ERNST MORITZ ARNDT
UNIVERSITÄT GREIFSWALD

Wissen
lockt.
Seit 1456

Realisierung von „braided“ Quanten-Lévy-Prozessen

Masterarbeit

zur Erlangung des wissenschaftlichen Grades

Master of Science (M.Sc.) im Studiengang Mathematik

am Institut für Mathematik und Informatik der
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

vorgelegt am 18. Mai 2017
von
Monika Malczak

1. Gutachter: Prof. Dr. Michael Schürmann

2. Gutachter: Prof. Dr. Volkmar Liebscher

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Motivation

Lévy-Prozesse, dazu zählen z. B. die Brownsche Bewegung und der Poisson-Prozess, sind wichtige Beispiele für stochastische Prozesse in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie. In der Quantenwahrscheinlichkeitstheorie können Lévy-Prozesse immer dann definiert werden, wenn ein Unabhängigkeitsbegriff mit einer zugehörigen Faltung existiert. In [Mur03] wurde gezeigt, dass es unter „vernünftigen" Voraussetzungen genau fünf verschiedene Unabhängigkeitsbegriff gibt. Die sogenannte Tensor-Unabhängigkeit ist hierbei mit der Unabhängigkeit in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie am engsten verwandt und die Grundlage der vorliegenden Arbeit.

In der Theorie der Lévy-Prozesse auf (klassischen) $*$-Bialgebren ([ASW88], [Sch93], [FS99]) stammt der „Twist" des Tensorprodukts von einer Gruppen-Wirkung und -Kowirkung. Allgemein muss dies jedoch nicht der Fall sein, sodass man sogenannte „Braidings" betrachten kann. Dies sind natürliche Isomorphismen in einer Tensorkategorie, die die sogenannte Braid-Gleichung

$$(\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) = (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id})$$

erfüllen. Man kann zeigen, dass diese Gleichung auf gewisse Weise äquivalent zu der Quanten-Yang-Baxter-Gleichung (QYBE)

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

ist, wobei R eine universelle R-Matrix beschreibt. Die QYBE spielt eine sehr wichtige Rolle in verschiedenen Bereichen der theoretischen bzw. mathematischen Physik, siehe hierfür z. B. [LR97]. Außerdem war das Suchen nach Lösungen der QYBE einer der Hauptgründe für die Entwicklung der Theorie der Quantengruppen, siehe [Kak00].

Mit Hilfe solcher R-Matrizen werden quasitriangulare Bialgebren definiert, siehe [Dri87]. Dies sind Bialgebren, die weder kommutativ noch kokommutativ sind, sondern deren Kommutativität gerade durch Konjugation mit einer R-Matrix „kontrolliert" wird. Mit Hilfe der quasitriangularen Bialgebren kann nun die Einschränkung, dass der Twist von einer Gruppen-Wirkung und -Kowirkung stammen soll, aufgehoben werden, indem wir Lévy-Prozesse auf „braided $*$-Bialgebren" betrachten.

Durch die „Symmetrisierung" (bzw. Bosonisierung) einer braided $*$-Bialgebra, d.h. dem Einbetten in einer größere (klassische) $*$-Bialgebra, kann man dann ebenfalls einen Zusammenhang zwischen Lévy-Prozessen auf einer braided $*$-Bialgebra und „symmetrisierten" Prozessen auf der zugehörigen symmetrisierten $*$-Bialgebra herstellen. Somit kann man dann die Theorie der braided Quanten-Lévy-Prozesse auf die bereits bekannte Theorie zurückführen.

Diese Verallgemeinerung liefert zusätzlich eine neue Klasse von interessanten Prozessen. Im eindimensionalen Fall mit der R-Matrix $R = (q)$ mit $q \neq 0$ erhält man den bereits bekannten Azéma-Prozess, siehe [Sch91]. Dieser ist eine Deformation der klassischen Brownschen Bewegung und tritt als Lösung quantenstochastischer Differentialgleichungen auf. In höheren Dimensionen existieren viele Möglichkeiten eine R-Matrix zu wählen. Dies führt zu Prozessen, die als mehrdimensionale Azéma-Prozesse aufgefasst werden können.

Kapitelübersicht

Wir wollen nun noch einen Überblick über den Aufbau der Arbeit geben.

In Kapitel 1 führen wir zunächst die notwendigen Grundlagen über „braided“ Strukturen ein. Wir betrachten, wie man sogenannte Braid-Diagramme liest und definieren braided Algebren, $*$-Koalgebren und $*$-Bialgebren.

Anschließend betrachten wir in Kapitel 2 die notwendigen Grundlagen über quasi- und coquasitriangulare Bialgebren. Wir führen die Quanten Yang-Baxter-Gleichung ein und zeigen, dass diese auf eine gewisse Weise äquivalent zu der Braid-Gleichung ist. Abschließend definieren wir in diesem Kapitel die sogenannte FRT-Bialgebra und erweitern sie um eine Involution.

In Kapitel 3 wiederholen wir die Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren mit Hilfe von Hopf-$*$-Algebren, die in [Mal14] ausgearbeitet wurde, und stellen sie in einen Zusammenhang zu den sogenannten Yetter-Drinfeld-Moduln. Wir betrachten ebenfalls die Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren mit Hilfe von coquasitriangularen $*$-Bialgebren, die für die folgenden Kapitel von großer Wichtigkeit ist. Beide Zugänge liefern unter (leicht verschiedenen Voraussetzungen) dieselbe Bialgebren-Struktur der symmetrisierten $*$-Bialgebra.

