# Berechenbarkeit über beliebigen Strukturen

## Das Berechnungsmodell

- von C. Gaßner 1994/1995
- als Alternative zu einem Modell, das gleichzeitig von A. Hemmerling entwickelt wurde (Preprint 2/1995)

| |
|---|
| Es wird die Berechenbarkeit mit Hilfe von Registermaschinen (den sogenannten **S**-Registermaschinen) über beliebigen Strukturen<br>$\mathbf{S} = (S; C; f_1, ..., f_n ; r_1, ..., r_m)$<br>mit<br>○ einer nichtleeren Trägermenge $S$,<br>○ einer nichtleeren Menge von Konstanten $C$,<br>○ den Funktionen $f_1, ..., f_n$<br>und<br>○ den Relationen $r_1, ..., r_m$<br>untersucht. |
| Spezielle Berechnungsmodelle dieser Art über ({0,1};{0,1};+,-;=) bzw. über den reellen Zahlen<br>○ sind vergleichbar mit einer klassische Turing-Maschine mit mehreren Lese- und Schreibköpfen<br>bzw.<br>○ entsprechen weitgehend den reellen Turing-Maschinen von **B**lum, **S**hub und **S**male (dem BSS-Modell). |
| Wir unterscheiden<br>○ deterministische Registermaschinenprogramme<br>und<br>○ nichtdeterministische Registermaschinenprogramme. |
| Im nichtdeterministischen Fall unterscheiden wir:<br>○ Nichtdeterminismus erster Art:<br>▪ Wir erlauben nichtdeterministische Sprungbefehle.<br>▪ Wir bezeichnen diesen Nichtdeterminismus  auch mit DN.... |

| |
|---|
| und<br><br>o Nichtdeterminismus zweiter Art:<br>▪ Wir erlauben das Raten von Elementen aus S.<br>▪ Wir bezeichnen diesen Nichtdeterminismus auch mit N.... |
| Die Eingabegröße entspricht der Anzahl der eingegebenen Elemente. |
| Die Kosten jeder ausgeführten Anweisung betragen 1. D. h., für die Ausführung einer Anweisung ist immer nur eine Zeiteinheit notwendig. |

## Definition: **S**-Registermaschine für eine beliebige Struktur **S** = ($S$; $C$; $f_1$, ..., $f_n$ ; $r_1$,..., $r_m$).

| |
|---|
| Jede **S**-Registermaschine verfügt über Register $z_1$, $z_2$ , ... für die Elemente aus $S$ und über Indexregister $p_1$, ..., $p_l$ für die Indizes 1, 2, .... für ein jeweils festes $l$ . |
| Sie arbeitet mit dem Eingaberaum $I$ und Ausgaberaum $O$, wobei $I$ die Menge aller endlichen Folgen über $S$ ist und $O$ eine Teilmenge der Menge aller endlichen Folgen über $S$ ist. |
| Die Eingaben aus $I$ werden von der Maschine mittels ihres **S**-Programms von $N$ Anweisungen mit den Marken 1, ..., $N$ verarbeitet. Dabei ist die Abarbeitungsreihenfolge der Anweisungen für jede Maschine durch einen zusammenhängenden gerichteten Graphen, dessen Knotenden Programmmarken entsprechen, definiert. Die Nachfolger eines Knotens sind durch Funktionen $\beta$, $\beta^+$, $\beta^-$ von {1, ... , $N$-1} in {2, ... , $N$}festgelegt. Knoten, die keinen Sprung- beziehungsweise Verzweigungsanweisungen entsprechen, haben nur einen durch $\beta$ definierten Nachfolger, während die zwei Nachfolger von Verzweigungsknoten durch $\beta^+$ und $\beta^-$ festgelegt sind. Jede Anweisung eines **S**-Programms muss von einem der folgenden Typen sein: |
| *Eingabe.* Der eine vorkommende Eingabeknoten hat die Marke 1. Den Registern $z_1$, ... ,$z_n$ wird die Eingabe ($x_1$, ... ,$x_n$) aus $I$ und den Registern $z_{n+1}$, $z_{n+2}$, ... wird eine Konstante $c_0$ aus $C$ (oder $x_1$, wenn die Struktur keine Konstanten enthält) zugeordnet. Dem Indexregister $p_1$ wird der Inhalt $n$ und den anderen Indexregistern der Inhalt 1 zugeordnet. |
| *Das Raten (Nichtdeterminismus 2. Art).* Den Registern $z_{n+1}$, $z_{n+2}$ ... werden zusätzlich geratene Werte zugeordnet. |
| *Ausgabe.* Der eine vorkommende Ausgabeknoten hat die Marke $N$. Wenn dieser Knoten erreicht wird, hält die Maschine. Verbunden mit diesem Knoten ist die Ausgabe von $z_1$, ... , $z_{p1}$ für $p1 = p_1$. |
| *Berechnungen.* Ein Berechnungsknoten entspricht einer Zuweisung, bei der dem Register $z_1$ eine Konstante aus $C$ oder der Funktionswert einer der Funktion $f_1$, ..., $f_n$, angewendet auf $z_2$, $z_3$ , ..., zugeordnet wird. |
| *Indexberechnungen.* Für jedes feste $i$ aus {1,..., $l$} sind die Zuweisungen $p_i$ : = $p_i$ +1 und $p_i$ : = 1 erlaubt. |
| *Verzweigungen.* Ein Verzweigungsknoten $m$ hat die Nachfolger $\beta^+(m)$ und $\beta^-(m)$. Bedingte Verzweigungen entsprechen den Anweisungen<br>$m$: IF $r_i$ (z$_1$, z$_2$ ,...) THEN GOTO $\beta^+(m)$ ELSE GOTO $\beta^-(m)$,<br>$m$: IF $p_i = p_j$ THEN GOTO $\beta^+(m)$ ELSE GOTO $\beta^-(m)$, |

