



ERNST-MORITZ-ARNDT-UNIVERSITÄT GREIFSWALD  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT  
Institut für Mathematik und Informatik

## Zentrale Grenzwertsätze für Momentenfunktionale

Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung  
für das Lehramt an Gymnasien

vorgelegt von:  
Stephanie Lachs

Betreuer und Erstgutachter:  
Prof. Dr. M. Schürmann

Zweitgutachter:  
Prof. Dr. V. Liebscher

Greifswald, den 31. März 2009

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Hinführung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Algebraische Grundlagen</b>	<b>10</b>
2.1	Tensorprodukte von Vektorräumen . . . . .	10
2.2	Algebren, Koalgebren, Hopf-Algebren und Involutionen . . . . .	12
2.3	Der Fundamentalsatz über Koalgebren und seine Konsequenzen . . . . .	18
2.4	Graduierungen . . . . .	21
2.5	Freie Produkte von $*$ -Algebren und unitalen $*$ -Algebren . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Universelle Produkte und duale Halbgruppen</b>	<b>29</b>
3.1	Die fünf universellen Produkte und die zugehörigen Unabhängigkeitsbegriffe . . . . .	29
3.2	Duale Halbgruppen und graduierte duale Halbgruppen . . . . .	34
3.3	Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren . . . . .	41
3.3.1	Vorbetrachtungen . . . . .	41
3.3.2	Die symmetrische Tensoralgebra $\mathcal{S}(V)$ . . . . .	43
3.3.3	Die Funktoren $\mathcal{S} : \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{Com}\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ und $\mathcal{S}_{\text{Hopf}} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{Com}\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Nicht-kommutative Zentrale Grenzwertsätze für Momentenfunktionale</b>	<b>52</b>
4.1	Grenzwertsätze für graduierte Koalgebren . . . . .	52
4.2	Anwendung auf die Zentralen Grenzwertsätze für graduierte duale Halbgruppen . . . . .	58
4.3	Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor- $*$ -Algebren . . . . .	60
4.3.1	Grundbegriffe der nicht-kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	61
4.3.2	Momentenfunktionale auf Tensor- $*$ -Algebren . . . . .	63
4.3.3	Explikation der Zentralen Grenzwertsätze für die fünf Unabhängigkeiten von Quanten-Zufallsvariablen . . . . .	72

## Literaturverzeichnis

## Index

# 1 Hinführung und Motivation

Als zentrale Ergebnisse der Analyse von Zufallsvariablen, d. h. messbaren Funktionen  $X : \Omega \rightarrow E$  von einem Ereignisraum  $\Omega$  in einen Zustandsraum  $E$ , gelten in der klassischen (Kolmogorovschen<sup>1</sup>) Wahrscheinlichkeitstheorie die Grenzwertsätze, insbesondere die Gesetze der Großen Zahlen und *der Zentrale Grenzwertsatz*, die Beispiele dafür liefern, wie aus zufälligem Geschehen spezifische Gesetzmäßigkeiten gefolgert werden können. Der Zentrale Grenzwertsatz stellt eine begriffliche Kumulation von mathematischen Aussagen und Sätzen dar, welche jeweils die Konvergenz einer Verteilungsfunktion betrachten, die sich aus der Summierung statistisch unabhängiger Zufallsvariablen ergibt. Sei hierfür  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von reellen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , d. h. einer Menge  $\Omega$ , einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  aus messbaren Teilmengen von  $\Omega$  und einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ , in den Raum  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  mit der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}$ , d. h. der kleinsten  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  enthält. Das durch eine Zufallsvariable  $X$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_X$  auf  $\mathfrak{B}$ , definiert durch

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

für Borel-Mengen  $B \in \mathfrak{B}$ , heißt *Verteilung* der Zufallsvariable  $X$ . Die Verteilung  $\mathbb{P}_X$  auf  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$  von  $X = (X_1, \dots, X_n)$  wird als *gemeinsame Verteilung* der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  bezeichnet und ist für alle  $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$  von der Gestalt

$$\mathbb{P}_X(\underbrace{B_1 \times \dots \times B_n}_{\subset \mathbb{R}^n}) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n).$$

Als eine wesentliche Voraussetzung für die Formulierung des Zentralen Grenzwertsatzes in seiner elementaren Form werden unabhängige und identisch verteilte (u. i. v.) Zufallsvariablen benötigt: Eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zufallsvariablen heißt (stochastisch) *unabhängig* (bezüglich  $\mathbb{P}$ ), wenn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und die gemeinsame Verteilung von  $X_1, \dots, X_n$

$$\mathbb{P}_X(B_1 \times \dots \times B_n) = \mathbb{P}_{X_1}(B_1) \cdots \mathbb{P}_{X_n}(B_n)$$

---

<sup>1</sup>Andrey N. Kolmogorov (1903-1987) gilt als „Vater“ der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie und axiomatisierte die Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Basis der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie von Henri L. Lebesgue und Félix E. J. E. Borel.

## 1 Hinführung und Motivation

für alle  $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$  gilt und *identisch verteilt*, wenn

$$\mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_{X_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

erfüllt ist. Für eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von unabhängigen und reellwertigen Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ist die Verteilung  $\mathbb{P}_{X_1 + \dots + X_n}$  der Summe  $X_1 + \dots + X_n$  die *Faltung*  $\mathbb{P}_{X_1} \star \dots \star \mathbb{P}_{X_n}$  von  $P_{X_1}, \dots, P_{X_n}$ . Wenn  $X_1, X_2, \dots$  zudem identisch verteilt sind, dann bezeichnet  $(\mathbb{P}_{X_i})^{\star n} = \mathbb{P}_{X_1 + \dots + X_n}$  die  $n$ -fache Faltung der Verteilung  $\mathbb{P}_{X_i}$ . Für jedes  $k \in \mathbb{N}$ , wenn  $|X|^k$  integrierbar ist, wird das  $k$ -te *Moment* der Zufallsvariablen  $X$  angegeben durch

$$M_k(X) := \mathbb{E}(X^k) = \int_{\Omega} X^k d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_X.$$

Insbesondere heißt  $\mathbb{E}(X) = M_1(X)$  Erwartungswert und  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = M_2(X) - M_1(X)^2$  Varianz der Zufallsvariablen  $X$ . Sei nun  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von reellen u. i. v. Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  und  $\text{Var}(X_n) = 1$ . Dann lässt sich der Zentrale Grenzwertsatz wie folgt formulieren:

$$\left( \mathbb{P}_{\frac{X_i}{\sqrt{n}}} \right)^{\star n} = \mathbb{P}_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{schwach}} \mathcal{N}(0, 1),$$

mit  $\mathcal{N}(0,1)$  als *Standardnormalverteilung* (oder Gauß-Verteilung).

Um auf diese Weise Summen unabhängiger Zufallsvariablen (bzw. Faltungen von Wahrscheinlichkeitsmaßen) zu betrachten, wird in der Regel die analytische Methode der Fouriertransformation genutzt, mit deren Hilfe sich der Zentrale Grenzwertsatz (im klassischen Fall) beweisen lässt. Bemüht man sich hingegen um eine Verallgemeinerung derartiger Konvergenzaussagen ins Nicht-Kommutative, kann die Fouriertransformation nicht mehr sinnvoll definiert werden. Wilhelm von Waldenfels wählte deshalb u. a. in [vWa] einen Ansatz über die Momente der Verteilungen von Zufallsvariablen,<sup>2</sup> deren Konvergenz in vielen Fällen äquivalent zu der Konvergenz der Verteilungen ist. Mit Hilfe des *Satzes von Stone-Weierstraß* kann geklärt werden, unter welchen Bedingungen die *Konvergenz in Momenten* äquivalent zu der *Konvergenz in Verteilung* ist: Sei  $\mathcal{K}$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , d. h.  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$  ist abgeschlossen und beschränkt. Nach dem *Satz von Stone-Weierstraß* existiert für jede stetige Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}$  und

---

<sup>2</sup>Für den rein kombinatorischen Ansatz des freien Zentralen Grenzwertsatzes sei an dieser Stelle auf [NiSp] verwiesen.

## 1 Hinführung und Motivation

jedes  $\varepsilon > 0$  ein Polynom  $P_{f,\varepsilon}$ , so dass

$$\sup_{x \in \mathcal{K}} |f(x) - P_{f,\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon.$$

Seien ferner  $X_1$  und  $X_2$  zwei Zufallsvariablen, für die es eine kompakte Teilmenge  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$  gibt, so dass deren Verteilungen  $\mathbb{P}_{X_1}$  und  $\mathbb{P}_{X_2}$  Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(\mathcal{K}, \mathfrak{B}(\mathcal{K}))$  sind, für die sämtliche Momente übereinstimmen, d. h.

$$M_k = \int_{\mathcal{K}} x^k d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \int_{\mathcal{K}} x^k d\mathbb{P}_{X_2}(x)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann folgt  $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2}$ . Ist  $\mathcal{K}$  nicht kompakt, so kann aus der Gleichheit aller Momente i. Allg. nicht auf die Gleichheit zweier Wahrscheinlichkeitsmaße geschlossen werden. Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit endlichen Momenten, so dass deren Verteilungen  $\mathbb{P}_{X_n}$  auf einer kompakten Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\mathbb{R}$  konzentriert sind, d. h.  $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{K}, \mathfrak{B}(\mathcal{K}))$  mit  $\mathcal{K}$  kompakt in  $\mathbb{R}$ . Dann folgt aus der Anwendung des *Satzes von Stone-Weierstraß* die Konvergenz in Verteilung der Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen die Zufallsvariable  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{K}, \mathfrak{B}(\mathcal{K}))$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{K}} x^k d\mathbb{P}_{X_n}(x) = \int_{\mathcal{K}} x^k d\mathbb{P}_X(x)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, wobei die Verteilung  $\mathbb{P}_X$  durch die endlichen Momente von  $X$  bestimmt ist. Dies bedeutet: Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen mit endlichen Momenten, deren Verteilungen  $\mathbb{P}_{X_n}$  wiederum einen gemeinsamen kompakten Träger  $\mathcal{K}$  haben, und konvergieren die Momente von  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen die Momente einer Zufallsvariablen  $X$  mit Träger  $\mathcal{K}$ , dann folgt die schwache Konvergenz der Verteilungen  $\mathbb{P}_{X_n}$  gegen  $\mathbb{P}_X$ . Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen u. i. v. Zufallsvariablen kann auch formuliert werden (Momentenversion), wenn man die Zufallsvariablen als Funktionale auf Polynomen betrachtet, als sog. *Momentenfunktionale*: Für eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist das  $k$ -te Moment gegeben durch

$$M_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_X,$$

wobei  $x^k$  als ein Polynom aus  $\mathbb{C}[x]$  aufgefasst werden kann. Das normierte, positive

## 1 Hinführung und Motivation

lineare Funktional  $\varphi : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$\varphi(P(x)) = \mathbb{E}(P(X))$$

für alle Polynome  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ , heißt dann das Momentenfunktional von  $X$ .

Um einen Übergang von der klassischen in die nicht-kommutative Wahrscheinlichkeitstheorie zu ebnen, betrachte man zunächst die kommutative unitale  $*$ -Algebra  $\mathcal{W} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  der  $\mathbb{C}$ -wertigen beschränkten Borel-messbaren Funktionen auf  $\Omega$  (mit Supremumsnorm) und das normierte, positive lineare Funktional  $\Psi$  auf  $\mathcal{W}$ , gegeben durch

$$\Psi(F) = \int_{\Omega} F d\mathbb{P}$$

für  $F \in \mathcal{W}$ , welches das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$  geeignet ersetzt und das Paar  $(\mathcal{W}, \Psi)$  zu einem *kommutativen Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum* vervollständigt. Eine Zufallsvariable  $X$  wird im zum klassischen „dualen“ Bild durch die Abbildung

$$j_X : L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{W}$$

beschrieben, die für  $g \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  gegeben ist durch

$$j_X(g) = g \circ X.$$

Die Abbildung  $j_X$  wird auf diese Weise zu einem unitalen  $*$ -Algebrahomomorphismus, d. h. zu einer *Quanten-Zufallsvariable*, mit der Verteilung

$$\varphi_X : L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Die Folge  $(j_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  von Quanten-Zufallsvariablen heißt (tensor-)unabhängig, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $g_1, \dots, g_n \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  die Gleichung

$$\Phi(j_{X_1}(g_1) \cdots j_{X_n}(g_n)) = \varphi_{X_1}(g_1) \cdots \varphi_{X_n}(g_n)$$

oder

$$\Phi \circ M \circ (j_{X_1} \otimes \cdots \otimes j_{X_n}) = \varphi_{X_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{X_n} \quad (\text{Tensorunabhängigkeit})$$

mit der Multiplikation  $M$  in  $\mathcal{W}$  erfüllt ist. Dies ist gleichbedeutend mit der klassischen

## 1 Hinführung und Motivation

Unabhängigkeit der Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Für Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  aus  $\mathcal{W}$  können nun folgende Momentenversionen des Zentralen Grenzwertsatzes formuliert werden: Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  u. i. v. mit  $\mathbb{E}(X_i) = 0$ ,  $\text{Var}(X_i) = 1$  und existenten Momenten. Sei weiterhin  $\varphi_\mu$  das Momentenfunktional von  $\mu = \mathbb{P}_{X_i}$  auf  $\mathbb{C}[x]$  (mit  $\varphi_\mu(\mathbf{1}) = 1$ ,  $\varphi_\mu(x) = 0$  und  $\varphi_\mu(x^2) = 1$ ), dann gilt

$$\Psi \left( \left( \frac{X_1 + \dots + X_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} x^k d\mathcal{N}(0,1)$$

bzw.

$$\varphi_\mu^{\star N} \left( P \left( \frac{x}{\sqrt{N}} \right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(P(x)),$$

wobei  $g(P(x))$  das Momentenfunktional von  $\mathcal{N}(0,1)$  an der Stelle  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  bezeichnet.

Für stetige, integrierbare Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{W}$  gegeben durch

$$\Psi_{X_1, \dots, X_n}(f) = \int_{\Omega} f(X_1, \dots, X_n) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) d\mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Betrachtet man die Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \quad (l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}_0),$$

d. h. Monome aus  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , so erhält man, falls sämtliche  $x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$  integrierbar sind, die *gemischten Momente* von  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{W}$  durch

$$M_{l_1, \dots, l_n}(\mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}) = \Psi_{X_1, \dots, X_n}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} d\mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Das lineare Funktional  $\varphi_\mu : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\varphi_\mu(x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}) = M_{l_1, \dots, l_n}(\mu)$$

heißt dann das Momentenfunktional von  $\mu = \mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}$ .

Für die Formulierung des Zentralen Grenzwertsatzes im Falle eines Quanten-Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\mathcal{Q}, \Phi)$ , bestehend aus einer nicht notwendigerweise kommutativen unitalen  $*$ -Algebra  $\mathcal{Q}$  und einem Zustand  $\Phi$  auf  $\mathcal{Q}$ , gilt es nun zwei Probleme

## 1 Hinführung und Motivation

zu betrachten, die durch die Übertragung vom Klassischen ins Nicht-Kommutative entstehen: Zum einen bleibt zu klären, was es bedeutet, dass eine Folge  $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Quanten-Zufallsvariablen auf einer  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  über  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  unabhängig ist, und zum anderen wie die  $N$ -fache Faltung des zugehörigen Momentenfunktional aussieht, nachdem folgende Ersetzungen vorgenommen wurden:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\rightsquigarrow \mathcal{Q} \\ \Psi &\rightsquigarrow \Phi \\ X_i \in \mathcal{W} &\rightsquigarrow q_i \in \mathcal{Q} \\ \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] &\rightsquigarrow \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  die Polynomialalgebra über  $\mathbb{C}$  in den nicht-kommutierenden Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$ . Wählt man beliebige Elemente  $q_1, \dots, q_n$  aus  $(\mathcal{Q}, \Phi)$ , dann existieren Quanten-Zufallsvariablen  $j_1, \dots, j_n : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q}$ , so dass  $j_i(x) = q_i$  für  $i = 1, \dots, n$  erfüllt ist. Das Momentenfunktional  $\varphi : \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  von  $q_1, \dots, q_n$  ist definiert durch

$$\varphi(P(x_1, \dots, x_n)) = \Phi(P(q_1, \dots, q_n)),$$

wobei  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  durch das  $n$ -fache *freie Produkt* der  $*$ -Algebra  $\mathbb{C}[x]$  entsteht. Während im klassischen Fall die gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen auf dem Tensorprodukt gegeben ist, wird im nicht-kommutativen Fall die gemeinsame Verteilung von Quanten-Zufallsvariablen auf dem freien Produkt von Algebren definiert. Dies wird notwendig, da die Größen  $q_1, \dots, q_n$  nicht mehr unbedingt miteinander kommutieren und i. Allg. z. B.  $\Phi(q_1 q_2 q_1 q_2)$  nicht gleich  $\Phi(q_1^2 q_2^2) = \Phi(q_1^2) \Phi(q_2^2)$  ist. Man kann sehen, dass je nach gewählter nicht-kommutativer Unabhängigkeit auch die Werte  $\Phi(q_1^2) \Phi(q_2)^2 + \Phi(q_1)^2 \Phi(q_2^2) - \Phi(q_1)^2 \Phi(q_2)^2$ ,  $\Phi(q_1)^2 \Phi(q_2)^2$ ,  $\Phi(q_1^2) \Phi(q_2)^2$  oder  $\Phi(q_1)^2 \Phi(q_2^2)$  auftreten können.

Neben der Betrachtung der verschiedenen Begriffe nicht-kommutativer Unabhängigkeit muss für die Formulierung quanten-stochastischer Zentraler Grenzwertsätze geklärt werden, wie (Momenten)Funktionale auf algebraischen Strukturen miteinander zu falten sind. Während im klassischen Fall zwei lineare Funktionale  $\varphi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\varphi_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  über den Algebren  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  durch das *Tensorprodukt* zu einem „gemeinsamen“ linearen Funktional  $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  „multipliziert“ werden, gibt es im Fall der Nicht-Kommutativität weitere Möglichkeiten „Produkte“ zwischen linearen Funktionalen zu bilden. Naofumi Muraki konnte in [Mur3] zeigen, dass genau fünf



universelle (natürliche) Produkte (das Tensorprodukt, das *freie*, *Boolesche*, *monotone* und *antimonotone Produkt*) existieren, die bestimmten Axiomen genügen und auf dem freien Produkt von Algebren definiert sind.<sup>3</sup>

Die fünf verschiedenen Faltungsprodukte linearer Funktionale können mit Hilfe des universellen Produktes auf *dualen Halbgruppen* im Sinne Dan-Virgil Voiculescus<sup>4</sup> definiert werden, wobei die Polynomalgebra  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  als Beispiel einer solchen dualen Halbgruppe aufgefasst werden kann. Das nicht-kommutative Analogon zum klassischen Zentralen Grenzwertsatz berücksichtigt also nicht nur die fünf verschiedenen Begriffe nicht-kommutativer Unabhängigkeit sondern auch die zugehörigen Faltungsprodukte linearer Funktionale, so dass selbst für standardisierte und u. i. v. Quanten-Zufallsvariablen  $j_1, j_2, \dots$  indes fünf verschiedene Versionen des Zentralen Grenzwertsatzes expliziert werden können, in denen die Momentenfunktionale der „standardisierten Summen“ gegen das Momentenfunktional der Gauß-Verteilung mit Dichte  $\exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$  (Tensorfall), der *Wigner-Halbkreis-Verteilung* mit Dichte  $\chi_{[-2,2]}(x)\sqrt{4-x^2}/2\pi$  (freier Fall), der *Bernoulli-Verteilung*  $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$  (Boolescher Fall) oder der *Arcus-Sinus-Verteilung* mit Dichte  $\chi_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})}(x)/\pi\sqrt{2-x^2}$  (monotoner und antimonotoner Fall) konvergieren, wobei  $\chi_A(x) = 1$ , falls  $x \in A$ , und  $\chi_A(x) = 0$ , falls  $x \notin A$ , für  $A \subset \mathbb{R}$ . Die Bedeutung der ( $\mathbb{N}_0$ -graduerten) dualen Halbgruppe liegt also hierbei v. a. darin, dass auf dieser algebraischen Struktur quanten-stochastische Zentrale Grenzwertsätze für fünf verschiedene Begriffe nicht-kommutativer Unabhängigkeit dargestellt und bewiesen werden können, was letztlich das Hauptanliegen dieser Arbeit bildet.

### Struktur der Arbeit

Im Anschluss an einige hinführende Bemerkungen werden im zweiten Kapitel dieser Arbeit grundlegende Definitionen algebraischer Strukturen wie Tensorprodukte von Vektorräumen, Algebren, Koalgebren und Hopf-Algebren eingeführt, die zusätzlich mit  $\mathbb{N}_0$ -Graduierungen versehen sind. Die Angabe des Faltungsproduktes linearer Funktionale auf Koalgebren und des damit zusammenhängenden Fundamentalsatzes sowie die Definition des freien Produktes von Algebren vervollständigen dieses Kapitel.

Darauf aufbauend liegt im dritten Kapitel der Schwerpunkt auf den universellen Produkten und den zugehörigen Unabhängigkeiten (3.1). Während die verschiedenen Begriffe nicht-kommutativer Unabhängigkeit erst im vierten Kapitel eine entscheidende Rolle spielen, bilden die universellen Produkte bereits hier die Grundlage für die Faltung linearer Funktionale auf der algebraischen Struktur einer dualen Halbgruppe, die

---

<sup>3</sup>Vgl. hierzu auch [BGS1] und [BGS2].

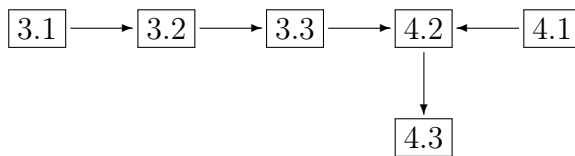
<sup>4</sup>Vgl. hierzu [Voi87] und [BGS3].

## 1 Hinführung und Motivation

mit Hilfe von  $\mathbb{N}_0$ -Graduierungen verallgemeinerbar ist (3.2). Letztlich zeigt dieses Kapitel Zusammenhänge zwischen  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halbgruppen und  $\mathbb{N}_0$ -graduierten kommutativen  $*$ -Bialgebren mit Hilfe eines der symmetrischen Tensoralgebra entlehnten Funktors (3.3).

Nachdem die Grenzwertsätze für  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebren zu Beginn des vierten Kapitels (4.1) gezeigt sind, kann mit Hilfe des Funktors der Hauptsatz, d. h. der Zentrale Grenzwertsatz über  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppen, bewiesen werden (4.2). Den Abschluss dieser Arbeit bildet die Anwendung des Hauptsatzes auf Quanten-Wahrscheinlichkeitsräume, in denen Momentenfunktionale – den verschiedenen Unabhängigkeiten entsprechend – gegen das Momentenfunktional einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung konvergieren (4.3).

Die strukturellen Zusammenhänge des dritten und vierten Kapitels können in folgender Graphik veranschaulicht werden:



### Notation

An dieser Stelle sollen einige grundlegende Begriffe und Notationen, die für die gesamte Arbeit Gültigkeit behalten, vorangestellt werden. Allgemein stehen  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{K}$  für die natürlichen Zahlen (mit bzw. ohne die Null), die reellen und die komplexen Zahlen sowie einen beliebigen Körper. Die Bezeichnungen  $U, V, W$  repräsentieren Vektorräume bzw. Untervektorräume und  $V'$  steht für den Dualraum eines Vektorraumes  $V$ . Ist in  $V$  ein Element  $\mathbf{1}$  ausgezeichnet, dann wird die Teilmenge von  $V'$ , die aus allen normierten linearen Funktionalen besteht, mit der Notation  $V'_{\mathbf{1}}$  versehen, d. h.  $V'_{\mathbf{1}} = \{\varphi \in V' \mid \varphi(\mathbf{1}) = 1\}$ . Seien  $x_1, \dots, x_k$  Elemente eines Vektorraumes  $V$ , dann bildet die lineare Hülle  $\underline{\text{Lin}}\{x_1, \dots, x_k\}$  einen Untervektorraum von  $V$ . Algebren und  $*$ -Algebren werden durch  $\mathcal{A}$  oder  $\mathcal{Q}$  (nur in Bezug auf den Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum) gekennzeichnet. Mit  $\mathcal{T}(V)$  sei die Tensoralgebra über  $V$  und mit  $\mathcal{S}(V)$  die symmetrische Tensoralgebra über  $V$  bezeichnet. Die Abbildung  $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$  repräsentiert die Einheit der Algebra  $\mathcal{A}$ , wobei der Index immer dann weggelassen wird, wenn aus dem Zusammenhang deutlich werden sollte, zu welcher Algebra die Einheit gehört. In gleicher Weise wird mit der Identitätsabbildung  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  verfahren. Koalgebren bzw. Unterkoyalgebren werden mit  $\mathcal{C}$  bzw.  $\mathcal{U}$ , Bialgebren mit  $\mathcal{B}$  und duale (Halb)Gruppen mit  $\mathcal{D}$  versehen, wobei  $\Delta$  stets die Komultiplikation der Koal-

## 1 Hinführung und Motivation

gebra und  $\Lambda$  die Komultiplikation der dualen Halbgruppe repräsentiert. Der Ausdruck  $\text{Hom}(A, B)$  bezeichnet hier die Menge aller Homomorphismen von einem Objekt  $A$  zu einem Objekt  $B$  in einer Kategorie  $\mathfrak{K}$ . Für eine beliebige Indexmenge  $I$  sei  $\mathbb{K}\langle x_i \mid i \in I \rangle$  die Algebra der  $\mathbb{K}$ -wertigen Polynome in den nicht-kommutierenden Unbestimmten  $\{x_i \mid i \in I\}$  und  $\mathbb{K}[x_i \mid i \in I]$  die Algebra der  $\mathbb{K}$ -wertigen Polynome in den kommutierenden Unbestimmten  $\{x_i \mid i \in I\}$ . Für eine Teilmenge  $M$  einer Algebra  $\mathcal{A}$  bezeichne  $\langle M \rangle := \bigcap \{ \hat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A} \mid M \subseteq \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{A}} \text{ ist Unteralgebra von } \mathcal{A} \}$  die Unteralgebra von  $\mathcal{A}$ , die von  $M$  erzeugt wird.

## 2 Algebraische Grundlagen

Da jede Untersuchung Zentraler Grenzwertsätze in der nicht-kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie prinzipiell schwierig erscheint, wenn sie einem mathematischen Fundament entbehrt, soll diese Arbeit indes mit der Definition wesentlicher algebraischer Begrifflichkeiten beginnen, die für die gesamte Arbeit von grundlegendem und vorbereitendem Charakter sind. In diesem Sinne wird zunächst das Tensorprodukt von Vektorräumen definiert und mit wesentlichen Bemerkungen versehen (2.1), so dass algebraische Strukturen wie Algebren, Koalgebren, Bialgebren und Hopf-Algebren eingeführt werden können (2.2). Um Beziehungen zwischen (verschiedenen) algebraischen Strukturen zu ermöglichen, bedarf es der Betrachtung von Homomorphismen, da z. B. aus klassischen Zufallsvariablen Homomorphismen zwischen  $*$ -Algebren werden. Diese sind v. a. zur Einführung des Positivitätsbegriffes im Zusammenhang mit Quanten-Wahrscheinlichkeitsräumen an späterer Stelle dieser Arbeit notwendig. Des Weiteren soll in diesem Kapitel der Fundamentalsatz über Koalgebren angeführt und dessen wesentliche Konsequenzen erläutert (2.3) sowie  $\mathbb{N}_0$ -Graduierungen auf algebraischen Strukturen definiert werden (2.4), die die Grundlage für die Einführung  $\mathbb{N}_0$ -graduierter dualer Halbgruppen bzw.  $\mathbb{N}_0$ -graduierter dualer Gruppen bilden und damit die Thematisierung quanten-stochastischer Zentraler Grenzwertsätze vorbereiten. Für die Einführung der algebraischen Struktur einer dualen Halbgruppe bzw. dualen Gruppe werden schließlich freie Produkte von Algebren benötigt (2.5), die das Tensorprodukt in der Definition einer  $*$ -Bialgebra bzw. Hopf- $*$ -Algebra weitestgehend ersetzen.

Verschiedene Termini wie Vektorraum, Menge, Körper, Halbgruppe, Folge, Familie etc. müssen angesichts des beschränkten Umfangs dieser Arbeit vorausgesetzt werden. Für weitere und detaillierte Informationen zu den mathematischen Grundlagen sei an dieser Stelle auf [Abe], [BA] und [Swe] verwiesen.

### 2.1 Tensorprodukte von Vektorräumen

Im Anschluss an die Definition eines linearen Operators und einer bilinearen Abbildung wird in diesem Abschnitt das Tensorprodukt von Vektorräumen definiert und zentrale Eigenschaften angemerkt.

