alpha = \overline{I}$ und τ das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $(\xi,\eta) = ((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn $\xi_1 < \eta_1$ oder $\xi = \eta$ gilt. α und τ gehören wegen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\alpha) = \mathcal{G}$ und $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau) = \mathcal{G}$ zu Σ. Es ist leicht einzusehen, daß τ eine partielle Ordnung in α ist und α bzgl. τ kein maximales Element besitzt. Trotzdem hat jede Kette $\beta \in \mathfrak{I}_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ in α, d.h. jedes durch τ totalgeordnete Teilattribut β von α, das zu Σ gehört, bzgl. τ ein Supremum in α. Denn jede Kette β in α, die zu Σ gehört, trifft nur auf endlich viele Individuen von Σ zu. Das bzgl. τ maximale Element von β ist demzufolge bzgl. τ auch das Supremum von β.

Da dieses maximale Element zu β gehört, gehört es auch zu α.
Es wird nun noch gezeigt, warum jede dieser Ketten in Σ nur auf endlich viele Individuen zutrifft. Dazu wird angenommen, daß in Σ ein β' existiert, das bzgl. τ eine Kette in α ist und auf unendlich viele Individuen zutrifft. P sei eine endliche Teilmenge von I, so daß $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\beta') \supseteq \mathcal{G}(P)$ gilt.
Es sei $r = \max\{\xi_1 : \exists \xi_2 (\xi_1, \xi_2) \in P) \vee \xi_1 = 0\}$.
Aus der Definition von τ folgt, daß β' für ein beliebiges ξ_1 aus $\mathbb{N}$ höchstens auf ein Individuum aus $\{\xi_1\} \times \mathbb{Q}$ zutrifft. Demzufolge existiert in der unendlichen Menge β' ein (ξ_1', ξ_2') mit $r < \xi_1'$.
Es sei $\xi_2'' \in \mathbb{Q} - \{\xi_2'\}$. Dann existiert ein $\pi \in \mathcal{G}(P)$ mit $\pi(\xi_1', \xi_2') = (\xi_1', \xi_2'')$. Das bedeutet $(\xi_1', \xi_2'') \in \beta'$. Das ist ein Widerspruch dazu, daß β' für ξ_1' höchstens ein Individuum aus $\{\xi_1'\} \times \mathbb{Q}$ enthält.
Also trifft jedes Teilattribut von α, das zu Σ gehört und bzgl. τ eine Kette ist, nur auf endlich viele Individuen zu.
Damit ist ZL_1 in $\Sigma(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 7.6:</u> $\Sigma(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{G}}(\neg \mathrm{DC}_1)$.

Beweis: τ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $(\zeta, \eta) = ((\zeta_1, \zeta_2), (\eta_1, \eta_2))$ aus I^2 zutrifft, wenn $\zeta_1 < \eta_1$ erfüllt ist. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau) = \mathcal{G}$ gilt $\tau \in \mathrm{J}_2(I, \mathcal{G}, \mathfrak{I})$. Außerdem gilt $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Rel}_W \subsetneqq_D (T), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} T \\ \tau \end{matrix} \right\rangle) = W$. Es wird nun angenommen, daß DC_1 in Σ wahr ist. Dann existiert in Σ u.a. für ein $\xi_0 \in \{0\} \times \mathbb{Q}$ ein Attribut υ mit $\mathrm{Wert}\ (\mathrm{DCF}(x_0, T, U), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} x_0 & T & U \\ \xi_0 & \tau & \upsilon \end{matrix} \right\rangle) = W$. P sei eine endliche Teilmenge von I, so daß $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\upsilon) \supseteq \mathcal{G}(P)$ gilt. r sei die natürliche Zahl, so daß $r = \max\{\xi_1 : \exists \xi_2 ((\xi_1, \xi_2) \in P) \vee \xi_1 = 0\}$.
Da υ eine bedingte Auswahlfunktion für ξ_0 und τ ist, existiert für ξ_0 ein ξ_1 aus $\{1\} \times \mathbb{Q}$ mit $(\xi_0, \xi_1) \in \upsilon$ und für ξ_1 ein ξ_2 aus $\{2\} \times \mathbb{Q}$ mit $(\xi_1, \xi_2) \in \upsilon$ usw.. Dann existiert aber auch für ein ξ_r aus $\{r\} \times \mathbb{Q}$ ein $\xi_{r+1} = (\xi_1^{(r+1)}, \xi_2^{(r+1)})$ aus $\{r+1\} \times \mathbb{Q}$ mit $(\xi_r, \xi_{r+1}) \in \upsilon$.

ξ_2' sei ein beliebiges Element von $\mathbb{Q}$, das verschieden von $\xi_2^{(r+1)}$ ist. π sei eine Permutation, deren Einschränkung auf $(\mathbb{N}-\{r+1\})\times\mathbb{Q}$ eine identische Abbildung ist und für deren Einschränkung auf $\{r+1\}\times\mathbb{Q}$ eine monoton wachsende Permutation π_{r+1} von $\mathbb{Q}$ mit $\pi_{r+1}(\xi_2^{(r+1)})=\xi_2'$ und $\pi(\xi_1^{(r+1)},\xi_2)=(\xi_1^{(r+1)},\pi_{r+1}(\xi_2))$ für alle ξ_2 aus $\mathbb{Q}$ existiert. Offensichtlich gehört π zu $\mathfrak{G}(P)$. Demzufolge gilt mit $(\xi_r,\xi_{r+1})\in\upsilon$ auch $(\xi_r,(\xi_1^{(r+1)},\xi_2'))\in\upsilon$. Das ist ein Widerspruch dazu, daß υ eine bedingte Auswahlfunktion ist.

Also ist DC_1 in $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 7.7:</u> $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})\in Mod_{\mathfrak{g}}(AC_{1,1}^{\omega})$.

Beweis: α sei ein beliebiges Attribut aus $\mathfrak{I}_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$. Wenn für α in $\sum$ ein zweistelliges Attribut τ und ein Individuum ξ_0 mit

$$Wert_{\sum}(NZ(A,x_0,T),f_{\sum}\left\langle\begin{matrix}A & x_0 & T\\ \alpha & \xi_0 & \tau\end{matrix}\right\rangle)=W$$

existieren, so existiert für α in $\sum$ eine Injektion von α in ein echtes Teilattribut von α. Bei dem Beweis des Satzes 7.2 dieses Kapitels wurde aber die Annahme der Existenz einer solchen Injektion in $\sum$ für ein beliebiges α aus $\mathfrak{I}_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ zum Widerspruch geführt.

Damit gilt für alle einstelligen Attribute α und alle zweistelligen Attribute ϱ aus $\sum$

$$Wert_{\sum}(Kor^1_{\omega}(R,A),f_{\sum}\left\langle\begin{matrix}R & A\\ \varrho & \alpha\end{matrix}\right\rangle)=F.$$

Demzufolge ist $AC_{1,1}^{\omega}$ in $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ wahr.

Analog zu dem Satz 2.8 dieses Kapitels gilt hier der

<u>Satz 7.8:</u> $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})\in Mod_{\mathfrak{g}}(\neg LW_1)$.

<u>Satz 7.9:</u> $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})\in Mod_{\mathfrak{g}}(\neg MC(2)_{1,1}^{LO}$.

Beweis: Es sei $\alpha=\mathrm{I}$. ϱ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\zeta_1,\zeta_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn $\eta_1=\zeta_1+1$ gilt. Wegen $sym_{\mathfrak{G}}(\alpha)=\mathfrak{G}$ und $sym_{\mathfrak{G}}(\varrho)=\mathfrak{G}$ gehören α und ϱ zu $\sum$. Außerdem gilt wegen Satz 7.3

$$\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^1_{LO}(R,A), f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix}\right\rangle) = W.$$

Wird von der Annahme ausgegangen, daß in Σ für α und ϱ eine multiple Auswahlrelation σ bzgl. $\mathrm{Fin}_2(C)$ existiert, so kann analog zum Beweis des Satzes 7.6 die Existenz eines ξ_r aus $\{r\}\times\mathbb{Q}$ nachgewiesen werden, so daß σ für alle ξ_{r+1} aus $\{r+1\}\times\mathbb{Q}$ auf (ξ_r, ξ_{r+1}) zutrifft. Offensichtlich gilt dann für das Attribut

$$\gamma = \mathrm{Att}_\Sigma(Sxy : y : f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} S & x \\ \sigma & \xi_r \end{matrix}\right\rangle)$$

die Gleichung $\gamma = \{r+1\}\times\mathbb{Q}$. υ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\varsigma_1,\varsigma_2),(\eta_1,\eta_2))$ zutrifft, wenn $\varsigma_1 = \eta_1 = r+1$ und $\varsigma_2 < \eta_2$ gilt. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\upsilon) = \mathfrak{G}$ gehört υ zu Σ. Außerdem folgt aus den Eigenschaften von υ sofort

$$\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Fin}_2(C), f_\Sigma\left\langle\begin{matrix} C \\ \gamma \end{matrix}\right\rangle) = F.$$

Demzufolge kann σ in Σ keine multiple Auswahlrelation für α und ϱ bzgl. $\mathrm{Fin}_2(C)$ sein.

Also ist $MC(2)^{LO}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

8. Es seien $K=\{1,2\}$, $L=\mathbb{N}\times K$ und $I=\mathbb{N}\cup L$. Es ist leicht einzusehen, daß

$$\mathcal{G}=\{\pi : \pi\in \mathrm{Perm}(I) \;\&\; \forall\xi(\xi\in\mathbb{N} \Rightarrow \pi(\xi)=\xi)$$
$$\&\; \forall\xi_1(\xi_1\in\mathbb{N}\Rightarrow \exists\pi_{\xi_1}(\pi_{\xi_1}\in \mathrm{Perm}(K)$$
$$\&\; \forall\xi_2(\xi_2\in K\Rightarrow \pi(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1,\pi_{\xi_1}(\xi_2))))))\}$$

eine Gruppe von Permutationen von I ist.

Dann gilt für $\mathfrak{I}=\mathfrak{I}_0(I)$ der

Satz 8.1: $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ ist eine Henkin-Struktur.

Satz 8.2: $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})\in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{H}}(MC(2)_{1,1})$.

Beweis: α sei ein Attribut aus $J_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ und ϱ ein Attribut aus $J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$; es gelte $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^1(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix}R & A\\ \varrho & \alpha\end{smallmatrix}\right\rangle)=W$.

Folglich ist eine der Mengen $N_\xi =_{Df} \mathbb{N}\cap\{\eta: (\xi,\eta)\in\varrho\}$ und $L_\xi =_{Df} L\cap\{\eta:(\xi,\eta)\in\varrho\}$ für ξ aus α nicht leer. m_ξ sei für ξ aus α durch $m_\xi=\min\{i:\exists k((i,k)\in L_\xi)\}$ definiert.

P sei ein Element von $\mathfrak{I}$, so daß $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\varrho)\supseteq\mathcal{G}(P)$ gilt.

σ sei das Teilattribut von ϱ, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn $\xi\in\alpha$, $N_\xi\neq\emptyset$ und $\eta=\min N_\xi$ gilt oder wenn $\xi\in\alpha$, $N_\xi=\emptyset$ und $\eta\in L_\xi\cap(\{m_\xi\}\times\{1,2\})$ gilt.

σ hat folgende Eigenschaften:

1) Für jedes ξ aus α existiert ein η mit $(\xi,\eta)\in\sigma$.

2) Für jedes ξ aus α existieren höchstens zwei Individuen η^{*} und η^{**} mit $(\xi,\eta^{*})\in\sigma$ und $(\xi,\eta^{**})\in\sigma$.

3) Es gilt $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\sigma)\supseteq\mathcal{G}(P)$.

Eigenschaft 1) gilt, weil nach Voraussetzung für jedes ξ aus α $N_\xi\cup L_\xi\neq\emptyset$ gilt.