In Kapitel 4 fassen wir die wichtigsten Ergebnisse zu der bereits bekannten Theorie der Quanten-Lévy-Prozesse auf involutiven Bialgebren zusammen.

Diese brauchen wir, um in Kapitel 5 die Theorie auf braided Quanten-Lévy-Prozesse erweitern zu können. Wir betrachten hier unter anderem den Zusammenhang zwischen einem Schürmann-Tripel eines braided Quanten-Lévy-Prozesses und dem Schürmann-Tripel des zugehörigen „symmetrisierten“ Prozesses.

In Kapitel 6 „berechnen“ wir die linke und die rechte Symmetrisierung für gewisse braided $*$-Bialgebra mit Hilfe der FRT-$*$-Bialgebren $\mathcal{A}_*(R)$ bzw. $\mathcal{A}_*(R')$.

Abschließend betrachten wir in Kapitel 7 bestimmte Quanten-Lévy-Prozesse, nämlich die sogenannte Brownsche Bewegung, auf einer der symmetrisierten braided $*$-Bialgebren aus dem vorangegangenen Kapitel und können mit Hilfe der Ergebnisse aus den Kapiteln 4 und 5 zeigen, wie diese auf dem symmetrischen Fockraum als Lösung von quantenstochastischen Differentialgleichungen realisiert werden kann.

Im Anhang finden sich Grundlagen zur Kategorientheorie, zur klassischen Theorie von Algebren, Koalgebren und Bialgebren, sowie zu Moduln und Komoduln. Außerdem findet sich dort eine Übersicht über die verwendeten Braid-Diagramme.

Das Ziel der Arbeit war es, die Ergebnisse aus [FSS03] aufzuarbeiten und klar zu strukturieren, sowie in einen Zusammenhang zu den Yetter-Drinfeld-Moduln zu stellen. Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, dass sich die Quellenangaben auf das nicht-veröffentlichte Paper [FSS03] beziehen. Die Ergebnisse des Papers sind jedoch ebenso in [Fra04] zu finden.

Kapitel 1

Braided Strukturen

In diesem Abschnitt möchten wir zunächst die notwendigen Grundlagen, die größtenteils auch bereits in [Mal14] zu finden sind, wiederholen und um einige neue ergänzen. Tieferliegende Grundlagen wie z. B. zum Tensorprodukt, zur Kategorientheorie sowie zu Moduln, Algebren, Koalgebren, und Bialgebren sind im Anhang zu finden. Wir beginnen zunächst mit kategorientheoretischen Grundlagen, um die sogenannten Braid-Diagramme zu wiederholen, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit an einigen Stellen verwenden werden.

1.1 Braided Tensorkategorien

In diesem Abschnitt wollen wir wiederholen, wie man Tensorkategorien (siehe hierfür Anhang A.5) um sogenannte „Braidings“ (deutsch: Zopfung) erweitern kann. Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an [Kas95, Chapter XIII]. Für weitere Zusammenfassungen siehe z. B. [Maj95, Chapter 9.2] oder für eine ausführliche Behandlung [Mac71]. Wir verwenden hier im weiteren Verlauf den englischen Begriff „Braiding“ und lassen die Anführungszeichen weg.

Sei $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, \lambda, \rho)$ eine Tensorkategorie und $\otimes^{op}$ der Funktor, der durch

$$\otimes^{op} \colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$$

$$\mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \ni (A, B) \mapsto B \otimes A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$$

$$\mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \ni (f, g) \mapsto g \otimes f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$$

definert ist. Ein **Braiding $\boldsymbol{\Psi}$** in der Tensorkategorie $\mathfrak{C}$ ist ein natürlicher Isomorphismus zwischen den Funktoren $\otimes \colon (U, V) \to U \otimes V$ und $\otimes^{op} \colon (U, V) \to V \otimes U$, der die Hexagon-Axiome erfüllt, d. h. es kommutieren die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "\Psi_{U,V\otimes W}"] & (V \otimes W) \otimes U \arrow[dr, "a_{V,W,U}"] & \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[ur, "a_{U,V,W}"] \arrow[dr, "\Psi_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W"'] & & & V \otimes (W \otimes U) \\
 & (V \otimes U) \otimes W \arrow[r, "a_{V,U,W}"'] & V \otimes (U \otimes W) \arrow[ur, "\mathrm{id}_V \otimes \Psi_{U,W}"'] &
\end{tikzcd} \tag{Hex1}$$

und

$$\begin{tikzcd}
& (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "\Psi_{U \otimes V, W}"] & W \otimes (U \otimes V) \arrow[dr, "a^{-1}_{W,U,V}"] & \\
U \otimes (V \otimes W) \arrow[ur, "a^{-1}_{U,V,W}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_U \otimes \Psi_{V,W}"'] & & & (W \otimes U) \otimes V \\
& U \otimes (W \otimes V) \arrow[r, "a^{-1}_{U,W,V}"'] & (U \otimes W) \otimes V \arrow[ur, "\Psi_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V"'] &
\end{tikzcd} \tag{Hex2}$$

Wir nennen $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, \lambda, \rho, \Psi)$ (oder kurz $(\mathfrak{C}, \Psi)$) in diesem Fall **braided Tensorkategorie**. Ein Braiding Ψ heißt **symmetrisch**, falls $\Psi^2 = \mathrm{id}$ gilt.