**Definition 2.1.** *Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Eine Abbildung  $T : V \rightarrow W$  heißt lineare Abbildung, lineare Transformation oder **linearer Operator** von  $V$  nach  $W$  genau dann, wenn gilt:*

$$T(v + w) = T(v) + T(w) \quad (\text{Additivität})$$

## 2.1 Tensorprodukte von Vektorräumen

$$T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v), \quad (\text{Homogenität})$$

für alle  $v, w \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Definition 2.2.** Seien  $V, W$  und  $U$  Vektorräume über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Die Abbildung  $T : V \times W \rightarrow U$  heißt **bilinear**, falls sie linear in beiden Argumenten ist, d. h. für  $v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$  gilt:

$$T(v_1 + v_2, w_1) = T(v_1, w_1) + T(v_2, w_1)$$

$$T(\alpha \cdot v_1, w_1) = \alpha \cdot T(v_1, w_1)$$

$$T(v_1, w_1 + w_2) = T(v_1, w_1) + T(v_1, w_2)$$

$$T(v_1, \alpha \cdot w_1) = \alpha \cdot T(v_1, w_1).$$

**Definition 2.3.** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Das **Tensorprodukt**  $(V \otimes W, T)$  von  $V$  und  $W$  ist gegeben durch einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V \otimes W$  mit einer bilinearen Abbildung  $T : V \times W \rightarrow V \otimes W$ ,<sup>5</sup> die der folgenden universellen Eigenschaft genügt: Für jeden weiteren Vektorraum  $U$  und jede bilineare Abbildung  $F : V \times W \rightarrow U$  gibt es genau eine lineare Abbildung  $\tilde{F} : V \otimes W \rightarrow U$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{T} & V \otimes W \\ & \searrow F & \swarrow \exists! \tilde{F} \\ & & U \end{array}$$

kommutiert, d. h.  $F = \tilde{F} \circ T$ .

**Bemerkung 1.** Für Tensorprodukte können folgende elementare Zusammenhänge gezeigt werden:<sup>6</sup>

- (i) Zu jedem Paar  $(V, W)$  von Vektorräumen über  $\mathbb{K}$  existiert stets ein Tensorprodukt  $T : V \times W \rightarrow V \otimes W$ . Dieses ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, d. h. für jedes Tensorprodukt  $T'$  von  $V$  und  $W$  findet sich ein eindeutig bestimmter Vektorraumisomorphismus  $\Phi : V \otimes W \rightarrow V \otimes' W$ , für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{T} & V \otimes W \\ & \searrow T' & \swarrow \Phi \\ & & V \otimes' W \end{array}$$

<sup>5</sup>Hier ist  $T(v, w) = v \otimes w \in V \otimes W$  mit  $v \in V$  und  $w \in W$ .

<sup>6</sup>Vgl. hierzu [BA], S. 306-309.

## 2.2 Algebren, Koalgebren, Hopf-Algebren und Involutionen

- (ii) Jeder Vektor  $t \in V \otimes W$  kann als endliche Summe  $\sum_{i=1}^m v_i \otimes w_i$  mit  $v_i \in V$  und  $w_i \in W$  dargestellt werden. Die Darstellung ist (in der Regel) nicht eindeutig.
- (iii) Für eine Basis  $B_V$  von  $V$  und eine Basis  $B_W$  von  $W$  bildet die Menge  $\{v \otimes w \mid v \in B_V, w \in B_W\}$  eine Basis von  $V \otimes W$ .
- (iv) Ist  $\dim V = n$  und  $\dim W = m$ , so gilt  $\dim(V \otimes W) = (\dim V) \cdot (\dim W) = n \cdot m$ .
- (v) Für drei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $V_1, V_2$  und  $V_3$  gelten folgende kanonische Isomorphismen:

$$V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1,$$

gegeben durch  $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$ ,

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3),$$

gegeben durch  $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ ,

$$(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3),$$

gegeben durch  $(v_1 + v_2) \otimes v_3 \mapsto (v_1 \otimes v_3) + (v_2 \otimes v_3)$ , und

$$(V_1 \otimes \mathbb{K}) \cong V_1 \cong (\mathbb{K} \otimes V_1),$$

gegeben durch  $(v_1 \otimes \lambda) \mapsto \lambda v_1$  bzw.  $(\lambda \otimes v_1) \mapsto \lambda v_1$ , für alle  $v_i \in V_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

## 2.2 Algebren, Koalgebren, Hopf-Algebren und Involutionen

In diesem Abschnitt der Arbeit werden nun wichtige algebraische Strukturen wie Algebren, Koalgebren, Bialgebren und Hopf-Algebren eingeführt. Die Struktur einer Algebra bildet den Grundbaustein der gesamten Arbeit und weist Ähnlichkeiten zur Struktur einer Koalgebra auf. Die Bialgebra stellt hingegen eine Fusion von Algebra und Koalgebra dar und wird mit einer Antipode zu einer Hopf-Algebra. Verbindungen zwischen algebraischen Strukturen bilden Algebra- und Koalgebrahomomorphismen, die ihre spezielle Gestalt durch die Strukturen bekommen zwischen denen sie operieren, d. h. sie werden insbesondere zu  $*$ -Algebra- bzw.  $*$ -Koalgebrahomomorphismen durch die

## 2.2 Algebren, Koalgebren, Hopf-Algebren und Involutionen

Definition von sog. Involutionen (d. h. selbstinverse antilineare Antihomomorphismen) auf Algebren bzw. Koalgebren.

**Definition 2.4.** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $\mathbb{K}$  sein zugehöriger Skalarkörper, dann wird eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$  als **lineares Funktional** (oder Linearform) bezeichnet.

**Definition 2.5.** Der **Dualraum**  $V'$  zu einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist die Menge aller linearen Funktionale  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ , d. h.  $V' = \{\varphi : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ linear}\}$ .

**Definition 2.6.** Eine **Algebra** ist ein Paar  $(\mathcal{A}, M)$ , kurz mit  $\mathcal{A}$  bezeichnet, bestehend aus einem Vektorraum  $\mathcal{A}$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  und der linearen Abbildung

$$M : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad (\text{Multiplikation})$$

mit der Eigenschaft

$$M \circ (M \otimes \text{id}) = M \circ (\text{id} \otimes M). \quad (\text{Assoziativität})$$

Man schreibt für  $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$  üblicherweise  $M(a_1 \otimes a_2) = a_1 a_2$  und  $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2)a_3$  für die Bedingung der Assoziativität.

**Bemerkung 2.** Für eine Algebra  $\mathcal{A}$  können mit Hilfe kommutativer Diagramme<sup>7</sup> folgende Eigenschaften festgehalten werden:

- (i) Die Assoziativität der Multiplikation  $M : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  kann durch das folgende kommutative Diagramm veranschaulicht werden:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{M \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{id} \otimes M} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ & \searrow M & & \swarrow M & \\ & & \mathcal{A} & & \end{array}$$

- (ii) Die Multiplikation  $M : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  heißt kommutativ, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ & \searrow M & \swarrow M \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

kommutiert, wobei die Abbildung  $\nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  mit  $\nu(x \otimes y) = y \otimes x$  für alle  $x, y \in \mathcal{A}$  hier die Vertauschungsabbildung gemäß Bemerkung 1. bezeichnet.

<sup>7</sup>Vgl. hierzu auch [BA], S. 431-432.

(iii) Eine lineare Abbildung  $\mathbb{1} : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$  heißt *Einheit* der Algebra  $\mathcal{A}$ , wenn die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id} \otimes \mathbb{1}} & \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \\
 & \searrow \cong & \downarrow M & & \swarrow \cong \\
 & & \mathcal{A} & & 
 \end{array}$$

Eine Algebra  $(\mathcal{A}, M, \mathbb{1})$ , die eine Einheit  $\mathbb{1}$  mitführt, wird auch als **unitale Algebra** bezeichnet.

**Bemerkung 3.** Eine Algebra  $(\mathcal{A}, M)$ , die mit einer kommutativen Multiplikation  $M$  versehen ist, wird auch als *kommutative Algebra* bezeichnet. Führt die Algebra zudem eine Einheit  $\mathbb{1}$  mit, wird sie auch als *kommutative unitale Algebra* bezeichnet.

**Definition 2.7.** Sei  $(\mathcal{A}, M)$  eine Algebra. Ein Untervektorraum  $\hat{\mathcal{A}}$  heißt **Unteralgebra** von  $\mathcal{A}$ , wenn gilt:

$$M(\hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}}) \subseteq \hat{\mathcal{A}}.$$

**Definition 2.8.** Ein **Algebrahomomorphismus** zwischen zwei Algebren  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  ist eine Abbildung  $f : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ , so dass

1.  $f(\lambda a) = \lambda f(a)$
2.  $f(a + b) = f(a) + f(b)$
3.  $f(ab) = f(a)f(b)$

für alle  $a, b \in \mathcal{A}_1$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt. Besitzen  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  zusätzlich je eine Einheit und bildet  $f$  das Einheitselement von  $\mathcal{A}_1$  auf das Einheitselement von  $\mathcal{A}_2$  ab, dann wird  $f$  auch als **unitaler Algebrahomomorphismus** bezeichnet.

**Definition 2.9.** Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{C}$  mit einer selbstinversen, antilinearen Abbildung  $v \mapsto v^*$ ,<sup>8</sup> genannt *Involution*, heißt **\*-Vektorraum**. Für zwei \*-Vektorräume

---

<sup>8</sup>Das heißt für die Abbildung  $v \mapsto v^*$  gelten die Bedingungen

1.  $(x + y)^* = x^* + y^*$
2.  $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
3.  $(x^*)^* = x$

für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .



## 2.2 Algebren, Koalgebren, Hopf-Algebren und Involutionen

$V$  und  $W$  wird eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit

$$f(v^*) = (f(v))^* = f(v)^*$$

für alle  $v \in V$  als **\*-Vektorraumhomomorphismus** bezeichnet.

**Definition 2.10.** Eine **\*-Algebra**  $(\mathcal{A}, M, *)$  ist eine Algebra  $(\mathcal{A}, M)$  über  $\mathbb{C}$  und zugleich ein \*-Vektorraum, dessen Involution der Bedingung

$$(xy)^* = y^*x^*$$

für alle  $x, y \in \mathcal{A}$  genügt.

**Definition 2.11.** Seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  zwei \*-Algebren. Ein Algebrehomomorphismus  $f : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  heißt **\*-Algebrehomomorphismus**, falls  $f$  ein \*-Vektorraumhomomorphismus ist.

**Bemerkung 4.** Ist  $f : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  ein \*-Algebrehomomorphismus, dann ist das Bild  $f(\mathcal{A}_1)$  eine Unter-\*-Algebra von  $\mathcal{A}_2$ , d. h. eine Unteralgebra von  $\mathcal{A}_2$ , die bezüglich der Involution abgeschlossen ist.

**Definition 2.12.** Eine **Koalgebra**  $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$ , kurz mit  $\mathcal{C}$  bezeichnet, ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{C}$  mit einer linearen Abbildung  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ , genannt **Komultiplikation**, und einem linearen Funktional  $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}$ , genannt **Koeinheit**, so dass gilt:

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta, \quad (\text{Koassoziativität})$$

$$(\delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \delta) \circ \Delta. \quad (\text{Koeinheitseigenschaft})$$

**Bemerkung 5.** Für eine Koalgebra  $\mathcal{C}$  können mit Hilfe kommutativer Diagramme<sup>9</sup> folgende Eigenschaften festgehalten werden:

- (i) Die Koassoziativität der Komultiplikation  $\Delta : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  kann durch das folgende kommutative Diagramm veranschaulicht werden:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & & \mathcal{C} & & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\
 & \swarrow \Delta & & \searrow \Delta & \\
 & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \\
 & \swarrow \Delta \otimes \text{id} & & \searrow \text{id} \otimes \Delta & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

- (ii) Die Komultiplikation  $\Delta : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  heißt zudem **kokommutativ**, wenn das Diagramm

---

<sup>9</sup>Vgl. hierzu auch [BA], S. 580-582.

## 2.2 Algebren, Koalgebren, Hopf-Algebren und Involutionen

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C} & \\
 \Delta \nearrow & & \nwarrow \Delta \\
 \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}
 \end{array}$$

kommutiert, wobei die Abbildung  $\nu : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$  mit  $\nu(x \otimes y) = y \otimes x$  für alle  $x, y \in \mathcal{C}$  erneut die Vertauschungsabbildung gemäß Bemerkung 1. bezeichnet.

(iii) Die Koeinheitseigenschaft der Koeinheit  $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}$  kann durch die folgenden kommutativen Diagramme veranschaulicht werden:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{C} & & \\
 & \cong \nearrow & \downarrow \Delta & \nwarrow \cong & \\
 \mathbb{K} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\delta \otimes \text{id}} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \delta} & \mathcal{C} \otimes \mathbb{K}
 \end{array}$$

**Bemerkung 6.** Eine Koalgebra  $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$ , die mit einer kokommutativen Komultiplikation  $\Delta$  versehen ist, wird auch als kokommutative Koalgebra bezeichnet.

**Definition 2.13.** Ein **Koalgebrahomomorphismus** zwischen zwei Koalgebren  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  ist eine Abbildung  $g : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ , welche folgenden Bedingungen genügt:

1.  $(g \otimes g) \circ \Delta_{\mathcal{C}_1} = \Delta_{\mathcal{C}_2} \circ g$
2.  $\delta_{\mathcal{C}_1} = \delta_{\mathcal{C}_2} \circ g$ .

**Bemerkung 7. (Primitive Elemente)** Ein Element  $c \in \mathcal{C}$  einer Koalgebra  $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$  heißt *gruppenähnlich*, wenn

$$\begin{aligned}
 \Delta(c) &= c \otimes c \\
 \delta(c) &= 1
 \end{aligned}$$

gilt. Es bezeichne  $G(\mathcal{C})$  die Menge aller gruppenähnlichen Elemente in  $\mathcal{C}$ . Sei nun  $c \in \mathcal{C}$  und  $d, e \in G(\mathcal{C})$ , dann wird  $c$  als  $(d, e)$ -*primitiv* bezeichnet, wenn

$$\Delta(c) = d \otimes c + c \otimes e$$

ist, wodurch gemäß der Koeinheitseigenschaft auch  $\delta(c) = 0$  folgt.

**Definition 2.14.** Eine **Bialgebra**  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, M, \mathbb{1})$ , kurz mit  $\mathcal{B}$  bezeichnet, ist eine unitale (assoziative) Algebra  $(\mathcal{B}, M, \mathbb{1})$  und eine Koalgebra  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta)$  über dem Körper  $\mathbb{K}$ , wobei die Komultiplikation  $\Delta$  und die Koeinheit  $\delta$  Algebrahomomorphismen sind.

**Bemerkung 8.** Man kann zeigen, dass folgende Konditionen äquivalent sind:<sup>10</sup>

- (i) Die linearen Abbildungen  $\Delta$  und  $\delta$  der Koalgebra  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta)$  sind Algebrahomomorphismen.
- (ii) Die linearen Abbildungen  $M$  und  $\mathbb{1}$  der Algebra  $(\mathcal{B}, M, \mathbb{1})$  sind Koalgebrahomomorphismen.

**Definition 2.15.** Eine **\*-Bialgebra**  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, M, \mathbb{1}, *)$  ist eine Bialgebra  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, M, \mathbb{1})$  über  $\mathbb{C}$  mit einer Involution  $b \mapsto b^*$  von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}$  gemäß Definition 2.10., so dass  $\Delta$  und  $\delta$  \*-Vektorraumhomomorphismen sind.

**Definition 2.16.** Sei  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, M, \mathbb{1})$  eine Bialgebra und  $\kappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  eine lineare Abbildung, welche die Bedingungen

$$\begin{aligned}\kappa \star \text{id} &:= M \circ (\kappa \otimes \text{id}) \circ \Delta = \mathbb{1} \circ \delta \\ \text{id} \star \kappa &:= M \circ (\text{id} \otimes \kappa) \circ \Delta = \mathbb{1} \circ \delta\end{aligned}$$

erfüllt, dann ist  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, M, \mathbb{1}, \kappa)$  eine **Hopf-Algebra** über dem Körper  $\mathbb{K}$ , d. h. die Diagramme

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{B} & & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \xrightarrow{\kappa \otimes \text{id}} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & & \mathcal{B} \\ & \nearrow \Delta & & & & \searrow M & \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\mathbb{1}} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\mathbb{1}} & \mathcal{B} \\ & \searrow \Delta & & & & \nearrow M & \\ & & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \kappa} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & & \end{array}$$

kommutieren. Die Abbildung  $\kappa$  heißt *Antipode* der Hopf-Algebra.

**Bemerkung 9.** Sei  $\mathcal{B}$  eine Bialgebra, so gilt:

- (i) Wenn  $\mathcal{B}$  eine Antipode  $\kappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  besitzt, dann ist diese eindeutig bestimmt.
- (ii) Eine Antipode  $\kappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  ist ein Antihomomorphismus der Bialgebra  $\mathcal{B}$ , d. h.  $\kappa(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$  und  $\kappa(ab) = \kappa(b)\kappa(a)$  für alle  $a, b \in \mathcal{B}$ .<sup>11</sup>

<sup>10</sup>Vgl. hierzu [Abe], S. 57-58.

<sup>11</sup>Vgl. hierzu [Abe], S. 62-63.

**Definition 2.17.** Eine **Hopf-\*-Algebra**  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, M, \mathbb{1}, \kappa, *)$  ist eine Hopf-Algebra  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, M, \mathbb{1}, \kappa)$  über  $\mathbb{C}$ , so dass  $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, M, \mathbb{1}, *)$  eine \*-Bialgebra ist und

$$\kappa(\kappa(b)^*)^* = b$$

für alle  $b \in \mathcal{B}$  gilt.

## 2.3 Der Fundamentalsatz über Koalgebren und seine Konsequenzen

Mit Hilfe der Faltung von linearen Funktionalen auf Koalgebren kann das Faltungsexponential  $\exp_* \varphi$  definiert werden, das auf Grundlage des Fundamentalsatzes über Koalgebren für jedes lineare Funktional  $\varphi$  konvergiert. Dieser Zusammenhang ist wesentlich für die Zentralen Grenzwertsätze und damit *fundamentum* für die gesamte Arbeit. Zunächst wird jedoch ein kurzer Exkurs zum induktiven Limes geführt,<sup>12</sup> mit dessen Hilfe wichtige Konsequenzen aus dem Fundamentalsatz über Koalgebren formuliert werden können. Hierfür sei im Folgenden  $(M, \leq)$  eine gerichtete Menge, d. h. für beliebige  $\alpha, \beta \in M$  existiert ein  $\gamma \in M$ , so dass  $\alpha \leq \gamma$  und  $\beta \leq \gamma$ .

**Definition 2.18.** Erfüllt eine Familie  $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in M}$  von Koalgebren und eine Familie  $(f_{\alpha, \beta} : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C}_\beta)_{\alpha, \beta \in M, \alpha \leq \beta}$  von Koalgebrahomomorphismen mit  $\alpha, \beta, \gamma \in M$  die Bedingungen

1.  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  impliziert  $f_{\alpha, \gamma} = f_{\beta, \gamma} \circ f_{\alpha, \beta}$
2.  $f_{\alpha, \alpha} = \text{id}_{\mathcal{C}_\alpha}$ ,

dann wird  $(\mathcal{C}_\alpha, f_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in M, \alpha \leq \beta}$  als **induktives System** von Koalgebren bezeichnet.

**Definition 2.19.** Eine Koalgebra  $\mathcal{C}$  zusammen mit einer Familie  $(f_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C})_{\alpha \in M}$  von Koalgebrahomomorphismen erfülle die folgenden Eigenschaften:

1.  $f_\alpha = f_\beta \circ f_{\alpha, \beta}$  mit  $\alpha \leq \beta$
2. Genügt eine Koalgebra  $\hat{\mathcal{C}}$  und eine Familie  $(g_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \hat{\mathcal{C}})_{\alpha \in M}$  von Koalgebrahomomorphismen der Bedingung  $g_\alpha = g_\beta \circ f_{\alpha, \beta}$ , dann gibt es einen eindeutigen Koalgebrahomomorphismus  $g : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ , so dass  $g_\alpha = g \circ f_\alpha$  für jedes  $\alpha \in M$  gilt.

Die Koalgebra  $\mathcal{C}$  zusammen mit der Familie  $(f_\alpha)_{\alpha \in M}$  von Koalgebrahomomorphismen heißt dann **induktiver Limes** des induktiven Systems  $(\mathcal{C}_\alpha, f_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in M, \alpha \leq \beta}$  und wird mit  $\varinjlim_{\alpha} \mathcal{C}_\alpha$  bezeichnet.

<sup>12</sup>Vgl. hierzu [Abe], S. 13-15; 272-274.

### 2.3 Der Fundamentalsatz über Koalgebren und seine Konsequenzen

**Bemerkung 10.** Der Begriff vom induktiven System und seinem Limes kann analog auch auf anderen algebraischen Systemen wie kommutativen Ringen, Gruppen, etc. definiert werden.

**Proposition 1. (Existenz des induktiven Limes für Koalgebren)** Für ein induktives System  $(\mathcal{C}_\alpha, f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in M, \alpha \leq \beta}$  von Koalgebren existiert eine Koalgebra  $\mathcal{C}$  zusammen mit einer Familie  $(f_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C})_{\alpha \in M}$  von Koalgebrahomomorphismen, so dass  $\mathcal{C} = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{C}_\alpha$  gilt.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{C}^* := \{(c, \alpha) \mid c \in \mathcal{C}_\alpha\} \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in M} \mathcal{C}_\alpha\right) \times M$ , d. h.  $\mathcal{C}^*$  ist die disjunkte Vereinigung der  $\mathcal{C}_\alpha$  und bezüglich der Injektion  $\iota_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C}^*$  durch  $\iota_\alpha(c) = (c, \alpha)$  können sämtliche  $\mathcal{C}_\alpha$  als Teilmengen von  $\mathcal{C}^*$  aufgefasst werden. Auf  $\mathcal{C}^*$  sei nun folgende Relation definiert:

$$(c, \alpha) \sim (d, \beta) \Leftrightarrow \exists \gamma \in M \text{ mit } \alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma \text{ und } f_{\alpha,\gamma}(c) = f_{\beta,\gamma}(d). \quad (1)$$

Dieser Zusammenhang stellt eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{C}^*$  dar. Setzt man  $\mathcal{C} := \mathcal{C}^* / \sim$ , dann ist  $\mathcal{C}$  die Menge aller Äquivalenzklassen von  $\mathcal{C}^*$ , wobei  $[(c, \alpha)]$  die Äquivalenzklasse von  $(c, \alpha)$  bezeichnet. Die Komposition aus der kanonischen Injektion  $\iota_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C}^*$  mit der kanonischen Projektion  $\pi : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}$  sei  $f_\alpha = \pi \circ \iota_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C}$ . Es gilt folglich  $f_\alpha = f_\beta \circ f_{\alpha,\beta} : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C}$  für  $\alpha, \beta \in M$  und  $\alpha \leq \beta$ .

Zunächst wird die folgende *Zwischenbehauptung* gezeigt: Ist  $(c, \alpha) \sim (d, \beta)$ , dann folgt

$$\sum_{(c)} [(c_{(1)}, \alpha)] \otimes [(c_{(2)}, \alpha)] = \sum_{(d)} [(d_{(1)}, \beta)] \otimes [(d_{(2)}, \beta)], \quad (2)$$

wobei die Sweedler-Notation<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(c) &= \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \\ \Delta_\beta(d) &= \sum_{(d)} d_{(1)} \otimes d_{(2)} \end{aligned}$$

verwendet wird. Dies ist nun wie folgt zu zeigen: Entsprechend der oben definierten Relation (1) impliziert  $(c, \alpha) \sim (d, \beta)$ , dass ein  $\gamma \in M$  mit  $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$  und  $f_{\alpha,\gamma}(c) = f_{\beta,\gamma}(d)$  existiert. Da  $f_{\alpha,\gamma}$  und  $f_{\beta,\gamma}$  Koalgebrahomomorphismen sind, folgt

$$\Delta_\gamma(f_{\alpha,\gamma}(c)) = (f_{\alpha,\gamma} \otimes f_{\alpha,\gamma})(\Delta_\alpha(c))$$

<sup>13</sup>Vgl. hierzu [Swe], S. 10.

### 2.3 Der Fundamentalsatz über Koalgebren und seine Konsequenzen

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(c)} f_{\alpha,\gamma}(c_{(1)}) \otimes f_{\alpha,\gamma}(c_{(2)}) \\
&= \Delta_\gamma(f_{\beta,\gamma}(d)) \\
&= (f_{\beta,\gamma} \otimes f_{\beta,\gamma})(\Delta_\beta(d)) \\
&= \sum_{(d)} f_{\beta,\gamma}(d_{(1)}) \otimes f_{\beta,\gamma}(d_{(2)}).
\end{aligned}$$

Auf Grund der Gleichungen

$$\pi \circ \iota_\gamma \circ f_{\alpha,\gamma} = \pi \circ \iota_\alpha$$

$$\pi \circ \iota_\gamma \circ f_{\beta,\gamma} = \pi \circ \iota_\beta$$

folgt durch Anwendung von  $(\pi \circ \iota_\gamma) \otimes (\pi \circ \iota_\gamma)$ , dass

$$\sum_{(c)} (\pi \circ \iota_\alpha)(c_{(1)}) \otimes (\pi \circ \iota_\alpha)(c_{(2)}) = \sum_{(d)} (\pi \circ \iota_\beta)(d_{(1)}) \otimes (\pi \circ \iota_\beta)(d_{(2)}),$$

d. h. die Behauptung (2) ist erfüllt. Nun kann man

$$\Delta[(c, \alpha)] = \sum_{(c)} [(c_{(1)}, \alpha)] \otimes [(c_{(2)}, \alpha)]$$

definieren und erhält – wie man leicht einsieht – eine Koalgebrastruktur auf  $\mathcal{C}$ .

Sei  $\hat{\mathcal{C}}$  eine weitere Koalgebra mit einer Familie  $(g_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \hat{\mathcal{C}})_{\alpha \in M}$  von Koalgebrahomomorphismen, für die  $g_\alpha = g_\beta \circ f_{\alpha,\beta} : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  gilt. Sei  $\tilde{g} : \mathcal{C}^* \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  die Abbildung mit  $\tilde{g}((c, \alpha)) := g_\alpha(c) \in \hat{\mathcal{C}}$ , dann respektiert  $\tilde{g}$  die Äquivalenzrelation  $\sim$  und  $g : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  mit  $g \circ \pi = \tilde{g}$  wird ein Koalgebrahomomorphismus, für den  $g_\alpha = g \circ f_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  für alle  $\alpha \in M$  gilt. Dieser ist durch die Forderung  $g_\alpha = g \circ f_\alpha$  eindeutig festgelegt. Folglich ist  $\mathcal{C}$  zusammen mit der Familie  $(f_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C})_{\alpha \in M}$  von Koalgebrahomomorphismen induktiver Limes  $\varinjlim_{\alpha} \mathcal{C}_\alpha$  des induktiven Systems  $(\mathcal{C}_\alpha, f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in M, \alpha \leq \beta}$ .  $\square$

**Definition 2.20.** Sei  $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$  eine Koalgebra. Ein Untervektorraum  $\mathcal{U}$  heißt **Unterkoalgebra** von  $\mathcal{C}$ , wenn gilt:

$$\Delta(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}.$$

**Satz 2.1. (Fundamentalsatz über Koalgebren)** Sei  $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$  eine Koalgebra. Die kleinste Unterkoalgebra  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{C}$ , die ein Element  $c \in \mathcal{C}$  enthält, ist endlich dimensional.

*Beweis.* Vgl. hierzu [Kie], S. 18-25.  $\square$

## 2.4 Graduierungen

Die Menge  $M = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ ist endlich dimensionale Unterkoalgebra von } \mathcal{C}\}$  ist mit der Inklusion eine gerichtete Menge, da die Summe von zwei endlich dimensionalen Unterkoalgebren eine endlich dimensionale Unterkoalgebra ist. Wenn für  $\mathcal{U}, \mathcal{E} \in M$  mit  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$  die Abbildung  $f_{\mathcal{U}, \mathcal{E}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$  als die Einbettung von  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{C}$  definiert wird, dann erhält man ein induktives System mit der Familie  $(\mathcal{U})_{\mathcal{U} \in M}$  von Koalgebren und der Familie  $(f_{\mathcal{U}, \mathcal{E}})_{\mathcal{U}, \mathcal{E} \in M, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}}$  von Koalgebrahomomorphismen. Man sieht mit Hilfe des Fundamentalsatzes über Koalgebren, dass  $\mathcal{C}$  mit den Einbettungen  $f_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$  induktiver Limes dieses induktiven Systems ist. Folglich gilt:

**Korollar 2.1.** *Jede Koalgebra ist der induktive Limes seiner endlich dimensionalen Unterkoalgebren.*

**Definition 2.21. (Faltung auf Koalgebren)** *Seien  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}$  lineare Funktionale auf einer Koalgebra  $\mathcal{C}$ , so wird die Faltung durch*

$$\varphi_1 \star \varphi_2 := (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}$$

definiert. Es ist  $\varphi_1 \star \varphi_2 \in \mathcal{C}'$ , da

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta : \mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \varphi_2} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}.$$

Die Faltung macht aus  $\mathcal{C}'$  eine assoziative Algebra mit Einheitselement  $\delta$ . Die  $n$ -fache Faltung  $\underbrace{\varphi \star \cdots \star \varphi}_{n\text{-mal}}$  von  $\varphi \in \mathcal{C}'$  wird mit  $\varphi^{\star n}$  bezeichnet.

Als eine Konsequenz aus dem Fundamentalsatz über Koalgebren ergibt sich nun das folgende Korollar:

**Korollar 2.2.** *Sei  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}$  ein lineares Funktional auf einer Koalgebra  $\mathcal{C}$ . Dann konvergiert für alle  $c \in \mathcal{C}$  die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{\star k}(c) = \delta(c) + \varphi(c) + \frac{1}{2} \varphi \star \varphi(c) + \frac{1}{6} \varphi \star \varphi \star \varphi(c) + \cdots$$

gegen das sog. **Faltungsexponential**  $(\exp_{\star} \varphi)(c)$ .