ξ sei ein beliebiges Individuum aus α. Ist N_ξ nicht leer, so trifft σ auf $(\xi, \min N_\xi)$ und auf kein weiteres Paar aus $\{\xi\}\times I$ zu. Ist N_ξ leer, so trifft σ auf die Paare aus $M_\xi =_{Df} \{\xi\}\times(L_\xi\cap(\{m_\xi\}\times\{1,2\}))$ und auf kein weiteres Paar aus $\{\xi\}\times I$ zu. Demzufolge ist auch 2) erfüllt.

Es sei (ξ,η) ein beliebiges Paar aus σ. π sei eine beliebige Permutation aus $\mathfrak{G}(P)$. Um zu zeigen, daß 3) gilt, wird gezeigt, daß σ auch auf $(\xi',\eta') = (\pi(\xi),\pi(\eta))$ zutrifft. Dabei werden folgende Fälle unterschieden:

a) $(\xi,\eta) = (\xi',\eta')$;

b) $\xi = \xi'$ und $\eta \neq \eta'$;

c) $\xi \neq \xi'$.

zu a): Es ist nichts zu zeigen.

zu b): Für ein η_1 gilt o.B.d.A. $\eta = (\eta_1,1)$ und $\eta' = (\eta_1,2)$. Außerdem folgt aus $(\xi,\eta) \in \sigma$, daß $\eta_1 = m_\xi$ gilt und daß $(\xi,\eta) \in \varrho$ und damit auch $(\xi,\eta') = (\xi,\pi(\eta)) \in \varrho$ gilt. Dann gilt aber für das oben definierte M_ξ die Beziehung $M_\xi = \{(\xi,\eta),(\xi,\eta')\}$. Daraus folgt $(\xi,\eta') \in \sigma$ und damit $(\xi',\eta') \in \sigma$.

zu c): Für ein ξ_1 gilt o.B.d.A. $\xi = (\xi_1,1)$ und $\xi' = (\xi_1,2)$. Offensichtlich gehören ξ und ξ' nicht zu P. Demzufolge existiert in $\mathfrak{G}(P)$ ein π', so daß $\pi'(\xi) = \xi'$ und $\pi'(\xi') = \xi$ gilt und die Einschränkung von π' auf $I - \{\xi,\xi'\}$ eine identische Abbildung ist.

Daraus folgt:

- $N_\xi = N_{\xi'}$.
- $(L_\xi - \{\xi,\xi'\}) = (L_{\xi'} - \{\xi,\xi'\})$.
- $\xi \in L_\xi$ gilt genau dann, wenn $\xi' \in L_{\xi'}$.
- $\xi' \in L_\xi$ gilt genau dann, wenn $\xi \in L_{\xi'}$.

Das bedeutet:

- $\min N_\xi = \min N_{\xi'}$.
- $m_\xi = m_{\xi'}$.
- Wenn $m_\xi = m_{\xi'} \neq \xi_1$, so $M_\xi = M_{\xi'}$.
- Wenn $m_\xi = m_{\xi'} = \xi_1$, so gilt $M_\xi = M_{\xi'} = \{\xi,\xi'\}$ oder $M_\xi = \{\xi\}$ und $M_{\xi'} = \{\xi'\}$ oder $M_\xi = \{\xi'\}$ und $M_{\xi'} = \{\xi\}$.

Gilt nun $N_\xi \neq \emptyset$, so ist $\eta = \min N_\xi$ und $\eta' = \pi(\eta) = \eta$. Damit gilt aber $\eta' = \min N_{\xi'}$, also $(\xi',\eta') \in \sigma$.

Gilt $N_\xi = \emptyset$ und $\eta \notin \{\xi,\xi'\}$, so gilt $m_\xi \neq \xi_1$ und wegen $(\xi,\eta) \in \sigma$

auch $(\xi,\eta)\in\varrho$ und damit $(\pi\pi'(\xi),\pi\pi'(\eta)) = (\xi,\pi(\eta))\in\varrho$. Das bedeutet, daß η und $\eta' = \pi(\eta)$ aus $M_\xi = M_{\xi'}$ sind. Daraus folgt $(\xi',\eta')\in\sigma$.

Gilt $N_\xi = \emptyset$ und $\eta\in\{\xi,\xi'\}$, so gilt $m_\xi = \xi_1$ und $\eta\in M_\xi$. Daraus folgt $\eta' = \pi(\eta)\in M_\xi$. Demzufolge gilt $(\xi',\eta')\in\sigma$.

Also gilt auch 3). Damit ist σ ein Attribut aus Σ.

Wegen 2) gilt $\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{MCC}^{(2)}(A,R,S), f_\Sigma\left\langle\begin{smallmatrix} A & R & S \\ \alpha & \varrho & \sigma\end{smallmatrix}\right\rangle) = W$.

Also ist $MC(2)_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ wahr.

<u>Satz 8.3:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{h}}(LW_1)$.

Beweis: α sei ein Attribut aus $\mathfrak{J}_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$, das in Σ totalgeordnet werden kann. τ sei ein Attribut aus $\mathfrak{J}_2(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$, das eine Totalordnung in α ist.

P sei eine endliche Teilmenge von I, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\tau) \supseteq \mathfrak{G}(P)$ und damit auch $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{G}(P)$ gilt. Es sei $P_v = P \cup P_1$, wobei $P_1 = \{\xi_1 : \exists\xi_2((\xi_1,\xi_2)\in P)\} \times \{1,2\}$ gilt.

α trifft nur auf Individuen aus $\mathbb{N} \cup P_v$ zu. Um das zu zeigen, wird von der Annahme ausgegangen, daß α auf ein (η_1,η_2) aus $L - P_1$ zutrifft. Dann trifft α auf $(\eta_1,1)$ und auf $(\eta_1,2)$ zu, weil in $\mathfrak{G}(P)$ ein π mit $\pi(\eta_1,1) = (\eta_1,2)$ und $\pi(\eta_1,2) = (\eta_1,1)$ existiert. Aus dem gleichen Grund gilt $((\eta_1,1),(\eta_1,2))\in\tau$ genau dann, wenn $((\eta_1,2),(\eta_1,1))\in\tau$ gilt. Folglich kann τ im Widerspruch zur Voraussetzung dann keine Totalordnung in α sein.

Also ist die Annahme falsch, und es gilt $\alpha \subseteq \mathbb{N} \cup P_v$.

υ sei ein Attribut über I, das eine Wohlordnung in α ist. Offensichtlich ist dann die Beziehung $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\upsilon) \supseteq \mathfrak{G}(P_v)$ erfüllt.

Damit gehört υ zu Σ.

Also ist LW_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J})$ wahr.

<u>Satz 8.4:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{h}}(\neg AC^{\mathrm{Disj}}_{1,1})$.

Beweis: Es sei $\alpha = \mathbb{N}$ und ϱ das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn $\xi\in\alpha$ und $\eta = (\eta_1,\eta_2)$ aus L ist und $\eta_1 = \xi$ gilt. Da $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \mathfrak{g}$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\varrho) = \mathfrak{g}$ erfüllt sind, gehören die Attribute α und ϱ zu Σ. Offensichtlich gilt

$$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^1_{\mathrm{Disj}}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha\end{matrix}\right\rangle) = W.$$

Es wird nun angenommen, daß für α und ϱ in Σ eine Auswahlfunktion σ existiert. Dann existiert eine endliche Teilmenge P von I, für die $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{g}(P)$ gilt. Dann existiert ein $\xi\in\alpha$, für das weder $(\xi,1)$ noch $(\xi,2)$ zu P gehört. Es ist aber $(\xi,(\xi,1))$ oder $(\xi,(\xi,2))$ aus σ, und es existiert in $\mathfrak{g}(P)$ ein π mit $\pi(\xi,1) = (\xi,2)$ und $\pi(\xi,2) = (\xi,1)$, woraus dann sogar $(\xi,(\xi,1))\in\sigma$ und $(\xi,(\xi,2))\in\sigma$ folgt. Das heißt, daß σ keine Auswahlfunktion sein kann. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Deshalb ist $AC^{\mathrm{Disj}}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 8.5:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{kg}}(\neg AC^{\omega}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien die im letzten Beweis definierten Attribute. Es ist leicht einzusehen, daß auch der Wert

$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^1_{\omega}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha\end{matrix}\right\rangle)$ wahr ist. Folglich ist $AC^{\omega}_{1,1}$ in Σ falsch, weil für α und ϱ in Σ keine Auswahlfunktion existiert. Also ist $AC^{\omega}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 8.6:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{kg}}(\neg DC_1)$.

Beweis: τ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn eine natürliche Zahl i existiert, so daß ξ zu $\{i\}\times K$ und η zu $\{i+1\}\times K$ gehört. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\tau) = \mathfrak{g}$ gehört τ zu Σ. ξ_0 sei ein Individuum aus $\{0\}\times K$. Offenbar gilt

$$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Rel}_W \subsetneqq D(T) \wedge \bigvee_{x_1} Tx_0x_1, f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} T & x_0 \\ \tau & \xi_0\end{matrix}\right\rangle) = W.$$

Es wird nun angenommen, daß in Σ für τ und ξ_0 eine bedingte Auswahlfunktion existiert. Analog zum Beweis des Satzes 5.8 dieses Kapitels kann dann gezeigt werden, daß für die beim Beweis des Satzes 8.4 definierten Attribute α und ϱ in Σ eine Auswahlfunktion existiert. Das ist ein Widerspruch. Damit ist die Annahme falsch.

Also ist DC_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 8.7:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{kg}}(\neg \text{KW-AC}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien die beim Beweis des Satzes 8.4 definierten Attribute. Offensichtlich gilt für diese Attribute

$$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^2(R,A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W.$$

Existiert für α und ϱ in Σ ein Selektor, so ist dieser gleichzeitig eine Auswahlfunktion für α und ϱ; denn ϱ trifft für jedes ξ aus α nur auf die Paare $(\xi,(\xi,1))$ und $(\xi,(\xi,2))$ aus $\{\xi\} \times I$ zu. Da aber in Σ für α und ϱ keine Auswahlfunktion existiert, gibt es in Σ auch keinen Selektor für α und ϱ.

Demzufolge ist $\text{KW-AC}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 8.8:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{kg}}(\neg ZL_1)$.

Der Beweis dieses Satzes kann auf gleiche Weise wie der Beweis des Satzes 7.5 dieses Kapitels geführt werden. Dabei sei $\alpha = L$ und τ das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $(\xi,\eta) = ((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2))$ aus L^2 zutrifft, wenn $\xi_1 < \eta_1$ oder $\xi = \eta$ gilt, und das auf kein weiteres Paar aus I^2 zutrifft.

9. Es sei

$$I = (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{N}^k \cap \{(\xi_1, \ldots, \xi_k) : \forall i \forall j (i \in \mathbb{N} \;\&\; j \in \mathbb{N} \;\&\; 1 \leq i < j \leq k \Rightarrow \xi_i \neq \xi_j)\}).$$

Wenn $\pi \in \mathrm{Perm}(I)$, $\pi_0 \in \mathrm{Perm}(\mathbb{N})$ und $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{N}^k$ $(k \geq 1)$, so stehe $\Phi(\pi, \pi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ für $\pi(\xi_1, \ldots, \xi_k) = (\pi_0(\xi_1), \ldots, \pi_0(\xi_k))$.

Offensichtlich ist

$$\mathfrak{G} = \{\pi : \pi \in \mathrm{Perm}(I) \;\&\; \forall \xi (\xi \in (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \Rightarrow \pi(\xi) = \xi)$$
$$\& \; \exists \pi_0 (\pi_0 \in \mathrm{Perm}(\mathbb{N}) \;\&\; \forall k (k \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \forall (\xi_1, \ldots, \xi_k)((\xi_1, \ldots, \xi_k) \in I$$
$$\Rightarrow \Phi(\pi, \pi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k))))\}$$

eine Gruppe von Permutationen von I.

f sei im weiteren die Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathrm{Perm}(\mathbb{N})$, die jedem π aus $\mathfrak{G}$ diejenige Permutation aus $\mathrm{Perm}(\mathbb{N})$ zuordnet, die der Einschränkung von π auf $\mathbb{N}$ entspricht. Es ist leicht einzusehen, daß dann für beliebige π aus $\mathfrak{G}$ und für beliebige $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ $(k \geq 1)$ die Gleichung $\Phi(\pi, f(\pi), \xi_1, \ldots, \xi_k)$ gilt. Folglich ist f eine eineindeutige Abbildung.