Beispiel 1.1.1 Wir bezeichnen mit $\mathrm{Vec}(\mathbb{K})$ die Kategorie, deren Objekte $\mathbb{K}$-Vektorräume und deren Morphismen lineare Abbildungen sind. $\mathrm{Vec}(\mathbb{K})$ wird zusammen mit dem Flipoperator $\tau \colon V \otimes W \to W \otimes V$, $\tau(v \otimes w) \coloneqq w \otimes v$ zu einer braided Kategorie.

Wir wollen nun zeigen, dass in braided Tensorkategorien die folgende Gleichung gilt, die für uns von zentraler Bedeutung ist. An den Stellen, an denen Indizes an den Abbildungen förderlich für das Verständnis sind, werden wir diese im weiteren Verlauf nutzen. Wenn diese jedoch aus dem Zusammenhang klar sind, so lassen wir sie weg.

Satz 1.1.2 *In einer braided Tensorkategorie $(\mathfrak{C}, \Psi)$ kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
& & & (U \otimes W) \otimes V \arrow[dr, "\Psi_{W,U} \otimes \mathrm{id}_V"] & & & \\
& & U \otimes (W \otimes V) \arrow[ur, "a^{-1}_{U,W,V}"] \arrow[dddrrr, dashed] & & (W \otimes U) \otimes V \arrow[dr, "a_{W,U,V}"] & & \\
& U \otimes (V \otimes W) \arrow[ur, "\mathrm{id}_U \otimes \Psi_{V,W}"] \arrow[dddrrr, dashed] & & & & W \otimes (U \otimes V) \arrow[dr, "\mathrm{id}_W \otimes \Psi_{V,U}"] & \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[ur, "a_{U,V,W}"] \arrow[dr, "\Psi_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W"'] & & & & & & W \otimes (V \otimes U) \\
& (V \otimes U) \otimes W \arrow[dr, "a_{V,U,W}"'] & & & & (W \otimes V) \otimes U \arrow[ur, "a_{W,V,U}"'] & \\
& & V \otimes (U \otimes W) \arrow[dr, "\mathrm{id}_V \otimes \Psi_{U,W}"'] & & (V \otimes W) \otimes U \arrow[ur, "\Psi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U"'] & & \\
& & & V \otimes (W \otimes U) \arrow[ur, "a^{-1}_{V,W,U}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

d. h. es gilt

$$\begin{aligned}
a_{U,V,W} \circ (\mathrm{id}_U \otimes \Psi_{V,W}) \circ a^{-1}_{U,W,V} \circ (\Psi_{W,U} \otimes \mathrm{id}_V) \circ a_{W,U,V} \circ (\mathrm{id}_W \otimes \Psi_{V,U}) \\
= (\Psi_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) \circ a_{V,U,W} \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi_{U,W}) \circ a^{-1}_{V,W,U} \circ (\Psi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U) \circ a_{W,V,U}
\end{aligned}$$

Beweis: Wir wollen nun zeigen, dass das Diagramm kommutiert. Die beiden äußeren Rechtecke entsprechen jeweils Diagramm (Hex1) und kommutieren daher. Weiterhin ist Ψ per Definition ein natürlicher Isomorphismus, d. h. es kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \otimes (W \otimes V) \arrow[r, "\Psi_{U,W\otimes V}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{W,V}"'] & (W \otimes V) \otimes U \arrow[d, "\Psi_{W,V} \otimes \mathrm{id}"] \\
U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "\Psi_{U,V\otimes W}"] & (V \otimes W) \otimes U
\end{tikzcd}$$

und somit das innere Rechteck. Insgesamt kommutiert also das gesamte Diagramm. □

Bis auf kanonische Isomorphie gilt somit das folgende

Korollar 1.1.3 *Sei* $(\mathfrak{C}, \Psi)$ *eine braided Tensorkategorie. Dann gilt die* ***Braid-Gleichung***

$$(\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) = (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}). \tag{1.1.1}$$

Da es für unsere Belange oft von Vorteil ist, ein „kleineres“ Setting zu wählen, betrachten wir die Tensorkategorie, die von einem Vektorraum V und seinen Tensorpotenzen $V^{\otimes n}$ gebildet wird. Dieser Zugang ist z. B. zu finden in [Ufe04], [Maj95] und [GKL12].

Definition 1.1.4 *Ein* ***braided $*$-Vektorraum*** (V, Ψ) *ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Automorphismus* $\Psi \in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$*, genannt* ***Braiding****, sodass die Braid-Gleichnung (1.1.1) erfüllt ist.*

Wir wollen zunächst eine grundlegende Eigenschaft von braided Vektorräumen festhalten.

Lemma 1.1.5 *Sei* (V, Ψ) *ein braided Vektorraum. Dann ist auch* Ψ^{-1} *ein Braiding für* V*.*

Beweis: Sei (V, Ψ) ein braided Vektorraum, d. h. es gilt die Braid-Gleichung 1.1.1

$$(\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) = (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}).$$

Indem wir $(\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi^{-1}) \circ (\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id})$ auf beide Seiten von links anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&(\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi^{-1}) \circ (\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) = \\
&\qquad \underbrace{(\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi^{-1}) \circ (\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id})}_{=\mathrm{id}}.
\end{aligned}$$

Durch Konjugation mit $\circ(\mathrm{id} \otimes \Psi^{-1}) \circ (\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi^{-1})$ von rechts erhalten wir dann

$$(\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi^{-1}) \circ (\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \Psi^{-1}) \circ (\Psi^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi^{-1}).$$