*Beweis.* Vgl. hierzu [Sch85], S. 477. □

## 2.4 Graduierungen

Die Einführung von  $\mathbb{N}_0$ -Graduierungen auf algebraischen Strukturen ist grundlegend für die Formulierung der Grenzwertsätze für  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebren, für  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppen und für Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor- $\ast$ -Algebren. Ein

## 2.4 Graduierungen

$\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum ist hierbei ein Vektorraum, der sich als direkte Summe von Untervektorräumen verschiedenen Grades darstellen lässt. Ein spezielles Beispiel eines derartigen Vektorraums bietet die Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$ , die Tensoren über einem Vektorraum  $V$  in der Struktur einer unitalen (assoziativen) Algebra zusammenfasst.

**Definition 2.22.** Eine  **$\mathbb{N}_0$ -Graduierung** auf einem Vektorraum  $V$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  ist ein System  $(V^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$  von Untervektorräumen  $V^{(n)}$ , die in der direkten Summe den Vektorraum  $V$  ergeben, d. h.

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{(n)}.$$

Die Untervektorräume  $V^{(n)}$  sind die graduierten Bestandteile von  $V$  und die Elemente von  $V^{(n)} \setminus \{0\}$  heißen homogen vom Grad  $n$ . Jedes Element  $v \neq 0$  von  $V$  kann eindeutig als Summe homogener Elemente verschiedenen Grades dargestellt werden.

Als Bezeichnung für den Grad  $n$  von  $v$  wird im Folgenden  $\deg(v) = n$  verwendet.

**Definition 2.23.** Sei  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{(n)}$  ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum. Ein Untervektorraum  $U$  von  $V$  wird als  **$\mathbb{N}_0$ -graduierter Untervektorraum** bezeichnet, wenn

$$U = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (U \cap V^{(n)}).$$

**Definition 2.24.** Seien  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{(n)}$  und  $W = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} W^{(n)}$  zwei  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Vektorräume. Die **direkte Summe** von  $V$  und  $W$  ist  $\mathbb{N}_0$ -graduiert mit

$$(V \oplus W)^{(n)} = V^{(n)} \oplus W^{(n)}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Definition 2.25.** Seien  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{(n)}$  und  $W = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} W^{(n)}$  zwei  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Vektorräume. Das **Tensorprodukt** von  $V$  und  $W$  ist  $\mathbb{N}_0$ -graduiert mit

$$(V \otimes W)^{(n)} = \bigoplus_{k_1 + k_2 = n} V^{(k_1)} \otimes W^{(k_2)} \tag{3}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  (und  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ ).



## 2.4 Graduierungen

**Beispiel 1. (Tensoralgebra)** Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Dann wird der  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Vektorraum

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n} = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

mit der Multiplikation  $\cdot : \mathcal{T}(V) \otimes \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V)$ , definiert durch

$$v \cdot w := \underbrace{v_1 \otimes \dots \otimes v_n}_{=v} \otimes \underbrace{w_1 \otimes \dots \otimes w_m}_{=w}$$

für  $m, n \geq 1$ ,  $v \in V^{\otimes n}$ ,  $w \in V^{\otimes m}$ , und der Einheitsabbildung  $\mathbb{1}_{\mathcal{T}(V)} : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{T}(V)$ , definiert durch

$$\mathbb{1}_{\mathcal{T}(V)}(\alpha) := (\alpha, 0, 0, \dots)$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$ , eine unitale (assoziative) Algebra, genannt Tensoralgebra. Der Vektorraum  $V^{\otimes n} \subseteq \mathcal{T}(V)$  ist hierbei vom Grad  $n \geq 0$  und hat die Notation  $V^{\otimes n} := \mathcal{T}^{(n)}(V)$ .

**Definition 2.26. (Homogene Abbildung)** Seien  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{(n)}$  und  $W = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} W^{(n)}$   $\mathbb{N}_0$ -graduierte Vektorräume über  $\mathbb{K}$  und  $f \in \text{Hom}(V, W)$ . Dann heißt  $f$  homogen vom Grad  $h$ , wenn gilt:

$$f(V^{(n)}) \subseteq W^{(n+h)}.$$

(Die Abbildung  $f$  ist insbesondere homogen vom Grad 0, wenn  $f(V^{(n)}) \subseteq W^{(n)}$  erfüllt ist.)

**Definition 2.27. ( $\mathbb{N}_0$ -graduierte Algebra)** Eine Algebra  $(\mathcal{A}, M)$  heißt  $\mathbb{N}_0$ -graduiert, wenn  $\mathcal{A}$  ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum und die Multiplikation  $M$  homogen vom Grad 0 ist.

**Bemerkung 11.** Eine unitale Algebra  $(\mathcal{A}, M, \mathbb{1})$  heißt  $\mathbb{N}_0$ -graduiert, wenn  $\mathcal{A}$  ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum ist, so dass die Multiplikation  $M$  und die Einheit  $\mathbb{1}$  homogen vom Grad 0 sind.

**Definition 2.28. ( $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebra)** Eine Koalgebra  $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$  heißt  $\mathbb{N}_0$ -graduiert, wenn  $\mathcal{C}$  ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum und die Komultiplikation  $\Delta$  homogen vom Grad 0 ist.

## 2.4 Graduierungen

**Proposition 2.** *Für eine Koalgebra  $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$  mit  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung*

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^{(n)}$$

*gilt: Ist  $\Delta$  homogen vom Grad 0, so ist es auch  $\delta$ .*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass  $\delta(c) = 0$  für alle  $c \in \mathcal{C}^{(n)}$  mit  $n \geq 1$  ist. Da  $\Delta$  homogen vom Grad 0 ist, folgt für jedes  $c$  vom Grad  $n \geq 1$ :

$$\Delta(c) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_j c_{1j}^{(i)} \otimes c_{2j}^{(n-i)} \right) \quad \text{für } c_{1j}^{(k)}, c_{2j}^{(k)} \in \mathcal{C}^{(k)}.$$

Durch Anwendung von  $(\text{id} \otimes \delta)$  auf beiden Seiten der Gleichung erhält man

$$\underbrace{((\text{id} \otimes \delta) \circ \Delta)}_{=\text{id}}(c) = (\text{id} \otimes \delta) \left( \sum_{i=0}^n \left( \sum_j c_{1j}^{(i)} \otimes c_{2j}^{(n-i)} \right) \right)$$

und damit ist

$$c = \sum_{i=0}^n \left( \sum_j c_{1j}^{(i)} \otimes \delta(c_{2j}^{(n-i)}) \right) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_j \delta(c_{2j}^{(n-i)}) c_{1j}^{(i)} \right).$$

Mit  $(\delta \otimes \text{id})$  folgt analog

$$c = \sum_{i=0}^n \left( \sum_j \delta(c_{1j}^{(i)}) c_{2j}^{(n-i)} \right).$$

Da  $c$  vom Grad  $n$  ist, kann  $c$  als Linearkombination von Elementen aus  $\mathcal{C}^{(n)}$  dargestellt werden, d. h. es gilt

$$c = \sum_j \delta(c_{2j}^{(0)}) c_{1j}^{(n)} = \sum_j \delta(c_{1j}^{(0)}) c_{2j}^{(n)}. \quad (4)$$

Insbesondere ist damit

$$0 = \sum_j \delta(c_{2j}^{(n)}) c_{1j}^{(0)} = \sum_j \delta(c_{1j}^{(n)}) c_{2j}^{(0)}, \quad (5)$$

## 2.5 Freie Produkte von \*-Algebren und unitalen \*-Algebren

so dass mithin auf Grund der Linearität von  $\delta$

$$\begin{aligned}
 \delta(c) &= \delta \left( \sum_j \delta(c_{1j}^{(0)}) c_{2j}^{(n)} \right) && \text{(nach (4))} \\
 &= \sum_j \delta(c_{1j}^{(0)}) \delta(c_{2j}^{(n)}) \\
 &= \delta \left( \sum_j \delta(c_{2j}^{(n)}) c_{1j}^{(0)} \right) \\
 &= \delta(0) && \text{(nach (5))} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Folglich ist  $\delta$  homogen vom Grad 0. □

### 2.5 Freie Produkte von \*-Algebren und unitalen \*-Algebren

Freie Produkte<sup>14</sup> von Vektorräumen und Algebren stellen das nicht-kommutative Analogon zu Tensorprodukten<sup>15</sup> dar und dienen als Grundlage für die im Abschnitt 3.1 dieser Arbeit benötigten universellen Produkte, die auf dem freien Produkt „ $\sqcup$ “ von Algebren definiert sind. Der Vektorraum  $\mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2$ , als Konstrukt aus (unitalen) \*-Algebren  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$ , ist dabei wieder eine (unitale) \*-Algebra, wobei hinsichtlich der Multiplikation zweier Tensoren<sup>16</sup> zwei Elemente, je nachdem ob sie aus verschiedenen Algebren oder der gleichen Algebra aufeinander treffen, miteinander tensorisiert oder multipliziert werden. Zur Deskription freier Produkte von Vektorräumen soll zunächst folgende Notation zu Grunde gelegt werden:

$$\mathbb{A}_n = \{ \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \mid m \in \mathbb{N}, \varepsilon_k \in \{1, \dots, n\}, \varepsilon_k \neq \varepsilon_{k+1}, k \in \{1, \dots, m\} \}.$$

**Definition 2.29.** *Seien  $V_1$  und  $V_2$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$ . Dann wird das **freie Produkt** von  $V_1$  und  $V_2$  als der Vektorraum*

$$\begin{aligned}
 V_1 \sqcup V_2 &:= \bigoplus_{\varepsilon \in \mathbb{A}_2} V_\varepsilon = \bigoplus_{\varepsilon \in \mathbb{A}_2} V_{\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_2} \otimes \dots \otimes V_{\varepsilon_m} \\
 &= V_1 \oplus V_2 \oplus (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_2 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V_2 \otimes V_1) \oplus (V_2 \otimes V_1 \otimes V_2) \oplus \dots
 \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Freie Produkte von Algebren sind die Koprodukte in der Kategorie der Algebren. Vgl hierzu [MacL].

<sup>15</sup>Tensorprodukte von Algebren sind die Koprodukte in der Kategorie der kommutativen unitalen Algebren. Vgl. hierzu [MacL].

<sup>16</sup>Die Elemente  $a_1 \otimes \dots \otimes a_m$  aus  $\mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2$  mit  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}_{1,2}$  werden als Tensoren bezeichnet.

## 2.5 Freie Produkte von \*-Algebren und unitalen \*-Algebren

definiert.

**Definition 2.30. (Freies Produkt von Algebren und \*-Algebren)** Das freie Produkt zweier Algebren  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  ist definiert durch das freie Produkt der Vektorräume  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  und die Multiplikation

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m)(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = \begin{cases} a_1 \otimes \cdots \otimes a_m \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n, & \text{wenn } \varepsilon_m \neq \varrho_1 \\ a_1 \otimes \cdots \otimes (a_m b_1) \otimes \cdots \otimes b_n, & \text{wenn } \varepsilon_m = \varrho_1 \end{cases}$$

in  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ , wobei  $a_1 \otimes \cdots \otimes a_m \in \mathcal{A}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ , und  $b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \in \mathcal{A}_\varrho$ ,  $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ . Sind  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  sogar \*-Algebren, dann ist durch

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m)^* := a_m^* \otimes \cdots \otimes a_1^*$$

eine Involution im freien Produkt definiert, mit der  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  zu einer \*-Algebra wird.

Das freie Produkt von Algebren existiert auch im unitalen Fall, weshalb im Folgenden optional  $\mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2$  angegeben wird. Aus der Algebra  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  erhält man durch die Identifikation  $\mathbb{1}_{\mathcal{A}_1} = \mathbb{1}_{\mathcal{A}_2}$  die unitale Algebra  $\mathcal{A}_1 \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{A}_2$ . Sind zwei unitale Algebren  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  gegeben, die Zerlegungen der Form  $\mathcal{A}_1 = \mathbb{K}\mathbb{1} \oplus \mathcal{A}_0^1$  und  $\mathcal{A}_2 = \mathbb{K}\mathbb{1} \oplus \mathcal{A}_0^2$  mit den Unterhalbgebren  $\mathcal{A}_0^1$  und  $\mathcal{A}_0^2$  von  $\mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{A}_2$  erlauben, dann gilt

$$\mathcal{A}_1 \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{A}_2 = \mathbb{K}\mathbb{1} \oplus (\mathcal{A}_0^1 \sqcup \mathcal{A}_0^2).$$

Im Allgemeinen ist eine derartige Zerlegung einer Algebra jedoch nicht eindeutig.

**Definition 2.31. (Freies Produkt von unitalen \*-Algebren)** Seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  unitale \*-Algebren und  $\mathcal{I}$  das von der Menge

$$\{\mathbb{1}_1 - \mathbb{1}_2 \mid \mathbb{1}_1 \in \mathcal{A}_1, \mathbb{1}_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

erzeugte Ideal. Dann wird der Quotientenraum

$$\mathcal{A}_1 \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 / \mathcal{I}$$

zu einer unitalen \*-Algebra mit der Einheit  $\mathbb{1} = \mathbb{1}_1 + \mathcal{I} = \mathbb{1}_2 + \mathcal{I}$ .

Es bezeichne  $\tilde{\mathcal{A}}$  die Algebra  $\mathcal{A}$ , die durch Hinzufügen einer künstlichen Einheit  $\mathbb{1}$  entsteht, d. h.  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{K}\mathbb{1} \oplus \mathcal{A}$ . Dann gilt für nicht notwendigerweise unitale Algebren  $\mathcal{A}_1$

## 2.5 Freie Produkte von \*-Algebren und unitalen \*-Algebren

und  $\mathcal{A}_2$  der Algebraisomorphismus

$$\widetilde{\mathcal{A}}_1 \sqcup_{\mathbb{1}} \widetilde{\mathcal{A}}_2 \cong \widetilde{\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2}. \quad (6)$$

**Satz 2.2.** *Seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  (unitale) Algebren. Das freie Produkt  $\mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2$  mit den Einbettungen  $\iota_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2$  und  $\iota_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2$  ist eine (unitale) Algebra und durch die folgende universelle Eigenschaft – bis auf Isomorphie – bestimmt: Sind  $j_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}$  und  $j_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}$  (unitale) Algebrahomomorphismen in eine (unitale) Algebra  $\mathcal{A}$ , dann gibt es genau einen (unitalen) Algebrahomomorphismus  $j_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} j_2 : \mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}$ , d. h. das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{A}_1 & \\
 \iota_1 \swarrow & & \searrow j_1 \\
 \mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2 & \xrightarrow{\exists! j_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} j_2} & \mathcal{A} \\
 \iota_2 \swarrow & & \searrow j_2 \\
 & \mathcal{A}_2 & 
 \end{array}$$

kommutiert.

*Beweis.* Vgl. hierzu [Voß], S. 20. □

Für beliebige (unitale) Algebren  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2$  und (unitale) Algebrahomomorphismen  $j_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_1$  und  $j_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_2$  sei im Folgenden

$$j_1 \amalg_{(\mathbb{1})} j_2 := (\hat{\iota}_1 \circ j_1) \sqcup_{(\mathbb{1})} (\hat{\iota}_2 \circ j_2)$$

gesetzt, wobei  $\hat{\iota}_1$  die Einbettung von  $\hat{\mathcal{A}}_1$  in  $\hat{\mathcal{A}}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \hat{\mathcal{A}}_2$  und  $\hat{\iota}_2$  die Einbettung von  $\hat{\mathcal{A}}_2$  in  $\hat{\mathcal{A}}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \hat{\mathcal{A}}_2$  bezeichne, d. h. die Abbildungsvorschrift

$$j_1 \amalg_{(\mathbb{1})} j_2 : \mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2 \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \hat{\mathcal{A}}_2$$

ist gegeben durch die folgenden kommutativen Diagramme:<sup>17</sup>

---

<sup>17</sup>Für den \*-Algebrahomomorphismus  $\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{D}$  einer dualen Halbgruppe  $(\mathcal{D}, \Lambda, (\delta))$  – so kann an dieser Stelle vorweg gegriffen werden – gelten z. B. die folgenden Abbildungsvorschriften

$$\begin{aligned}
 (\Lambda \amalg_{(\mathbb{1})} \text{id}) \circ \Lambda &: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{D} \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{D}, \\
 (\text{id} \amalg_{(\mathbb{1})} \Lambda) \circ \Lambda &: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{D} \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{D}.
 \end{aligned}$$

(Vgl. hierzu auch Abschnitt 3.2 dieser Arbeit.)

## 2.5 Freie Produkte von \*-Algebren und unitalen \*-Algebren

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{j_1} & \hat{\mathcal{A}}_1 & & \\
 & \swarrow \iota_1 & & & & \searrow \hat{\iota}_1 & \\
 \mathcal{A}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \mathcal{A}_2 & & & \xrightarrow{j_1 \amalg_{(\mathbb{1})} j_2} & & \hat{\mathcal{A}}_1 \sqcup_{(\mathbb{1})} \hat{\mathcal{A}}_2 & \\
 & \swarrow \iota_2 & \mathcal{A}_2 & \xrightarrow{j_2} & \hat{\mathcal{A}}_2 & \searrow \hat{\iota}_2 & \\
 & & & & & & 
 \end{array}$$

Es gilt für Elemente  $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) \in \mathcal{A}_\varepsilon$

$$j_1 \amalg_{(\mathbb{1})} j_2 (a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) = j_{\varepsilon_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes j_{\varepsilon_m}(a_m),$$

wobei  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \mathbb{A}_2$  ist.

### 3 Universelle Produkte und duale Halbgruppen

Dieses Kapitel ist von vorbereitendem Charakter und soll zunächst eine kurze Einführung in die Theorie der universellen Produkte<sup>18</sup> bieten. Naofumi Muraki konnte nach Vorarbeiten von Roland Speicher, Anis Ben Ghorbal und Michael Schürmann in [Mur3] zeigen, dass es genau fünf universelle Produkte gibt, die auf dem freien Produkt von Algebren definiert sind und für je einen Begriff nicht-kommutativer Unabhängigkeit stehen, namentlich der Tensor-, der freien, der Booleschen, der monotonen und der antimonotonen Unabhängigkeit (3.1). Um an späterer Stelle – den fünf universellen Produkten entsprechend – Faltungen von Momentenfunktionalen betrachten zu können, werden in diesem Kapitel  $*$ -Bialgebren durch duale Halbgruppen im Sinne D.-V. Voiculescus<sup>19</sup> ersetzt und durch die Einführung von  $\mathbb{N}_0$ -Graduierungen zusätzlich verallgemeinert (3.2). Duale Halbgruppen sind (unitale)  $*$ -Algebren, die mit einer Multiplikation (sowie einer Koeinheit) ausgestattet sind und insofern Ähnlichkeiten zur Struktur einer Bialgebra aufweisen, wobei das Tensorprodukt jedoch im Wesentlichen durch das freie Produkt von Algebren ersetzt wird. Mit Hilfe eines – der symmetrischen Tensoralgebra  $\mathcal{S}(V)$  entlehnten – Funktors, der auch die  $\mathbb{N}_0$ -Graduierungen erhält, werden anschließend Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und kommutativen  $*$ -Bialgebren sowie zwischen dualen Gruppen und kommutativen Hopf- $*$ -Algebren beschrieben (3.3),<sup>20</sup> die letztlich die Anwendung der (an späterer Stelle zu beweisenden) Grenzwertsätze für  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebren und damit den Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes auf  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halbgruppen für eines der fünf universellen Produkte ermöglichen (Hauptsatz).

#### 3.1 Die fünf universellen Produkte und die zugehörigen Unabhängigkeitsbegriffe

Mit Hilfe des axiomatisch bestimmten universellen Produktes gemäß [BGS1]<sup>21</sup> lassen sich nach [Mur3] fünf verschiedene quanten-stochastische Unabhängigkeitsbegriffe beschreiben, die als Verallgemeinerung des „klassischen“ Unabhängigkeitsbegriffes auf nicht-kommutative Algebren aufgefasst werden können. Diese sind fundamental für die Formulierung Zentraler Grenzwertsätze in der Quanten-Wahrscheinlichkeitstheorie. Zu den fünf Begriffen nicht-kommutativer Unabhängigkeit gehören die *Tensorunabhängigkeit*, bekannt geworden v. a. durch R. L. Hudson und C. D. Cushen sowie N. Giri und

<sup>18</sup>Die Definition des universellen Produktes lehnt sich dabei an die Darstellungen in [BGS2] an.

<sup>19</sup>Vgl. hierzu [Voi87].

<sup>20</sup>Vgl. hierzu v. a. [BGS3] und [Fra2].

<sup>21</sup>Vgl. hierzu auch [Spe2].

### 3.1 Die fünf universellen Produkte und die zugehörigen Unabhängigkeitsbegriffe

W. von Waldenfels,<sup>22</sup> die *freie* Unabhängigkeit („freeness“) von D.-V. Voiculescu,<sup>23</sup> die *Boolesche* Unabhängigkeit, die auf M. Bozejkos reguläre freie Produkte zurückgeht,<sup>24</sup> die *monotone* Unabhängigkeit von Y.-G. Lu und N. Muraki<sup>25</sup> und schließlich die *antimonotone* Unabhängigkeit.<sup>26</sup> In [Fra1] und [Len] wurden Versuche unternommen diese verschiedenen Unabhängigkeitsbegriffe zu verbinden und zu klassifizieren.

**Definition 3.1.** *Ein universelles Produkt ist eine Vorschrift, die jedem Paar von Algebren  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  und jedem Paar linearer Funktionale  $(\varphi_1, \varphi_2)$  mit  $\varphi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\varphi_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  ein lineares Funktional  $\varphi_1 \bullet \varphi_2 : \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  derart zuordnet, dass die folgenden Axiome erfüllt sind:*

- (A1)  $(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \bullet \varphi_3 = \varphi_1 \bullet (\varphi_2 \bullet \varphi_3)$ , wobei  $\varphi_3 : \mathcal{A}_3 \rightarrow \mathbb{C}$  ein weiteres lineares Funktional über der Algebra  $\mathcal{A}_3$  ist.
- (A2)  $(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ \iota_1 = \varphi_1$  und  $(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ \iota_2 = \varphi_2$ , wobei  $\iota_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  und  $\iota_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  die Einbettungen bezeichnen.
- (A3)  $(\varphi_1 \circ j_1) \bullet (\varphi_2 \circ j_2) = (\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ (j_1 \amalg j_2)$ , wobei  $j_1 : \hat{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$  und  $j_2 : \hat{\mathcal{A}}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$  zwei Algebromomorphismen auf den Algebren  $\hat{\mathcal{A}}_1$  und  $\hat{\mathcal{A}}_2$  sind.
- (A4)  $(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(a_1 a_2) = \varphi_1(a_1) \varphi_2(a_2)$  und  $(\varphi_2 \bullet \varphi_1)(a_2 a_1) = \varphi_2(a_2) \varphi_1(a_1)$ , wobei  $a_1 \in \mathcal{A}_1$ ,  $a_2 \in \mathcal{A}_2$ ,  $a_1 a_2 \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  und  $a_2 a_1 \in \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_1$  sind.<sup>27</sup>

**Satz 3.1. [N. Muraki]** *Es existieren genau fünf universelle Produkte: das Tensorprodukt (T), das freie (F), das Boolesche (B), das monotone (M) und das antimonotone Produkt (AM).*

*Beweis.* Vgl. hierzu [Mur3], S. 5-31. □

Die Gestalt der fünf verschiedenen universellen Produkte wird im Anschluss an einige allgemeine Betrachtungen in Definition 3.5. angegeben.

**Definition 3.2.** *Gilt für das universelle Produkt zweier linearer Funktionale  $\varphi_1 \in \mathcal{A}'_1$  und  $\varphi_2 \in \mathcal{A}'_2$  auf den Algebren  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  neben (A1) bis (A4) das Axiom*

$$\varphi_1 \bullet \varphi_2 = \varphi_2 \bullet \varphi_1,$$

<sup>22</sup>Vgl. hierzu [CuH], [GvW], [vWa] sowie [HuPa], [Par] und [Mey].

<sup>23</sup>Vgl. hierzu [Voi86], [Spe1] und [NiSp].

<sup>24</sup>Vgl. hierzu [Boz] oder auch [Fra1].

<sup>25</sup>Vgl. hierzu [Lu] und [Mur1].

<sup>26</sup>Vgl. hierzu u. a. [Mur2].

<sup>27</sup>Das Axiom (A4) des universellen Produktes wurde hier ausschließlich zum Zweck der Kategorisierung angegeben, wird jedoch für den weiteren Verlauf der Arbeit nicht explizit benötigt.



### 3.1 Die fünf universellen Produkte und die zugehörigen Unabhängigkeitsbegriffe

dann heißt das universelle Produkt **kommutativ**.<sup>28</sup>

**Satz 3.2.** *Es existieren genau drei kommutative universelle Produkte: die Produkte (T), (F) und (B).*

*Beweis.* Vgl. hierzu [BGS2], S. 537; 557-560. □

Betrachtet man nicht notwendigerweise unitalen Algebren  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  und lineare Funktionale  $\varphi_1 \in \mathcal{A}'_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}'_2$ , dann kann folgender Zusammenhang hergestellt werden: Bezeichne  $\varphi_1 \bullet \varphi_2$  das lineare Funktional auf  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  für eines der fünf universellen Produkte und sei  $\widetilde{\mathcal{A}}_{1,2} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{A}_{1,2}$  sowie

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_{1,2} \upharpoonright \mathcal{A}_{1,2} &= \varphi_{1,2} \\ \widetilde{\varphi}_{1,2}(\mathbf{1}) &= 1\end{aligned}$$

gesetzt, dann erhält man das lineare Funktional

$$\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2 : \widetilde{\mathcal{A}}_1 \sqcup \widetilde{\mathcal{A}}_2 \rightarrow \mathbb{C}. \quad (7)$$

Des Weiteren gibt es das lineare Funktional

$$\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2 : \widetilde{\mathcal{A}}_1 \sqcup \widetilde{\mathcal{A}}_2 \rightarrow \mathbb{C},$$

wobei  $\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2 \upharpoonright \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 = \varphi_1 \bullet \varphi_2$  und  $\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2(\mathbf{1}) = 1$ . Wenn  $\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2$  die Relation  $\mathbb{1}_{\widetilde{\mathcal{A}}_1} = \mathbb{1}_{\widetilde{\mathcal{A}}_2}$  respektiert, d. h. verschwindet  $\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2$  auf dem von  $\mathbb{1}_{\widetilde{\mathcal{A}}_1} - \mathbb{1}_{\widetilde{\mathcal{A}}_2}$  erzeugten Ideal, dann definiert  $\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2$  ein lineares Funktional auf  $\widetilde{\mathcal{A}}_1 \sqcup \widetilde{\mathcal{A}}_2 = \widetilde{\mathcal{A}}_1 \sqcup \widetilde{\mathcal{A}}_2$  und  $\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2$  entspricht  $\widetilde{\varphi}_1 \bullet \widetilde{\varphi}_2$ . Dies funktioniert jedoch nur im Tensor- und im freien Fall:

**Satz 3.3.** *Seien  $\varphi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\varphi_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  lineare Funktionale auf den unitalen Algebren  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$ . Dann respektieren nur die universellen Produkte (T) und (F) die Relation  $\mathbb{1}_{\mathcal{A}_1} = \mathbb{1}_{\mathcal{A}_2}$ .*

*Beweis.* Vgl. hierzu [BGS2], S. 537; 560. □

**Definition 3.3.** *Ein **Zustand** ist ein lineares Funktional  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer unitalen  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit den Eigenschaften*

$$1. \quad \Phi(a^*a) \geq 0 \quad (\text{Positivität})$$

---

<sup>28</sup>Dieses Axiom ist eine algebraische Interpretation der Tatsache, dass zwei klassische Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  genau dann unabhängig sind, wenn  $Y$  und  $X$  es sind (d. h. Unabhängigkeit hängt nicht von der Reihenfolge ab).

### 3.1 Die fünf universellen Produkte und die zugehörigen Unabhängigkeitsbegriffe

$$2. \quad \Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1, \quad (\text{Normiertheit})$$

für alle  $a \in \mathcal{A}$ , wobei  $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$  das Einheitsselement von  $\mathcal{A}$  bezeichnet.

**Bemerkung 12.** Sei  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  ein lineares Funktional auf der Algebra  $\mathcal{A}$ , dann bezeichne  $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$  das normierte lineare Funktional auf  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus \mathcal{A}$  mit  $\varphi = \tilde{\varphi} \upharpoonright \mathcal{A}$ .