$\mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$ sei die Menge aller endlichen Zerlegungen von $\mathbb{N}$; d.h., daß jedes $\mathfrak{Z}$ aus $\mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$ die folgenden Eigenschaften hat:

(1) $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

(2) $\emptyset \notin \mathfrak{Z}$;

(3) $\bigcup \mathfrak{Z} = \mathbb{N}$;

(4) $P_1 \in \mathfrak{Z} \;\&\; P_2 \in \mathfrak{Z} \;\&\; P_1 \neq P_2 \Rightarrow P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Dann sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{H} : \exists \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z} \in \mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N}) \;\&\; \mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{Z}))\}$, wobei $\mathfrak{G}(\mathfrak{Z})$ für alle $\mathfrak{Z}$ aus $\mathrm{Zerl.}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$ die Menge $\{\pi : \pi \in \mathfrak{G} \;\&\; \forall P (P \in \mathfrak{Z} \Rightarrow \pi'' P = P)\}$ ist.

<u>Hilfssatz 9.1:</u> $\mathfrak{F}$ ist ein Normal-Filter in $\mathfrak{G}$.

Beweis: Die Eigenschaften (i) und (ii) sind aufgrund der Definition von $\mathfrak{F}$ sofort klar.

zu (iii): $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ seien aus $\mathfrak{F}$. Dann existieren nach Definition von $\mathfrak{F}$ endliche Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ von $\mathbb{N}$, für die $\mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{Z}_1)$

bzw. $\mathfrak{h}_2 \supseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{z}_2)$ gilt.

$\mathfrak{z} = \{P_1 \cap P_2 : P_1 \in \mathfrak{z}_1 \,\&\, P_2 \in \mathfrak{z}_2\} - \{\emptyset\}$ ist eine endliche Zerlegung von $\mathbb{N}$, und es gilt $\mathfrak{G}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{z}_1) \cap \mathfrak{G}(\mathfrak{z}_2) \subseteq \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Damit gehört auch $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ zu $\mathfrak{F}$.

zu (iv): $\mathfrak{h}$ sei aus $\mathfrak{F}$ und π aus $\mathfrak{G}$. Nach Definition von $\mathfrak{F}$ existiert in $\mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$ wieder ein $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{z})$. $\mathfrak{z}' = \{\pi''P : P \in \mathfrak{z}\}$ ist ebenfalls eine endliche Zerlegung von $\mathbb{N}$. Für sie gilt $\mathfrak{G}(\mathfrak{z}') = \pi\mathfrak{G}(\mathfrak{z})\pi^{-1}$, denn π' ist genau dann aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{z}')$, wenn für alle P aus $\mathfrak{z}$ die Gleichung $(\pi')''(\pi''P) = \pi''P$ gilt, die gerade $\pi^{-1}\pi'\pi \in \mathfrak{G}(\mathfrak{z})$ und $\pi' \in \pi\mathfrak{G}(\mathfrak{z})\pi^{-1}$ bedeutet. Deshalb gilt für $\mathfrak{z}'$ auch $\mathfrak{G}(\mathfrak{z}') \subseteq \pi\mathfrak{h}\pi^{-1}$. Also gehört $\pi\mathfrak{h}\pi^{-1}$ zu $\mathfrak{F}$.

zu (v): P sei eine beliebige endliche Teilmenge von I. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{N}) \cap \{\{\xi\} : \exists k(k \in \mathbb{N} \,\&\, \exists(\xi_1,\dots,\xi_k)((\xi_1,\dots,\xi_k) \in P \,\&\, \xi \in \{\xi_1,\dots,\xi_k\}))\}$ ist folglich ebenfalls endlich. $\mathfrak{z} = \mathcal{R} \cup \{\mathbb{N} - \bigcup\mathcal{R}\}$ ist sogar aus $\mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$. Außerdem gilt $\mathfrak{G}(P) \supseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{z})$. Das bedeutet $\mathfrak{G}(P) \in \mathfrak{F}$. Damit ist $\mathfrak{F}$ ein Normal-Filter in $\mathfrak{G}$.

Also gilt der

<u>Satz 9.2:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 9.3:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{h}}(\mathrm{KW\text{-}AC}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien Attribute aus $J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ bzw. $J_2(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$, und der Wert $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^2(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{smallmatrix}\right\rangle)$ sei wahr.

$\mathfrak{z} = \{P_1,\dots,P_l\}$ sei ein Element von $\mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\varrho) \supseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{z})$ und damit auch $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{z})$ gilt. Für i ($i \geq 1$) sei $P_{l+i} = \{-i\}$.

Es werden nun für jedes s aus der Indexmenge $S = S_1 \cup S_2$ mit

$$S_1 = \{s : \exists k(k \geq 1 \,\&\, \exists(j_1,\dots,j_k)((j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,l\}^k \,\&\, s = k,(j_1,\dots,j_k)))\}$$ und

$$S_2 = \{s : \exists i(i \geq 1 \,\&\, s = 1, l+i)\}$$

folgende Teilattribute von α und ϱ definiert:

Für $s = k,(j_1,\dots,j_k)$ aus S_1 sei $\alpha_s = \alpha \cap \underbrace{\overline{P_{j_1} \times \cdots \times P_{j_k}}}$, wobei

$\underset{\smile}{P}$ für jedes $P \subseteq \mathbb{N}^k$ ($k \geq 1$) für $P \cap I$ stehe.

Für $s = 1, 1+i$ aus S_2 sei $\alpha_s = \alpha \cap \overline{P_{1+i}}$.

Da für alle $s = k, (j_1, \ldots, j_k)$ aus S $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\overline{\underbrace{P_{j_1} \times \cdots \times P_{j_k}}}) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z})$

gilt, gilt auch $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha_s) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z})$. Also ist α_s für jedes s aus S ein Element von $J_1(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{F})$. Außerdem gilt auch für

$\varrho_s = \mathrm{Att}_\Sigma(Rxy \wedge Ax\ ;\ x,y\ ;\ f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha_s \end{matrix} \right\rangle)$

($s \in S$) die Beziehung $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\varrho_s) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z})$.

Ist $\mathfrak{z}_\sigma$ aus $\mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$ und existiert für jedes $s \in S$ ein σ_s mit den Eigenschaften

(1) $\emptyset \neq \{\eta : (\xi, \eta) \in \sigma_s\} \subset \{\eta : (\xi, \eta) \in \varrho_s\}$ für alle $\xi \in \alpha_s$,

(2) $\{\eta : (\xi, \eta) \in \sigma_s\} = \emptyset$ für alle $\xi \notin \alpha_s$ und

(3) $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma_s) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z}_\sigma)$,

so gilt für $\sigma = \bigcup_{s \in S} \sigma_s$ wegen (3) für alle $s \in S$

a) $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z}_\sigma)$

und wegen (1), (2), $\bigcup_{s \in S} \alpha_s = \alpha$ und $\alpha_s \cap \alpha_{s'} = \emptyset$ für $s, s' \in S$ und $s \neq s'$

b) $\emptyset \neq \{\eta : (\xi, \eta) \in \sigma\} \subset \{\eta : (\xi, \eta) \in \varrho\}$ für alle $\xi \in \alpha$.

a) und b) bedeuten $\sigma \in J_2(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{F})$ und $\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Sel}(A,R,S), f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} A & R & S \\ \alpha & \varrho & \sigma \end{matrix} \right\rangle)$ $= W$. Also genügt es, ein $\mathfrak{z}_\sigma$ aus $\mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$ und für jedes $s \in S$ ein σ_s, für das (1), (2) und (3) erfüllt sind, anzugeben.

$\mathfrak{z}_\sigma \in \mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$ sei eine Verfeinerung von $\mathfrak{z}$, die für jedes endliche P aus $\mathfrak{z}$ alle einelementigen Teilmengen von P enthält und die für jedes unendliche P aus $\mathfrak{z}$ genau zwei disjunkte unendliche Teilmengen $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ mit $P^{(1)} \cup P^{(2)} = P$ enthält.

Um für jedes $s = k', (j'_1, \ldots, j'_{k'})$ aus S ein σ_s mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) angeben zu können, werden folgende Fälle und Unterfälle unterschieden:

1) $\varrho_s = \emptyset$.

2) Es existiert ein $\xi' = (\xi'_1, \ldots, \xi'_{k'})$ und ein Individuum $\eta' \in I$

mit $(\xi',\eta')\in\varrho_s$.

2.1) Es existiert ein $i \geqq 1$, so daß $\eta'\in P_{1+1}$.

2.2) Es existiert ein $k \geqq 1$, so daß $\eta' = (\eta'_1,\dots,\eta'_k)\in\mathbb{N}^k$ gilt.

2.2.1) Für alle $i\in\{1,\dots,k\}$ gilt $\eta'_i\in\{\xi'_1,\dots,\xi'_{k'}\}$.

2.2.2) Es existiert ein $i\in\{1,\dots,k\}$ mit $\eta'_i\notin\{\xi'_1,\dots,\xi'_{k'}\}$, und es existiert ein $j\in\{1,\dots,1\}$ mit $\eta'_i\in P_j$;

2.2.2.1) $|P_j| = \omega$;

2.2.2.2) $|P_j| = r$ für ein r mit $1 < r < \omega$;

2.2.2.2.1) $P_j - \{\eta'_i,\xi'_1,\dots,\xi'_{k'}\} \neq \emptyset$;

2.2.2.2.2) $P_j - \{\eta'_i,\xi'_1,\dots,\xi'_{k'}\} = \emptyset$.

2.2.2.3) $|P_j| = 1$.

Bei der Betrachtung der einzelnen Fälle wird jeweils vorausgesetzt, daß für ϱ_s noch keiner der vorhergehenden Fälle zutreffend ist.

zu 1): Für $\sigma_s = \overline{\emptyset}_1$ ist (1), (2) und (3) erfüllt.

zu 2.1): Für jedes beliebige $\xi\in\alpha_s$ existiert ein $\pi\in\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ mit $\pi(\xi') = \xi$ und $\pi(\eta') = \eta'$. Folglich gilt für alle $\xi\in\alpha_s$ $(\xi,\eta')\in\varrho_s$.

Offensichtlich ist

$$\sigma_s = \mathrm{Att}_\Sigma(Rxy \wedge y = y' \ ; \ x,y \ ; f_\Sigma\left\langle \begin{matrix} R & y' \\ \varrho_s & \eta' \end{matrix}\right\rangle)$$

eine Auswahlfunktion für α_s und ϱ_s. Damit ist (1) erfüllt. (2) gilt sofort aufgrund der Definition von α_s und ϱ_s.

Da $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma_s) \supseteqq \mathfrak{g}(\mathfrak{z}) \supset \mathfrak{g}(\mathfrak{z}_\sigma)$ gilt, ist (3) erfüllt.

zu 2.2.1): σ_s sei das zweistellige Attribut über I, das genau auf die Paare (ξ,η) zutrifft, für die ein $\pi\in\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ mit $\pi(\xi') = \xi$ und $\pi(\eta') = \eta$ existiert. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha_s) \supseteqq \mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma_s) \supseteqq \mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ gilt einerseits sofort (2) und andererseits sofort (3). Da nach Voraussetzung für diesen Fall für jedes $i\in\{1,\dots,k\}$ ein $i'\in\{1,\dots,k'\}$ mit $\eta'_i = \xi'_{i'}$ und demzufolge mit $\eta_i = (f(\pi))(\eta'_i) = (f(\pi))(\xi'_{i'}) = \xi_{i'}$ für jedes π aus $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ existiert, muß σ_s eine Auswahlfunktion für α_s, für das ja $\alpha_s = \{\xi : \exists\pi(\pi\in\mathfrak{g}(\mathfrak{z})\ \&\ \xi = \pi(\xi'))\}$ gilt, und ϱ_s sein.