Dies ist die Braid-Gleichung für Ψ^{-1} und somit ist Ψ^{-1} auch ein Braiding auf V. □

Analog zu [GKL12] und [Ufe04] definieren wir für jedes Braiding $\Psi \in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$ das Braiding $\Psi_{m,n} \colon V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \to V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned}
\Psi_{0,0} &\coloneqq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, & \Psi_{1,m+1} &\coloneqq (\mathrm{id}_V \otimes \Psi_{1,m}) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes m}}), \\
\Psi_{1,0} = \Psi_{0,1} &\coloneqq \mathrm{id}_V, & \Psi_{n+1,m} &\coloneqq (\Psi_{n,m} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_{V^{\otimes n}} \otimes \Psi_{1,m}).
\end{aligned}$$

Es gilt somit inbesondere $\Psi_{1,1} = \Psi$ und wir erhalten zum Beispiel

$$\Psi_{2,2} = (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Psi \otimes \Psi) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}).$$

Das Inverse zu $\Psi_{m,n}$ ist gegeben durch $(\Psi^{-1})_{n,m}$, d. h. es gilt $(\Psi_{m,n})^{-1} = (\Psi^{-1})_{n,m}$.

Definition 1.1.6 *Wir nennen eine Abbildung $\Phi\colon V^{\otimes m} \to V^{\otimes n}$ auf einem braided Vektorraum (V, Ψ)* ***Ψ-invariant****, falls*

$$(\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi_{1,m} = \Psi_{1,n} \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi) \tag{1.1.2}$$

gilt.

Diese Forderung ist wegen $(\Psi_{n,m})^{-1} = (\Psi^{-1})_{m,n}$ äquivalent zu

$$(\Psi^{-1})_{n,1} \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \Phi) \circ (\Psi^{-1})_{m,1}.$$

Definition 1.1.7 *Wir nennen $\Phi\colon V^{\otimes m} \to V^{\otimes n}$* ***Ψ-kompatibel****, falls Φ sowohl Ψ- als auch Ψ^{-1}-invariant ist,*

Bemerkung 1.1.8 Wenn Φ Ψ-kompatibel ist, gelten also die folgenden Gleichungen

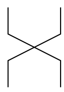
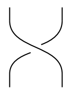
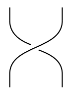
$$\begin{gathered}
(\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi_{1,m} = \Psi_{1,n} \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi), \\
(\Psi^{-1})_{n,1} \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \Phi) \circ (\Psi^{-1})_{m,1}, \\
(\mathrm{id} \otimes \Phi) \circ \Psi_{m,1} = \Psi_{n,1} \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}), \\
(\Psi^{-1})_{1,n} \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi) = (\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Psi^{-1})_{m,1},
\end{gathered}$$

wobei die erste und die zweite, sowie die dritte und die vierte Gleichung jeweils äquivalent zueinander sind.

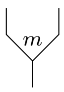
1.2 Einführung in Braid-Diagramme

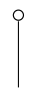
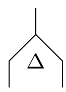
In diesem Abschnitt wollen wir daran erinnern, wie die sogenannten Braid-Diagramme zu lesen sind. Diese werden in erster Linie für eine bessere Anschauung genutzt. Beispiele für das Verwenden von Braid-Diagrammen sind z. B. in [JS93], [Maj95] oder [Kau13] zu finden. Wir beschränken uns hier auf braided Tensorkategorien, deren Objekte Vektorräume sind.

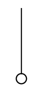
Zunächst wollen wir die grundlegenden Bausteine, aus denen die (in dieser Arbeit vorkommenden) Diagramme bestehen, betrachten. Hier bezeichnet erneut τ den Flipoperator und Ψ ein Braiding.

id $=$ τ $=$  Ψ $=$  $\Psi^{-1} =$ 

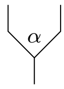
Für eine Algebra $(\mathcal{A}, m, \mathbb{1})$ und Koalgebra $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$ (siehe A.2) verwenden wir die folgenden Bausteine.

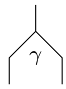
m $=$ 

$\mathbb{1}$ $=$  Δ $=$ 

δ $=$ 

Für die Wirkung $\alpha\colon \mathcal{A}\otimes V \to V$ und Kowirkung $\gamma\colon V \to \mathcal{A}\otimes V$ auf einen Modul bzw. Komodul nutzen wir die Bausteine

$\alpha =$ 

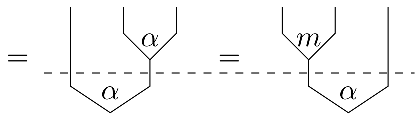
$\gamma =$ 

Bei allen Bausteinen entspricht jeweils die Anzahl der eingehenden Kanten der Anzahl der Eingänge der dargestellten Abbildung und stellt den Definitionsbereich dar. Analog entspricht die Anzahl der ausgehenden Kanten den Ausgängen der Abbildung und stellt somit den Wertebereich dar. Für eine bessere Lesbarkeit schreiben wir, wenn wir eine Rechnung in der Diagrammschreibweise darstellen, jeweils vor das erste und hinter das letzte Diagramm die entsprechende Formel und lassen innerhalb der Diagramme die Indizes weg, wenn diese aus dem Zusammenhang klar sind. Wir wollen nun anhand eines ersten einfachen Beispiels nachvollziehen, wie wir die einzelnen Bausteine verknüpfen und die Diagramme lesen. Hierfür betrachten wir Gleichung A.4.1, d. h.

$$\alpha \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha) = \alpha \circ (m_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}).$$