**Proposition 3.** Für eine unitale  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  ist ein normiertes lineares Funktional  $\Phi$  genau dann ein Zustand auf  $\mathcal{A}$ , wenn  $\tilde{\Phi}$  ein Zustand auf  $\tilde{\mathcal{A}}$  ist.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A}$  eine unitale  $*$ -Algebra und  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  ein lineares Funktional mit  $\Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1$ . Offensichtlich ist  $\tilde{\Phi}(\mathbb{1}) = \Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1$ . Für alle  $\lambda\mathbb{1} + a \in \tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus \mathcal{A}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $a \in \mathcal{A}$  ist

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}((\lambda\mathbb{1} + a)^*(\lambda\mathbb{1} + a)) &= \tilde{\Phi}(|\lambda|^2\mathbb{1} + a^*a + \bar{\lambda}a + \lambda a^*) \\ &= |\lambda|^2\Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) + \Phi(a^*a) + \bar{\lambda}\Phi(a) + \lambda\Phi(a^*) \\ &= \Phi((\lambda\mathbb{1}_{\mathcal{A}} + a)^*(\lambda\mathbb{1}_{\mathcal{A}} + a)). \end{aligned}$$

Folglich gilt: Ist  $\Phi(a^*a) \geq 0$  für alle  $a \in \mathcal{A}$ , dann ist auch  $\tilde{\Phi}(a^*a) \geq 0$ . Sei umgekehrt  $\tilde{\Phi} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$  ein lineares Funktional, dann gilt offensichtlich: Ist  $\tilde{\Phi}(a^*a) \geq 0$ , so ist es auch die Einschränkung von  $\Phi$  auf  $\mathcal{A}$ , d. h.  $\Phi(a^*a) \geq 0$ .  $\square$

Mit Hilfe des universellen Produktes und der Definition 3.3. eines Zustandes  $\Phi$  lässt sich nun beschreiben, wann eine Familie von speziellen Abbildungen unabhängig ist.

**Definition 3.4. (Unabhängigkeit)** Sei  $\mathcal{A}$  eine unitale  $*$ -Algebra und  $\Phi$  ein Zustand auf  $\mathcal{A}$ . Seien  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  zudem  $*$ -Algebren und die Abbildungen  $j_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}$  für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$   $*$ -Algebrahomomorphismen. Dann heißen  $j_1, \dots, j_n$  unabhängig, wenn

$$\Phi \circ (j_1 \sqcup \dots \sqcup j_n) = (\Phi \circ j_1) \bullet \dots \bullet (\Phi \circ j_n)$$

erfüllt ist.

Für jede alternierende Folge  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \mathbb{A}_2$  der Länge  $m \geq 2$  wird im Folgenden  $V_1 := V_1(\varepsilon) := \{i \mid \varepsilon_i = 1\}$  und  $V_2 := V_2(\varepsilon) := \{i \mid \varepsilon_i = 2\}$  gesetzt. Zudem bezeichnet  $\prod_{k \in V}^{\rightarrow} a_k$  das Algebrenprodukt der  $a_k$  in derselben Reihenfolge wie sie in  $a_1 \otimes \dots \otimes a_m$  auftreten. So ist z. B. für  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_m) = (2, 1, 2, 1, \dots, 1)$

$$\prod_{k \in V_1}^{\rightarrow} a_k = a_2 a_4 a_6 a_8 \dots a_m \quad \text{und} \quad \prod_{l \in V_2}^{\rightarrow} a_l = a_1 a_3 a_5 a_7 \dots a_{m-1}.$$

### 3.1 Die fünf universellen Produkte und die zugehörigen Unabhängigkeitsbegriffe

**Definition 3.5.** Das *Tensorprodukt*  $\otimes$ , das *freie Produkt*  $\star$  das *Boolesche Produkt*  $\diamond$ , das *monotone Produkt*  $\triangleright$  und das *antimonotone Produkt*  $\triangleleft$  über  $\mathbb{C}$  sind wie folgt definiert:<sup>29</sup>

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) &= \varphi_1 \left( \prod_{k \in V_1}^{\rightarrow} a_k \right) \varphi_2 \left( \prod_{l \in V_2}^{\rightarrow} a_l \right) \\
(\varphi_1 \star \varphi_2)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) &= \sum_{I \subsetneq \{1, \dots, m\}} (-1)^{m-\#I+1} (\varphi_1 \star \varphi_2) \left( \prod_{k \in I}^{\rightarrow} a_k \right) \left( \prod_{l \notin I} \varphi_{\varepsilon_l}(a_l) \right) \\
&\text{(Rekursionsformel mit } \varphi_1 \star \varphi_2 \left( \prod_{k \in \emptyset}^{\rightarrow} a_k \right) := 1) \\
(\varphi_1 \diamond \varphi_2)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) &= \left( \prod_{k \in V_1} \varphi_1(a_k) \right) \left( \prod_{l \in V_2} \varphi_2(a_l) \right) \\
(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) &= \varphi_1 \left( \prod_{k \in V_1}^{\rightarrow} a_k \right) \left( \prod_{l \in V_2} \varphi_2(a_l) \right) \\
(\varphi_1 \triangleleft \varphi_2)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) &= \left( \prod_{k \in V_1} \varphi_1(a_k) \right) \varphi_2 \left( \prod_{l \in V_2}^{\rightarrow} a_l \right).
\end{aligned}$$

Die Rekursionsformel des freien Produktes kann unter Beachtung von (6) und (7) auch wie folgt beschrieben werden:

$$\widetilde{\varphi}_1 \star \widetilde{\varphi}_2(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) = 0, \text{ falls } \varphi_{\varepsilon_k}(a_k) = 0$$

für alle  $k = 1, \dots, m$ .

**Beispiel 2.** Für  $a_1, a_3 \in \mathcal{A}_1$  und  $a_2, a_4 \in \mathcal{A}_2$  können die fünf universellen Produkte wie folgt dargestellt werden:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = \varphi_1(a_1 a_3) \varphi_2(a_2 a_4) \quad (\text{T})$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \star \varphi_2)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) &= \varphi_1(a_1 a_3) \varphi_2(a_2) \varphi_2(a_4) + \varphi_1(a_1) \varphi_1(a_3) \varphi_2(a_2 a_4) \\
&\quad - \varphi_1(a_1) \varphi_1(a_3) \varphi_2(a_2) \varphi_2(a_4) \quad (\text{F})
\end{aligned}$$

$$(\varphi_1 \diamond \varphi_2)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = \varphi_1(a_1) \varphi_1(a_3) \varphi_2(a_2) \varphi_2(a_4) \quad (\text{B})$$

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = \varphi_1(a_1 a_3) \varphi_2(a_2) \varphi_2(a_4) \quad (\text{M})$$

$$(\varphi_1 \triangleleft \varphi_2)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = \varphi_1(a_1) \varphi_1(a_3) \varphi_2(a_2 a_4). \quad (\text{AM})$$

<sup>29</sup>Hier bezeichnet  $\#I$  die Mächtigkeit der endlichen Indexmenge  $I$ .

### 3.2 Duale Halbgruppen und graduierte duale Halbgruppen

In diesem Abschnitt wird die im Jahr 1987 von D.-V. Voiculescu eingeführte algebraische Struktur einer dualen Halbgruppe<sup>30</sup> betrachtet und zum Zweck größerer Allgemeinheit mit einer  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung versehen. Duale Halbgruppen ersetzen in gewisser Weise die Koalgebrastruktur einer  $*$ -Bialgebra<sup>31</sup> und ermöglichen die Definition eines Faltungsproduktes von linearen Funktionalen entsprechend einem universellen Produkt. Eine duale Halbgruppe ist hierbei eine  $*$ -Algebra  $\mathcal{D}$ , auf der eine Multiplikation  $\Lambda$  definiert ist, die  $\mathcal{D}$  in das freie Produkt  $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{D}$  überführt und damit insbesondere das Tensorprodukt „geeignet“ ersetzt. Es werden im Folgenden je zwei Varianten einer dualen Gruppe und einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Gruppe präsentiert und bewiesen, dass diese unter bestimmten Voraussetzung äquivalent sind.

**Definition 3.6. [Variante 1]** Eine *duale Halbgruppe*  $(\mathcal{D}, \Lambda, M, *)$ , kurz mit  $(\mathcal{D}, \Lambda)$  bezeichnet, ist eine  $*$ -Algebra  $(\mathcal{D}, M, *)$  versehen mit einem  $*$ -Algebrahomomorphismus  $\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \sqcup \mathcal{D}$ , der mit den Projektionen  $\mathbf{0} \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}}$  und  $\text{id}_{\mathcal{D}} \sqcup \mathbf{0}$  von  $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{D}$  auf  $\mathcal{D}$  und der Nullabbildung  $\mathbf{0}$  folgende Gleichungen erfüllt:

$$(\Lambda \amalg \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda = (\text{id}_{\mathcal{D}} \amalg \Lambda) \circ \Lambda \quad (8)$$

$$(\mathbf{0} \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{D}} = (\text{id}_{\mathcal{D}} \sqcup \mathbf{0}) \circ \Lambda. \quad (9)$$

Existiert zudem ein Algebrahomomorphismus  $\kappa : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  (Antipode), so dass

$$(\kappa \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda = \mathbf{0} = (\text{id}_{\mathcal{D}} \sqcup \kappa) \circ \Lambda \quad (10)$$

gilt, dann wird  $(\mathcal{D}, \Lambda, \kappa)$  als *duale Gruppe* bezeichnet.

**Definition 3.7. [Variante 2]** Eine *duale Halbgruppe*  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta, M, \mathbf{1}, *)$ , kurz mit  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  bezeichnet, ist eine unitalen  $*$ -Algebra  $(\mathcal{D}, M, \mathbf{1}, *)$ , auf der die unitalen  $*$ -Algebrahomomorphismen  $\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \sqcup_{\mathbf{1}} \mathcal{D}$  und  $\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(\Lambda \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda = (\text{id}_{\mathcal{D}} \amalg_{\mathbf{1}} \Lambda) \circ \Lambda \quad (11)$$

$$(\delta \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{D}} = (\text{id}_{\mathcal{D}} \amalg_{\mathbf{1}} \delta) \circ \Lambda \quad (12)$$

<sup>30</sup>Vgl. hierzu [Voi87].

<sup>31</sup>Vgl. hierzu insbesondere [BGS3] und [Voi87].

### 3.2 Duale Halbgruppen und graduierte duale Halbgruppen

gegeben sind.<sup>32</sup> Analog wird für die Antipode der **dualen Gruppe**  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta, \kappa)$

$$(\kappa \sqcup_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda = \mathfrak{s}_{\mathcal{D}} \circ \delta = (\text{id}_{\mathcal{D}} \sqcup_{\mathbf{1}} \kappa) \circ \Lambda \quad (13)$$

gefordert, wobei  $\mathfrak{s}_{\mathcal{D}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $\mathfrak{s}_{\mathcal{D}}(\alpha) = \alpha \mathbf{1}$ .

**Proposition 4.** *Ist  $(\mathcal{D}, \Lambda, \kappa)$  eine duale Gruppe gemäß **Variante 1**, so ist  $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\Lambda}, \delta, \tilde{\kappa})$  eine duale Gruppe gemäß **Variante 2**, wobei*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}} &= \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{D} \\ \tilde{\Lambda} \upharpoonright \mathcal{D} &= \Lambda \text{ mit } \tilde{\Lambda}(d) = \Lambda(d) \in \mathcal{D} \sqcup \mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{D}} \sqcup_{\mathbf{1}} \tilde{\mathcal{D}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\delta \upharpoonright \mathcal{D} = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\tilde{\kappa} \upharpoonright \mathcal{D} = \kappa \text{ mit } \tilde{\kappa}(d) = \kappa(d) \in \mathcal{D} \quad (16)$$

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \delta(\mathbf{1}) = 1, \tilde{\kappa}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}. \quad (17)$$

Ist umgekehrt  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta, \kappa)$  eine duale Gruppe gemäß **Variante 2**, dann ist  $(\mathcal{D}_0, \Lambda_0, \kappa_0)$  eine duale Gruppe gemäß **Variante 1**, wobei

$$\mathcal{D}_0 = \text{Kern}(\delta)$$

$$\Lambda_0 = \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0$$

$$\kappa_0 = \kappa \upharpoonright \mathcal{D}_0 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0.$$

*Beweis.* Sei nun  $(\mathcal{D}, \Lambda, \kappa)$  eine duale Gruppe gemäß **Variante 1** und  $\tilde{\mathcal{D}} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{D}$ , dann ergibt sich für  $\mathbf{1} \in \tilde{\mathcal{D}}$  und alle  $d \in \mathcal{D}$  die Koassoziativität von  $\tilde{\Lambda}$  aus:

$$\begin{aligned} (\tilde{\Lambda} \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \tilde{\Lambda}(\mathbf{1}) &= (\tilde{\Lambda} \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}})(\mathbf{1}) \\ &= \mathbf{1} \in \tilde{\mathcal{D}} \sqcup_{\mathbf{1}} \tilde{\mathcal{D}} \sqcup_{\mathbf{1}} \tilde{\mathcal{D}} \quad (\text{nach (17)}) \\ &= (\text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}} \amalg_{\mathbf{1}} \tilde{\Lambda}) \circ \tilde{\Lambda}(\mathbf{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\Lambda} \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \tilde{\Lambda}(d) &= (\tilde{\Lambda} \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \Lambda(d) \quad (\text{nach (14)}) \\ &= (\Lambda \amalg \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda(d) \quad (\text{nach (14)}) \\ &= (\text{id}_{\mathcal{D}} \amalg \Lambda) \circ \Lambda(d) \quad (\text{nach (8)}) \\ &= (\text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}} \amalg \tilde{\Lambda}) \circ \tilde{\Lambda}(d). \end{aligned}$$

<sup>32</sup>Vgl. hierzu Definition 2.12. einer Koalgebra  $\mathcal{C}$ .

### 3.2 Duale Halbgruppen und graduierte duale Halbgruppen

Die Koeinheitseigenschaft von  $\delta$  folgt für  $\mathbf{1} \in \tilde{\mathcal{D}}$  und alle  $d \in \mathcal{D}$  aus:

$$\begin{aligned}
(\delta \Pi_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \tilde{\Lambda}(\mathbf{1}) &= (\delta \Pi_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}})(\mathbf{1}) && \text{(nach (17))} \\
&= \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{1}) && \text{(nach (17))} \\
&= (\text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}} \Pi_{\mathbf{1}} \delta) \circ \tilde{\Lambda}(\mathbf{1}) \\
(\delta \Pi_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \tilde{\Lambda}(d) &= (\delta \Pi_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \Lambda(d) && \text{(nach (14))} \\
&= (\mathbf{0} \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda(d) && \text{(nach (15))} \\
&= \text{id}_{\mathcal{D}}(d) = \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}(d) && \text{(nach (9))} \\
&= (\text{id}_{\mathcal{D}} \sqcup \mathbf{0}) \circ \Lambda(d) \\
&= (\text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}} \Pi_{\mathbf{1}} \delta) \circ \tilde{\Lambda}(d).
\end{aligned}$$

Damit ist  $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\Lambda}, \delta)$  eine duale Halbgruppe nach **Variante 2**. Es bleibt nur noch die Antipodeneigenschaft von  $\tilde{\kappa}$  zu zeigen, so dass  $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\Lambda}, \delta, \tilde{\kappa})$  eine duale Gruppe gemäß **Variante 2** wird. Diese ergibt sich für  $\mathbf{1} \in \tilde{\mathcal{D}}$  und alle  $d \in \mathcal{D}$  wie folgt:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\kappa} \sqcup_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \tilde{\Lambda}(\mathbf{1}) &= (\tilde{\kappa} \sqcup_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}})(\mathbf{1}) && \text{(nach (17))} \\
&= \mathbf{1} = \mathfrak{s}_{\tilde{\mathcal{D}}} \circ \delta(\mathbf{1}) && \text{(nach (17))} \\
&= (\text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}} \sqcup_{\mathbf{1}} \tilde{\kappa}) \circ \tilde{\Lambda}(\mathbf{1}) \\
(\tilde{\kappa} \sqcup_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \tilde{\Lambda}(d) &= (\tilde{\kappa} \sqcup_{\mathbf{1}} \text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}}) \circ \Lambda(d) && \text{(nach (14))} \\
&= (\kappa \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda(d) && \text{(nach (16))} \\
&= \mathbf{0} = \mathfrak{s}_{\tilde{\mathcal{D}}} \circ \delta(d) && \text{(nach (10))} \\
&= (\text{id}_{\mathcal{D}} \sqcup \kappa) \circ \Lambda(d) \\
&= (\text{id}_{\tilde{\mathcal{D}}} \sqcup_{\mathbf{1}} \tilde{\kappa}) \circ \tilde{\Lambda}(d).
\end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta, \kappa)$  eine duale Halbgruppe nach **Variante 2** und  $\mathcal{D}_0 = \text{Kern}(\delta) = \{d \in \mathcal{D} \mid \delta(d) = 0\}$ . Da  $\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  unitaler  $*$ -Algebrahomomorphismus ist, wird  $\text{Kern}(\delta)$  Unter- $*$ -Algebra von  $\mathcal{D}$  und damit  $\mathcal{D}_0$   $*$ -Algebra.

Zunächst gilt es zu zeigen, dass  $\Lambda(\mathcal{D}_0) \subseteq \mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0$  ist. Sei hierfür  $d_0 \in \mathcal{D}_0$ , d. h.  $\delta(d_0) = 0$ . Durch Anwendung von  $\delta \Pi_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}$  auf  $\Lambda(d_0)$  und unter Verwendung der Koeinheitseigenschaft erhält man

$$(\delta \Pi_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda(d_0) = \text{id}_{\mathcal{D}}(d_0) = d_0. \quad (18)$$

### 3.2 Duale Halbgruppen und graduierte duale Halbgruppen

Es gilt  $\Lambda(\mathcal{D}_0) \subseteq \mathcal{D} \sqcup_{\mathbf{1}} \mathcal{D} \cong \mathbf{C}\mathbf{1} \oplus (\mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0)$ , woraus

$$\Lambda(d_0) = \lambda\mathbf{1} + X \quad \text{mit } \lambda \in \mathbf{C} \text{ und } X \in \mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0 \quad (19)$$

folgt. Anhand der Gleichungen (18) und (19) ergibt sich aus  $\delta(\mathcal{D}_0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(d_0) \\ &= \delta\left((\delta \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}})(\Lambda(d_0))\right) && \text{(nach (18))} \\ &= (\delta \amalg_{\mathbf{1}} \delta)(\lambda\mathbf{1} + X) && \text{(nach (19))} \\ &= \lambda, \end{aligned}$$

womit insgesamt gilt:

$$\Lambda(\mathcal{D}_0) \subseteq \mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D} \sqcup_{\mathbf{1}} \mathcal{D}. \quad (20)$$

Die Koassoziativität von  $\Lambda_0$  erhält man schließlich aus:

$$\begin{aligned} (\Lambda_0 \amalg \text{id}_{\mathcal{D}_0}) \circ \Lambda_0 &= (\Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0 \amalg \text{id}_{\mathcal{D}_0}) \circ \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0 \\ &= ((\Lambda \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda) \upharpoonright \mathcal{D}_0 && \text{(nach (20))} \\ &= ((\text{id}_{\mathcal{D}} \amalg_{\mathbf{1}} \Lambda) \circ \Lambda) \upharpoonright \mathcal{D}_0 && \text{(nach (11))} \\ &= (\text{id}_{\mathcal{D}_0} \amalg \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0) \circ \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0 \\ &= (\text{id}_{\mathcal{D}_0} \amalg \Lambda_0) \circ \Lambda_0. \end{aligned}$$

Die Projektionseigenschaft der Nullabbildung  $\mathbf{0}$  folgt aus:

$$\begin{aligned} (\mathbf{0} \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}_0}) \circ \Lambda_0 &= (\mathbf{0} \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}_0}) \circ \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0 \\ &= ((\delta \amalg_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda) \upharpoonright \mathcal{D}_0 && \text{(nach (20), (15))} \\ &= \text{id}_{\mathcal{D}} \upharpoonright \mathcal{D}_0 = \text{id}_{\mathcal{D}_0} && \text{(nach (12))} \\ &= (\text{id}_{\mathcal{D}_0} \sqcup \mathbf{0}) \circ \Lambda_0. \end{aligned}$$

Somit ist  $(\mathcal{D}_0, \Lambda_0)$  eine duale Halbgruppe nach **Variante 1**.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\kappa(\mathcal{D}_0) \subseteq \mathcal{D}_0$  und die Antipodeneigenschaft von  $\kappa_0 = \kappa \upharpoonright \mathcal{D}_0$  erfüllt ist. Zunächst wird gezeigt, dass  $\delta = \delta \circ \kappa$  gilt:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta \circ \mathfrak{s}_{\mathcal{D}} \circ \delta = \delta \circ (\kappa \sqcup_{\mathbf{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda && \text{(nach (13))} \\ &= ((\delta \circ \kappa) \sqcup_{\mathbf{1}} \delta) \circ \Lambda \end{aligned}$$

### 3.2 Duale Halbgruppen und graduierte duale Halbgruppen

$$\begin{aligned}
&= (\delta \circ \kappa) \circ (\text{id} \sqcup_{\mathbb{1}} \delta) \circ \Lambda \\
&= \delta \circ \kappa.
\end{aligned}
\tag{nach (12)}$$

Insgesamt ergibt sich für  $d_0 \in \mathcal{D}_0$ :

$$\delta \circ \kappa(d_0) = \delta(d_0) = 0, \text{ womit } \kappa(\mathcal{D}_0) \subseteq \mathcal{D}_0 \text{ ist.} \tag{21}$$

Die Antipodeneigenschaft von  $\kappa_0 = \kappa \upharpoonright \mathcal{D}_0$  folgt letztlich aus:

$$\begin{aligned}
(\kappa_0 \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}_0}) \circ \Lambda_0 &= ((\kappa \sqcup_{\mathbb{1}} \text{id}_{\mathcal{D}}) \circ \Lambda) \upharpoonright \mathcal{D}_0 && \text{(nach (21))} \\
&= (\mathfrak{s}_{\mathcal{D}} \circ \delta) \upharpoonright \mathcal{D}_0 = \mathbf{0} && \text{(nach (13))} \\
&= (\text{id}_{\mathcal{D}_0} \sqcup \kappa_0) \circ \Lambda_0.
\end{aligned}$$

Damit ist  $(\mathcal{D}_0, \Lambda_0, \kappa_0)$  eine duale Gruppe gemäß **Variante 1** und die Behauptung schließlich gezeigt.  $\square$

In der fortlaufenden Arbeit können nach obigem Beweis **Variante 1** und **Variante 2** weitestgehend äquivalent verwendet werden, nur bezüglich des Faltungsproduktes linearer Funktionale auf dualen Halbgruppen ist eine kurze Bemerkung notwendig. Zunächst wird für eine duale Halbgruppe  $(\mathcal{D}, \Lambda)$  gemäß **Variante 1** das Faltungsprodukt linearer Funktionale auf  $\mathcal{D}$  wie folgt definiert:

**Definition 3.8. (Faltung auf dualen Halbgruppen)** Sei  $(\mathcal{D}, \Lambda)$  eine duale Halbgruppe. Das Faltungsprodukt von linearen Funktionalen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  auf  $\mathcal{D}$  ist definiert durch:

$$\varphi_1 \star \varphi_2 := (\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ \Lambda, \tag{22}$$

wobei  $\varphi_1 \bullet \varphi_2$  das lineare Funktional auf  $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{D}$  für eines der fünf universellen Produkte bezeichne.

Die  $N$ -fache Faltung  $\underbrace{\varphi \star \cdots \star \varphi}_{N\text{-mal}}$  von  $\varphi \in \mathcal{D}'$  wird mit  $\varphi^{\star N}$  bezeichnet.

**Bemerkung 13.** Man kann zeigen, dass der Dualraum  $\mathcal{D}'$  mit dem Faltungsprodukt (22) einen Monoid mit Einheitsselement  $\mathbf{0}$  bildet.<sup>33</sup>

Die Distributivgesetze sind jedoch i. Allg. nicht erfüllt, so dass  $\mathcal{D}'$  mit der Faltung i. Allg. keine Algebra bildet.

---

<sup>33</sup>Vgl. hierzu [BGS3], S. 155.



### 3.2 Duale Halbgruppen und graduierte duale Halbgruppen

Ist die duale Halbgruppe  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  mit Einheitsselement  $\mathbb{1}$ , gemäß **Variante 2**, ausgestattet, dann wird das Faltungsprodukt normierter linearer Funktionale, d. h.  $\varphi(\mathbb{1}) = 1$ , mit der folgenden Einschränkung versehen:

**Bemerkung 14.** Für normierte lineare Funktionale  $\varphi_1, \varphi_2$  auf  $\mathcal{D}$  wird das normierte lineare Funktional  $\varphi_1 \star \varphi_2$  auf  $\mathcal{D}$  durch

$$(\varphi_1 \star \varphi_2) \upharpoonright \mathcal{D}_0 = ((\varphi_1 \upharpoonright \mathcal{D}_0) \bullet (\varphi_2 \upharpoonright \mathcal{D}_0)) \circ \Lambda_0$$

definiert, wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \text{Kern}(\delta) = \{d \in \mathcal{D} \mid \delta(d) = 0\} \\ \Lambda_0 &= \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0. \end{aligned}$$

**Definition 3.9. [Variante 1\*]** Eine duale Halbgruppe  $(\mathcal{D}, \Lambda)$  gemäß Definition 3.6. heißt graduiert, wenn  $\mathcal{D}$  ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum und

$$\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \sqcup \mathcal{D}$$

homogen vom Grad 0 ist. Ist zudem  $\kappa : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  homogen vom Grad 0, so wird  $(\mathcal{D}, \Lambda, \kappa)$  eine  **$\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Gruppe**.

**Definition 3.10. [Variante 2\*]** Eine duale Halbgruppe  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  gemäß Definition 3.7. heißt graduiert, wenn  $\mathcal{D}$  ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum und

$$\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{D}$$

homogen vom Grad 0 ist. Ist zudem  $\kappa : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  homogen vom Grad 0, so wird  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta, \kappa)$  eine  **$\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Gruppe**.

**Proposition 5.** Die Homogenität vom Grad 0 von  $\delta$  in **Variante 2\*** folgt aus der Homogenität vom Grad 0 von  $\Lambda$ .

*Beweis.* Dies ergibt sich aus Proposition 2., wenn „ $\otimes$ “ durch „ $\Pi_{\mathbb{1}}$ “, „ $\Delta$ “ durch „ $\Lambda$ “ und „ $\mathcal{C}$ “ durch „ $\mathcal{D}$ “ im zugehörigen Beweis ersetzt werden.  $\square$

Ist  $(\mathcal{D}, \Lambda)$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe gemäß **Variante 1\*** mit dem  $\mathbb{N}_0$ -graduieren Vektorraum

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}^{(n)},$$

### 3.2 Duale Halbgruppen und graduierte duale Halbgruppen

dann wird  $\tilde{\mathcal{D}} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{D}$   $\mathbb{N}_0$ -graduiert durch

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}^{(n)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \tilde{\mathcal{D}}^{(n)}, \quad (23)$$

wobei  $\tilde{\mathcal{D}}^{(n)} = \mathcal{D}^{(n)}$  für  $n \geq 1$  und  $\tilde{\mathcal{D}}^{(0)} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{D}^{(0)}$  ist.

**Proposition 6.** *Die Varianten 1\* und 2\* der Definition einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Gruppe sind unter den Bedingungen von Proposition 4. und unter Verwendung der Graduierung (23) äquivalent.*

*Beweis.* Man verwende zunächst Proposition 4. und zeige, dass sich die  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung von  $\mathcal{D}$  und die Homogenität vom Grad 0 von  $\Lambda$  in beide Varianten überträgt. Sei nun  $(\mathcal{D}, \Lambda)$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe gemäß **Variante 1\***, so wird  $\tilde{\mathcal{D}} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{D}$  mit (23) zu einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten unitalen  $*$ -Algebra. Da  $\tilde{\Lambda} \upharpoonright \mathcal{D} = \Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \sqcup \mathcal{D}$  homogen vom Grad 0 ist und  $\tilde{\Lambda}$  von  $\tilde{\mathcal{D}}$  nach  $\tilde{\mathcal{D}} \sqcup_1 \tilde{\mathcal{D}}$  geht, wird

$$\tilde{\Lambda} : \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus (\mathcal{D} \sqcup \mathcal{D})$$

mit  $\mathbb{C}\mathbf{1} \subset \tilde{\mathcal{D}}^{(0)}$  ebenfalls homogen vom Grad 0. Auch für die Antipode mit  $\tilde{\kappa} : \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{D}$  gilt offensichtlich die Homogenität vom Grad 0. Folglich ist unter Verwendung von Proposition 5.  $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\Lambda}, \delta, \tilde{\kappa})$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Gruppe nach **Variante 2\***.

Sei nun umgekehrt  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe nach **Variante 2\*** und  $\mathcal{D}_0 = \text{Kern}(\delta)$ . Da  $\delta$  homogen vom Grad 0 ist, wird  $\mathcal{D}_0$  gemäß Definition 2.23. eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Unter- $*$ -Algebra der  $\mathbb{N}_0$ -graduierten unitalen  $*$ -Algebra  $\mathcal{D}$ , so dass  $\mathcal{D}_0$  zum  $\mathbb{N}_0$ -graduierten Untervektorraum von  $\mathcal{D}$  wird. Außerdem folgt aus der Homogenität vom Grad 0 von  $\Lambda$  und der  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung von  $\mathcal{D}_0$ , dass

$$\Lambda_0 = \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0$$

homogen vom Grad 0 ist. Auch die Antipode  $\kappa_0 = \kappa \upharpoonright \mathcal{D}_0 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$  ist offensichtlich homogen vom Grad 0. Damit ist  $(\mathcal{D}_0, \Lambda_0, \kappa_0)$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Gruppe nach **Variante 1\***.  $\square$

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

Im Anschluss an einige kurze Vorbetrachtungen zur Kategorientheorie (3.3.1), die im Wesentlichen [Abe] und [MacL] entlehnt sind, wird in diesem Abschnitt der Arbeit die Struktur der Symmetrischen Tensoralgebra  $\mathcal{S}(V)$  eingeführt (3.3.2), mit deren Hilfe die Funktoren  $\mathcal{S} : \mathfrak{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Com}\mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$  und  $\mathcal{S}_{\text{Hopf}} : \mathfrak{G}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Com}\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$  konstruiert werden können (3.3.3). Diese ermöglichen die algebraische Reduktion einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halbgruppe bzw.  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Gruppe mit einem der fünf universellen Produkte auf eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte kommutative  $*$ -Bialgebra bzw.  $\mathbb{N}_0$ -graduierte kommutative Hopf- $*$ -Algebra. Die hier gewonnenen Resultate orientieren sich vorrangig an den Darstellungen in [BGS3].