Also gilt auch (1).

zu 2.2.2.1): Nach Definition von $\mathfrak{z}_\delta$ existieren in $\mathfrak{z}_\delta$ zwei disjunkte unendliche Teilmengen $P_j^{(1)}$ und $P_j^{(2)}$ von P_j.
Für jedes beliebige $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{k'})$ aus α_s, ein $\eta_{i,1}$ aus $P_j^{(1)} - \{\xi_1, \dots, \xi_{k'}\}$ und ein $\eta_{i,2}$ aus $P_j^{(2)} - \{\xi_1, \dots, \xi_{k'}\}$ existieren Permutationen π $(f(\pi) = \pi_0)$ und π' $(f(\pi') = \pi_0')$ aus $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ mit $\pi(\xi') = \xi$ und $\pi(\eta') = \eta^{(1)}$, wobei
$\eta^{(1)} = (\pi_0(\eta_1'), \dots, \pi_0(\eta_{i-1}'), \eta_{i,1}, \pi_0(\eta_{i+1}'), \dots, \pi_0(\eta_k'))$ gilt, und
$\pi'(\xi') = \xi$ und $\pi'(\eta') = \eta^{(2)}$, wobei
$\eta^{(2)} = (\pi_0'(\eta_1'), \dots, \pi_0'(\eta_{i-1}'), \eta_{i,2}, \pi_0'(\eta_{i+1}'), \dots, \pi_0'(\eta_k'))$ gilt.
Folglich existieren für ξ aus α_s ein Paar $(\xi, \eta^{(1)})$ aus
$\upsilon^{(1)} = \overline{I \times \underbrace{(\mathbb{N}^{i-1} \times P_j^{(1)} \times \mathbb{N}^{k-i})}}$ mit $(\xi, \eta^{(1)}) \in \varrho_s$ und ein Paar $(\xi, \eta^{(2)})$
aus $\upsilon^{(2)} = \overline{I \times \underbrace{(\mathbb{N}^{i-1} \times P_j^{(2)} \times \mathbb{N}^{k-i})}}$ mit $(\xi, \eta^{(2)}) \in \varrho_s$.
Da mit $P_j^{(1)}$ und $P_j^{(2)}$ auch $\upsilon^{(1)}$ und $\upsilon^{(2)}$ disjunkt sind, hat das durch $\sigma_s = \varrho_s \cap \upsilon^{(1)}$ definierte Attribut σ_s die Eigenschaft (1).
Es ist klar, daß σ_s auch die Eigenschaft (2) hat. (3) ist für σ_s erfüllt, weil $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\varrho_s) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z}) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z}_\delta)$ ebenso wie $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\upsilon^{(1)}) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z}_\delta)$ gilt.

zu 2.2.2.2.1): $P_j^{(1)}, \dots, P_j^{(r)}$ seien die einelementigen Teilmengen von P_j. Sie gehören nach Definition von $\mathfrak{z}_\delta$ zu $\mathfrak{z}_\delta$.
Es sei $\eta_i'' \in P_j - \{\eta_i', \xi_1', \dots, \xi_{k'}'\}$. Dann existiert ein π $(f(\pi) = \pi_0)$ aus $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ mit $\pi(\xi') = \xi'$ und $\pi_0(\eta_i') = \eta_i''$. Also gilt $(\xi', \eta') \in \varrho_s$ und $(\xi', \eta'') \in \varrho_s$, wobei $\eta'' = (\pi_0(\eta_1'), \dots, \pi_0(\eta_{i-1}'), \eta_i'', \pi_0(\eta_{i+1}'), \dots, \pi_0(\eta_k'))$ $\neq \eta'$ gilt.
Für jedes ξ aus α_s existiert ein π_ξ aus $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ mit $\pi_\xi(\xi') = \xi$, und es gilt $(\xi, \pi_\xi(\eta')) \in \varrho_s$ und $(\xi, \pi_\xi(\eta'')) \in \varrho_s$. Außerdem existieren r' und r'' aus $\{1, \dots, r\}$, für die $r' \neq r''$ und $(\xi, \pi_\xi(\eta')) \in \upsilon^{(r')}$ und $(\xi, \pi_\xi(\eta'')) \in \upsilon^{(r'')}$ gilt, wobei $\upsilon^{(\bar r)}$ für alle $\bar r \in \{1, \dots, r\}$ durch $\upsilon^{(\bar r)} = \overline{I \times \underbrace{(\mathbb{N}^{i-1} \times P_j^{(\bar r)} \times \mathbb{N}^{k-i})}}$ definiert sei.

δ_s sei nun das zweistellige Attribut über I, das auf ein Paar (ξ,η) genau dann zutrifft, wenn $(\xi,\eta)\in\varrho_s$ gilt und ein r' $\in\{1,\ldots,r\}$ existiert, so daß $(\xi,\eta)\in\upsilon^{(r')}$ gilt und kein $\bar{r}$ $\in\{1,\ldots,r'\}$ mit $(\xi,\bar{\eta})\in\varrho_s\cap\upsilon^{(\bar{r})}$ für ein Individuum $\bar{\eta}$ existiert. Dann gilt für alle $\xi\in\alpha_s$ entweder $(\xi,\pi_\xi(\eta'))\in\delta_s$ und $(\xi,\pi_\xi(\eta''))\notin\delta_s$ oder $(\xi,\pi_\xi(\eta'))\notin\delta_s$ und $(\xi,\pi_\xi(\eta''))\in\delta_s$. Also ist für δ_s die Eigenschaft (1) erfüllt. (2) gilt für δ_s aufgrund der Definition von α_s und der Definition von δ_s. Außerdem gilt (3); denn angenommen, es existieren ein ξ^*, ein η^* und ein π^* aus $\mathcal{G}(\mathfrak{z}_\delta)$ mit $(\xi^*,\eta^*)\in\delta_s$ und $(\xi^{**},\eta^{**})=(\pi^*(\xi^*),\pi^*(\eta^*))\notin\delta_s$, so existiert ein $r'\in\{1,\ldots,r\}$ mit $(\xi^*,\eta^*)\in\upsilon^{(r')}$, woraus auch $(\xi^{**},\eta^{**})\in\upsilon^{(r')}$ folgt, und es gilt:

(I) $(\xi^*,\eta^*)\in\varrho_s$ (Ia)

und für alle $\bar{r}\in\{1,\ldots,r'\}$ folgt aus $(\xi^*,\bar{\eta})\in\upsilon^{(\bar{r})}$

$(\xi^*,\bar{\eta})\notin\varrho_s$; (Ib)

(II) $(\xi^{**},\eta^{**})\notin\varrho_s$ (IIa)

oder es existiert schon ein $r''\in\{1,\ldots,r'\}$ und

ein $(\xi^{**},\eta^{***})\in\upsilon^{(r'')}$ mit $(\xi^{**},\eta^{***})\in\varrho_s$. (IIb)

Aus $\pi^*\in\mathcal{G}(\mathfrak{z}_\delta)$ folgt auch $(\pi^*)^{-1}\in\mathcal{G}(\mathfrak{z}_\delta)$. Weil außerdem $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\varrho_s)\supseteq\mathcal{G}(\mathfrak{z})\supseteq\mathcal{G}(\mathfrak{z}_\delta)$ gilt, folgt aus (IIa) $(\xi^*,\eta^*)\notin\varrho_s$, was (Ia) widerspricht, und aus (IIb) die Existenz eines $r''\in\{1,\ldots,r'\}$ und eines η^{***} mit $(\xi^*,(\pi^*)^{-1}(\eta^{***}))\in\varrho_s\cap\upsilon^{(r'')}$, was (Ib) widerspricht. (II) widerspricht also (I). Folglich ist für δ_s auch die Eigenschaft (3) erfüllt.

zu 2.2.2.2.2): δ_s sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn ein $\pi\in\mathcal{G}(\mathfrak{z})$ mit $\pi(\xi')=\xi$ und $\pi(\eta')=\eta$ existiert.

Dann sind (2) und (3) wegen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\delta_s)\supseteq\mathcal{G}(\mathfrak{z})$ und $\mathcal{G}(\mathfrak{z})\supseteq\mathcal{G}(\mathfrak{z}_\delta)$ sofort klar. (1) ist erfüllt, weil δ_s eine Auswahlfunktion für α_s und ϱ_s ist; denn angenommen, δ_s ist keine Auswahlfunktion für α_s und ϱ_s, so gilt (I) oder (II):

(I) Es existiert für ein $\xi^* \in \alpha_s$ kein $\bar{\eta}$ mit $(\xi^*, \bar{\eta}) \in \sigma_s \subset \varrho_s$.

(II) Es existieren für ein $\xi^* = (\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{k'})$ zwei Individuen $\eta^* = (\eta^*_1, \ldots \eta^*_k)$ und $\eta^{**} = (\eta^{**}_1, \ldots, \eta^{**}_k)$ mit $\eta^*_I \neq \eta^{**}_I$ für ein $I \in \{1, \ldots, k\}$, $(\xi^*, \eta^*) \in \sigma_s$ und $(\xi^*, \eta^{**}) \in \sigma_s$.

Aus (I) folgt aber, daß kein $\pi \in \mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ mit $\pi(\xi') = \xi^*$ existiert. Das widerspricht mindestens einer der Definitionen von α_s und $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$.

Aus (II) folgt die Existenz von mindestens zwei Permutationen $(f(\pi) = \pi_0)$ und π' $(f(\pi') = \pi'_0)$ aus $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ mit $\pi(\xi') = \xi^*$, $\pi(\eta') = \eta^*$, $\pi'(\xi') = \xi^*$ und $\pi'(\eta') = \eta^{**}$.

Das bedeutet, daß $\pi_0(\eta'_I) \neq \pi'_0(\eta'_I)$ aber auch $\pi_0(\xi'_{i'}) = \pi'_0(\xi'_{i'})$ für alle $i' \in \{1, \ldots, k'\}$ gilt. Also gilt $\eta'_I \notin \{\xi'_1, \ldots, \xi'_{k'}\}$ und damit $\eta^*_I \notin \{\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{k'}\}$ und $\eta^{**}_I \notin \{\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{k'}\}$.

D.h., daß für $(\xi^*, \eta^*) \in \varrho_s$ η^*_I aus einem P_J $(J \in \{1, \ldots, l\})$ mit $|P_J| > 1$ und $P_J \cap \{\eta^*_I, \xi_1, \ldots, \xi_{k'}\} \neq \emptyset$ ist.

Es trifft hier also schon Fall 2.2.2.1) oder Fall 2.2.2.2.1) zu.

Es wurde aber bei der Betrachtung dieses Falles vorausgesetzt, daß keiner der vorhergehenden Fälle auf α_s und ϱ_s zutrifft.

Damit ist hier (II) unmöglich.

σ_s ist eine Auswahlfunktion für α_s und ϱ_s, und damit ist für σ_s (1) erfüllt.

zu 2.2.2.3): Da die vorhergehenden Fälle wieder ausgeschlossen werden, gilt für ein beliebiges $I \in \{1, \ldots, k\}$ $\eta'_I \in \{\xi'_1, \ldots, \xi'_{k'}\}$ oder es existiert ein $J \in \{1, \ldots, l\}$ mit $\eta'_I \in P_J$ und $|P_J| = 1$.

Für $\pi(f(\pi) = \pi_0)$ aus $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ gilt $\pi_0(\eta'_I) = \eta'_I$, falls für I $(I \in \{1, \ldots, k\})$ ein $J \in \{1, \ldots, l\}$ mit $\eta'_I \in P_J$ und $|P_J| = 1$ existiert.