Diese sieht in Diagrammschreibweise wie folgt aus

$$\alpha \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha)$$



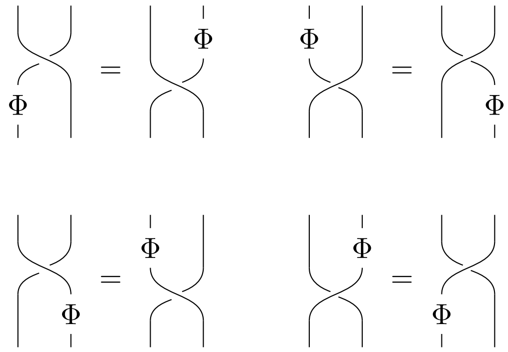
$$= \alpha \circ (m_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id})$$

In diesem Diagramm sind die einzelnen Ebenen durch eine gestrichelte Linie angedeutet. Diese dient jedoch nur der Erklärung und wird in den folgenden Rechnungen weggelassen. Wir berachten zunächst die linke Seite der Gleichung. Diese können wir im Diagramm wiedererkennen, indem wir alle Bausteine einer Ebene von links nach rechts miteinander tensorieren und die erhaltenen Terme dann von unten nach oben miteinander verknüpfen. Im Fall der linken Seite der Gleichung erhalten wir so als Terme für die einzelnen Ebenen α und $(\mathrm{id}\otimes\alpha)$ und verknüpfen diese entsprechend der Reihenfolge im Diagramm von unten nach oben und erhalten damit $\alpha\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha)$. Soweit wie möglich werden im weiteren Verlauf alle Rechenschritte durch gestrichelte Linien, die diese Rechenschritte verdeutlichen sollen, kenntlich gemacht.

Ein Rechenschritt, den wir häufig durchführen werden, ist das „Vorbeiziehen“ von Abbildungen an dem Flipoperator $\tau_{V,W}$, das wir durch einen gestrichelten Pfeil kenntlich machen. Um einzusehen, dass dies möglich ist, müssen wir uns klar machen, dass $\tau_{V,W}$ eine natürliche Transformation ist, d. h. dass $(g \otimes f) \circ \tau_{V_1,V_2} = \tau_{W_1,W_2} \circ (f \otimes g)$ für $f\colon V_1 \to W_1$ und $g\colon V_2 \to W_2$ gilt. Dies zeigt die folgende Rechnung

$$\begin{aligned}(g \otimes f) \circ \tau_{V_1,V_2}(v \otimes w) &= (g \otimes f)(w \otimes v)\\ &= g(w) \otimes f(v)\\ &= \tau_{W_1,W_2}(f(v) \otimes g(w))\\ &= \tau_{W_1,W_2}(f \otimes g)(v \otimes w).\end{aligned}$$

Die in Definition 1.1.7 eingeführte Ψ-Kompatibilität entspricht im Diagramm einem „Vorbeiziehen“ der Abbildung vor oder hinter dem Braiding. Für eine Abbildung $\Phi\colon V \to V$ sehen die zugehörigen Diagramme wie folgt aus.



Eine Übersicht der verwendeten Formeln ist inklusive der zugehörigen Diagramme im Anhang A.6 zu finden.

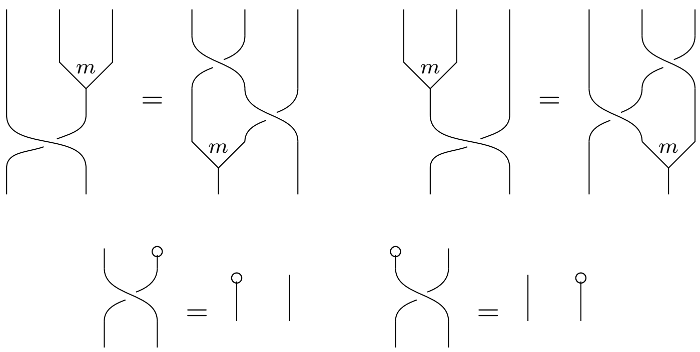
1.3 Braided Algebren und $(*)$-Koalgebren

Wir wollen nun die für uns grundlegenden Definitionen von braided Algebren und Koalgebren einführen, siehe z.B. [GKL12]. Wie wir bereits in Abschnitt 1.1 gesehen haben, existieren zwei Zugänge um braided Tensorkategorien, deren Objekte Vektorräume sind, zu betrachten. Wir wählen hier den zweiten Zugang und verweisen für den kategorientheoretischen Zugang auf Anhang A.5.

Definition 1.3.1 *Eine **braided Algebra** $(\mathcal{A}, m, \mathbb{1}, \Psi)$ ist eine unitale, assoziative Algebra $\mathcal{A}$, die ebenfalls ein braided Vektorraum $(\mathcal{A}, \Psi)$ ist, sodass m und $\mathbb{1}$ Ψ-kompatibel sind, d. h. es gelten*

$$
\begin{aligned}
\Psi \circ (\mathrm{id} \otimes m) &= (m \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi_{1,2}, & \Psi \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) &= (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}), \\
\Psi \circ (m \otimes \mathrm{id}) &= (\mathrm{id} \otimes m) \circ \Psi_{2,1}, & \Psi \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) &= (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}).
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

Wir erhalten für die Ψ-Invarianz in Diagramm-Darstellung



Wegen Bemerkung 1.1.8 gelten entsprechende Diagramme auch für das Braiding Ψ^{-1}.