#### 3.3.1 Vorbetrachtungen

Für die Betrachtungen im Punkt 3.3.3 werden mathematische Objekte wie Kategorien und „struktur-erhaltende Morphismen“ zwischen Kategorien, sog. Funktoren, benötigt, mit deren Hilfe aus den Objekten der einen Kategorie Objekte einer anderen Kategorie unter Berücksichtigung ihrer Morphismenstruktur konstruiert werden können. Ziel dieses Abschnittes ist es, einige grundlegende Begriffe der Kategorientheorie zu präzisieren, wobei keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhoben wird. Es können hier nur die zur Definition der Funktoren  $\mathcal{S} : \mathfrak{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Com}\mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$  und  $\mathcal{S}_{\text{Hopf}} : \mathfrak{G}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Com}\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$  notwendigen begrifflichen Vorklärungen Erwähnung finden. Für detailliertere Ausführungen sei auf [MacL] verwiesen.

**Definition 3.11.** *Eine **Kategorie**  $\mathfrak{K}$  besteht aus den folgenden Vorgaben:*

1. *einer Klasse von Objekten  $A, B, C \in \text{Obj}(\mathfrak{K})$ ,*
2. *einer Menge von Morphismen  $\text{Mor}(A, B)$  von  $A$  nach  $B$ , die jedem Paar  $(A, B)$  von Objekten zugeordnet wird, und*
3. *einer Kompositionsabbildung*

$$\text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

*für alle  $A, B, C \in \text{Obj}(\mathfrak{K})$ .*

*Diese Daten einer Kategorie genügen wiederum den folgenden Axiomen:*

- (i) *Die Mengen  $\text{Mor}(A, B)$  und  $\text{Mor}(A', B')$  sind disjunkt, falls  $A \neq A'$  und  $B \neq B'$ .*

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

(ii) Für jedes Objekt  $A \in \text{Obj}(\mathfrak{K})$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$ , so dass für beliebige  $f \in \text{Mor}(A, B)$  und  $g \in \text{Mor}(B, A)$  gilt

$$f \circ \text{id}_A = f \quad \text{und} \quad \text{id}_A \circ g = g.$$

(iii) Die Komposition von Morphismen ist assoziativ, d. h. für je vier Objekte  $A, B, C, D \in \text{Obj}(\mathfrak{K})$  und Morphismen  $f \in \text{Mor}(A, B), g \in \text{Mor}(B, C), h \in \text{Mor}(C, D)$  gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**Beispiel 3.** Werden Körper als Objekte, Körperhomomorphismen als Morphismen und die Komposition von Körperhomomorphismen als Komposition von Morphismen verwendet, dann erhält man die Kategorie  $\mathfrak{K}$  der Körper. Für  $\mathbb{C} \in \mathfrak{K}$  ergeben sich beispielhaft nunmehr die folgenden Kategorien:

$\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$	Die Kategorie der Algebren
$\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$	Die Kategorie der Koalgebren
$\mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$	Die Kategorie der Bialgebren
$\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$	Die Kategorie der Hopf-Algebren
$\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$	Die Kategorie der dualen Halbgruppen
$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$	Die Kategorie der dualen Gruppen

**Definition 3.12.** Seien  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  Kategorien. Eine Vorschrift  $\mathcal{F}$ , die jedem Objekt  $A$  aus  $\text{Obj}(\mathfrak{K}_1)$  ein Objekt  $\mathcal{F}(A)$  aus  $\text{Obj}(\mathfrak{K}_2)$  und jedem Morphismus  $g \in \text{Mor}(A, B)$  aus  $\mathfrak{K}_1$  einen Morphismus  $\mathcal{F}(g) \in \text{Mor}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$  aus  $\mathfrak{K}_2$  zuordnet, so dass die Eigenschaften

1.  $\mathcal{F}(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathcal{F}(A)}$
2.  $\mathcal{F}(h \circ g) = \mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g)$  (für  $C \in \text{Obj}(\mathfrak{K}_1)$  und  $h \in \text{Mor}(B, C)$ )  
(sofern die Komposition  $h \circ g$  in  $\mathfrak{K}_1$  definiert ist)

erfüllt sind, wird als (**kovarianter**) **Funktor** von  $\mathfrak{K}_1$  nach  $\mathfrak{K}_2$  bezeichnet, geschrieben  $\mathcal{F} : \mathfrak{K}_1 \rightarrow \mathfrak{K}_2$ .

**Bemerkung 15.** Analog zum (kovarianten) Funktor kann ein **kontravarianter Funktor** von  $\mathfrak{K}_1$  nach  $\mathfrak{K}_2$  definiert werden, der ebenfalls Objekten aus  $\mathfrak{K}_1$  Objekte aus  $\mathfrak{K}_2$  zuordnet, zusätzlich aber die Richtung der Morphismen ändert, d. h. zu jedem Objekt  $A \in \text{Obj}(\mathfrak{K}_1)$  wird ein Objekt  $\mathcal{F}(A) \in \text{Obj}(\mathfrak{K}_2)$  und zu jedem Morphismus  $g \in \text{Mor}(A, B)$  ein Morphismus  $\mathcal{F}(g) \in \text{Mor}(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A))$  assoziiert, so dass gilt

- (i)  $\mathcal{F}(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathcal{F}(A)}$
- (ii)  $\mathcal{F}(h \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h)$  (für  $C \in \text{Obj}(\mathfrak{K}_1)$  und  $h \in \text{Mor}(B, C)$ ).

### 3.3.2 Die symmetrische Tensoralgebra $\mathcal{S}(V)$

Die symmetrische Tensoralgebra  $\mathcal{S}(V)$  über den Vektorraum  $V$  verallgemeinert den Begriff der Polynomialgebra  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  über  $\mathbb{C}$  in den kommutierenden Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$ . Ist  $\dim V = n$ , dann gilt  $\mathcal{S}(V) \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Die Menge aller Monome aus den Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  bildet eine Basis von  $\mathcal{S}(V)$ , deren Elemente mit Polynomen identifiziert werden können. Die kommutative Algebra  $\mathcal{S}(V)$  ist Quotientenalgebra der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  und ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum, der sich als direkte Summe von Untervektorräumen verschiedenen Grades darstellen lässt.

**Definition 3.13.** Sei  $V$  ein Vektorraum,  $\mathcal{T}(V)$  die Tensoralgebra<sup>34</sup> über  $V$  und  $\mathcal{I}$  das von der Menge

$$\{xy - yx \mid x, y \in \mathcal{T}(V)\}$$

erzeugte Ideal in  $\mathcal{T}(V)$ . Dann ist die **symmetrische Tensoralgebra**  $\mathcal{S}(V)$  die Quotientenalgebra von  $\mathcal{T}(V)$  und dem Ideal  $\mathcal{I}$ , d. h.

$$\mathcal{S}(V) := \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}.$$

**Satz 3.4.** Die symmetrische Tensoralgebra  $\mathcal{S}(V)$  ist eine kommutative Algebra und genügt der folgenden universellen Eigenschaft: Sei  $\mathcal{A}$  eine unitale Algebra und  $f : V \rightarrow \mathcal{A}$  eine lineare Abbildung, welche die Eigenschaft

$$f(x)f(y) = f(y)f(x)$$

für alle  $x, y \in V$  erfüllt, dann existiert genau ein unitaler Algebromorphismus  $\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathcal{A}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & \mathcal{S}(V) \\ & \searrow f & \swarrow \exists! \mathcal{S}(f) \\ & \mathcal{A} & \end{array}$$

kommutiert, d. h.  $\mathcal{S}(f) \circ \iota_V = f$  mit der kanonischen Einbettung  $\iota_V$  von  $V$  in  $\mathcal{S}(V)$ .

---

<sup>34</sup>Vgl. hierzu Beispiel 1.

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

Durch die universelle Eigenschaft ist die symmetrische Tensoralgebra  $\mathcal{S}(V)$  bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.

*Beweis.* Vgl. hierzu [BA], S. 497-498. □

Nach [BA]<sup>35</sup> gilt für die Vektorräume  $V_1$  und  $V_2$  über  $\mathbb{C}$  der unitale Algebrasomorphismus

$$\mathcal{S}(V_1 \oplus V_2) \cong \mathcal{S}(V_1) \otimes \mathcal{S}(V_2).$$

Für einen weiteren Vektorraum  $W$  und eine lineare Abbildung  $g : V \rightarrow W$  setze man  $\mathfrak{S}(g) := \mathcal{S}(\iota_W \circ g)$ , dann ist  $\mathfrak{S}(g)$  eine lineare Abbildung von  $\mathcal{S}(V)$  nach  $\mathcal{S}(W)$  mit der kanonischen Einbettung  $\iota_W : W \rightarrow \mathcal{S}(W)$ . Diese Zusammenhänge lassen sich durch das folgende, kommutative Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\iota_V} & \mathcal{S}(V) \\
 \downarrow g & \searrow f & \swarrow \mathcal{S}(f) \\
 & \mathcal{A} & \\
 W & \xrightarrow{\iota_W} & \mathcal{S}(W) \\
 & & \downarrow \mathfrak{S}(g)
 \end{array}$$

Als Spezialfall für die lineare Abbildung  $f$  kann das lineare Funktional  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$  betrachtet werden, d. h.  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ . Dann ist  $\mathcal{S}(\varphi) : \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathbb{C}$  ein Homomorphismus, bestimmt durch

$$\mathcal{S}(\varphi)(\iota_V(v)) = \mathcal{S}(\varphi)(v) = \varphi(v) \tag{24}$$

für alle  $v \in V$ , wobei  $v$  mit dem zugehörigen Bild  $\iota_V(v)$  in  $\mathcal{S}(V)$  identifiziert wird.

**Bemerkung 16.** Ein Element  $P$  in der symmetrischen Tensoralgebra  $\mathcal{S}(V)$  wird durch die Zahlen  $[\mathcal{S}(\varphi)](P)$  bestimmt, wenn  $\varphi$  alle linearen Funktionale auf  $V$  durchläuft. Ist  $x_1, \dots, x_n$  insbesondere eine Basis von  $V$ , d. h.  $\underline{\text{Lin}}\{x_1, \dots, x_n\} = V$  mit  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig, dann ist  $\mathcal{S}(V) \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Ein lineares Funktional  $\varphi$  auf  $V$  kann demnach mit einem Element aus  $\mathbb{C}^n$  identifiziert werden und  $[\mathcal{S}(\varphi)](P)$  ist gleich  $P(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ .<sup>36</sup>

<sup>35</sup>Vgl. hierzu [BA], S. 503-504.

<sup>36</sup>Näheres hierzu wird im Punkt 4.3 dieser Arbeit ausgeführt.

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

Sei z. B. der Vektorraum  $V = \mathbb{R}^d$ , dann ist die symmetrische Tensoralgebra  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  isomorph zu der Algebra der  $\mathbb{R}$ -wertigen Polynome mit den kommutierenden Unbestimmten  $x_1, \dots, x_d$ , wobei der Isomorphismus, gegeben durch

$$(t_1, \dots, t_d) \mapsto t_1 x_1 + \dots + t_d x_d,$$

von  $\mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$  verläuft und ein lineares Funktional  $\varphi \in V' = (\mathbb{R}^d)' \cong \mathbb{R}^d$  einem Element aus  $\mathbb{R}^d$  entspricht.

#### 3.3.3 Die Funktoren $\mathcal{S} : \mathfrak{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{ComB}_{\mathbb{C}}$ und $\mathcal{S}_{\text{Hopf}} : \mathfrak{G}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{ComH}_{\mathbb{C}}$

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Funktor von der Kategorie  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$  der dualen Halbgruppen in die Kategorie  $\mathfrak{ComB}_{\mathbb{C}}$  der kommutativen  $*$ -Bialgebren sowie einen Funktor von der Kategorie  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$  der dualen Gruppen in die Kategorie  $\mathfrak{ComH}_{\mathbb{C}}$  der kommutativen Hopf- $*$ -Algebren anzugeben. Mit Hilfe der im Abschnitt 3.3.2 definierten symmetrischen Tensoralgebra  $\mathcal{S}(V)$  wird die Existenz dieser Funktoren konstituiert und gezeigt, dass diese auch die  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung auf den entsprechenden algebraischen Strukturen respektieren. Es lässt sich zunächst zeigen,<sup>37</sup> dass jedem universellen Produkt von Algebren  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  eine Familie  $\varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2}$  von linearen Abbildungen

$$\varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2} : \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{A}_1) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{A}_2) \cong \mathcal{S}(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \quad (25)$$

mit

$$[\mathcal{S}(\varphi_1 \oplus \varphi_2)](\varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2}(A)) = [\mathcal{S}(\varphi_1) \otimes \mathcal{S}(\varphi_2)](\varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2}(A)) = [\varphi_1 \bullet \varphi_2](A), \quad (26)$$

für  $\varphi_1 \in \mathcal{A}'_1$ ,  $\varphi_2 \in \mathcal{A}'_2$  und  $A \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ , entspricht, deren Eigenschaften sich gemäß den Axiomen (A1) bis (A3) bestimmen lassen. Diese axiomatischen Charakteristika des universellen Produktes sind äquivalent zu den folgenden Eigenschaften von  $\varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2}$ :

$$(A1') \quad (\mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2}) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{A}_3)}) \circ \varepsilon_{\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3} = (\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{A}_1)} \otimes \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3})) \circ \varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_3},$$

$$(A2') \quad \varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2} \circ i_{\mathcal{A}_1} = \iota_{\mathcal{A}_1} \text{ und } \varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2} \circ i_{\mathcal{A}_2} = \iota_{\mathcal{A}_2}, \quad (26)$$

$$(A3') \quad \varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2} \circ (j_1 \amalg j_2) = (\mathfrak{S}(j_1) \otimes \mathfrak{S}(j_2)) \circ \varepsilon_{\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2},$$

wobei  $\iota_{\mathcal{A}_k}$  die kanonische Einbettung von  $\mathcal{A}_k$  in  $\mathcal{S}(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)$  ist und  $j_k : \hat{\mathcal{A}}_k \rightarrow \mathcal{A}_k$  Homomorphismen (für  $k = 1, 2$ ) repräsentieren.

**Satz 3.5.** Sei  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$  die Kategorie der dualen Halbgruppen<sup>39</sup> und  $\mathfrak{ComB}_{\mathbb{C}}$  die Kategorie

<sup>37</sup>Vgl. hierzu [BGS2], S. 539.

<sup>38</sup>Hierbei bezeichnet  $i_{\mathcal{A}_1, 2} : \mathcal{A}_{1,2} \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  die Einbettung gemäß Axiom (A2).

<sup>39</sup>Dieser Satz orientiert sich an der Definition 3.7. einer dualen Halbgruppe (**Variante 2**).

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

der kommutativen  $*$ -Bialgebren. Gegeben sei außerdem ein universelles Produkt mit einer Familie  $\varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2}$  gemäß (25). Dann wird für alle  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta) \in \text{Obj}(\mathfrak{D}_{\mathbb{C}})$  durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\mapsto \mathcal{S}(\mathcal{D}_0) \\ \Lambda &\mapsto \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \\ \delta &\mapsto \mathcal{S}(\mathbf{0}) \\ g &\mapsto \mathfrak{S}(g) \end{aligned}$$

für alle  $g \in \text{Mor}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$  ein Funktor  $\mathcal{S}$  von  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$  nach  $\mathfrak{ComB}_{\mathbb{C}}$  beschrieben, d. h.  $(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0), \mathcal{S}(\mathbf{0})) \in \text{Obj}(\mathfrak{ComB}_{\mathbb{C}})$  ist eine kommutative  $*$ -Bialgebra.<sup>40</sup> Außerdem gilt, dass die Abbildung

$$\mathcal{S} : \mathcal{D}'_{\mathbb{1}} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathbb{C})$$

ein Homomorphismus von der Halbgruppe  $\mathcal{D}'_{\mathbb{1}}$  der normierten linearen Funktionale auf  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  mit der Faltung

$$(\varphi_1 \star \varphi_2) \upharpoonright \mathcal{D}_0 = ((\varphi_1 \upharpoonright \mathcal{D}_0) \bullet (\varphi_2 \upharpoonright \mathcal{D}_0)) \circ \Lambda_0$$

für alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}'_{\mathbb{1}}$  in den Monoid  $\text{Hom}(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathbb{C})$  ist, wobei  $\text{Hom}(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathbb{C})$  wiederum mit der Faltung

$$f_1 \circledast f_2 = (f_1 \otimes f_2) \circ \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \quad (27)$$

für alle  $f_1, f_2 \in \text{Hom}(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathbb{C})$  versehen wird.

Die durch den Funktor  $\mathcal{S}$  hergestellten Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und kommutativen  $*$ -Bialgebren lassen sich in folgendem Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_0 & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{D}_0}} & \mathcal{S}(\mathcal{D}_0) \\ & \searrow \varphi_1 \star \varphi_2 & \swarrow f_1 \circledast f_2 \\ & & \mathbb{C} \\ & \swarrow \varphi_1 \bullet \varphi_2 & \searrow f_1 \otimes f_2 \\ \mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0 & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}} & \mathcal{S}(\mathcal{D}_0) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{D}_0) \end{array}$$

$\Lambda_0$  (left vertical arrow),  $\mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0)$  (right vertical arrow)

<sup>40</sup>Hier erfolgt die Übertragung von einer dualen Halbgruppe  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  gemäß **Variante 2** auf  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$  mit  $(\mathcal{D}_0 = \text{Kern}(\delta), \Lambda_0 = \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0)$  als duale Halbgruppe gemäß **Variante 1**. Dies ist auf Grund des Satzes 3.3. erforderlich.



### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

Das Faltungsprodukt  $f_1 \otimes f_2$  auf  $\text{Hom}(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathbb{C})$  entspricht hierbei dem Faltungsprodukt

$$\mathcal{S}(\varphi_1) \otimes \mathcal{S}(\varphi_2) = (\mathcal{S}(\varphi_1) \otimes \mathcal{S}(\varphi_2)) \circ \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0)$$

für alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}'_{\mathbb{1}}$ .

*Beweis.* Um die Koassoziativität, d. h.

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)}) \circ \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \\ = (\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0)) \circ \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \end{aligned}$$

zu überprüfen, ist es hinreichend

$$(\mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)}) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 = (\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0)) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0$$

zu zeigen. Unter Verwendung der Gleichung

$$\mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) = \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}) \circ \mathfrak{S}(\Lambda_0), \quad (28)$$

der Axiome (A1') und (A3'), der Linearität des Tensorproduktes und der Koassoziativität (8) der dualen Halbgruppe  $(\mathcal{D}_0, \Lambda_0)$  erhält man:

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 \\ &= \left( (\mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}) \circ \mathfrak{S}(\Lambda_0)) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 \quad (\text{nach (28)}) \\ &= \left( \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \right) \circ \left( \mathfrak{S}(\Lambda_0) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 \\ &= \left( \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \right) \circ \left( \varepsilon_{\mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ (\Lambda_0 \amalg \text{id}_{\mathcal{D}_0}) \right) \circ \Lambda_0 \quad (\text{nach (A3')}) \\ &= \left( (\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0})) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0} \right) \circ \left( (\text{id}_{\mathcal{D}_0} \amalg \Lambda_0) \circ \Lambda_0 \right) \quad (\text{nach (A1'), (8)}) \\ &= \left( \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}) \right) \circ \left( (\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathfrak{S}(\Lambda_0)) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \right) \circ \Lambda_0 \\ &= \left( \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes (\mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}) \circ \mathfrak{S}(\Lambda_0)) \right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 \\ &= \left( \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0. \end{aligned}$$

Um die Koeinheitseigenschaft, d. h.

$$\left( \mathcal{S}(\mathbf{0}) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \right) \circ \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) = \iota_{\mathcal{D}_0} = \left( \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\mathbf{0}) \right) \circ \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0),$$

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

zu überprüfen, reicht es

$$\left(\mathcal{S}(\mathbf{0}) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)}\right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 = \iota_{\mathcal{D}_0} = \left(\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\mathbf{0})\right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0$$

zu zeigen. Unter Nutzung der Axiome (A2') und (A3') und der Koeinheitseigenschaft (9) der dualen Halbgruppe  $(\mathcal{D}_0, \Lambda_0)$  gilt:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{S}(\mathbf{0}) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)}\right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 &= \left(\varepsilon_{\{\mathbf{0}\}, \mathcal{D}_0} \circ (\mathbf{0} \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}_0})\right) \circ \Lambda_0 && \text{(nach (A3'))} \\ &= \varepsilon_{\{\mathbf{0}\}, \mathcal{D}_0} \circ \left((\mathbf{0} \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}_0}) \circ \Lambda_0\right) \\ &= \varepsilon_{\{\mathbf{0}\}, \mathcal{D}_0} \circ \text{id}_{\mathcal{D}_0} && \text{(nach (9))} \\ &= \iota_{\mathcal{D}_0} && \text{(nach (A2'))} \\ &= \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \{\mathbf{0}\}} \circ \text{id}_{\mathcal{D}_0} \\ &= \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \{\mathbf{0}\}} \circ \left((\text{id}_{\mathcal{D}_0} \sqcup \mathbf{0}) \circ \Lambda_0\right) \\ &= \left(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \{\mathbf{0}\}} \circ (\text{id}_{\mathcal{D}_0} \sqcup \mathbf{0})\right) \circ \Lambda_0 \\ &= \left(\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\mathbf{0})\right) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0. \end{aligned}$$

Das Tripel  $(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0), \mathcal{S}(\mathbf{0}))$  bildet somit eine kommutative  $*$ -Bialgebra.

Es bleibt weiterhin zu zeigen, dass der Funktor  $\mathcal{S}$  aus Abbildungen der Gestalt  $\text{Mor}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{S}(\mathcal{D}_1), \mathcal{S}(\mathcal{D}_2))$  besteht, die jedem Morphismus  $f \in \text{Mor}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$  in  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$  einen Morphismus  $\mathfrak{S}(f) \in \text{Mor}(\mathcal{S}(\mathcal{D}_1), \mathcal{S}(\mathcal{D}_2))$  in  $\mathfrak{ComB}_{\mathbb{C}}$  zuordnen, so dass die Eigenschaften  $\mathfrak{S}(\text{id}_{\mathcal{D}}) = \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_1)}$  und  $\mathfrak{S}(g \circ f) = \mathfrak{S}(g) \circ \mathfrak{S}(f)$  mit  $g \in \text{Mor}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$  und  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3 \in \text{Obj}(\mathfrak{D}_{\mathbb{C}})$  erfüllt sind, d. h. die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & \xrightarrow{\iota_1} & \mathcal{S}(\mathcal{D}_1) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathfrak{S}(f) = \mathcal{S}(\iota_2 \circ f) \\ \mathcal{D}_2 & \xrightarrow{\iota_2} & \mathcal{S}(\mathcal{D}_2) \\ g \downarrow & & \downarrow \mathfrak{S}(g) = \mathcal{S}(\iota_3 \circ g) \\ \mathcal{D}_3 & \xrightarrow{\iota_3} & \mathcal{S}(\mathcal{D}_3) \end{array}$$

Da  $\mathcal{D}_1$  in  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_1)$  mit  $\iota_1$  kanonisch eingebettet wird, gilt  $\iota_1(\mathcal{D}_1) \subset \mathcal{S}(\mathcal{D}_1)$ , so dass aus  $\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_1)} \upharpoonright \mathcal{D}_1 = \text{id}_{\mathcal{D}_1}$  die Gleichung  $\mathfrak{S}(\text{id}_{\mathcal{D}_1}) = \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_1)}$  folgt. Durch Anwendung von  $\mathcal{S}$  auf  $g \circ f : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_3$  erhält man  $\mathfrak{S}(g \circ f) : \mathcal{S}(\mathcal{D}_1) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{D}_3)$ . Da  $\mathfrak{S}(g) \circ \mathfrak{S}(f)$  ebenso wie  $\mathfrak{S}(g \circ f)$  von  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_1)$  nach  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_2)$  verläuft und für jedes  $d \in \mathcal{D}_{2,3}$  die Einbettung  $\iota_{2,3}(d)$

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

mit dem Bild von  $d$  in  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_{2,3})$  identifiziert werden kann,<sup>41</sup> gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(g \circ f) &= \mathfrak{S}(g) \circ \mathfrak{S}(f) \\ &= \mathcal{S}(\iota_3 \circ g) \circ \mathcal{S}(\iota_2 \circ f).\end{aligned}$$

Für die Behauptung,  $\mathcal{S} : \mathcal{D}'_1 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathbb{C})$  sei ein Homomorphismus, muss

$$\mathcal{S}((\varphi_1 \star \varphi_2) \upharpoonright \mathcal{D}_0) = \mathcal{S}(\varphi_1) \circledast \mathcal{S}(\varphi_2) \quad (29)$$

für alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}'_1$  gezeigt werden. Hierfür wird bewiesen, dass die Einschränkung von  $\mathcal{S}(\varphi_1) \circledast \mathcal{S}(\varphi_2)$  auf  $\mathcal{D}_0$  (als eine Teilmenge von  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$ ) äquivalent zu  $(\varphi_1 \star \varphi_2) \upharpoonright \mathcal{D}_0$  ist. Für ein  $d_0 \in \mathcal{D}_0$  gilt:

$$\begin{aligned}[\mathcal{S}(\varphi_1) \circledast \mathcal{S}(\varphi_2)](d_0) &= \left[ [\mathcal{S}(\varphi_1) \otimes \mathcal{S}(\varphi_2)] \circ \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) \right](d_0) && \text{(nach (27))} \\ &= \left[ [\mathcal{S}(\varphi_1) \otimes \mathcal{S}(\varphi_2)] \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 \right](d_0) && \text{(nach (24))} \\ &= \left[ [\varphi_1 \bullet \varphi_2] \circ \Lambda_0 \right](d_0) && \text{(nach (26))} \\ &= [\varphi_1 \star \varphi_2](d_0). && \text{(nach (22))}\end{aligned}$$

Man erhält schließlich Gleichung (29), da  $\mathcal{S}((\varphi_1 \star \varphi_2) \upharpoonright \mathcal{D}_0)$  und  $\mathcal{S}(\varphi_1) \circledast \mathcal{S}(\varphi_2)$  Homomorphismen sind.  $\square$

**Korollar 3.1.** *Sei  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$  die Kategorie der dualen Gruppen<sup>42</sup> und  $\mathfrak{Com}\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$  die Kategorie der kommutativen Hopf- $\ast$ -Algebren. Dann wird für alle  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta, \kappa) \in \text{Obj}(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})$  durch die Vorschrift<sup>43</sup>*

$$\begin{aligned}\mathcal{S} : \mathfrak{D}_{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathfrak{Com}\mathfrak{B}_{\mathbb{C}} \\ \kappa &\mapsto \mathcal{S}(\kappa_0)\end{aligned}$$

ein (kovarianter) Funktor  $\mathcal{S}$  von  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$  nach  $\mathfrak{Com}\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ , bezeichnet mit  $\mathcal{S}_{\text{Hopf}}$ , beschrieben, d. h.  $(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0), \mathcal{S}(\mathbf{0}), \mathcal{S}(\kappa_0)) \in \text{Obj}(\mathfrak{Com}\mathfrak{H}_{\mathbb{C}})$  ist eine kommutative Hopf- $\ast$ -Algebra.

*Beweis.* Nach Satz 3.5. reicht es zu zeigen, dass

$$(\mathcal{S}(\kappa_0) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)}) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 = \mathbf{0} = (\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\kappa_0)) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0$$

<sup>41</sup>Vgl. hierzu Gleichung (24).

<sup>42</sup>Dieser Satz orientiert sich an der Definition 3.7. einer dualen Gruppe (**Variante 2**).

<sup>43</sup>Hier ist  $\kappa_0 = \kappa \upharpoonright \mathcal{D}_0 = \kappa \upharpoonright (\text{Kern}(\delta))$ .