Analog zu 2.2.1) ist also σ_s, das genau dann auf ein (ξ, η) zutrifft, wenn ein π aus $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ mit $\pi(\xi') = \xi$ und $\pi(\eta') = \eta$ existiert, eine Auswahlfunktion für α_s und ϱ_s. Es gilt deshalb für σ_s (1).

(2) und (3) gelten ebenfalls.

Damit existiert für jedes beliebige $s \in S$ ein δ_s mit den Eigenschaften (1), (2) und (3).

$\delta = \bigcup_{s \in S} \delta_s$ erfüllt demzufolge die Bedingungen a) und b) und ist damit ein Selektor für α und ϱ, der zu Σ gehört.

Also ist $KW\text{-}AC_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{f})$ wahr.

<u>Satz 9.4:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{f}) \in Mod_{\mathfrak{h}}(\neg AC^{Disj}_{1,1})$.

Beweis: Es sei $\alpha = \mathbb{Z}\text{-}\mathbb{N}$. Wegen $sym_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \mathfrak{g}$ gehört α zu $J_1(I,\mathfrak{g},\mathfrak{f})$. ϱ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn ξ aus α und η ein $(-\xi)$-Tupel aus I ist. Wegen $sym_{\mathfrak{g}}(\varrho) = \mathfrak{g}$ gehört auch ϱ zu Σ. Offensichtlich gilt

$$Wert_{\Sigma}(Kor^1_{Disj}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W.$$

Es wird nun angenommen, daß in Σ für α und ϱ eine Auswahlfunktion δ existiert. Dann sei $\mathfrak{z}$ ein Element aus $Zerl_{end.}(\mathbb{N})$ mit $sym_{\mathfrak{g}}(\delta) \supseteq \mathfrak{g}(\mathfrak{z})$. Es sei $\mathbb{P} = \{P: P \in \mathfrak{z} \;\&\; |P| = 1\}$. Dann existiert eine natürliche Zahl r mit $|\mathbb{P}| = r$.

Für $\xi' = -(r+1)$ muß nun ein $(r+1)$-Tupel $\eta' = (\eta'_1,\ldots,\eta'_{r+1})$ mit $(\xi',\eta') \in \delta$ existieren. Da $|\mathbb{P}| = r$, existiert dann mindestens ein $r' \in \{1,\ldots,r+1\}$ mit $\eta'_{r'} \in \mathbb{P}$. Das bedeutet, daß ein $P'' \in \mathfrak{z}$ mit $|P''| > 1$ und $\eta'_{r'} \in P''$ existiert. Es sei $\eta''_{r'}$ ein weiteres Element von P". Für dieses existiert in $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ ein $\pi\,(f(\pi) = \pi_0)$ mit $\pi(\eta'_{r'}) = \eta''_{r'}$. Damit folgt aus $(\xi',\eta') \in \delta$ auch $(\xi',\eta'') \in \delta$, wobei $\eta'' = (\pi_0(\eta'_1),\ldots,\pi_0(\eta'_{r'-1}),\eta''_{r'},\pi_0(\eta'_{r'+1}),\ldots,\pi_0(\eta'_{r+1})) \neq \eta'$ gilt. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß δ eine Auswahlfunktion ist.

Damit ist $AC^{Disj}_{1,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{f})$ falsch.

<u>Satz 9.5:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathfrak{h}}(\neg ZL_1)$.

Beweis: τ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn ein k und ein l $(1 \leq k < l)$ existieren, so daß ξ ein k-Tupel aus $\mathbb{N}^k$ und η ein l-Tupel aus $\mathbb{N}^l$ ist, oder wenn $\xi = \eta$ gilt. Es gilt $sym_{\mathfrak{g}}(\tau) = \mathfrak{g}$.

Für $\alpha = \overline{I - (\mathbb{Z}\text{-}\mathbb{N})}$ gilt ebenfalls $sym_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \mathfrak{g}$. Damit gehören τ und

α zu $\sum_9$ und τ ist eine partielle Ordnung in α. Offensichtlich enthält α kein maximales Element bzgl. τ. Trotzdem hat jede Kette in α, die zu $J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ gehört, analog zum Beweis des Satzes 7.5 dieses Kapitels ein Supremum, weil sie endlich ist. Daß jede dieser Ketten endlich ist, wird nun noch gezeigt. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, daß in α eine Kette β' existiert, die zu $J_1(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ gehört und die auf unendlich viele Individuen (aus $I - (\mathbb{Z}-\mathbb{N})$) zutrifft. Die Kette β' trifft für keine natürliche Zahl l auf zwei verschiedene l-Tupel zu; denn für jedes $l \geqq 1$ gilt für zwei verschiedene l-Tupel ξ und ξ' weder $(\xi,\xi')\in\tau$ noch $(\xi',\xi)\in\tau$.

$\mathfrak{z}$ sei ein Element aus $\mathrm{Zerl}_{\mathrm{end.}}(\mathbb{N})$ mit $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\beta') \supseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{z})$. Weiterhin sei $\mathbb{P} = \bigcup\{P' : P'\in\mathfrak{z}\ \&\ |P'| = 1\}$. $\mathbb{P}$ ist endlich, d.h., daß eine natürliche Zahl r mit $|\mathbb{P}| = r$ existiert. Da β' unendlich ist und β' für jede natürliche Zahl l höchstens ein l-Tupel enthält, existiert ein $k > r$ und ein k-Tupel $\eta' = (\eta_1',\ldots,\eta_k')$, auf das β' zutrifft. Dann existiert aber mindestens ein $k'\in\{1,\ldots,k\}$ mit $\eta_{k'}' \notin \mathbb{P}$. Für dieses $\eta_{k'}'$ existiert also ein P'' aus $\mathfrak{z}$ mit $\eta_{k'}'\in P''$ und $|P''| > 1$. Folglich existiert in P'' ein weiteres Element $\eta_{k'}''$, für das ein π $(f(\pi)=\pi_0)$ aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{z})$ mit $\pi_0(\eta_{k'}') = \eta_{k'}''$ existiert. Also gehört auch das l-Tupel

$\pi(\eta') = (\pi_0(\eta_1'),\ldots,\pi_0(\eta_{k'-1}'),\eta_{k'}'',\pi_0(\eta_{k'+1}'),\ldots,\pi_0(\eta_k'))$ $(\neq \eta')$ zu β'. Das ist ein Widerspruch dazu, daß β' eine Kette ist.

Also ist ZL_1 in $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ falsch.

Satz 9.6: $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{H}}(\neg AC^{\omega}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien die beim Beweis des Satzes 9.4 definierten Attribute. Für diese Attribute gilt auch

$\mathrm{Wert}_{\sum}(\mathrm{Kor}^1_{\omega}(R,A), f_{\sum}\begin{pmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{pmatrix}) = W$. Trotzdem existiert in $\sum$ für α und ϱ keine Auswahlfunktion.

Also ist $AC^{\omega}_{1,1}$ in $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ falsch.

Christine Gaßner: *Das Auswahlaxiom im Prädikatenkalkül zweiter Stufe (Dissertation 1984)*

<u>Satz 9.7:</u> $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{G}}(\neg DC_1)$.

Beweis: τ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ,η) zutrifft, wenn ein k $(1 \leqq k)$ existiert, so daß ξ ein k-Tupel aus I und η ein (k+1)-Tupel aus I ist. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\tau) = \mathfrak{G}$ gehört τ zu Σ. ξ_0 sei ein Individuum aus $\mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Rel}_W \subseteqq D(T) \wedge \bigvee_{x_1} Tx_0x_1, f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} T & x_0 \\ \tau & \xi_0 \end{matrix}\right\rangle) = W$.

Aus der Annahme, daß in Σ für τ und ξ_0 eine bedingte Auswahlfunktion existiert, folgt analog zum Beweis des Satzes 5.8 dieses Kapitels, daß in Σ für die beim Beweis des Satzes 9.4 definierten Attribute α und ϱ eine Auswahlfunktion existiert. Das ist ein Widerspruch.

Demzufolge ist DC_1 in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ falsch.

10. Es sei $I = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{g} = Perm_{m.w.}(\mathbb{Q})$ und $\mathfrak{I} = \{P : \exists q(q \in \mathbb{Q}\ \&\ P \subseteqq P_q)\}$, wobei P_q für jedes q aus $\mathbb{Q}$ durch $P_q =]-\infty, q[\cap \mathbb{Q}$ definiert ist.
Dann gilt der

<u>Satz 10.1:</u> $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 10.2:</u> $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathfrak{g}}(AC^{Disj}_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien aus $J_1(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ bzw. aus $J_2(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$; und es gelte $Wert_\sum(Kor^1_{Disj}(R,A), f_\sum\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix}\right\rangle) = W$. Dann existiert in $\mathbb{Q}$ ein q, für das $sym_\mathfrak{g}(\varrho) \supseteqq \mathfrak{g}(P_q)$ und folglich auch $sym_\mathfrak{g}(\alpha) \supseteqq \mathfrak{g}(P_q)$ gilt.

Daß für α und ϱ in $\sum$ eine Auswahlfunktion existiert, kann analog zum Beweis des Satzes 7.4 dieses Kapitels gezeigt werden. Zunächst sei $\alpha_1 = \alpha \cap \overline{P_q}$ und $\alpha_2 = \alpha - \overline{P_q}$. ϱ_i sei für $i \in \{1,2\}$ durch $\varrho_i = Att_\sum(Rxy \wedge Ax\ ;\ x,y\ ;\ f_\sum\left\langle\begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha_i \end{matrix}\right\rangle)$ definiert. Es sei q_σ aus $\mathbb{Q} \cap]q, +\infty[$. Es soll nun gezeigt werden, daß

1. für jedes ξ aus α_1 ein η' mit $(\xi,\eta') \in \varrho_1$ und $q_\sigma > \eta'$ existiert und daß
2. ϱ_2 eine Funktion ist.

zu 1.: Es sei ξ ein beliebiges Individuum aus α_1. Dann existiert in I nach Voraussetzung ein η mit $(\xi,\eta) \in \varrho$ und damit mit $(\xi,\eta) \in \varrho_1$. Es sind folgende Fälle möglich:

a) $\eta \leqq q$;
b) $\eta > q$.

zu b): Offenbar existiert in I ein η' mit $q < \eta' < q_\sigma$. Außerdem gilt $\xi < q$. Dann existiert analog zum Hilfssatz 6 in [3] (S. 115) in $\mathfrak{g}(P_q)$ ein π mit $\pi(\xi) = \xi$ und $\pi(\eta) = \eta'$. Daraus folgt $(\xi,\eta') \in \varrho_1$.
Also existiert in jedem Fall für ξ ein η' mit $(\xi,\eta') \in \varrho$ und $q_\sigma > \eta'$.

zu 2.: Es wird nun von der Annahme ausgegangen, daß ϱ_2 keine Funktion ist. Dann existiert in α_2 ein ξ, für das zwei verschiedene Individuen η' und η'' mit $(\xi,\eta') \in \varrho$ und $(\xi,\eta'') \in \varrho$ existieren.

Folglich existieren Individuen ξ' und η, für die $\eta \in \{\eta', \eta''\} - \{\xi\}$ und $\xi' \in]\xi, \eta[$ gilt, falls $\xi < \eta$ gilt, und $\xi' \in]\max\{q, \eta\}, \xi[$ gilt, falls $\xi > \eta$ gilt. Damit existiert in $\mathfrak{G}(P_q)$ ein π mit $\pi(\xi) = \xi'$ und $\pi(\eta) = \eta$. Also gilt mit $(\xi, \eta) \in \varrho$ auch $(\xi', \eta) \in \varrho$. Das widerspricht der Voraussetzung. Damit ist ϱ_2 eine Funktion.

Aus 1. folgt die Existenz einer Auswahlfunktion σ_1 für α_1 und ϱ_1, für die $\sigma_1 \subseteq (P_{q_\sigma})^2$ gilt. Demzufolge gehört dieses σ_1 sogar zu Σ.

$\sigma_2 = \varrho_2$ ist wegen 2. ebenfalls eine Auswahlfunktion für α_2 und ϱ_2.