Bemerkung 1.3.2 Jede Algebra (im klassischen Sinn, siehe Anhang A.2) kann als τ-braided Algebra aufgefasst werden.

Bemerkung 1.3.3 Sei $(\mathcal{A}, m, \mathbb{1}, \Psi)$ eine braided Algebra. Wir defineren rekursiv

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1 &\coloneqq m, \\ \mathrm{M}_n &\coloneqq (m \otimes \mathrm{M}_{n-1}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi_{n-1,1} \otimes \mathrm{id}^{\otimes(n-1)}). \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathcal{A}^{\otimes n}, \mathrm{M}_n, \mathbb{1}^{\otimes n}, \Psi_{n,n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine braided Algebra. Insbesondere ist also auch $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, m_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}, \Psi_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}})$ mit

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}} &= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}), \\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}} &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \\ \Psi_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}} &= \Psi_{2,2} \end{aligned}$$

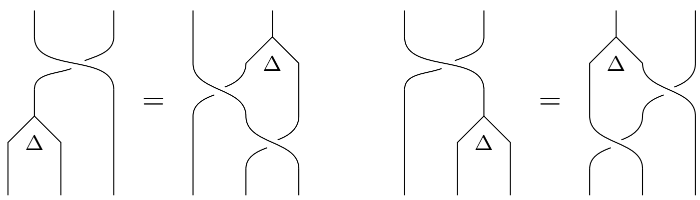
eine braided Algebra

Analog zur obigen Definition betrachten wir die folgenden Definitionen.

Definition 1.3.4 *Eine **braided Koalgebra** $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi)$ ist eine Koalgebra $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$, die ebenfalls ein braided Vektorraum $(\mathcal{C}, \Psi)$ ist, sodass Δ und δ Ψ-kompatibel sind, d. h. es gelten*

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi &= \Psi_{1,2} \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \qquad & (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi &= (\mathrm{id} \otimes \delta) \\ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Psi &= \Psi_{2,1} \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \qquad & (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Psi &= (\delta \otimes \mathrm{id}) \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Die angegebenen Gleichungen stellen sich wie folgt in Braid-Diagrammen dar.



Erneut gelten wegen Bemerkung 1.1.8 entsprechende Diagramme auch für das Braiding Ψ^{-1}. Wir erhalten für das Tensorprodukt von Koalgebren ein zu Algebren analoges Resultat.

Bemerkung 1.3.5 Sei $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi)$ eine braided Koalgebra und definiere rekursiv

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\coloneqq \Delta, \\ \Lambda_n &\coloneqq (\mathrm{id} \otimes \Psi_{1,n-1} \otimes \mathrm{id}^{\otimes(n-1)}) \circ (\Delta \otimes \Lambda_{n-1}). \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathcal{C}^{\otimes n}, \Lambda_n, \delta^{\otimes n}, \Psi_{n,n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine braided Koalgebra

Wir wollen an dieser Stelle den Beweis für $n = 2$ ausführen, da dieses Resultat wichtig für Abschnitt 5.1 sein wird.

Lemma 1.3.6 *Sei $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi)$ eine braided Koalgebra. Dann ist $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}, \delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}, \Psi_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}})$ mit*

$$\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta),$$

$$\delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = \delta \otimes \delta,$$
$$\Psi_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = \Psi_{2,2}$$

eine braided Koalgebra.

Beweis: Wir erinnern zunächst daran, dass die Gleichungen

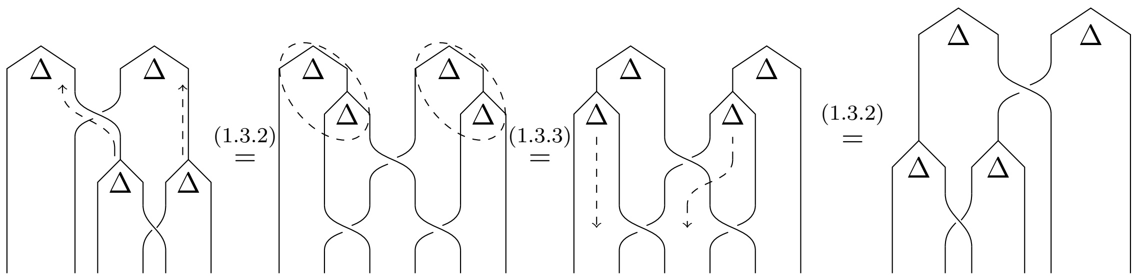
$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{1.3.3}$$
$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta = \mathrm{id} \tag{1.3.4}$$

sowie die Gleichungen (1.3.2) gelten, da $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi)$ (nach Voraussetzung) eine braided Koalgebra und somit insbesondere auch eine Koalgebra im üblichen Sinn mit Ψ-kompatibler Komultiplikation und Koeins ist.

Wir wollen beweisen, dass $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}, \delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}, \Psi_{2,2})$ eine braided Koalgebra ist. Dass das Tensorprodukt $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ von Vektorräumen wieder ein Vektorraum ist, ist bekannt. Wir betrachten zunächst die Koassoziativität (1.3.3) der Komultiplikation $\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ mit Hilfe der bereits eingeführten Braid-Diagramme.