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

gilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}(\kappa_0) \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)}) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0 &= (\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ (\kappa_0 \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}_0})) \circ \Lambda_0 && \text{(nach (A3'))} \\
&= \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ ((\kappa_0 \sqcup \text{id}_{\mathcal{D}_0}) \circ \Lambda_0) \\
&= \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \mathbf{0} && \text{(nach (10))} \\
&= \mathbf{0} && \text{(nach (A2'))} \\
&= \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \mathbf{0} \\
&= \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ ((\text{id}_{\mathcal{D}_0} \sqcup \kappa_0) \circ \Lambda_0) \\
&= (\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ (\text{id}_{\mathcal{D}_0} \sqcup \kappa_0)) \circ \Lambda_0 \\
&= (\text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)} \otimes \mathcal{S}(\kappa_0)) \circ \varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0.
\end{aligned}$$

Somit ist  $(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0), \mathcal{S}(\mathbf{0}), \mathcal{S}(\kappa_0))$  eine kommutative Hopf- $*$ -Algebra mit der Antipode  $\mathcal{S}(\kappa_0)$ .  $\square$

**Bemerkung 17.** Ist  $(\mathcal{D}, \Lambda)$  eine duale Halbgruppe bzw.  $(\mathcal{D}, \Lambda, \kappa)$  eine duale Gruppe gemäß *Variante 1*, dann wird durch den Funktor  $\mathcal{S}$  bzw.  $\mathcal{S}_{\text{Hopf}}$  schließlich

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{S}(\mathcal{D}), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}, \mathcal{D}} \circ \Lambda), \mathcal{S}(\mathbf{0})) \\
&(\mathcal{S}(\mathcal{D}), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}, \mathcal{D}} \circ \Lambda), \mathcal{S}(\mathbf{0}), \mathcal{S}(\kappa))
\end{aligned}$$

eine kommutative  $*$ -Bialgebra bzw. kommutative Hopf- $*$ -Algebra.

Es soll an dieser Stelle bemerkt sein, dass der beschriebene Funktor  $\mathcal{S} : \mathfrak{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{ComB}_{\mathbb{C}}$  sogar die Graduierung einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halbgruppe  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  auf die kommutative  $*$ -Bialgebra  $(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0), \mathcal{S}(\mathbf{0}))$  überträgt. Um dies zu verdeutlichen, werden zunächst folgende Überlegungen angestellt: Sei

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{(n)}$$

ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum, dann wird die im Beispiel 1. eingeführte Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  mit der  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung (gemäß Voraussetzung (3))

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}(V)^{(n)} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left( \bigoplus_{k_1 + \dots + k_r = n} V^{(k_1)} \otimes \dots \otimes V^{(k_r)} \right) \quad (30)$$

(mit  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$  und  $r \in \mathbb{N}$ ) zu einer graduierten Algebra, der sog.  $\mathbb{N}_0$ -graduierten

### 3.3 Zusammenhänge zwischen dualen Halbgruppen und Bialgebren

Tensoralgebra.<sup>44</sup> Da das Ideal  $\mathcal{I} = \langle \{xy - yx \mid x, y \in \mathcal{T}(V)\} \rangle$  gemäß Definition 3.13. in diesem Fall von homogenen Elementen erzeugt wird, kann man die  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung (30) von  $\mathcal{T}(V)$  auf  $\mathcal{S}(V) = \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}$  übertragen.

**Bemerkung 18.** Sei  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  mit

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}^{(n)}$$

eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe gemäß **Variante 2\*** (analog für **Variante 1\*** und die duale Gruppe mit Antipode  $\kappa$ ), dann ist durch den Funktor  $\mathcal{S} : \mathfrak{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{ComB}_{\mathbb{C}}$  das Tripel  $(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0), \mathcal{S}(\mathbf{0}))$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte kommutative  $*$ -Bialgebra. Dies gilt, da für  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Algebren  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  die Abbildungen

$$\varepsilon_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2} : \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{A}_1) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{A}_2)$$

homogen vom Grad 0 sind, was zur Folge hat, dass auch

$$\mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0) : \mathcal{S}(\mathcal{D}_0) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{D}_0) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$$

homogen vom Grad 0 ist. Außerdem gilt die Homogenität vom Grad 0 auch für  $\mathcal{S}(\mathbf{0})$  (und  $\mathcal{S}(\kappa)$ ).

---

<sup>44</sup>Für eine ausführlichere Darstellung siehe Abschnitt 4.3.2 dieser Arbeit.

## 4 Nicht-kommutative Zentrale Grenzwertsätze für Momentenfunktionale

Nachdem in Anlehnung an [Sch93] in diesem Kapitel die Grenzwertsätze für  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebren vorgestellt und bewiesen werden (4.1), kann mit Hilfe des Funktors  $\mathcal{S} : \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{Com}\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ , der duale Halbgruppen auf kommutative  $*$ -Bialgebren zurückführt, der Zentrale Grenzwertsatz auf  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halbgruppen für eines der fünf universellen Produkte formuliert und bewiesen werden (4.2). Schließen wird dieses Kapitel mit einer ausführlichen Darstellung des Zentralen Grenzwertsatzes im Spezialfall der Tensor- $*$ -Algebren für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen (4.3).

### 4.1 Grenzwertsätze für graduierte Koalgebren

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Grenzwertsätze für  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebren gemäß [Sch93] zu zeigen,<sup>45</sup> die v. a. als „Hilfsmittel“ zum Beweis des Hauptsatzes im Punkt 4.2 dienen. Zunächst wird jedoch in Anlehnung an [Chu]<sup>46</sup> das Lemma über das Quasi-Dreiecksschema von Matrizen bewiesen, bevor die Konvergenzaussagen von Faltungsprodukten linearer Funktionale auf ( $\mathbb{N}_0$ -graduierten) Koalgebren formuliert und bewiesen werden können.

**Lemma 4.1.** *Sei  $(A_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k=1, \dots, k_n} \in M_m(\mathbb{K})$  ein Schema*

$$\begin{array}{cccc} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{1k_1} \\ A_{21} & \cdots & \cdots & A_{2k_2} \\ A_{31} & \cdots & \cdots & A_{3k_3} \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nk_n} \\ \vdots & & \ddots & \end{array}$$

von Matrizen, welches den folgenden Bedingungen genügt:

- (i)  $A_{n1}, \dots, A_{nk_n}$  kommutieren für alle  $n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} \|A_{nk} - E_m\| = 0$

<sup>45</sup>Vgl. hierzu insbesondere [Sch93], S. 128-129.

<sup>46</sup>In [Chu], S. 208-209 findet man Ansätze für den Beweis des Lemmas 4.1. im Fall komplexer Zahlen.

#### 4.1 Grenzwertsätze für graduierte Koalgebren

$$(iii) \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{k_n} \|A_{nk} - E_m\| < \infty.$$

Gilt für eine weitere Matrix  $B \in M_m(\mathbb{K})$  die Bedingung

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} (A_{nk} - E_m) = B,$$

dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{k_n} A_{nk} = \exp(B).$$

*Beweis.* Auf Grund von Bedingung (ii) kann nun  $\|A_{nk} - E_m\| \leq \frac{1}{2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $k = 1, \dots, k_n$  angenommen werden und man erhält unter Verwendung der Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus an der Stelle  $E_m$  folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \ln(A_{nk}) &= (A_{nk} - E_m) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} (A_{nk} - E_m)^j \\ \sum_{k=1}^{k_n} \ln(A_{nk}) &= \sum_{k=1}^{k_n} (A_{nk} - E_m) + \underbrace{\sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} (A_{nk} - E_m)^j}_{=: R_n} \\ &= \sum_{k=1}^{k_n} (A_{nk} - E_m) + R_n. \end{aligned} \tag{31}$$

Der Restterm  $R_n$  wird folgender Abschätzung unterzogen:

$$\begin{aligned} \|R_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} (A_{nk} - E_m)^j \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=2}^{\infty} \|A_{nk} - E_m\|^j \\ &\leq \left( \max_{1 \leq k \leq k_n} \|A_{nk} - E_m\| \right) \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=2}^{\infty} \|A_{nk} - E_m\|^{j-1} \\ &= \left( \max_{1 \leq k \leq k_n} \|A_{nk} - E_m\| \right) \sum_{k=1}^{k_n} \left( \|A_{nk} - E_m\| \sum_{j=2}^{\infty} \|A_{nk} - E_m\|^{j-2} \right). \end{aligned}$$

#### 4.1 Grenzwertsätze für graduierte Koalgebren

Da  $\sum_{j=2}^{\infty} \|A_{nk} - E_m\|^{j-2} \leq \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^j = 2$ , folgt

$$\|R_n\| \leq \left( \max_{1 \leq k \leq k_n} \|A_{nk} - E_m\| \right) \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{k_n} \|A_{nk} - E_m\|.$$

Damit gilt nach (ii) und (iii)  $\|R_n\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Durch Anwendung der Exponentialabbildung auf die linearen Operatoren und unter Verwendung der Bedingung (i) erhält man:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{k_n} A_{nk} &= \prod_{k=1}^{k_n} \exp(\ln(A_{nk})) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{k_n} \ln(A_{nk})\right) \end{aligned} \quad (\text{nach (i)})$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{k_n} (A_{nk} - E_m) + R_n\right). \quad (\text{nach (31)})$$

Es folgt nach (iv)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{k_n} A_{nk} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{k_n} (A_{nk} - E_m) + R_n\right) \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} (A_{nk} - E_m) + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} R_n}_{=0}\right) \\ &= \exp(B), \end{aligned} \quad (\text{nach (iv)})$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. □

**Satz 4.1.** Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $k = 1, \dots, k_n$  ( $k_n \in \mathbb{N}$ ) seien sämtliche  $\varphi_{nk}$  lineare Funktionale auf einer Koalgebra  $\mathcal{C}$ , welche den folgenden Bedingungen genügen:

(i)  $\varphi_{n1}, \dots, \varphi_{nk_n}$  kommutieren für jedes  $n \in \mathbb{N}$  bezüglich der Faltung

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} |(\varphi_{nk} - \delta)(c)| = 0$

(iii)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{k_n} |(\varphi_{nk} - \delta)(c)| < \infty$

für alle  $c \in \mathcal{C}$ . Gilt für ein weiteres lineares Funktional  $\psi$  auf  $\mathcal{C}$  die Bedingung



#### 4.1 Grenzwertsätze für graduierte Koalgebren

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} (\varphi_{nk} - \delta)(c) = \psi(c),$$

dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=1}^{k_n} \varphi_{nk} \right) (c) = (\exp_{\star} \psi)(c)$$

für alle  $c \in \mathcal{C}$ , wobei  $\prod_{\star}$  für das Faltungsprodukt der linearen Funktionale steht.

*Beweis.* Die linearen Funktionale  $\varphi_{nk}$  erfüllen nun die obigen Bedingungen (i) bis (iv). Nach dem Fundamentalsatz über Koalgebren existiert für ein  $c \in \mathcal{C}$  eine endlich dimensionale Unterkoalgebra  $\mathcal{U}_c$  von  $\mathcal{C}$ , die  $c$  enthält, wobei der lineare Operator  $T_{nk} := (\text{id} \otimes \varphi_{nk}) \circ \Delta$  auf  $\mathcal{C}$  den Untervektorraum  $\mathcal{U}_c$  invariant lässt. Ferner gelten auf Grund der Bedingungen (ii) bis (iv) für die linearen Operatoren  $T_{nk}$  die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} \|T_{nk} \upharpoonright \mathcal{U}_c - \text{id}\| &= 0 \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{k_n} \|T_{nk} \upharpoonright \mathcal{U}_c - \text{id}\| &< \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} (T_{nk} \upharpoonright \mathcal{U}_c - \text{id}) &= Q \upharpoonright \mathcal{U}_c \quad \text{mit } Q = (\text{id} \otimes \psi) \circ \Delta. \end{aligned}$$

Auf Grund von Lemma 4.1. folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{k_n} (T_{nk} \upharpoonright \mathcal{U}_c) = \exp(Q \upharpoonright \mathcal{U}_c)$$

mit  $Q = (\text{id} \otimes \psi) \circ \Delta$ .

Durch Anwendung der Koeinheit auf beiden Seiten der Gleichung in Abhängigkeit von  $c \in \mathcal{C}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta \circ \left( \prod_{k=1}^{k_n} (T_{nk} \upharpoonright \mathcal{U}_c) \right) (c) = \delta \circ (\exp(Q \upharpoonright \mathcal{U}_c))(c)$$

erhält man, da  $\varphi_{nk} = \delta \circ T_{nk}$ , schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{k_n} \varphi_{nk}(c) = (\exp_{\star} \psi)(c)$$

#### 4.1 Grenzwertsätze für graduierte Koalgebren

mit  $\psi = \delta \circ Q$ . □

**Satz 4.2.** Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von linearen Funktionalen auf einer Koalgebra  $\mathcal{C}$ , so dass für alle  $c \in \mathcal{C}$  und ein lineares Funktional  $\psi$  auf  $\mathcal{C}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_n - \delta)(c) = \psi(c) \quad (32)$$

gilt. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n)^{\star n}(c) = (\exp_{\star} \psi)(c) \quad (33)$$

für alle  $c \in \mathcal{C}$ .

*Beweis.* Da aus (32) insbesondere

$$n|(\varphi_n - \delta)(c)| < \infty \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (34)$$

folgt, sind hier die Bedingungen (i) bis (iv) des Satzes 4.1. für  $k_n := n$  und  $\varphi_{nk} := \varphi_n$  erfüllt, d. h. die Bedingung ...

(i) gilt für  $\varphi_{nk} = \varphi_n$  offensichtlich,

(ii) ist erfüllt, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} |(\varphi_{nk} - \delta)(c)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(\varphi_n - \delta)(c)| = 0$ , (nach (34))

(iii) gilt, da  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{k_n} |(\varphi_{nk} - \delta)(c)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n |(\varphi_n - \delta)(c)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} n|(\varphi_n - \delta)(c)| < \infty$  (nach (34))

und

(iv) ist schließlich erfüllt, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} (\varphi_{nk} - \delta)(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\varphi_n - \delta)(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_n - \delta)(c) = \psi(c)$ . (nach (32))

Durch Anwendung von Satz 4.1. erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n)^{\star n}(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=1}^n \varphi_n \right)_{\star}(c) = (\exp_{\star} \psi)(c)$$

für alle  $c \in \mathcal{C}$ . □

#### 4.1 Grenzwertsätze für graduierte Koalgebren

Für eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebra  $\mathcal{C}$  und eine komplexe Zahl  $z$  sei der lineare Operator  $S_z$  auf  $\mathcal{C}$  definiert durch

$$S_z(c) := z^{\deg(c)}c. \quad (35)$$

Dann gilt für lineare Funktionale  $\varphi$  und  $\psi$  auf  $\mathcal{C}$

$$(\varphi \star \psi) \circ S_z = (\varphi \circ S_z) \star (\psi \circ S_z). \quad (36)$$

Aus den Sätzen 4.1. und 4.2. ergibt sich der nun folgende Satz:

**Satz 4.3. (Grenzwertsatz für Koalgebren)** Sei  $\mathcal{C} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^{(m)}$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebra und  $\nu \in \mathbb{N}$ . Sind für ein lineares Funktional  $\varphi$  auf  $\mathcal{C}$  die Bedingungen

- (i)  $\varphi \upharpoonright \mathcal{C}^{(k)} = 0$  für  $0 < k < \nu$
- (ii)  $\varphi \upharpoonright \mathcal{C}^{(0)} = \delta \upharpoonright \mathcal{C}^{(0)}$

erfüllt, dann gilt für alle  $c \in \mathcal{C}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi^{\star n} \circ S_{n^{-\frac{1}{\nu}}})(c) = (\exp_{\star} g_{\varphi})(c),$$

wobei  $g_{\varphi}$  das lineare Funktional auf  $\mathcal{C}$  bezeichnet mit

$$\begin{aligned} g_{\varphi} \upharpoonright \mathcal{C}^{(k)} &= 0 \quad \text{für alle } k \neq \nu \\ g_{\varphi} \upharpoonright \mathcal{C}^{(\nu)} &= \varphi \upharpoonright \mathcal{C}^{(\nu)}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Man setze  $\varphi_n := \varphi \circ S_{n^{-\frac{1}{\nu}}}$  und zeige, dass die Bedingungen des Satzes 4.2. erfüllt sind. Zunächst gelten für alle  $c \in \mathcal{C}^{(m)} \setminus \{0\}$  mit  $m \geq 1$  auf Grund der Homogenität vom Grad 0 von  $\delta$  die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} n(\varphi_n - \delta)(c) &= n(\varphi_n)(c) = n(\varphi \circ S_{n^{-\frac{1}{\nu}}})(c) \\ &= n\varphi(n^{-\frac{\deg(c)}{\nu}}c) && \text{(nach (35))} \\ &= n \cdot n^{-\frac{\deg(c)}{\nu}}\varphi(c). \end{aligned}$$

Für  $\deg(c) = \nu$  ist

$$n(\varphi_n - \delta)(c) = \varphi(c)$$

## 4.2 Anwendung auf die Zentralen Grenzwertsätze für graduierte duale Halbgruppen

und für  $\deg(c) > \nu$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_n - \delta)(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot n^{-\frac{\deg(c)}{\nu}} \varphi(c) = 0.$$

Falls  $0 < \deg(c) < \nu$ , ergibt sich

$$n(\varphi_n - \delta)(c) = n \cdot n^{-\frac{\deg(c)}{\nu}} \varphi(c) = 0. \quad (\text{nach (i)})$$

Für  $c \in \mathcal{C}^{(0)}$ , d. h.  $\deg(c) = 0$ , ist

$$n(\varphi_n - \delta)(c) = n(\delta - \delta)(c) = 0. \quad (\text{nach (ii)})$$

Somit gilt nach Satz 4.2. für alle  $c \in \mathcal{C}$  und ein lineares Funktional  $g_\varphi$  mit den obigen Bedingungen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi^{*n} \circ S_{n^{-\frac{1}{\nu}}})(c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi \circ S_{n^{-\frac{1}{\nu}}})^{*n}(c) && (\text{nach (36)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n)^{*n}(c) \\ &= (\exp_* g_\varphi)(c) && (\text{nach (33)}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } c \in \mathcal{C}^{(k)}, k \neq \nu \\ (\exp_* \varphi)(c), & \text{falls } c \in \mathcal{C}^{(\nu)}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

## 4.2 Anwendung auf die Zentralen Grenzwertsätze für graduierte duale Halbgruppen

In diesem Abschnitt der Arbeit wird der Hauptsatz über die Konvergenz gegen das Faltungsexponential auf  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halbgruppen formuliert und bewiesen. Mit Hilfe des Funktors  $\mathcal{S} : \mathfrak{D}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Com}\mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$  kann die Komultiplikation einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halbgruppe auf die „gewöhnliche“ Komultiplikation einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten Bialgebra reduziert und auf den Grenzwertsatz über  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebren angewendet werden. Analog ist auch die Komultiplikation einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Gruppe unter Hinzunahme des Funktors  $\mathcal{S}_{\text{Hopf}} : \mathfrak{G}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Com}\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$  auf die Komultiplikation einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten Hopf-Algebra reduzierbar.<sup>47</sup>

Im Folgenden sei für ein lineares Funktional  $\psi$  auf einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halb-

<sup>47</sup>Für dieses Vorgehen sei v. a. auf das dritte Kapitel in [BGS3] verwiesen.

## 4.2 Anwendung auf die Zentralen Grenzwertsätze für graduierte duale Halbgruppen

gruppe  $\mathcal{D}$  das lineare Funktional  $D(\psi)$  auf  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$  definiert durch:

$$D(\psi)(\mathbf{1}) = 1, \quad D(\psi)(d) = \psi(d), \quad D(\psi)(d_1 \cdots d_n) = 0 \quad (37)$$

für alle  $d, d_1, \dots, d_n \in \mathcal{D}_0$ ,  $n \geq 2$  mit  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$  kanonisch eingebettet.

Weiterhin sei zu jeder Zahl  $z \in \mathbb{C}$  der lineare Operator  $S_z : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $S_z(d) := z^{\deg(d)} d$  für alle  $d \in \mathcal{D}$  definiert.

**Satz 4.4. (Hauptsatz)** *Sei  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe und sei  $\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}$  durch eines der fünf universellen Produkte gegeben. Sind für ein lineares Funktional  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  und für  $\nu \in \mathbb{N}$  die Bedingungen*

- (i)  $\varphi \upharpoonright \mathcal{D}^{(k)} = 0$  für  $0 < k < \nu$
- (ii)  $\varphi \upharpoonright \mathcal{D}^{(0)} = \delta \upharpoonright \mathcal{D}^{(0)}$  (d. h.  $\varphi$  ist insbesondere normiert)

erfüllt, dann gilt für die  $N$ -fache Faltung von  $\varphi$  gemäß Bemerkung 14. und alle  $d \in \mathcal{D}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \varphi^{\star N} \circ S_{N^{-\frac{1}{\nu}}} \right) (d) = (\exp_{\star} g_{\varphi})(d),$$

wobei  $g_{\varphi}$  das lineare Funktional auf  $\mathcal{D}$  bezeichnet mit

$$\begin{aligned} g_{\varphi} \upharpoonright \mathcal{D}^{(k)} &= 0 \quad \text{für alle } k \neq \nu \\ g_{\varphi} \upharpoonright \mathcal{D}^{(\nu)} &= \varphi \upharpoonright \mathcal{D}^{(\nu)}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe gemäß **Variante 2\***,  $\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}$  wie in Abschnitt 3.3.3 dieser Arbeit definiert und  $\varphi$  ein normiertes lineares Funktional auf  $\mathcal{D}$  mit den Eigenschaften (i) und (ii).

Durch Anwendung des Funktors  $\mathcal{S}$  mit Hilfe von  $\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0}$  auf die Voraussetzungen erhält man die  $\mathbb{N}_0$ -graduierte kommutative  $*$ -Bialgebra  $(\mathcal{S}(\mathcal{D}_0), \mathcal{S}(\varepsilon_{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0} \circ \Lambda_0), \mathcal{S}(\mathbf{0}))$  und das lineare Funktional  $\mathcal{S}(\varphi)$  auf  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$  mit den Eigenschaften

- (i')  $\mathcal{S}(\varphi) \upharpoonright \mathcal{S}(\mathcal{D}_0)^{(k)} = 0$  für  $0 < k < \nu$
- (ii')  $\mathcal{S}(\varphi) \upharpoonright \mathcal{S}(\mathcal{D}_0)^{(0)} = \mathcal{S}(\mathbf{0}) \upharpoonright \mathcal{S}(\mathcal{D}_0)^{(0)}$ .

Die Bedingung (i') folgt aus

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)^{(k)} = \bigoplus_{l_1 + \dots + l_r = k} \mathcal{D}_0^{(l_1)} \otimes_s \cdots \otimes_s \mathcal{D}_0^{(l_r)},$$

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

da wegen  $k < \nu$  gelten muss, dass  $l_i < \nu$ , und weil wegen  $k > 0$  für wenigstens ein  $i$  gelten muss, dass  $l_i > 0$ .<sup>48</sup> Die Eigenschaft (ii') ergibt sich wiederum aus

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)^{(0)} = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left( \mathcal{D}_0^{(0)} \right)^{\otimes_s n}.$$

Da  $\mathcal{S}(\varphi_1) \otimes \mathcal{S}(\varphi_2) = \mathcal{S}(\varphi_1 \star \varphi_2)$ , folgt  $\mathcal{S}(\varphi)^{\otimes N} \circ S_{N^{-\frac{1}{\nu}}} = (\mathcal{S}(\varphi) \circ S_{N^{-\frac{1}{\nu}}})^{\otimes N}$ . Somit gilt nach Satz 4.3. für  $g_\varphi$  und unter Verwendung der Eigenschaften (37)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{S}(\varphi)^{\otimes N} \circ S_{N^{-\frac{1}{\nu}}})(b) = (\exp_{\otimes} D(g_\varphi))(b) \quad (38)$$

für alle  $b \in \mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$ .

Durch Einschränkung auf  $\mathcal{D} = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$  erhält man aus Gleichung (38) schließlich

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi^{\star N} \circ S_{N^{-\frac{1}{\nu}}})(d) = (\exp_{\star} g_\varphi)(d)$$

für alle  $d \in \mathcal{D}$ . □

**Bemerkung 19.** *Der Hauptsatz ist analog auf  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Gruppen  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta, \kappa)$  anwendbar, wobei der Funktor  $\mathcal{S}_{\text{Hopf}} : \mathfrak{G}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Com}\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$  die  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Gruppe gemäß Korollar 3.1. zu einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten kommutativen Hopf-\*-Algebra formt und so ebenfalls die Anwendung des Grenzwertsatzes 4.3. über  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Koalgebren ermöglicht.*

## 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

Zur Beschreibung eines stochastischen Vorgangs werden in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie Räume  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  betrachtet, die aus einem Grundraum  $\Omega$  aller möglichen Ereignisse, einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  von Teilmengen von  $\Omega$ , die die möglichen Ereignisse beschreibt, und einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , welches die Ereignisse stochastisch bewertet, bestehen. In diesem Abschnitt der Arbeit wird nun mit einigen Grundbegriffen in die nicht-kommutative Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt, in der man ein zum klassischen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  „dualen“ Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  konstruiert, der aus einer unitalen \*-Algebra  $\mathcal{Q}$  und einem Zustand  $\Phi$  auf  $\mathcal{Q}$  besteht. Klassische Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow E$  mit Werten

<sup>48</sup>Hierbei bezeichnet  $\otimes_s$  das symmetrische Tensorprodukt, d. h.  $V \otimes_s W = (V \otimes W)/\mathcal{I}$ . Vgl. hierzu Definition 3.13.

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*Algebren

in einem messbaren Raum  $(E, \mathcal{E})$  werden durch (unitale) \*-Algebrahomomorphismen  $j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Q}$  über dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  auf der (unitalen) \*-Algebra  $\mathcal{A}$  ersetzt und der klassische Unabhängigkeitsbegriff von Zufallsvariablen ins Nicht-Kommutative verallgemeinert. Während im klassischen Fall der Unabhängigkeitsbegriff durch das Tensorprodukt linearer Funktionale auf unitalen kommutativen Algebren gegeben ist, existieren in der nicht-kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie fünf verschiedene quanten-stochastische Unabhängigkeitsbegriffe. Im Zusammenhang mit algebraischen Strukturen dualer Halbgruppen sind diese Begriffe nicht-kommutativer Unabhängigkeit für die Formulierung Zentraler Grenzwertsätze in fünf Varianten entscheidend.

An diese Bemerkungen anschließend werden im vorliegenden Abschnitt zunächst einige Grundbegriffe aus der nicht-kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt (4.3.1), auf denen aufbauend die Zentralen Grenzwertsätze für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*Algebren formuliert werden können. Die Tensor-\*Algebra  $\mathcal{T}(V)$  ist eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte unitale \*-Algebra<sup>49</sup> und wird mit einer geeigneten Komultiplikation und einer geeigneten Koeinheit – so kann hier gezeigt werden – zu einer  $\mathbb{N}_0$ -graduierten dualen Halbgruppe. Dies ermöglicht schließlich die Anwendung des Hauptsatzes 4.4. über  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppen im Spezialfall der Tensor-\*Algebren. Hinsichtlich der Isomorphieeigenschaft von  $\mathcal{T}(V)$  zur Polynomalgebra  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  über  $\mathbb{C}$  in den nicht-kommutierenden Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  können zusätzlich Momentenfunktionale definiert und der Hauptsatz insbesondere für Polynome formuliert werden (4.3.2). Letztlich gilt es das Faltungsexponential  $\exp_* g_\varphi$  für die verschiedenen Begriffe quanten-stochastischer Unabhängigkeit von Quanten-Zufallsvariablen zu untersuchen und die Zentralen Grenzwertsätze für die einzelnen Fälle explizit zu formulieren (4.3.3).

#### 4.3.1 Grundbegriffe der nicht-kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein klassischer Wahrscheinlichkeitsraum. Betrachtet man die unitale kommutative \*-Algebra  $\mathcal{W} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  von  $\mathbb{C}$ -wertigen integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$  und das normierte, positive lineare Funktional  $\Psi$  auf  $\mathcal{W}$ , gegeben durch  $\Psi(F) := \int_\Omega F d\mathbb{P}$ , dann ist das Paar  $(\mathcal{W}, \Psi)$  ein Beispiel für einen Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Verallgemeinerung hierfür bietet die folgende Definition:

**Definition 4.1.** *Ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar  $(\mathcal{Q}, \Phi)$ , bestehend aus einer unitalen \*-Algebra  $\mathcal{Q}$  mit Einheitselement  $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$  und einem Zustand  $\Phi$*

---

<sup>49</sup>Die in Bezug auf die Tensoralgebra formulierten Definitionen und Eigenschaften sind in Grundzügen [BA], S. 484-490 entlehnt.

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

auf  $\mathcal{Q}$ , d. h. einem positiven linearen Funktional mit  $\Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}) = 1$ .

**Bemerkung 20.** Angenommen  $\mathcal{A}$  ist eine Unter-\*-Algebra von  $\mathcal{Q}$  und führt die Einheit  $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$  mit, dann ist offensichtlich auch  $(\mathcal{A}, \Phi \upharpoonright \mathcal{A})$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum.

**Definition 4.2.** Eine **Quanten-Zufallsvariable** über dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  auf einer \*-Algebra  $\mathcal{A}$  ist ein \*-Algebrahomomorphismus  $j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Q}$ .