Damit ist $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ eine Auswahlfunktion für α und ϱ.

Also ist $AC^{\mathrm{Disj}}_{1,1}$ in $\Sigma(I, \mathfrak{G}, \mathfrak{I})$ wahr.

<u>Satz 10.3:</u> $\Sigma(I, \mathfrak{G}, \mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{G}}(\neg MC(1)^{LO}_{1,1})$.

Beweis: Es sei $\alpha = \mathrm{I}$. ϱ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ, η) zutrifft, wenn $\xi < \eta$ gilt. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\alpha) = \mathfrak{G}$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\varrho) = \mathfrak{G}$ gehören α und ϱ zu Σ. Außerdem ist Wert $\mathrm{Wert}_\Sigma(\mathrm{Kor}^1_{LO}(R,A), f_\Sigma\left\langle\begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{smallmatrix}\right\rangle)$ wahr.

Es wird nun angenommen, daß für α und ϱ in Σ bzgl. $\mathrm{Fin}_1(C)$ eine multiple Auswahlrelation σ existiert. Dann existiert in $\mathbb{Q}$ ein q_σ, so daß $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{G}(P_{q_\sigma})$ gilt. Es sei $\xi' = q_\sigma$. Dann existiert ein Individuum η', für das $(\xi', \eta') \in \sigma$ und $\xi' < \eta'$ gilt. η sei ein beliebiges Individuum aus $]q_\sigma, +\infty[$. Dann existiert in $\mathfrak{G}(P_{q_\sigma})$ ein π mit $\pi(\xi') = \xi'$ und $\pi(\eta') = \eta$. Das bedeutet, daß aus $(\xi', \eta') \in \sigma$ auch $(\xi', \eta) \in \sigma$ folgt.

Damit gilt für das Attribut $\gamma = \mathrm{Att}_\Sigma(Sx'y \; ; \; y \; ; \; f_\Sigma\left\langle\begin{smallmatrix} S & x' \\ \sigma & \xi' \end{smallmatrix}\right\rangle)$ die Gleichung $\gamma =]q_\sigma, +\infty[\cap \mathbb{Q}$. Es sei q_τ eine rationale Zahl mit $q_\sigma < q_\tau$ und $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so daß für alle i aus $\mathbb{N}$ $q_\sigma < q_i < q_{i+1} < q_\tau$ gilt. τ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (η_1, η_2) zutrifft, wenn in $\mathbb{N}$ ein i existiert, so daß $\eta_1 = q_i$ und $\eta_2 = q_{i+1}$ gilt. Offensichtlich gehört τ wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\tau) \supseteq \mathfrak{G}(P_{q_\tau})$ zu Σ. Demzufolge wird $\mathrm{Fin}_1(C)$ bei

Belegung von C mit γ in $\sum$ falsch. Also führt die Annahme, daß σ bzgl. $Fin_1(C)$ für α und ϱ eine multiple Auswahlrelation in $\sum$ ist, zum Widerspruch.

Demzufolge ist $MC(1)^{LO}_{1,1}$ in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ falsch.

Satz: $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J}) \in Mod_{\mathfrak{g}}(\neg KW\text{-}AC_{1,1})$.

Beweis: α und ϱ seien die im letzten Beweis definierten Attribute. Wird von der Annahme ausgegangen, daß in $\sum$ für α und ϱ ein Selektor σ existiert, so kann gezeigt werden, daß σ für ein ξ und alle η mit $\xi < \eta$ auf (ξ,η) zutrifft. Demzufolge kann σ im Widerspruch zur Annahme kein Selektor für α und ϱ sein.

Also ist $KW\text{-}AC_{1,1}$ in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{J})$ falsch.

11. Es sei $I = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Dann ist leicht einzusehen, daß

$$\mathfrak{g} = \{\pi : \pi \in \mathrm{Perm}(I) \ \& \forall \xi_1 (\xi_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \pi_{\xi_1} (\pi_{\xi_1} \in \mathrm{Perm}_{m.w.}(\mathbb{Q}) \ \& \forall \xi_2 (\xi_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pi(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \pi_{\xi_1}(\xi_2)))))\}$$

eine Gruppe von Permutationen von I ist. $P_{<\omega}(\mathbb{N})$ sei wieder die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann ist $\mathfrak{J} = \{P : \exists M (M \in P_{<\omega}(\mathbb{N}) \ \& \ P \subseteq (M \times \mathbb{Q}))\}$ bzgl. $\mathfrak{g}$ ein Normal-Ideal in I. Damit gilt der

<u>Satz 11.1:</u> $\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 11.2:</u> $\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J}) \in \mathrm{Mod}_{\varphi_g}(LO_1)$.

Der Beweis dieses Satzes kann analog zum Beweis des Satzes 7.3 geführt werden.

<u>Satz 11.3:</u> $\underline{\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{J})} \in \mathrm{Mod}_{\varphi_g}(\neg MC(4)^{\omega}_{1,1})$.

Beweis: Es sei $\alpha = \{0\} \times \mathbb{N}$. ϱ sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar $((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2))$ zutrifft, wenn $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = \eta_1$ gilt. Wegen $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{g}(\{0\} \times \mathbb{Q})$ und $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\varrho) \supseteq \mathfrak{g}(\{0\} \times \mathbb{Q})$ gehören α und ϱ zu Σ. Außerdem gilt

$$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^1(R, A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W.$$

Es wird von der Annahme ausgegangen, daß $MC(4)^{\omega}_{1,1}$ in Σ wahr ist. Dann existiert in Σ für α und ϱ bzgl. $\mathrm{Fin}_4(C)$ eine multiple Auswahlrelation σ. Folglich existiert in $P_{<\omega}(\mathbb{N})$ ein M, für das $\mathrm{sym}_{\mathfrak{g}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{g}(M \times \mathbb{Q})$ gilt. Es sei $\xi_2' = \max(M \cup \{0\}) + 1$. Dann gehört $\xi' = (0, \xi_2')$ zu α. Folglich existiert in $\mathbb{Q}$ ein η_2', so daß für $\eta' = (\xi_2', \eta_2')$ die Beziehung $(\xi', \eta') \in \sigma$ erfüllt ist. η_2 sei ein beliebiges Element von $\mathbb{Q}$. π_{ξ_1} sei für alle ξ_1 aus $\mathbb{N} - \{\xi_2'\}$ die identische Abbildung von $\mathbb{Q}$ und für $\xi_1 = \xi_2'$ eine Permutation π' aus $\mathrm{Perm}_{m.w.}(\mathbb{Q})$, für die $\pi'(\eta_2') = \eta_2$ gilt. Die Permutation π sei für alle (ξ_1, ξ_2) aus I durch $\pi(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \pi_{\xi_1}(\xi_2))$ definiert. Offensichtlich gehört π zu $\mathfrak{g}(M \times \mathbb{Q})$. Demzufolge gilt mit (ξ', η')

$\in \sigma$ für alle η aus $\left\{\begin{matrix}\xi'\\ \xi_2\end{matrix}\right\} \times \mathbb{Q}$ die Beziehung $(\xi', \eta) \in \sigma$. Demzufolge gilt für $\gamma = Att_{\Sigma}(Sx'y ; y ; f_{\Sigma}\left\langle\begin{matrix} S & x' \\ \sigma & \xi' \end{matrix}\right\rangle)$ die Gleichung $\gamma = \left\{\begin{matrix}\xi'\\ \xi_2\end{matrix}\right\} \times \mathbb{Q}$. φ sei ein beliebiges dreistelliges Attribut über I, das eine Bijektion von γ auf $\overline{\gamma^2}$ ist. Wegen $sym_{\mathfrak{g}}(\varphi) \supseteq \mathfrak{g}(\left\{\begin{matrix}\xi'\\ \xi_2\end{matrix}\right\} \times \mathbb{Q})$ gehört φ zu Σ. Folglich wird $Fin_4(C)$ bei Belegung von C mit γ in Σ falsch. Das ist ein Widerspruch dazu, daß σ bzgl. $Fin_4(C)$ in Σ eine multiple Auswahlrelation für α und ϱ ist.

Damit ist $MC(4)^{\omega}_{1,1}$ in $\Sigma(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{I})$ falsch.

12. Es sei $I = \mathbb{Q}$. $\mathcal{G} = \mathrm{Perm}_{m.W.}(I)$ ist eine Gruppe von Permutationen von I. Außerdem sei $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0(I)$.

<u>Satz 12.1:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 12.2:</u> $\Sigma(I,\mathcal{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{G}}(ZL_1)$.

Beweis: α sei ein Attribut aus $J_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ und τ ein Attribut aus $J_2(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$, das eine partielle Ordnung in α ist. Außerdem existiere für jedes durch τ totalgeordnete Teilattribut β von α, falls es zu $J_1(I,\mathcal{G},\mathfrak{I})$ gehört, ein Individuum ζ, so daß

$\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Sup}(z,B,T,A), f_{\Sigma}\left\langle \begin{matrix} z & B & T & A \\ \zeta & \beta & \tau & \alpha \end{matrix} \right\rangle) = W$ gilt.

Dann existiert eine endliche Teilmenge P von I, für die $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\tau) \supseteq \mathcal{G}(P_\tau)$ gilt. Offensichtlich gilt dann aufgrund der Voraussetzungen auch $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\alpha) \supseteq \mathcal{G}(P_\tau)$. $q_1,\ldots,q_k$ seien paarweise verschiedene rationale Zahlen, so daß für alle i aus $\{1,\ldots,k-1\}$ die Beziehung $q_i < q_{i+1}$ und die Gleichung $P_\tau = \{q_1,\ldots,q_k\}$ gilt. Weiterhin seien $q_0 = -\infty$ und $q_{k+1} = +\infty$. Nun sei $S = (\{1\} \times P_\tau) \cup (\{2\} \times (P_\tau \cup \{q_0\}))$.
Ist $s = (s_1,s_2)$ aus S, so sei

$$P_s = \begin{cases} \{s_2\}, & \text{falls } s_1 = 1 \\ ]\!]q_i, q_{i+1}[\![, & \text{falls } s_1 = 2 \text{ und } s_2 = q_i \end{cases}$$

$\mathbb{P}$ sei durch $\mathbb{P} = \{P_s : s \in S\}$ definiert.

Es seien s und s' aus S, und es gelte $s \neq s'$. Gilt für ein ξ_0 aus P_s und ein ξ_0' aus $P_{s'}$ die Beziehung $(\xi_0,\xi_0') \in \tau$, so gilt für beliebige ξ aus P_s und ξ' aus $P_{s'}$ analog zu (A) in dem Beweis des Satzes 2.5 dieses Kapitels die Beziehung $(\xi,\xi') \in \tau$ und demzufolge auch $(\xi',\xi) \notin \tau$, weil τ antisymmetrisch ist und P_s und $P_{s'}$ disjunkt sind. (*)

α ist nach Voraussetzung nicht leer. Demzufolge existiert in $\mathbb{P}$ ein P^0, für das $P^0 \cap \alpha \neq \emptyset$ gilt. Es existiert in $\mathbb{P}$ sogar ein P', für das $P' \cap \alpha \neq \emptyset$ gilt und für jedes $P \in \mathbb{P} - \{P'\}$, jedes ξ aus P und jedes ξ' aus P' die Beziehung $(\xi',\xi) \notin \tau$ gilt. Um das zu zeigen, wird von der Annahme ausgegangen, daß ein solches P'

nicht existiert. P^* sei dann für jedes P aus $\mathbb{P}$ ein Element von $\mathbb{P} - \{P\}$, so daß in P ein ξ_0 und in P^* ein ξ_0^* existieren, so daß $(\xi_0, \xi_0^*) \in \tau$ gilt. Folglich gelten für jedes P aus $\mathbb{P}$, jedes ξ aus P und jedes ξ^* aus P^* wegen (*) die Beziehungen $(\xi, \xi^*) \in \tau$ und $(\xi^*, \xi) \notin \tau$.