$(\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$

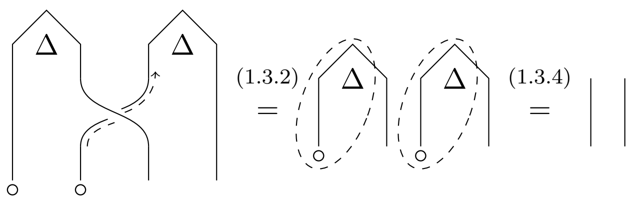
$= \big(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \big((\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)\big)\big) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$

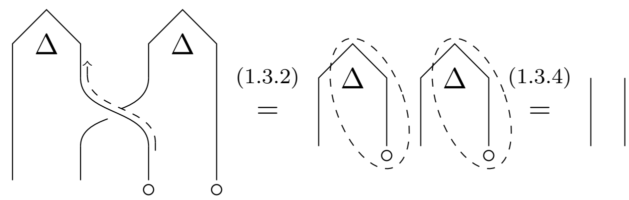
$=$ 

$= \big(\big((\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)\big) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}\big) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$

$= (\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$

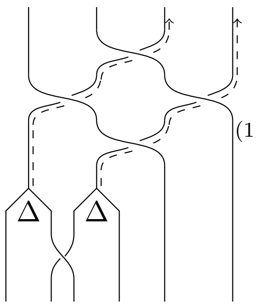
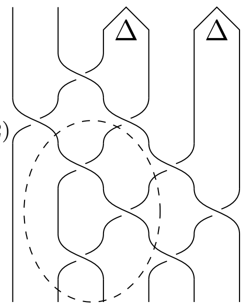
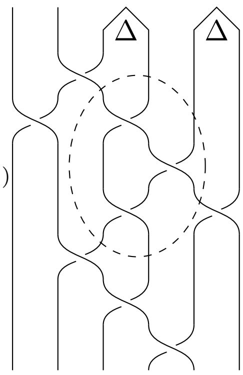
Nun zeigen wir noch, dass die Koeins-Eigenschaft (1.3.4) erfüllt ist.

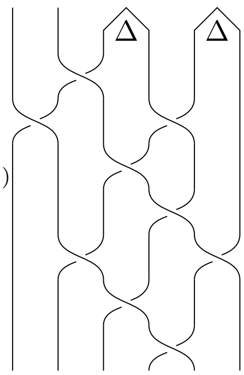
$(\delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} =$  $= \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$

$(\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} =$  $= \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$

Somit ist $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ eine Koalgebra im üblichen Sinn. Wir zeigen nun, dass $\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ Ψ-kompatibel ist, d. h. dass Gleichungen (1.3.2) für $\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ erfüllt sind und beginnen mit der Ψ-Invarianz. Es gilt

$$(\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Psi_{2,2}$$
$$= \big(((\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}\big) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Psi \otimes \Psi) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id})$$

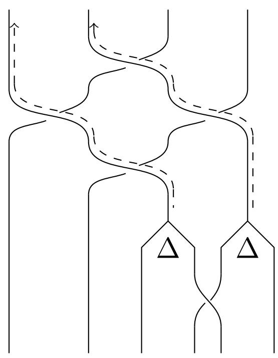
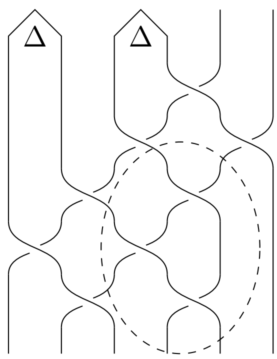
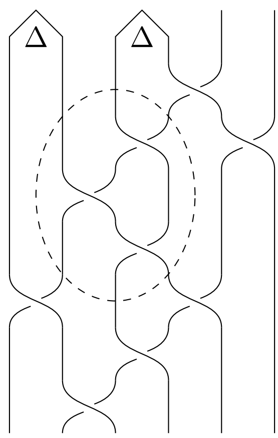
$=$  $\overset{(1.3.2)}{=}$  $\overset{(1.1.1)}{=}$ 

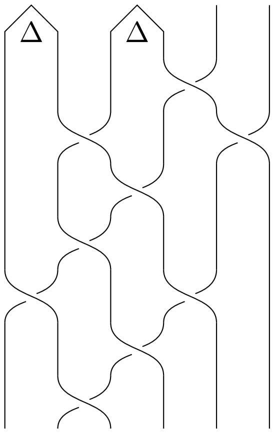
$\overset{(1.1.1)}{=}$ 

$$= (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \Psi_{2,2}) \circ (\Psi_{2,2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}})$$
$$= \Psi_{2,4} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}})$$

Wir zeigen nun analog, dass $\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ auch Ψ^{-1}-invariant ist.

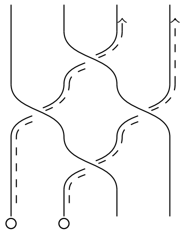
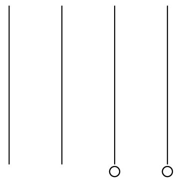
$$(\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Psi_{2,2}$$
$$= \big(\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes ((\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta))\big) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Psi \otimes \Psi) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id})$$

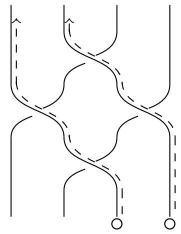
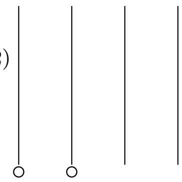
$=$  $\overset{(1.3.2)}{=}$  $\overset{(1.1.1)}{=}$ 

$\overset{(1.1.1)}{=}$  $= (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \Psi_{2,2}) \circ (\Psi_{2,2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}})$

$= \Psi_{2,4} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}})$

Entsprechend zeigen wir nun, dass die Gleichungen (1.3.2) für $\delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ erfüllt sind.