| |
|---|
| Im nichtdeterministischen Fall erlauben wir auch die Anweisung<br>$m$: GOTO $\beta^+(m)$ OR GOTO $\beta^-(m)$. |
| *Kopieren.*<br>Beim Kopieren von Elementen der Struktur ist die indirekte Adressierung zugelassen. Für festgehaltene $i$, $j$ aus $\{1,..., l\}$ ist die Zuweisung $z_{pi} := z_{pj}$ mit $pi= p_i$ und $pj= p_j$ möglich. |

## Unterschied zum BSS-Modell

| |
|---|
| Im Unterschied zum BSS-Modell, das in erster Linie für Berechnungen über Zahlenbereichen wie dem Bereich der reellen Zahlen gedacht ist, ist hier eine klare Unterscheidung zwischen den Berechnungen innerhalb unserer Struktur und den Indexberechnungen angebracht. Da im (alten) BSS-Modell nur zwei Indexregister bereitgestellt werden, müssen Hilfsrechnungen für die Bestimmung von Indizes auch mit Hilfe von Strukturelementen in den Registern für diese Elemente ausgeführt werden. Für die Berechnungen über beliebigen Strukturen erscheint es nicht sinnvoll, arithmetische Berechnungen für Indexwerte von den Berechnungsmöglichkeiten der jeweiligen betrachteten Struktur abhängig zu machen. Deshalb wurden hier die **S**-Registermaschinen mit einer jeweils fest vorgegebenen, eventuell größeren Anzahl von Indexregistern definieren. |

## Probleme, Erkennbarkeit von Problemen, Komplexitätsklassen, vollständige Probleme

| |
|---|
| Eine Teilmenge endlicher Folgen mit Elementen aus $S$ heißt *Problem über* **S**. |
| Ein Problem $A$ wird von einer **S**-Registermaschine *erkannt*, wenn die Maschine für die Eingaben aus $A$ hält und für alle anderen Eingaben mit Elementen aus $S$ nicht stoppt. |
| Eine Eingabe aus $A$ wird von einer **S**-Registermaschine *in der Zeit t akzeptiert*, wenn die Maschine auf dieser Eingabe nach der Ausführung von höchstens $t$ Anweisungen hält. |
| Ein Problem $A$ wird von einer **S**-Registermaschine *in einer durch eine Funktion t(n) beschränkten Zeit erkannt*, wenn die Maschine für die Eingaben $(x_1, ... , x_n)$ aus $A$ nach der Ausführung von höchstens $t(n)$ Anweisungen hält und für alle anderen Eingaben mit Elementen aus $S$ nicht stoppt. |
| Eine Funktion $h$ von der Menge aller endlichen Folgen über **S** in die Menge aller endlichen Folgen über **S** wird von einer **S**-Registermaschine *in einer durch eine Funktion t(n) beschränkten Zeit berechnet*, wenn die Maschine für alle Eingaben $(x_1, ... , x_n)$ über **S** nach der Ausführung von höchstens $t(n)$ Anweisungen hält und $h(x_1, ... , x_n)$ ausgibt. |
| Die Komplexitätsklassen **S**-P, **S**-DNP und **S**-NP seien die Mengen von Problemen über **S**, die in Polynomialzeit (in einer durch eine Polynomfunktion beschränkten Zeit) durch deterministische **S**-Registermaschinen beziehungsweise nichtdeterministische **S**-Registermaschinen erster Art bzw. zweiter Art erkannt werden können. |
| Ein Problem $A$ aus **S**-DNP bzw. **S**-NP heißt **S**-DNP- bzw. **S**-NP-*vollständig*, wenn für jedes Problem $B$ aus **S**-DNP bzw. **S**-NP eine deterministische **S**-Registermaschine $M_B$ existiert, die in Polynomialzeit für jede Eingabe aus $B$ ein Element aus $A$ berechnet und die für jede |

| |
|---|
| Eingabe, die nicht zu $B$ gehört, eine Folge von Elementen berechnet, die nicht zu $A$ gehört. Die in Polynomialzeit durch $M_B$ berechnete Funktion $h_B$ *reduziert* das Problem $B$ *in Polynomialzeit* auf das Problem $A$. |