$(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge, so daß für jedes i aus $\mathbb{N}$ die Gleichung $P_{i+1} = (P_i)^*$ gilt. Weil $\mathbb{P}$ endlich ist, existieren in $\mathbb{N}$ ein j und ein j' mit $j < j'$ und $P_j = P_{j'}$. Da nach Definition $P_j \neq P_{j+1}$ gilt, erhält man sogar die Ungleichung $j+1 < j'$. Damit folgt aus der Transitivität von τ für alle $\xi_{j+1} \in P_{j+1}$ und alle $\xi_j \in P_j = P_{j'}$ die Beziehung $(\xi_{j+1}, \xi_j) \in \tau$. Das widerspricht der Gleichung $P_{j+1} = (P_j)^*$.
Es sei also P_0' ein Element von $\mathbb{P}$, so daß für alle P aus $\mathbb{P} - \{P_0'\}$, alle ξ aus P und alle ξ' aus P_0' das Attribut τ nicht auf (ξ', ξ) zutrifft. Es soll nun gezeigt werden, daß jedes Element ξ' von P_0' bzgl. τ ein maximales Element von α ist. Dazu wird von der Annahme ausgegangen, daß in P_0' ein ξ_1' existiert, für das es in α ein von ξ_1' verschiedenes ξ_2' mit $(\xi_1', \xi_2') \in \tau$ gibt. ξ_2' gehört aufgrund der Definition von P_0' und der Gleichung $I = \bigcup \mathbb{P}$ zu P_0'. Folglich ist P_0' ein offenes Intervall von rationalen Zahlen.
Es sind zwei Fälle möglich:

1) $\xi_1' < \xi_2'$;
2) $\xi_2' < \xi_1'$.

Es sei $\beta' = P_0'$. Wegen $sym_{\mathfrak{g}}(\beta') \supseteq \mathfrak{g}(P_\tau)$ gehört β' zu $\mathfrak{I}_1(I, \mathfrak{g}, \mathfrak{I})$. ξ_1 und ξ_2 seien beliebige Individuen aus β', so daß $\xi_1 < \xi_2$ erfüllt ist. Analog zu (A) in dem Beweis des Satzes 2.5 existiert in $\mathfrak{g}(P_\tau)$ im Fall 1) ein π mit $\pi(\xi_1') = \xi_1$ und $\pi(\xi_2') = \xi_2$ und im Fall 2) ein π mit $\pi(\xi_1') = \xi_2$ und $\pi(\xi_2') = \xi_1$. Folglich gilt im Fall 1) $(\xi_1, \xi_2) \in \tau$ und im Fall 2) $(\xi_2, \xi_1) \in \tau$. Demzufolge ist β' ein durch τ totalgeordnetes Teilattribut von α, und dabei entspricht τ im Fall 1) der "$\leq$"-Beziehung und im Fall 2) der "$\geq$"-Beziehung. Folglich kann das Supremum ζ, das β' bzgl. τ nach Voraussetzung in α hat, nicht zu dem offenen Intervall P_0' gehören; d.h., daß in $\mathbb{P} - \{P_0'\}$ ein P'' mit $\zeta \in P''$ existiert. Da aber für jedes ξ' aus P_0' die Beziehung $(\xi',\zeta) \in \tau$ gilt, ist das ein Widerspruch zur Definition von P_0'. Damit ist die Annahme, daß in P_0' ein Individuum existiert, das bzgl. τ kein maximales Element von α ist, falsch.

Da P_0' und α nach Definition von P_0' nicht disjunkt sind und damit P_0' nicht leer ist, besitzt α ein maximales Element.

Also ist ZL_1 in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ wahr.

Satz 12.3: $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathfrak{h}}(\neg AC_{1,2}^{Disj})$.

Beweis: Es sei $\alpha = \bar{I}$. ϱ sei das dreistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Tripel (ξ,η_1,η_2) zutrifft, wenn $\xi = \eta_1 < \eta_2$ gilt. Wegen $sym_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \mathfrak{g}$ und $sym_{\mathfrak{g}}(\varrho) = \mathfrak{g}$ gehören α und ϱ zu $\sum$.

Außerdem ist der Wert $Wert_{\sum}(Kor^1_{Disj}(R,A), f_{\sum}\left\langle\begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha\end{smallmatrix}\right\rangle)$ wahr.

Es wird nun angenommen, daß für α und ϱ in $\sum$ eine Auswahlfunktion σ existiert. Dann existiert eine endliche Teilmenge P von I, für die $sym_{\mathfrak{g}}(\sigma) \supseteq \mathfrak{g}(P)$ gilt. Es sei $\xi' = \max P$. Dann existiert ein η' mit $(\xi',\xi',\eta') \in \sigma$ und $\xi' < \eta'$. Für das Individuum η'' gelte $\xi' < \eta''$ sowie $\eta' \neq \eta''$. Offensichtlich existiert aufgrund von Hilfssatz 6 in [3] (S. 115) in $\mathfrak{g}(P)$ ein π mit $\pi(\xi') = \xi'$ und $\pi(\eta') = \eta''$. Das bedeutet, daß mit $(\xi',\xi',\eta') \in \sigma$ auch $(\xi',\xi',\eta'') \in \sigma$ gilt. Das widerspricht der Annahme, daß σ eine Auswahlfunktion für α und ϱ ist.

Demzufolge ist $AC_{1,2}^{Disj}$ in $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I})$ falsch.

Satz 12.4: $\sum(I,\mathfrak{g},\mathfrak{I}) \in Mod_{\mathfrak{h}}(\neg ZL_2)$.

Beweis: α sei das zweistellige Attribut über I, das genau dann auf ein Paar (ξ_1,ξ_2) zutrifft, wenn $\xi_1 < \xi_2$ gilt. τ sei das vierstellige Attribut über I, das genau dann auf ein 4-Tupel $(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)$ zutrifft, wenn $\xi_1 < \eta_1 < \eta_2 < \xi_2$ oder $\xi_1 = \eta_1 < \xi_2 = \eta_2$ gilt. α und τ gehören wegen $sym_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \mathfrak{g}$ und $sym_{\mathfrak{g}}(\tau) = \mathfrak{g}$ zu $\sum$. Außerdem ist τ eine partielle Ordnung in α.

β sei ein beliebiges Attribut aus $J_2(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$, das ein Teilattribut von α ist und durch τ totalgeordnet wird. Dann existiert eine endliche Teilmenge $P=\{q_1,\ldots,q_k\}$ von I, so daß für alle i aus $\{1,\ldots,k-1\}$ die Ungleichung $q_i < q_{i+1}$ gilt und außerdem die Beziehung $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\beta) \supseteq \mathfrak{G}(P)$ erfüllt ist. Weiterhin sei $q_0 = -\infty$ und $q_{k+1} = +\infty$.

Es wird nun angenommen, daß β auf unendlich viele Individuen zutrifft. Dann existiert in β ein Paar (ξ_1',ξ_2'), das nicht zu P^2 gehört. Demzufolge sind für ein solches (ξ_1',ξ_2') die folgenden beiden Fälle möglich:

1) $\xi_1' \notin P$;

2) $\xi_2' \notin P$.

zu 1): Wegen $\xi_1' \notin P$ existiert in $\{0,\ldots,k\}$ ein i, so daß $\xi_1' \in]q_i,q_{i+1}[$ gilt. ξ_1'' sei ein Individuum aus I, für das $q_i < \xi_1'' < \xi_1' < \min\{q_{i+1},\xi_2'\}$ gilt. Dann existiert nach Hilfssatz 6 aus [3] (S. 115) in $\mathfrak{G}(P)$ ein π mit $\pi(\xi_1')=\xi_1''$ und $\pi(\xi_2')=\xi_2'$. Das bedeutet, daß auch (ξ_1'',ξ_2') zu β gehört. Es gilt aber weder $(\xi_1',\xi_2',\xi_1'',\xi_2')\in\tau$ noch $(\xi_1'',\xi_2',\xi_1',\xi_2')\in\tau$. Das ist ein Widerspruch dazu, daß β durch τ totalgeordnet wird.

Auf gleiche Weise kann Fall 2) zum Widerspruch geführt werden.

Also ist die Annahme, daß β unendlich ist, falsch.

Demzufolge ist β endlich. Das bedeutet, daß β bzgl. τ ein Maximum hat, welches gleichzeitig bzgl. τ das Supremum von β in α ist.

Obwohl damit jedes durch τ totalgeordnete Teilattribut von α, das zu $\sum$ gehört, ein Supremum in α hat, besitzt α kein maximales Element.

Also ist ZL_2 in $\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ falsch.

<u>Satz 12.5:</u> Für jede natürliche Zahl $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ gilt

$$\sum(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I}) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{h}}(AC^{\mathrm{Disj}}_{n,1}).$$

Beweis: n sei eine natürliche Zahl und ungleich 0.

α und ϱ seien Attribute aus $J_n(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ bzw. $J_{n+1}(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$; und es

gelte $\mathrm{Wert}_{\Sigma}(\mathrm{Kor}^{1}_{\mathrm{Disj}}(R,A), f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha \end{smallmatrix}\right\rangle) = W$. Dann existiert eine endliche Teilmenge P von I, für die $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\varrho) \supseteq \mathfrak{G}(P)$ gilt.
Aufgrund der Voraussetzungen gilt dann auch $\mathrm{sym}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \supseteq \mathfrak{G}(P)$.
Daß für α und ϱ in Σ eine Auswahlfunktion existiert, kann auf gleiche Weise wie im Beweis des Satzes 7.4 dieses Kapitels gezeigt werden. Dabei seien hier $\alpha_1 = \alpha \cap \overline{P^n}$ und $\alpha_2 = \alpha - \overline{P^n}$.
ϱ_i sei für $i \in \{1,2\}$ wieder durch
$\varrho_i = \mathrm{Att}_{\Sigma}(R\bar{x}\bar{y} \wedge A\bar{x} \,;\, \bar{x},\bar{y} \,;\, f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix} R & A \\ \varrho & \alpha_1 \end{smallmatrix}\right\rangle)$ definiert.
Außerdem sei σ_1 wieder eine beliebige Auswahlfunktion für α_1 und ϱ_1 und σ_2 durch die Gleichung $\sigma_2 = \varrho_2$ definiert.
Damit gehören σ_1 und σ_2 zu Σ. Außerdem ist σ_2 eine Auswahlfunktion für α_2 und ϱ_2, weil ϱ_2 auch hier eine Funktion ist. Um das zu zeigen, wird von der Annahme ausgegangen, daß ϱ_2 keine Funktion ist. Dann existieren für ein $(\xi'_1,\dots,\xi'_n)$ aus α_2 zwei Individuen η' und η'', für die $(\xi'_1,\dots,\xi'_n,\eta') \in \varrho$, $(\xi'_1,\dots,\xi'_n,\eta'') \in \varrho$ und $\eta' \neq \eta''$ gilt. Außerdem existiert in $\{1,\dots,n\}$ ein i mit $\xi'_i \notin P$. Es sei nun η^0 ein Individuum aus $\{\eta',\eta''\} - \{\xi'_i\}$. Falls $\eta^0 < \xi'_i$ gilt, sei ξ''_i ein Individuum aus $]\xi'_i, \min(P \cap]\xi'_i,\infty[)[$. Falls $\eta^0 > \xi'_i$ gilt, sei ξ''_i ein Individuum aus $]\max(P \cap]-\infty,\xi'_i[),\xi'_i[$.
Dann existiert aber in $\mathfrak{G}(P)$ ein π mit $\pi(\eta^0) = \eta^0$ und $\pi(\xi'_i) = \xi''_i$.
Also trifft ϱ auf $(\pi(\xi'_1),\dots,\pi(\xi'_{i-1}),\xi''_i,\pi(\xi'_{i+1}),\dots,\pi(\xi'_n),\eta^0)$ ebenso wie auf $(\xi'_1,\dots,\xi'_i,\dots,\xi'_n,\eta^0)$ zu. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, weil wegen $\xi''_i \neq \xi'_i$ die Ungleichung
$(\pi(\xi'_1),\dots,\pi(\xi'_{i-1}),\xi''_i,\pi(\xi'_{i+1}),\dots,\pi(\xi'_n)) \neq (\xi'_1,\dots,\xi'_i,\dots,\xi'_n)$ gilt.
Demzufolge ist die Annahme falsch. Also ist ϱ_2 eine Funktion.