**Bemerkung 21.** Besitzt  $\mathcal{A}$  keine Einheit  $\mathbb{1}$ , dann kann  $j$  auf eindeutige Weise zu einem unitalen \*-Algebrahomomorphismus  $\tilde{j} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{Q}$  mit  $\tilde{j} \upharpoonright \mathcal{A} = j$  erweitert werden.<sup>50</sup>

Eine klassische Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow E$  über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit Werten in einem messbaren Raum  $(E, \mathcal{E})$  wird durch die Definition

$$j_X(f) = f \circ X$$

für  $f \in \mathcal{A}$  (wobei  $\mathcal{A}$  eine geeignete \*-Algebra von  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen auf  $E$  ist, z. B.  $\mathcal{A} = L^\infty(E, \mathcal{E})$ ) zu einer speziellen Quanten-Zufallsvariable  $j_X$  mit  $j_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{W} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Definition 4.3.** Für eine Quanten-Zufallsvariable  $j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Q}$  bezeichne  $\varphi_j = \Phi \circ j$  die **Verteilung** von  $j$  im Zustand  $\Phi$ .<sup>51</sup>

Die Verteilung der Quanten-Zufallsvariable  $j$  bezüglich  $\Phi$  ist dann der Zustand  $\Phi \circ j$  bzw.  $\Phi \circ \tilde{j}$  auf  $\mathcal{A}$  bzw.  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

**Definition 4.4. (Faltung von Quanten-Zufallsvariablen)** Sei  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe. Dann wird für die Quanten-Zufallsvariablen  $j_1$  und  $j_2$  auf  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  über dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  die Faltung von  $j_1$  und  $j_2$  wie folgt definiert:

$$j_1 * j_2 := (j_1 \sqcup_{\mathbb{1}} j_2) \circ \Lambda.$$

Die Faltung  $j_1 * j_2$  der Quanten-Zufallsvariablen  $j_1$  und  $j_2$  ist wiederum eine Quanten-Zufallsvariable auf  $\mathcal{D}$  über dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$ . Um die Verteilung  $\varphi_1 * \varphi_2$  von  $j_1 * j_2$  zu erhalten, betrachte man das universelle Produkt  $\varphi_1 \bullet \varphi_2$  auf

---

<sup>50</sup>Man erhält aus  $\mathcal{A}$  durch Hinzufügen einer künstlichen Einheit  $\mathbb{1}$  die unitale Algebra  $\tilde{\mathcal{A}}$ , d. h.  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus \mathcal{A}$ . (Vgl. hierzu auch Abschnitt 2.5 dieser Arbeit.)

<sup>51</sup>Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Indize „ $j$ “ bei der Verteilung  $\varphi_j$  im Folgenden weggelassen.



### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*Algebren

$\mathcal{D}_0 \sqcup \mathcal{D}_0$  (mit  $\mathcal{D}_0 = \text{Kern}(\delta)$ ). Sind die Quanten-Zufallsvariablen  $j_{1,2} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Q}$  gemäß Definition 3.4. unabhängig und  $\varphi_{1,2} = \Phi \circ j_{1,2}$  deren Verteilungen auf  $\mathcal{D}_0$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \Phi \circ (j_1 \sqcup j_2) &= (\Phi \circ j_1) \bullet (\Phi \circ j_2) = \varphi_1 \bullet \varphi_2 \\ \Phi \circ (j_1 * j_2) &= \Phi \circ (j_1 \sqcup j_2) \circ \Lambda_0 \\ &= ((\Phi \circ j_1) \bullet (\Phi \circ j_2)) \circ \Lambda_0 \\ &= (\Phi \circ j_1) \star (\Phi \circ j_2) \\ &= \varphi_1 \star \varphi_2 \end{aligned}$$

in  $\mathcal{D}_0$  mit  $\Lambda_0 = \Lambda \upharpoonright \mathcal{D}_0$ . Nach Bemerkung 21. kann nun die Quanten-Zufallsvariable  $j_1 * j_2$  auf  $\mathcal{D}_0$  eindeutig zu einem unitalen \*-Algebrahomomorphismus von  $\mathcal{D}$  nach  $\mathcal{Q}$  erweitert werden, d. h.

$$\widetilde{\varphi_1 \star \varphi_2} = \Phi \circ (\widetilde{j_1 * j_2}),$$

wobei  $\widetilde{\varphi_1 \star \varphi_2}$  ein Zustand auf  $\mathcal{D}$  ist.

#### 4.3.2 Momentenfunktionale auf Tensor-\*Algebren

Sei  $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}^{(n)}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$  die Tensoralgebra<sup>52</sup> über dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  und die Menge  $\{x_i \mid i \in I\}$  für eine Indexmenge  $I$  eine Basis von  $V$ , dann ist

$$\{x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}_0, i_j \in I \text{ mit } 1 \leq j \leq k\}$$

eine Basis von  $\mathcal{T}(V)$ .<sup>53</sup> Mithin entspricht  $\mathcal{T}(V)$  in polynomialer Schreibweise der Algebra der  $\mathbb{C}$ -wertigen Polynome mit den nicht-kommutierenden Unbestimmten  $x_i$  für alle  $i \in I$ , d. h. beispielsweise

$$\mathcal{T}(V) \cong \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle, \quad (39)$$

falls  $\dim V = n$ .

Für einen Vektorraum  $V = \mathcal{T}^{(1)}(V)$  kann man eine Einbettung  $\iota_V : V \rightarrow \mathcal{T}(V)$  finden, so dass die Tensoralgebra der folgenden universellen Eigenschaft genügt:

<sup>52</sup>Vgl. hierzu Beispiel 1.

<sup>53</sup>Vgl. hierzu [BA], S. 491-492.

<sup>54</sup>Vgl. hierzu Bemerkung 16.

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

**Satz 4.5.** Sei  $\mathcal{A}$  eine unitale Algebra und  $f : V \rightarrow \mathcal{A}$  eine lineare Abbildung, dann existiert ein eindeutiger unitaler Algebromorphismus  $\mathcal{T}(f) : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{A}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & \mathcal{T}(V) \\ & \searrow f & \swarrow \exists! \mathcal{T}(f) \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

kommutiert, d. h.  $f = \mathcal{T}(f) \circ \iota_V$ .

*Beweis.* Vgl. hierzu [BA], S. 485 und Satz 3.4. □

In Bezug auf die obige Definition der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  ist auch umgekehrt jeder beliebige Algebromorphismus  $g : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{A}$  eindeutig durch seine Einschränkung auf  $V$  definiert.

**Korollar 4.1.** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$  und  $g : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gibt es einen eindeutigen Algebromorphismus  $\mathcal{T}(g) : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(W)$ , definiert durch  $\mathcal{T}(g) := \mathcal{T}(\iota_W \circ g)$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow \iota_V & & \downarrow \iota_W \\ \mathcal{T}(V) & \xrightarrow{\mathcal{T}(g) := \mathcal{T}(\iota_W \circ g)} & \mathcal{T}(W) \end{array}$$

*Beweis.* Hierfür wende man die universelle Eigenschaft der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  gemäß Satz 4.5. auf die lineare Abbildung  $\iota_W \circ g : V \rightarrow \mathcal{T}(W)$  an. □

**Korollar 4.2.** Seien  $V, W$  und  $U$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$  und  $g : V \rightarrow W$  sowie  $h : W \rightarrow U$  lineare Abbildungen. Dann gilt

$$\mathcal{T}(h \circ g) = \mathcal{T}(h) \circ \mathcal{T}(g).$$

*Beweis.* Vgl. hierzu [BA], S. 486. □

Der Algebromorphismus  $\mathcal{T}(g)$  wird auch als kanonische Erweiterung der linearen Abbildung  $g$  auf  $\mathcal{T}(V)$  bezeichnet. Die Einschränkungen  $\mathcal{T}(g) \upharpoonright \mathcal{T}^{(n)}(V) := \mathcal{T}^{(n)}(g)$  von  $\mathcal{T}^{(n)}(V)$  nach  $\mathcal{T}^{(n)}(W)$  sind hier die linearen Abbildungen  $g^{\otimes n}$  mit  $g$  für  $n = 1$  und  $\text{id}$  für  $n = 0$ .

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

Es sei im Folgenden  $\mathcal{T}_0(V)$  wie folgt definiert:

$$\mathcal{T}_0(V) := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}^{(n)}(V) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n} = V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

**Lemma 4.2.** *Für zwei Vektorräume  $V$  und  $W$  über  $\mathbb{K}$  gelten die folgenden (unitalen) Algebrasomorphismen:*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(V \oplus W) &\cong \mathcal{T}_0(V) \sqcup \mathcal{T}_0(W) \\ \mathcal{T}(V \oplus W) &\cong \mathcal{T}(V) \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{T}(W).^{55} \end{aligned}$$

*Beweis.* Vgl. hierzu [Voß], S. 26-27. □

Sei nun  $V$  sogar ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter \*-Vektorraum, d. h.  $V$  ist  $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum und die Involution  $v \mapsto v^*$  homogen vom Grad 0. Dann wird die Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  durch die Fortsetzung der Involution auf  $\mathcal{T}(V)$  eine \*-Algebra und mit der  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}(V)^{(n)} \tag{40}$$

mit

$$\mathcal{T}(V)^{(n)} = \bigoplus_{k_1 + \dots + k_r = n} V^{(k_1)} \otimes \dots \otimes V^{(k_r)} \quad \text{und} \quad \mathcal{T}(V)^{(0)} = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus \bigoplus_{l=1}^{\infty} (V^{(0)})^{\otimes l},$$

wobei  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $n, r \in \mathbb{N}$ , zu einer graduierten \*-Algebra, der sog.  $\mathbb{N}_0$ -graduierten Tensor-\*-Algebra. Die universelle Eigenschaft von  $\mathcal{T}(V)$  gemäß Satz 4.5. hat nun die folgende Form: Für eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte unitale \*-Algebra  $\mathcal{A}$  und eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ , die homogen vom Grad 0 ist, existiert ein eindeutiger unitaler \*-Algebramorphismus  $\mathcal{T}(f)$  mit

$$\mathcal{T}(f)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n) \tag{41}$$

für  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in \mathcal{T}^{(n)}(V) = V^{\otimes n}$ ,  $n \geq 1$  und  $\mathcal{T}(f)(\alpha \mathbb{1}_{\mathcal{T}(V)}) = \alpha \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Da  $\mathcal{T}(f)(\mathcal{T}^{(n)}(V)) \subseteq \mathcal{A}^{(n)}$  für alle  $n \geq 0$  ist der unitale \*-Algebramorphismus  $\mathcal{T}(f)$  zudem homogen vom Grad 0.

---

<sup>55</sup>Es gilt insbesondere  $\mathcal{T}(V) \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{T}(V) \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{T}(V) \cong \mathcal{T}(V \oplus V \oplus V)$ . Dieser Zusammenhang wird für den Beweis des Satzes 4.6. benötigt.

4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor- $*$ -Algebren

**Satz 4.6.** Die  $\mathbb{N}_0$ -graduierte Tensor- $*$ -Algebra  $\mathcal{T}(V)$  über dem  $\mathbb{N}_0$ -graduierten  $*$ -Vektorraum  $V$  ist eine  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Gruppe, wenn die Abbildungen

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}(v) &= \iota_1(v) + \iota_2(v) \in \mathcal{T}_0(V) \sqcup \mathcal{T}_0(V) \subset \mathcal{T}(V) \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{T}(V) \cong \mathcal{T}(V \oplus V) \\ \hat{\delta}(v) &= 0 \text{ mit } \hat{\delta}(\mathbb{1}) = 1 \\ \hat{\kappa}(v) &= -v \text{ mit } \hat{\kappa}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}\end{aligned}$$

zu unitalen  $*$ -Algebrahomomorphismen

$$\begin{aligned}\Lambda : \mathcal{T}(V) &\rightarrow \mathcal{T}(V) \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{T}(V) \cong \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus \mathcal{T}_0(V \oplus V) \text{ mit } \Lambda = \mathcal{T}(\hat{\Lambda}) = \mathcal{T}(\iota_1 + \iota_2) \\ \delta : \mathcal{T}(V) &\rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \delta = \mathcal{T}(\hat{\delta}) = \mathcal{T}(0) \\ \kappa : \mathcal{T}(V) &\rightarrow \mathcal{T}(V) \text{ mit } \kappa = \mathcal{T}(\hat{\kappa})\end{aligned}$$

erweitert werden. Für die Abbildung  $\hat{\Lambda}(v) = \iota_1(v) + \iota_2(v)$  bezeichnen  $\iota_1, \iota_2$  die Einbettungen von  $V$  in  $\mathcal{T}(V) \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{T}(V)$  mit

$$\underbrace{\mathcal{T}(V)}_{\subset \iota_1(V)} \sqcup_{\mathbb{1}} \underbrace{\mathcal{T}(V)}_{\subset \iota_2(V)}.$$

*Beweis.* Gemäß der universellen Eigenschaft der Tensor- $*$ -Algebra  $\mathcal{T}(V)$  kommutieren zunächst die folgenden Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & \mathcal{T}(V) \\ \hat{\Lambda} \searrow & & \nearrow \Lambda = \mathcal{T}(\hat{\Lambda}) \\ & & \mathcal{T}(V) \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{T}(V) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & \mathcal{T}(V) \\ \hat{\delta} \searrow & & \nearrow \delta = \mathcal{T}(\hat{\delta}) \\ & & \mathbb{C} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & \mathcal{T}(V) \\ \hat{\kappa} \searrow & & \nearrow \kappa = \mathcal{T}(\hat{\kappa}) \\ & & \mathcal{T}(V) \end{array}$$

Sei die Tensor- $*$ -Algebra  $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}(V)^{(n)}$  über dem  $\mathbb{N}_0$ -graduierten  $*$ -Vektorraum  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{(n)}$  mit der Graduierung (40) versehen. Es ergibt sich für den Grad der Multiplikation zweier Elemente aus  $\mathcal{T}(V)$  zunächst folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\deg\left(\overbrace{(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)}^{\in V^{\otimes n}} \overbrace{(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m)}^{\in V^{\otimes m}}\right) &= \deg(v_1) + \cdots + \deg(v_n) \\ &\quad + \deg(w_1) + \cdots + \deg(w_m) \\ &= \deg(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) + \deg(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m),\end{aligned}$$

d. h. die Multiplikation in  $\mathcal{T}(V)$  ist graderhaltend.

4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

Für  $\hat{\Lambda}(v) = \iota_1(v) + \iota_2(v)$  mit  $v \in V$  gilt  $\deg(\hat{\Lambda}(v)) = \deg(\iota_1(v) + \iota_2(v))$ , so dass  $\hat{\Lambda}$  homogen vom Grad 0 ist. Die Abbildung  $\Lambda : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V) \sqcup_{\mathbb{1}} \mathcal{T}(V)$  ist dann unter Verwendung von (41) homogen vom Grad 0, da

$$\begin{aligned} \deg(\Lambda(\overbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n}^{\in V^{\otimes n}})) &= \deg(\hat{\Lambda}(v_1) \cdots \hat{\Lambda}(v_n)) \\ &= \deg(\hat{\Lambda}(v_1)) + \cdots + \deg(\hat{\Lambda}(v_n)) \\ &= \deg(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

für  $v_i \in V$  mit  $v_i \neq 0$ . Die Einheit  $\delta$  und die Antipode  $\kappa$  sind offensichtlich ebenfalls homogen vom Grad 0. Es reicht nun zu zeigen, dass die Koassoziativität, die Koeinheitseigenschaft und die Antipodeneigenschaft für erzeugende Elemente  $v \in V$  erfüllt sind. Zunächst ergibt sich die Koassoziativität von  $\hat{\Lambda}$  durch folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} (\hat{\Lambda} \amalg_{\mathbb{1}} \text{id}_V) \circ \hat{\Lambda}(v) &= (\hat{\Lambda} \amalg_{\mathbb{1}} \text{id}_V)(\iota_1(v) + \iota_2(v)) \\ &= (\iota_1(v) + \iota_2(v)) + \iota_3(v) \\ &= \iota_1(v) + (\iota_2(v) + \iota_3(v)) \\ &= (\text{id}_V \amalg_{\mathbb{1}} \hat{\Lambda})(\iota_1(v) + \iota_2(v)) \\ &= (\text{id}_V \amalg_{\mathbb{1}} \hat{\Lambda}) \circ \hat{\Lambda}(v). \end{aligned}$$

Es gilt zudem die Koeinheitseigenschaft, da

$$\begin{aligned} (\hat{\delta} \amalg_{\mathbb{1}} \text{id}_V) \circ \hat{\Lambda}(v) &= (\hat{\delta} \amalg_{\mathbb{1}} \text{id}_V)(\iota_1(v) + \iota_2(v)) \\ &= 0 + v = \text{id}(v) \\ &= (\text{id}_V \amalg_{\mathbb{1}} \hat{\delta})(\iota_1(v) + \iota_2(v)) \\ &= (\text{id}_V \amalg_{\mathbb{1}} \hat{\delta}) \circ \hat{\Lambda}(v). \end{aligned}$$

Die Antipodeneigenschaft von  $\hat{\kappa}$  ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} (\hat{\kappa} \sqcup_{\mathbb{1}} \text{id}_V) \circ \hat{\Lambda}(v) &= (\hat{\kappa} \sqcup_{\mathbb{1}} \text{id}_V)(\iota_1(v) + \iota_2(v)) \\ &= -v + v = 0 \\ &= (\text{id}_V \sqcup_{\mathbb{1}} \hat{\kappa})(\iota_1(v) + \iota_2(v)) \\ &= (\text{id}_V \sqcup_{\mathbb{1}} \hat{\kappa}) \circ \hat{\Lambda}(v). \end{aligned}$$

Schließlich ist  $(\mathcal{T}(V), \Lambda, \delta, \kappa)$  eine duale Gruppe. □

Auf der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  kann zur Veranschaulichung auch eine Koalgebrastruktur

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor- $*$ -Algebren

definiert werden:

**Bemerkung 22.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{N}_0$ -graduierter  $*$ -Vektorraum. Dann wird  $(\mathcal{T}(V), \Delta, \delta)$  mit der Komultiplikation<sup>56</sup>

$$\Delta : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V) \otimes \mathcal{T}(V) \text{ mit } \Delta(v) = \mathbf{1} \otimes v + v \otimes \mathbf{1}$$

und der Koeinheit  $\delta : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\delta(v) = 0$  und  $\delta(\mathbf{1}) = 1$  für alle  $v \in V \subset \mathcal{T}(V)$  zu einer  $\mathbb{N}_0$ -graduerten Koalgebra. Neben der Koeinheit  $\delta$  ist auch die Komultiplikation  $\Delta$  ein  $*$ -Algebrahomomorphismus, so dass für alle  $n \geq 1$  und  $v_i \in V \subset \mathcal{T}(V)$

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = \prod_{i=1}^n (\mathbf{1} \otimes v_i + v_i \otimes \mathbf{1})$$

gilt. Folglich wird  $\mathcal{T}(V)$  sogar zu einer  $\mathbb{N}_0$ -graduerten  $*$ -Bialgebra.

Für die Formulierung des folgenden Satzes, der eine Spezialisierung des Hauptsatzes 4.4. darstellt, ist die  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe  $(\mathcal{T}(V), \Lambda, \delta)$  über dem  $\mathbb{N}_0$ -graduerten  $*$ -Vektorraum  $V$  die Graduierung von  $\mathcal{T}(V)$  in der  $k$ -ten Komponente folgender Gestalt:

$$\mathcal{T}(V)^{(k)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (V^{\otimes n})^{(k)},$$

d. h. die 0-te und 1-te Komponente können exemplarisch wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(V)^{(0)} &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} (V^{\otimes n})^{(0)} \\ &= \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus V^{(0)} \oplus (V^{(0)} \otimes V^{(0)}) \oplus (V^{(0)} \otimes V^{(0)} \otimes V^{(0)}) \otimes \dots \\ \mathcal{T}(V)^{(1)} &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} (V^{\otimes n})^{(1)} \\ &= V^{(1)} \oplus (V^{(0)} \otimes V^{(1)}) \oplus (V^{(1)} \otimes V^{(0)}) \oplus (V^{(1)} \otimes V^{(0)} \otimes V^{(0)}) \otimes \dots \end{aligned}$$

**Satz 4.7.** Sei  $(\mathcal{T}(V), \Lambda, \delta)$  gemäß Satz 4.6. die  $\mathbb{N}_0$ -graduierte duale Halbgruppe über dem  $\mathbb{N}_0$ -graduerten  $*$ -Vektorraum  $V$  und  $\varphi : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathbb{C}$  ein normiertes lineares Funktional mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \varphi \upharpoonright \mathcal{T}(V)^{(1)} &= 0 \\ \varphi \upharpoonright \mathcal{T}(V)^{(0)} &= \delta \upharpoonright \mathcal{T}(V)^{(0)}, \end{aligned}$$

---

<sup>56</sup>Vgl. hierzu Bemerkung 7.

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*Algebren

dann gilt für die  $N$ -fache Faltung von  $\varphi$  gemäß Bemerkung 14. und alle  $d \in \mathcal{T}(V)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \varphi^{\star N} \circ S_{N^{-\frac{1}{2}}} \right) (d) = (\exp_{\star} g_{\varphi})(d),$$

wobei  $g_{\varphi}$  das lineare Funktional auf  $\mathcal{T}(V)$  bezeichnet mit

$$\begin{aligned} g_{\varphi} \upharpoonright \mathcal{T}(V)^{(k)} &= 0 \quad \text{für } k \neq 2 \\ g_{\varphi} \upharpoonright \mathcal{T}(V)^{(2)} &= \varphi \upharpoonright \mathcal{T}(V)^{(2)}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.4., indem man  $(\mathcal{D}, \Lambda, \delta)$  durch  $(\mathcal{T}(V), \Lambda, \delta)$  ersetzt. □

Von hieran wird für den \*-Vektorraum  $V$  die folgende  $\mathbb{N}_0$ -Graduierung angenommen:

$$V^{(1)} = V \text{ und } V^{(l)} = \{0\} \quad \text{für } l \neq 1.$$

Dann gilt insbesondere  $\mathcal{T}(V)^{(n)} = \mathcal{T}^{(n)}(V)$ . Sei nun  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{T}(V) \cong \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  gemäß der eingangs beschriebenen Polynomschreibweise (39). Die Algebra  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  in  $n$  nicht-kommutierenden Unbestimmten über dem Körper  $\mathbb{C}$  setzt sich aus Linearkombinationen von 1 und Monomen<sup>57</sup> der Form

$$m = x_{i_1} \cdots x_{i_k} \tag{42}$$

mit  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq i_j \leq n$  ( $1 \leq j \leq k$ ) zusammen. Man beachte, dass die Reihenfolge der Faktoren Relevanz hat, so ist z. B.  $x_i x_j \neq x_j x_i$  für  $i \neq j$ .

Sei nun  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum mit Elementen  $q_1, \dots, q_n$  aus  $\mathcal{Q}$ . Für jedes Polynom<sup>58</sup>  $P \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  bezeichne  $P(q_1, \dots, q_n)$  ein Element aus  $\mathcal{Q}$ , das man erhält, indem  $x_1, \dots, x_n$  durch  $q_1, \dots, q_n$  ersetzt wird, d. h.

$$\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \ni P \mapsto P(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{Q}$$

ist der eindeutige unitale \*-Algebrahomomorphismus, der  $x_i$  auf  $q_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) abbildet.

**Definition 4.5.** Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum,  $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{Q}$  und  $m = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$  ein Monom aus  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  mit  $1 \leq i_j \leq n$  ( $1 \leq j \leq k$ ). Dann wird

<sup>57</sup>Alle Monome bilden eine Basis von  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

<sup>58</sup>Jedes Element aus  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  ist Polynom und endliche Summe von Monomen der Form (42).

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor- $\star$ -Algebren

der Wert

$$\Phi(q_{i_1} \cdots q_{i_k})$$

als  **$m$ -Moment** von  $q_1, \dots, q_n$  bezeichnet.

**Definition 4.6.** Das normierte lineare Funktional  $\varphi : \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$\varphi(P(x_1, \dots, x_n)) := \Phi(P(q_1, \dots, q_n))$$

für alle  $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  heißt **Momentenfunktional** von  $q_1, \dots, q_n$  in  $(\mathcal{Q}, \Phi)$ .

Das Momentenfunktional  $\varphi$  von  $q_1, \dots, q_n$  ist folglich dadurch bestimmt, dass es jedes Monom  $m = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$  aus  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  eindeutig auf das zugehörige  $m$ -Moment  $\Phi(q_{i_1} \cdots q_{i_k})$  von  $q_1, \dots, q_n$  abbildet, d. h.

$$\varphi(x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = \Phi(q_{i_1} \cdots q_{i_k}),$$

wobei  $\varphi$  das  $m$ -Moment von  $x_1, \dots, x_n$  ist.

Das Momentenfunktional  $\varphi$  heißt zentriert, wenn  $\varphi(x_i) = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt. Es bezeichne im Folgenden  $\varphi^{\star N}$  die  $N$ -fache Faltung von  $\varphi$  mit sich selbst bezüglich eines universellen Produktes,<sup>59</sup> d. h. beispielsweise

$$\varphi^{\star 2} \upharpoonright \mathcal{T}_0(V) = (\varphi \star \varphi) \upharpoonright \mathcal{T}_0(V) = \left( (\varphi \upharpoonright \mathcal{T}_0(V)) \bullet (\varphi \upharpoonright \mathcal{T}_0(V)) \right) \circ \Lambda_0.$$

**Korollar 4.3.** Sei  $\varphi$  ein zentriertes Momentenfunktional auf  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi^{\star N} \left( P \left( \frac{x_1}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{N}} \right) \right) = (\exp_\star g_\varphi)(P(x_1, \dots, x_n)),$$

für alle  $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , wobei das lineare Funktional  $g_\varphi$  durch

$$g_\varphi(x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 2 \\ \varphi(x_{i_1} \cdots x_{i_k}), & \text{falls } k = 2 \end{cases}$$

für alle  $i_j = 1, \dots, n$  ( $j = 1, \dots, k$ ) und  $g_\varphi(\mathbf{1}) = 0$  bestimmt ist.

---

<sup>59</sup>Für die  $N$ -fache Faltung des Momentenfunktionals  $\varphi$  sei wie in Bemerkung 14. vorzugehen. Vgl. hierzu auch Punkt 4.3.3 dieser Arbeit.



### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.7. in polynomialer Schreibweise. □

Sei  $q$  ein selbstadjungiertes Element aus dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$ , d. h.  $q = q^*$ , und  $\mathcal{A} = \langle q \rangle$  die von  $q$  erzeugte Unter-\*-Algebra von  $\mathcal{Q}$ . Dann existiert zu einem solchen  $q \in \mathcal{Q}$  genau ein \*-Algebrahomomorphismus

$$j_q : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$$

mit  $j_q(x) = q$ , d. h.  $j_q$  ist Quanten-Zufallsvariable auf  $\mathbb{C}[x]$  mit  $x = x^*$  über dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$ .

Seien nun  $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{Q}$  selbstadjungiert, dann existiert genau eine Quanten-Zufallsvariable

$$j : \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \langle q_1, \dots, q_n \rangle \subseteq \mathcal{Q}$$

mit  $j(x_i) = q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Das Momentenfunktional von  $q_1, \dots, q_n$  ist somit

$$\varphi = \Phi \circ j,$$

d. h.  $\varphi$  ist die Verteilung von  $q_1, \dots, q_n$  bzw. von der Quanten-Zufallsvariable  $j$ .

Seien  $\mathcal{A}_1 = \langle q_1 \rangle, \dots, \mathcal{A}_n = \langle q_n \rangle$  die von  $q_1, \dots, q_n$  erzeugten Unter-\*-Algebren von  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  und  $j_1 : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{A}_1, \dots, j_n : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{A}_n$  Quanten-Zufallsvariablen mit  $j_i(x) = q_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) und den zugehörigen Verteilungen  $\varphi_i = \Phi \circ j_i$ . Da die unitale \*-Algebra  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  aus dem freien Produkt der \*-Algebren  $\mathbb{C}[x]$  entsteht, d. h.

$$\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \underbrace{\mathbb{C}[x] \sqcup_{\mathbb{1}} \dots \sqcup_{\mathbb{1}} \mathbb{C}[x]}_{n\text{-mal}},$$

gilt für die Quanten-Zufallsvariable  $j : \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \mathcal{Q}$  mit  $q_i = j(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ )

$$j = j_1 \amalg_{\mathbb{1}} \dots \amalg_{\mathbb{1}} j_n.$$

Somit ist das Momentenfunktional

$$\varphi(P(x_1, \dots, x_n)) = \Phi \circ j(P(x_1, \dots, x_n)) = \Phi(P(q_1, \dots, q_n))$$

für alle  $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  die *gemeinsame Verteilung* von  $q_1, \dots, q_n$  auf dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$ .

### 4.3.3 Explikation der Zentralen Grenzwertsätze für die fünf Unabhängigkeiten von Quanten-Zufallsvariablen

Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum und  $q_1, \dots, q_n$  selbstadjungierte Elemente aus  $\mathcal{Q}$ , wobei  $q_1, \dots, q_n$  die Unter-\*Algebren  $\mathcal{A}_1 = \langle q_1 \rangle, \dots, \mathcal{A}_n = \langle q_n \rangle$  von  $\mathcal{Q}$  erzeugen. Mithin sind  $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{Q}$  genau dann *unabhängig*, wenn die zugehörigen Quanten-Zufallsvariablen  $j_1 : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{A}_1, \dots, j_n : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{A}_n$  mit  $j_i(x) = q_i$  für  $i = 1, \dots, n$  unabhängig gemäß Definition 3.4. sind. Diese wiederum werden als unabhängig bezeichnet, wenn es die Unter-\*Algebren  $\mathcal{A}_1 = \langle q_1 \rangle, \dots, \mathcal{A}_n = \langle q_n \rangle$  sind. Betrachtet man hingegen eine nicht notwendigerweise endliche Folge  $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Quanten-Zufallsvariablen, dann wird diese als unabhängig bezeichnet, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$   $j_1, \dots, j_n$  unabhängig sind und in ähnlicher Weise ist eine Folge  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Unter-\*Algebren unabhängig, wenn für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  unabhängig sind.