$\sigma = \mathrm{Att}_{\Sigma}(S_1\bar{x}\bar{y} \vee S_2\bar{x}\bar{y} \,;\, \bar{x},\bar{y} \,;\, f_{\Sigma}\left\langle\begin{smallmatrix} S_1 & S_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{smallmatrix}\right\rangle)$ ist damit eine Auswahlfunktion für α und ϱ.
Folglich ist $AC^{\mathrm{Disj}}_{n,1}$ in $\Sigma(I,\mathfrak{G},\mathfrak{I})$ wahr.

13. Es gibt ein ZF-Modell $\mathbb{V} = (V, \{\emptyset,\emptyset\}, \{\in\}, \emptyset)$, in dem das Auswahlaxiom AC wahr ist und $\aleph_1 \neq 2^{\aleph_0}$ gilt. (Vgl. [8].)
Da für den Wohlordnungssatz WO, nach dem jede Menge wohlgeordnet werden kann, die Aussage AC $\rightarrow$ WO ein Satz von ZF ist, ist auch WO in $\mathbb{V}$ wahr. Damit wird auch Γ_{WO_1} bei beliebiger Belegung von b mit einem Individuum aus $V - \{\emptyset\}$ in $\mathbb{V}$ wahr.
Außerdem ist in $\mathbb{V}$ der Vergleichbarkeitssatz VS, nach dem für beliebige Mengen α und β eine Injektion von α in β oder von β in α existiert, wahr, weil auch AC $\rightarrow$ VS ein Satz von ZF ist. Demzufolge gilt in $\mathbb{V}$ $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, weil $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ ein Satz von ZF ist und $\aleph_1$ der unmittelbare Nachfolger von $\aleph_0$ ist. Das bedeutet, daß in V eine Menge μ der Mächtigkeit $\aleph_1$ sowie eine Injektion von ω in μ und eine Injektion von μ in $P(\omega)$ existiert und daß keine Injektion von μ in ω und keine Injektion von $P(\omega)$ in μ existiert. Dann wird Γ_H für $H = \bigwedge_C (H^+(A,C) \leftrightarrow H^\wedge(A,C))$ bei Belegung von b mit $\mu \cup \omega$ und a mit ω falsch. Es sei $\iota = \mu \cup \omega$.
Da $\aleph_0^2 = \aleph_0$ ein Satz von ZF ist, existiert in V eine Bijektion von ω in $P(\omega)$. Das bedeutet, daß Γ_H für $H = \neg Fin_4(A)$ bei Belegung von b mit ι und a mit ω in $\mathbb{V}$ wahr wird.
Offensichtlich ist $\iota \neq \emptyset$. Demzufolge gelten folgende Sätze.

<u>Satz 13.1:</u> $\sum(\mathbb{V},\iota)$ ist eine Henkin-Struktur.

<u>Satz 13.2:</u> $\sum(\mathbb{V},\iota) \in Mod_{hg}(WO_1)$.

<u>Satz 13.3:</u> $\sum(\mathbb{V},\iota) \in Mod_{hg}(\neg GCH(4)_1)$.

14. Es gibt ein ZF-Modell $W = (V, \{\emptyset,\emptyset\}, \{\varepsilon\}, \emptyset)$, in dem das Auswahlaxiom AC falsch ist und in dem das Axiom DC der bedingten Auswahl - nach dem für jede Relation τ, deren Wertebereich $W(\tau) = \{\eta : \exists\xi((\xi,\eta)\in\tau)\}$ eine Teilmenge ihres Definitionsbereiches $D(\tau) = \{\xi : \exists\eta((\xi,\eta)\in\tau)\}$ ist, und für jedes ξ_0 aus $D(\tau)$ eine Funktion φ von ω in $D(\tau)$ existiert, die jeder natürlichen Zahl ν ein Individuum aus V zuordnet, so daß $\varphi(\emptyset) = \xi_0$ und $(\varphi(\nu), \varphi(\nu+1))\in\tau$ für alle ν mit $\nu\in\omega$ gilt - wahr ist. (Vgl. [4].)

Es ist nicht schwer einzusehen, daß mit DC auch die Aussage

$$\begin{aligned}\bigwedge_{t,x_0}\bigvee_u(\bigvee_a(&\bigwedge_{x,y}((x,y)\in t \to x\in a \wedge y\in a) \wedge \bigwedge_x\bigvee_y(x\in a \to (x,y)\in t)\\ &\wedge x_0\in a)\\ \to &\bigvee_c(\bigwedge_{x,y}((x,y)\in u \to x\in c \wedge y\in c) \wedge \bigwedge_x\bigvee!_y(x\in c \to (x,y)\in u)\\ &\quad\wedge x_0\in c)\\ &\wedge \bigwedge_{x,y}((x,y)\in u \to (x,y)\in t)) \qquad \text{(I)}\end{aligned}$$

in W wahr ist.

Es seien nämlich τ, ξ_0 und α Individuen aus V, so daß für alle ξ und alle η mit $(\xi,\eta)\in\tau$ sowohl $\xi\in\alpha$ als auch $\eta\in\alpha$ gilt und für alle ξ mit $\xi\in\alpha$ ein η mit $(\xi,\eta)\in\tau$ existiert und außerdem $\xi_0\in\alpha$ gilt. Dann sei $\tau_1 = \{\zeta : \zeta\in\tau \,\&\, \exists\xi\exists\eta(\zeta = (\xi,\eta))\}$. Offensichtlich ist τ_1 eine Relation in α, und es gilt $\tau_1\in V$, $W(\tau_1) \subseteq D(\tau_1)$ und $\xi_0\in D(\tau_1)$. Folglich existiert in V eine Funktion φ von ω in $D(\tau_1)$, so daß $\varphi(\emptyset) = \xi_0$ und $(\varphi(\nu), \varphi(\nu+1))\in\tau_1$ für alle ν mit $\nu\in\omega$ gilt.

Es werden nun folgende Fälle unterschieden:

1. φ ist eine Injektion.
2. Es existieren zwei natürliche Zahlen ν_1 und ν_2 mit $\nu_1 \neq \nu_2$ und $\varphi(\nu_1) = \varphi(\nu_2)$.

zu 1.: Es sei $\gamma = \{\xi : \xi\in\alpha \,\&\, \exists\nu(\nu\in\omega \,\&\, \varphi(\nu) = \xi)\}$ und
$\upsilon = \{\zeta : \zeta\in\tau \,\&\, \exists\xi\exists\eta\ (\zeta = (\xi,\eta) \,\&\, \exists\nu\ (\nu\in\omega \,\&\, \varphi(\nu) = \xi \,\&\, \varphi(\nu+1) = \eta))\}$.
Offenbar gehören γ und υ zu V. Außerdem haben γ und υ die gewünsch-

ten Eigenschaften; denn für alle ξ und η mit $(\xi,\eta)\in\upsilon$ gilt sowohl $\xi\in\gamma$ als auch $\eta\in\gamma$ und andererseits $(\xi,\eta)\in\tau$ und $\xi_0\in\gamma$, und außerdem existiert für jedes ξ mit $\xi\in\gamma$ genau ein η mit $(\xi,\eta)\in\upsilon$.

zu 2.: ν' sei das bzgl. "$\leqq$" kleinste ν_2, für das ein ν_1 mit $\nu_1 < \nu_2$ und $\varphi(\nu_1)=\varphi(\nu_2)$ existiert. Es ist leicht einzusehen, daß die Mengen $\gamma=\{\xi : \xi\in\alpha \,\&\, \exists\nu(\nu\leqq\nu' \,\&\, \varphi(\nu)=\xi)\}$ und

$\upsilon=\{\zeta : \zeta\in\tau \,\&\, \exists\xi\exists\eta(\zeta=(\xi,\eta) \,\&\, \exists\nu(\nu\lneqq\nu' \,\&\, \varphi(\nu)=\xi \,\&\, \varphi(\nu+1)=\eta))\}$

zu V gehören. Außerdem haben γ und υ auch in diesem Fall die gewünschten Eigenschaften.

Da also die Aussage (I) in W wahr ist, ist auch Γ_{DC_1} bei beliebiger Belegung der freien Variablen b mit einem Individuum aus $V-\{\emptyset\}$ in W wahr.

Das Zornsche Lemma ist u.a. in der Form bekannt, daß jede durch ein τ partiell geordnete Menge, deren durch τ linear geordnete Teilmengen bzgl. τ ein Supremum in dieser Menge haben, bzgl. τ ein maximales Element besitzt.

Da AC in W falsch ist und ZL $\rightarrow$ AC ein Satz von ZF ist (vgl. [5], S. 162), ist auch die Aussage ZL in W falsch.

D.h., daß in V ein α und ein τ existieren, so daß folgendes gilt:

1. τ ist eine partielle Ordnung in α.
2. Alle durch τ linear geordneten Teilmengen von α, die zu V gehören, haben bzgl. τ ein Supremum in α. (Damit ist $\alpha\neq\emptyset$.)
3. α besitzt bzgl. τ kein maximales Element.

Γ_{ZL_1} wird also bei Belegung von b mit α falsch.

Wegen $\alpha\neq\emptyset$ gilt der

<u>Satz 14.1:</u> $\sum(W,\alpha)$ ist eine Henkin-Struktur.

Außerdem folgen aus den vorangegangenen Überlegungen Satz 14.2 und Satz 14.3.

<u>Satz 14.2:</u> $\sum(W,\alpha) \in Mod_{\mathfrak{H}}(DC_1)$.

<u>Satz 14.3:</u> $\sum(W,\alpha) \in Mod_{\mathfrak{H}}(\neg ZL_1)$.

Literaturverzeichnis

[1] Asser, G., Einführung in die mathematische Logik, Teil I. Leipzig 1972.

[2] Asser, G., Einführung in die mathematische Logik, Teil II. Leipzig 1972.

[3] Asser, G., Einführung in die mathematische Logik, Teil III. Leipzig 1981.

[4] Jech, T., The Axiom of Choice. Amsterdam 1973.

[5] Levy, A., Basic Set Theory. Berlin-Heidelberg-New York 1979.

[6] Rubin, H., und J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choise. Amsterdam 1963.

Zeitschriftenartikel und andere Artikel:

[7] Brunner, N., Kategoriesätze und multiples Auswahlaxiom. Manuskript.

[8] Cohen, P., The Independence of the Axiom of Choice. Stanfort Universität, Fotokopie.

[9] Howard, P., und J. Rubin, The Axiom of Choice and linearly ordered sets. Fund. Math. 97 (1977), 111-122.

[10] Kinna, W., und K. Wagner, Über eine Abschwächung des Auswahlaxioms. Fund. Math. 42 (1955), 75-82.

[11] Levy, A., Axioms of multiple choice. Fund. Math. 50 (1962), 475-483.

[12] Mostowski, A., Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip. Fund. Math. 32 (1939), 201-252.

Literatur von Autorenkollektiven:

[13] Barwise, J. (Herausgeber), Handbook of Mathematical Logic. Amsterdam 1977.

[14] Kondakow, N. I., und
Albrecht, E., und G. Asser (Herausgeber der deutschen Ausgabe), Wörterbuch der Logik. Leipzig 1983.

Literatur in russischer Sprache:

[15] Йех, Т., Теория множеств и метод форсинга. Moskau 1973.

Hiermit erkläre ich, daß diese Arbeit bisher von mir weder dem Wissenschaftlichen Rat der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald noch einer anderen wissenschaftlichen Einrichtung zum Zwecke der Promotion A eingereicht wurde.
Ferner erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die darin angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Unterschrieben von Christine Gaßner