Für die Quanten-Zufallsvariablen  $j_1, \dots, j_n$  über dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  auf der unitalen \*-Algebra  $\mathbb{C}[x]$  bezeichnen sämtliche  $\varphi_i = \Phi \circ j_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  die zugehörigen Verteilungen im Zustand  $\Phi$ . Die Quanten-Zufallsvariablen  $j_1, \dots, j_n$  sind tensor, frei, Boolesch, monoton oder antimonoton unabhängig, wenn der Zustand  $\Phi \circ (j_1 \sqcup_{\mathbb{1}} \dots \sqcup_{\mathbb{1}} j_n)$  auf dem freien Produkt  $\mathbb{C}[x] \sqcup_{\mathbb{1}} \dots \sqcup_{\mathbb{1}} \mathbb{C}[x]$  dem Tensorprodukt (T), dem freien (F), dem Booleschen (B), dem monotonen (M) oder dem antimonotonen Produkt (AM) von  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  entspricht.<sup>60</sup>

**Definition 4.7.** Sei  $x = x^*$  die Unbestimmte des Polynomrings  $\mathbb{C}[x]$ ,  $j : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q}$  eine Quanten-Zufallsvariable über dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  mit  $j(x) = q \in \mathcal{Q}$  und  $\varphi = \Phi \circ j$  deren Verteilung. Dann wird

$$\varphi(x^k) = \Phi(q^k)$$

als das *k-te Moment* der Quanten-Zufallsvariable  $j$  bezeichnet.

Für Quanten-Zufallsvariablen  $j_1, \dots, j_n : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q}$  ist also das *k-te Moment*

$$\varphi_i(x^k) = \Phi \circ j_i(x^k) = \Phi(j_i(x)^k) = \Phi(q_i^k)$$

für alle Monome  $x^k \in \mathbb{C}[x]$ . Allgemeiner gilt für jedes Polynom  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$

$$\varphi_i(P(x)) = \Phi(P(q_i))$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ .

---

<sup>60</sup>Vgl. hierzu Definition 3.5.

4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor- $*$ -Algebren

**Korollar 4.4.** Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum und die Quanten-Zufallsvariablen  $j_1, \dots, j_n : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q}$  unabhängig und identisch verteilt, d. h. für die Verteilungen  $\varphi_i = \Phi \circ j_i$  gilt  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = \varphi$ . Ist nun außerdem das erste Moment  $\varphi(x) = 0$ , dann gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi^{*N} \left( P \left( \frac{x}{\sqrt{N}} \right) \right) = (\exp_* g_\varphi)(P(x))$$

für alle  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ , wobei

$$g_\varphi(x^k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 2 \\ \varphi(x^2), & \text{falls } k = 2. \end{cases}$$

*Beweis.* Dies folgt aus Korollar 4.3. für eine Unbestimmte  $x$ , da  $\varphi$  ein Momentenfunktional ist.  $\square$

Im Folgenden wird nun die Gestalt von  $\exp_* g_\varphi$  für die fünf verschiedenen Begriffe nicht-kommutativer Unabhängigkeit zu beschreiben gesucht und in Zentralen Grenzwertsätzen (ZGS) festgehalten.

**Satz 4.8.** Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum. Für ein selbstadjungiertes Element  $q \in \mathcal{Q}$  existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  mit endlichen Momenten, so dass für  $k = 1, 2, \dots$  gilt:

$$\Phi(q^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \mu(dx).$$

*Beweis.* Vgl. hierzu [AHO], S. 26.  $\square$

Man beachte, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  i. Allg. nicht eindeutig ist.

**Definition 4.8. (Tensorunabhängigkeit)** Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von unitalen Unter- $*$ -Algebren von  $\mathcal{Q}$  ist bezüglich  $\Phi$  tensorunabhängig, wenn

1.  $ab = ba$  für alle  $a \in \mathcal{A}_i, b \in \mathcal{A}_j$  mit  $i, j \in \mathbb{N}$  und  $i \neq j$
2.  $\Phi \left( \prod_{j \in J} a_j \right) = \prod_{j \in J} \Phi(a_j)$

für alle endlichen Teilmengen  $J \subseteq \mathbb{N}$  und alle  $a_j \in \mathcal{A}_j$ .

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

Zwei Quanten-Zufallsvariablen  $j_1, j_2 : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q}$  sind somit tensorunabhängig, wenn

$$q_1 q_2 = q_2 q_1 \text{ und } \Phi(q_1^k q_2^l) = \Phi(q_1^k) \Phi(q_2^l)$$

gilt mit  $j_1(x) = q_1, j_2(x) = q_2$  und für alle  $k, l \in \mathbb{N}$ .

**Satz 4.9. (kommutativer ZGS)** Sei  $(j_i : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von tensorunabhängigen und identisch verteilten Quanten-Zufallsvariablen auf dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  und die Verteilung  $\varphi = \Phi \circ j_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  erfülle die Bedingungen

(i)  $\varphi(x) = 0$

(ii)  $\varphi(x^2) = 1,$

dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi^{\star N} \left( \frac{x^k}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right) dx, \quad (43)$$

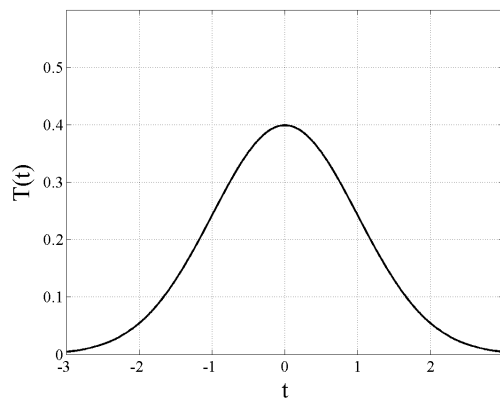
wobei  $\varphi^{\star N}$  die  $N$ -fache Faltung von  $\varphi$  bezüglich des Tensorproduktes  $\otimes$  bezeichnet.

*Beweis.* Vgl. hierzu [AHO], S. 214-215. □

Im Falle der Tensorunabhängigkeit ist demnach das Faltungsexponential  $(\exp_{\star} g_{\varphi})(x^k)$  gemäß Korollar 4.4. von der Gestalt (43). Das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichtefunktion

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

heißt Standardnormalverteilung und entspricht der folgenden graphischen Darstellung (Gaußsche Glockenkurve):



### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

Die Momentenfolge der Standardnormalverteilung entspricht hierbei für  $k = 1, 2, \dots$

$$\varphi(x^k) = \begin{cases} \frac{m!}{2^m} \binom{2m}{m}, & \text{falls } k = 2m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Definition 4.9. (freie Unabhängigkeit)** Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von unitalen Unter-\*-Algebren von  $\mathcal{Q}$  ist bezüglich  $\Phi$  frei unabhängig, wenn

$$\Phi(a_1 \cdots a_r) = 0, \text{ falls } \Phi(a_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, r)$$

für alle  $r \in \mathbb{N}$  mit  $a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$  und  $i_j \in \mathbb{N}$  gilt, wobei benachbarte Elemente aus verschiedenen Unter-\*-Algebren sind, d. h.  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \dots, i_{r-1} \neq i_r$ .

Quanten-Zufallsvariablen  $j_1, \dots, j_n : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q}$  sind frei unabhängig (bezüglich  $\Phi$ ), wenn die von den Elementen  $q_1 = j_1(x), \dots, q_n = j_n(x)$  erzeugten Unter-\*-Algebren frei unabhängig sind.

**Satz 4.10. (freier ZGS)** Sei  $(j_i : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von frei unabhängigen und identisch verteilten Quanten-Zufallsvariablen auf dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  und die Verteilung  $\varphi = \Phi \circ j_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  erfülle die Bedingungen

- (i)  $\varphi(x) = 0$
- (ii)  $\varphi(x^2) = 1,$

dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi^{\star N} \left( \frac{x^k}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^k \sqrt{4 - x^2} dx, \quad (44)$$

wobei  $\varphi^{\star N}$  die  $N$ -fache Faltung von  $\varphi$  bezüglich des freien Produktes  $\star$  bezeichnet.

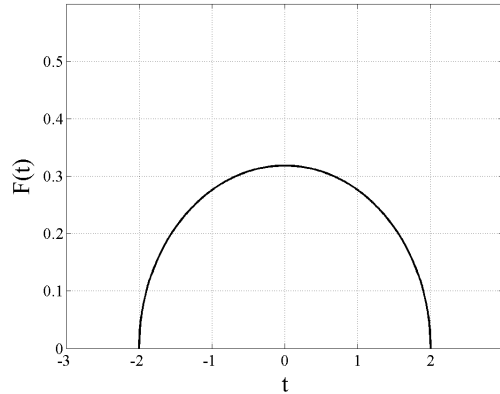
*Beweis.* Vgl. hierzu [AHO], S. 215. □

Im Falle der freien Unabhängigkeit ist demnach das Faltungsexponential  $(\exp_{\star} g_{\varphi})(x^k)$  gemäß Korollar 4.4. von der Gestalt (44). Das Wahrscheinlichkeitsmaß, dessen Dichtefunktion durch

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - t^2}, & \text{falls } |t| \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

gegeben ist, wird als standardisierte Wigner-Halbkreis-Verteilung bezeichnet und kann graphisch wie folgt veranschaulicht werden:



Im Fall der freien Unabhängigkeit fällt das  $(2k)$ -te Moment der Wigner-Halbkreis-Verteilung mit den *Catalan-Zahlen*  $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$  für  $k = 1, 2, \dots$  zusammen, während das  $(2k + 1)$ -te Moment 0 ist.

**Definition 4.10. (Boolesche Unabhängigkeit)** Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Unter-\*-Algebren von  $\mathcal{Q}$  ist bezüglich  $\Phi$  Boolesch unabhängig, wenn

$$\Phi(a_1 \cdots a_r) = \Phi(a_1) \cdots \Phi(a_r)$$

für alle  $a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$  mit  $i_j \in \mathbb{N}$ ,  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \dots, i_{r-1} \neq i_r$  und  $r \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq r$ .

**Satz 4.11. (Boolescher ZGS)** Sei  $(j_i : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Boolesch unabhängigen und identisch verteilten Quanten-Zufallsvariablen auf dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  und die Verteilung  $\varphi = \Phi \circ j_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  erfülle die Bedingungen

- (i)  $\varphi(x) = 0$
- (ii)  $\varphi(x^2) = 1$ ,

dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi^{*N} \left( \frac{x^k}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^k z(x) dx, \quad (45)$$

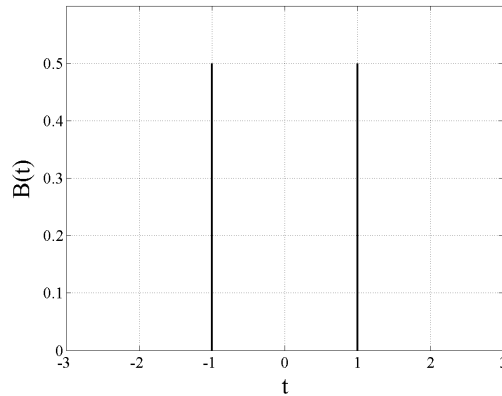
### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

wobei  $\varphi^{\star N}$  die  $N$ -fache Faltung von  $\varphi$  bezüglich des Booleschen Produktes  $\diamond$  bezeichnet und für  $z(x)$  gilt:

$$z(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = -1; +1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Vgl. hierzu [AHO], S. 216. □

Im Falle der Booleschen Unabhängigkeit ist das Faltungsexponential  $(\exp_{\star} g_{\varphi})(x^k)$  gemäß Korollar 4.4. somit von der Gestalt (45), wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß  $B(t) = \frac{1}{2}z(t)$  der rechten Seite der Gleichung (45) graphisch der Bernoulli-Verteilung entspricht:



Um zu definieren, unter welchen Bedingungen eine Folge  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von (nicht notwendigerweise unitalen) Unter-\*-Algebren eines Quanten-Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  monoton unabhängig ist, wird es notwendig, die folgende Notation einzuführen: Für ein endliches Tupel  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \mathbb{A}_n$  und  $r \geq 2$  wird  $p$  als Spitze bezeichnet, wenn

- (i)  $\varepsilon_{p-1} < \varepsilon_p$  und  $\varepsilon_p > \varepsilon_{p+1}$  für  $1 < p < r$  oder
- (ii)  $p = 1$  und  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  oder
- (iii)  $p = r$  und  $\varepsilon_{r-1} < \varepsilon_r$

erfüllt ist.

**Definition 4.11. (monotone Unabhängigkeit)** Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Unter-\*-Algebren von  $\mathcal{Q}$  ist bezüglich  $\Phi$  monoton unabhängig, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  und jedes endliche Tupel  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \mathbb{A}_n$

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

mit  $r \geq 2$

$$\Phi(a_1 \cdots a_r) = \Phi(a_p) \Phi(a_1 \cdots a_{p-1} a_{p+1} \cdots a_r)$$

gilt, wobei  $p$  Spitze in  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  ist und  $a_j \in \mathcal{A}_{\varepsilon_j}$  mit  $j = 1, \dots, r$ .

**Proposition 7.** Sei  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ein Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum,  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  Unter-\*-Algebren von  $\mathcal{Q}$  und seien  $j_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{Q}, \dots, j_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{Q}$  die Inklusionen. So ist eine Folge  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gemäß Definition 4.11. genau dann unabhängig, wenn  $j_1, \dots, j_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  unabhängig im Sinne von Definition 3.4. sind.

*Beweis.* Um die Äquivalenz von Definition 4.11. und 3.4. zu zeigen, werden drei Beweisschritte durchgeführt.

1. Schritt: Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest. Für die Einbettungen  $j_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{Q}, \dots, j_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{Q}$  in  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  sind die Verteilungen wie folgt definiert:

$$\varphi_i(a) = \Phi(a)$$

für  $a \in \mathcal{A}_i$  und  $i = 1, \dots, n$ . Zunächst wird gezeigt, dass es genau ein lineares Funktional

$$\varphi : \mathcal{A}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{C}$$

gibt, das die Gleichungen

$$\varphi(a_i) = \varphi_{\varepsilon_i}(a_i) \text{ mit } \varphi_{\varepsilon_i} = \Phi \upharpoonright \mathcal{A}_{\varepsilon_i} \tag{46}$$

$$\varphi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) = \varphi(a_p) \varphi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p-1} \otimes a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_r) \tag{47}$$

für alle  $r \geq 2$ ,  $p$  Spitze in  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \mathbb{A}_n$  und  $a_i \in \mathcal{A}_{\varepsilon_i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) erfüllt. Dies erfolgt mittels Induktion über  $r$ :

Induktionsanfang für  $r = 2$ : Ist  $\varepsilon = (1, 2)$ , dann gilt

$$\varphi(a_1 \otimes a_2) = \varphi(a_2) \varphi(a_1) = \varphi_2(a_2) \varphi_1(a_1)$$

und für  $\varepsilon = (2, 1)$  ist

$$\varphi(a_1 \otimes a_2) = \varphi(a_1) \varphi(a_2) = \varphi_2(a_1) \varphi_1(a_2),$$

so dass  $\varphi$  für  $r = 2$  eindeutig bestimmt ist.

Induktionsschritt für  $r \rightarrow r + 1$ : Nach Induktionsvoraussetzung liegen für alle  $l \leq r$  die



### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor- $\ast$ -Algebren

Werte  $\varphi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_l)$  fest. Für  $p$  Spitze in  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \mathbb{A}_n$  gilt dann

$$\varphi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+1}) = \underbrace{\varphi(a_p)}_{=\varphi_{\varepsilon_p}(a_p)} \underbrace{\varphi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p-1} \otimes a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_{r+1})}_{\text{Induktionsvoraussetzung}},$$

womit  $\varphi$  durch die Gleichungen (46) und (47) eindeutig festgelegt ist.

2. Schritt: Nun wird gezeigt, dass das lineare Funktional

$$\varphi = \varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n : \mathcal{A}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{C},$$

die Gleichung (47) erfüllt, d. h. unter Ausnutzung der Assoziativität des monotonen Produktes soll durch vollständige Induktion über  $n$  Folgendes gezeigt werden:

$$\begin{aligned} & (\varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \\ &= \varphi_{\varepsilon_p}(a_p)(\varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p-1} \otimes a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_r), \end{aligned} \quad (48)$$

falls  $p$  Spitze in  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  ist und  $a_p \in \mathcal{A}_{\varepsilon_p}$ .

Induktionsanfang für  $n = 2$ : Die Gleichung

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) = \varphi_1 \left( \prod_{k:\varepsilon_k=1}^{\rightarrow} a_k \right) \prod_{k:\varepsilon_k=2} \varphi_2(a_k)$$

erfüllt (48), da sich alle Spitzen in der Menge  $\{k \mid \varepsilon_k = 2\}$  befinden.

Induktionsschritt für  $n \rightarrow n + 1$ : Sei für  $\varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n$  die Gleichung (48) erfüllt, dann ist

$$\begin{aligned} & \underbrace{((\varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n) \triangleright \varphi_{n+1})}_{=\varphi}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \\ &= (\varphi \triangleright \varphi_{n+1})(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \\ &= \varphi \left( \prod_{k:\varepsilon_k \in \{1, \dots, n\}}^{\rightarrow} a_k \right) \prod_{k:\varepsilon_k=n+1} \varphi_{n+1}(a_k). \end{aligned}$$

Da  $n + 1$  immer eine Spitze ist und das lineare Funktional  $\varphi = \varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n$  nach Induktionsvoraussetzung die Gleichung (48) erfüllt, tut dies auch das lineare Funktional  $\varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n \triangleright \varphi_{n+1}$ .

3. Schritt: Seien  $j_1, \dots, j_n$  monoton unabhängig im Sinne von Definition 3.4. Dies be-

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

deutet, dass

$$\Phi \circ (j_1 \sqcup \cdots \sqcup j_n) = \varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n$$

für alle  $\varphi_i = \Phi \circ j_i$  erfüllt ist. Im zweiten Beweisschritt wurde gezeigt, dass  $\varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n$  die Gleichungen (46) und (47) erfüllt, was die monotone Unabhängigkeit von  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  gemäß Definition 4.11. bedeutet.

Sind umgekehrt  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  im Sinne von Definition 4.11. monoton unabhängig, dann gelten die Gleichungen (46) und (47) für  $\varphi = \Phi \circ (j_1 \sqcup \cdots \sqcup j_n)$ . Wegen der im ersten Beweisschritt gezeigten Eindeutigkeit, muss wiederum

$$\Phi \circ (j_1 \sqcup \cdots \sqcup j_n) = \varphi_1 \triangleright \cdots \triangleright \varphi_n$$

gelten, d. h.  $j_1, \dots, j_n$  sind unabhängig gemäß Definition 3.4. □

**Satz 4.12. (monotoner ZGS)** Sei  $(j_i : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{Q})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von monoton unabhängigen und identisch verteilten Quanten-Zufallsvariablen auf dem Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  und die Verteilung  $\varphi = \Phi \circ j_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  erfülle die Bedingungen

- (i)  $\varphi(x) = 0$
- (ii)  $\varphi(x^2) = 1$ ,

dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi^{*N} \left( \frac{x^k}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{x^k}{\sqrt{2-x^2}} dx, \quad (49)$$

wobei  $\varphi^{*N}$  die  $N$ -fache Faltung von  $\varphi$  bezüglich des monotonen Produktes  $\triangleright$  bezeichnet.

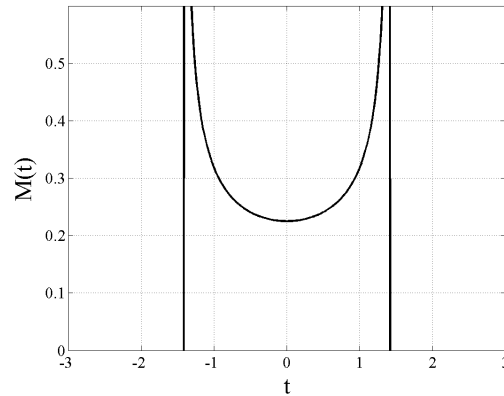
*Beweis.* Vgl. hierzu [AHO] S. 216; 228-229 oder [Mur2], S. 42-44. □

Im Falle der monotonen Unabhängigkeit ist das Faltungsexponential  $(\exp_{\star} g_{\varphi})(x^k)$  gemäß Korollar 4.4. folglich von der Gestalt (49). Das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichtefunktion

$$M(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{2-t^2}}, & \text{falls } |t| \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### 4.3 Der Zentrale Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Quanten-Zufallsvariablen auf Tensor-\*-Algebren

wird als standardisierte Arcus-Sinus-Verteilung bezeichnet und lässt sich graphisch wie folgt veranschaulichen:



Das monotone Produkt gemäß Definition 3.5. hängt von der Reihenfolge der Faktoren ab. Kehrt man die Reihenfolge um, so erhält man das antimonotone Produkt und damit den antimonotonen Unabhängigkeitsbegriff. Die Eigenschaften der monotonen Unabhängigkeit sind dabei analog zum antimonotonen Fall gegeben.

**Bemerkung 23.** *Das  $k$ -Tupel  $(j_1, \dots, j_k)$  von Quanten-Zufallsvariablen auf  $(\mathcal{Q}, \Phi)$  ist genau dann antimonoton unabhängig, wenn das  $k$ -Tupel  $(j_k, \dots, j_1)$  monoton unabhängig ist.*

Folglich erhält man auch im antimonotonen Fall als Grenzverteilung die (standardisierte) Arcus-Sinus-Verteilung.

## Literaturverzeichnis

- [Abe] ABE, Eiichi: *Hopf Algebras*, Cambridge University Press: Cambridge 1980.
- [AHO] ACCARDI, Luigi; HORA, Akihito; OBATA, Nobuaki: *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*, in: Theoretical and Mathematical Physics, Springer-Verlag: Berlin u. a. 2007.
- [BA] BOURBAKI, Nicolas: *Elements of Mathematics. Algebra I*, Kap. 1-3, Springer-Verlag: Berlin u. a. 1989.
- [BGS1] BEN GHORBAL, Anis; SCHÜRMAN, Michael: *On the algebraic foundations of non-commutative probability theory*, EMAU Greifswald Preprint-Reihe Mathematik 8 (1999).
- [BGS2] BEN GHORBAL, Anis; SCHÜRMAN, Michael: *Non-commutative notions of stochastic independence*, in: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 133 (2002), S. 531-561.
- [BGS3] BEN GHORBAL, Anis; SCHÜRMAN, Michael: *Quantum Lévy processes on dual groups*, in: Mathematische Zeitschrift 251 (2005), S. 147-165.
- [Boz] BOZEJKO, Marek: *Uniformly bounded representations of free groups*, in: Journal für reine und angewandte Mathematik 377 (1987), S. 170-186.
- [CuH] CUSHEN, Clive D.; HUDSON, Robin L.: *A quantum mechanical central limit theorem*, in: Journal of Applied Probability 8 (1971), S. 454-469.
- [Chu] CHUNG, Kai Lai: *A Course in Probability Theory*, 3. Auflage, Academic Press: San Diego u. a. 2001.
- [Fra1] FRANZ, Uwe: *Unification of Boolean, monotone, anti-monotone, and tensor independence and Lévy processes*, EMAU Greifswald Preprint-Reihe Mathematik 4 (2001).
- [Fra2] FRANZ, Uwe: *Lévy processes on quantum groups and dual groups*, in: FRANZ, Uwe; SCHÜRMAN, Michael (Hg.): *Quantum Independent Increment Processes II*, in: Lecture Notes in Mathematics 1866, Springer-Verlag: Berlin u. a. 2006, S. 161-257.

## Literaturverzeichnis

- [GvW] GIRI, Narasimhan; von WALDENFELS, Wilhelm: *An algebraic version of the central limit theorem*, in: Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 42 (1978), S. 129-134.
- [HuPa] HUDSON, Robin L.; PARTHASARATHY, Kalyanapuram R.: *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, in: Communications in Mathematical Physics 93 (1984), S. 301-323.
- [Kie] KIETZMANN, Stefan: *Der Begriff der bedingten Positivität in der Mathematik*, Bachelorarbeit, Greifswald 2008.
- [Len] LENCZEWSKI, Romuald: *Unification of independence in quantum probability*, in: Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 1 (1998), S. 383-405.
- [Lu] LU, Yun-Gang: *An interacting free Fock space and the arcsine law*, in: Probability and Mathematical Statistics 17 (1997), S. 149-166.
- [MacL] MAC LANE, Saunders: *Categories for the Working Mathematician*, 2. Auflage, Springer-Verlag: New York 1998.
- [Mey] MEYER, Paul A.: *Quantum Probability for Probabilists*, in: Lecture Notes in Mathematics 1538, 2. Auflage, Springer-Verlag: Berlin u. a. 1995.
- [Mur1] MURAKI, Naofumi: *Noncommutative Brownian motion in monotone Fock space*, in: Communications in Mathematical Physics 183 (1997), S. 557-570.
- [Mur2] MURAKI, Naofumi: *Monotonic independences, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers*, in: Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 4 (2001), S. 39-58.
- [Mur3] MURAKI, Naofumi: *The five independences as natural products*, EMAU Greifswald Preprint-Reihe Mathematik 3 (2002).
- [NiSp] NICA, Alexandru; SPEICHER, Roland: *Lectures on the Combinatorics of Free Probability*, in: London Mathematical Society Lecture Note Series 335, Cambridge University Press: Cambridge u. a. 2006.
- [Par] PARTHASARATHY, Kalyanapuram R.: *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhäuser: Basel u. a. 1992.

## Literaturverzeichnis

- [Sch85] SCHÜRMAN, Michael: *Positive and conditionally positive linear functionals on coalgebras*, in: ACCARDI, Luigi; VON WALDENFELS, Wilhelm (Hg.): *Quantum Probability and Applications II*, in: Lecture Notes in Mathematics 1136, Springer-Verlag: Berlin u. a. 1985, S. 475-492.
- [Sch93] SCHÜRMAN, Michael: *White Noise on Bialgebras*, in: Lecture Notes in Mathematics 1544, Springer-Verlag: Berlin u. a. 1993.
- [Spe1] SPEICHER, Roland: *A new example of 'independence' and 'white noise'*, in: Probability Theory and Related Fields 84 (1990), S. 141-159.
- [Spe2] SPEICHER, Roland: *On universal products*, in: VOICULESCU, Dan-Virgil (Hg.): *Free probability theory*, in: Fields Institute Communications, Bd. 12, American Mathematical Society: Providence 1997, S. 257-266.
- [Swe] SWEEDLER, Moss E.: *Hopf Algebras*, in: Mathematics Lecture Note Series, Benjamin: New York 1969.
- [Voß] VOß, Stefan: *Faltungshalbgruppen auf algebraischen Strukturen*, Diplomarbeit, Greifswald 2007.
- [Voi86] VOICULESCU, Dan-Virgil: *Addition of non-commuting random variables*, in: Journal of Functional Analysis 66 (1986), S. 323-346.
- [Voi87] VOICULESCU, Dan-Virgil: *Dual algebraic structures on operator algebras related to free products*, in: Journal of Operator Theory 17 (1987), S. 85-98.
- [vWa] von WALDENFELS, Wilhelm: *An algebraic central limit theorem in the anti-commuting case*, in: Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 42 (1978), S. 135-140.

# Index

## A

---

Algebra .....	13
*-Algebra .....	15
Homomorphismus .....	14
$\mathbb{N}_0$ -graduiert .....	23
unital .....	14
Unteralgebra .....	14

## B

---

Bialgebra .....	16
*-Bialgebra .....	17
Bilineare Abbildung .....	11

## D

---

Duale Halbgruppe, duale Gruppe ...	34-35
Faltung .....	38-39
Hauptsatz .....	59
$\mathbb{N}_0$ -graduiert .....	39
Dualraum .....	13

## F

---

Faltungsexponential .....	21
Freies Produkt .....	25
Funktor .....	42

## H

---

Homogene Abbildung .....	23
Hopf-Algebra .....	17
Hopf-*-Algebra .....	18

## I

---

Induktiver Limes .....	18
Induktives System .....	18
Involution .....	14

## K

---

Kategorie .....	41-42
Koalgebra .....	15
Faltung .....	21
Fundamentalsatz .....	20
Grenzwertsatz .....	57
Homomorphismus .....	16

$\mathbb{N}_0$ -graduiert .....	23
Unterkoalgebra .....	20

## L

---

Linearer Operator .....	10-11
Lineares Funktional .....	13

## M

---

Moment .....	69-70, 72
Momentenfunktional .....	70
Monom .....	69

## Q

---

Quanten-Wahrscheinlichkeitsraum ...	61-62
Quanten-Zufallsvariable .....	62
Faltung .....	62-63
Verteilung .....	62

## T

---

Tensoralgebra .....	23
$\mathbb{N}_0$ -graduiert .....	50-51
symmetrisch .....	43
Tensor-*-Algebra .....	65
Tensorprodukt .....	11
$\mathbb{N}_0$ -graduiert .....	22

## U

---

Unabhängigkeit .....	32, 72
antimonoton .....	81
Boolesch .....	76
frei .....	75
monoton .....	77-78
tensor .....	73
Universelles Produkt .....	30, 33

## Z

---

Zentraler Grenzwertsatz .....	59
Boolesch .....	76-77
frei .....	75
kommutativ .....	74
monoton .....	80
Zustand .....	31-32