$(\delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Psi_{2,2} =$  $\overset{(1.3.2)}{=}$  $= \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$

$(\mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Psi_{2,2} =$  $\overset{(1.3.2)}{=}$  $= \delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$

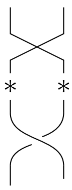
Insgesamt haben wir somit die Behauptung bewiesen. □

Wir wollen nun eine braided Koalgebra um eine Involution $*$ erweitern.

Definition 1.3.7 *Eine **braided $*$-Koalgebra** $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi, *)$ ist eine braided Koalgebra $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi)$ zusammen mit einer antilinearen Abbildung $*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, sodass $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, *)$ eine $*$-Koalgebra ist und einer Involution $*_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ sodass*

$$*_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \coloneqq \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau \tag{1.3.5}$$

gilt.

$*_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} =$ 

Die Bedingung an die Involution scheint zunächst etwas beliebig, doch die Wahl wird in Abschnitt 1.4 gerechtfertigt.

Zuletzt wollen wir nun noch die Faltung $\star$ von linearen Abbildungen definieren.

Definition 1.3.8 *Sei* $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi)$ *eine braided Koalgebra und* $(\mathcal{A}, m, \mathbb{1}, \Psi)$ *eine braided Algebra. Wir definieren für lineare Abbildungen* $f, g \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ *die* ***Faltung*** *von* f *und* g *durch*

$$f \star g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta. \tag{1.3.6}$$

Da $\mathbb{C}$ eine Koalgebra ist, erhalten wir wegen $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$

$$\varphi \star \psi := (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta$$

als Faltung von zwei linearen Funktionalen $\varphi, \psi \colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$. Für ein lineares Funktional $\varphi \colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\varphi^{\star n} := \underbrace{\varphi \star \cdots \star \varphi}_{n\text{- mal}}.$$

Es gilt per Konvention $\varphi^{\star 0} := \delta$ und $\varphi^{\star 1} := \varphi$.

1.4 Braided (∗)-Bialgebren

Wir wollen nun zuerst den Zugang über braided Tensorkategorien wählen und braided Bialgebren in Kategorien definieren.

Definition 1.4.1 *Sei* $(\mathfrak{C}, \Psi)$ *eine braided Kategorie. Eine* ***braided Bialgebra in*** $(\mathfrak{C}, \Psi)$ *ist ein Quintupel* $(\mathcal{B}, m_\mathcal{B}, \mathbb{1}_\mathcal{B}, \Delta_\mathcal{B}, \delta_\mathcal{B})$*, sodass gilt*

- $(\mathcal{B}, m_\mathcal{B}, \mathbb{1}_\mathcal{B})$ *ist eine Algebra in* $\mathfrak{C}$,
- $(\mathcal{B}, \Delta_\mathcal{B}, \delta_\mathcal{B})$ *ist eine Koalgebra in* $\mathfrak{C}$ *und*
- *die folgenden vier Diagramme kommutieren:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "m_\mathcal{B}"] \arrow[d, "\Delta_\mathcal{B} \otimes \Delta_\mathcal{B}"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "\Delta_\mathcal{B}"] & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}"'] & & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[u, "m_\mathcal{B} \otimes m_\mathcal{B}"']
\end{tikzcd}$$

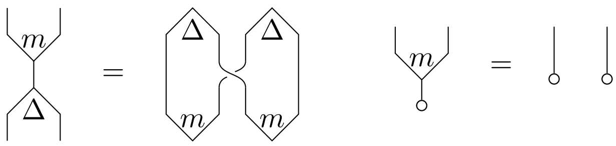
$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mathbb{1}_\mathcal{B}"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\Delta_\mathcal{B}"] \\
I \otimes I \arrow[r, "\mathbb{1}_\mathcal{B} \otimes \mathbb{1}_\mathcal{B}"'] & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "m_\mathcal{B}"] \arrow[d, "\delta_\mathcal{B} \otimes \delta_\mathcal{B}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\delta_\mathcal{B}"] \\
I \otimes I \arrow[r, "\lambda^{-1}"'] & I
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mathbb{1}_\mathcal{B}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\delta_\mathcal{B}"] \\
& I
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten somit die folgende Definition für den zweiten Zugang.

Definition 1.4.2 ([Sch93]) *Eine* ***braided Bialgebra*** $(\mathcal{B}, m, \mathbb{1}, \Delta, \delta, \Psi)$ *ist eine braided Algebra* $(\mathcal{B}, m, \mathbb{1}, \Psi)$ *und eine braided Koalgebra* $(\mathcal{B}, \Delta, \delta, \Psi)$*, sodass* Δ *und* δ *braided Algebra-Homomorphismen sind, d. h. es gelten*

$$\begin{aligned} \Delta \circ m &= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta), \\ \delta \circ m &= \delta \otimes \delta. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$



Nun wollen wir die Definition einer $*$-Bialgebra im klassischen Sinn wiederholen, die zuerst in [Sch93, Chapter 1.7] eingeführt wurde. Weitere Details hierzu sind im Anhang A.3 zu finden.

Definition 1.4.3 ([Sch93]) *Eine* ***$*$-Bialgebra*** $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}}, *_{\mathcal{B}})$ *(auch involutive Bialgebra genannt) ist eine Bialgebra* $\mathcal{B}$ *zusammen mit einer Involution, sodass gilt*

- $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, *_{\mathcal{B}})$ *ist eine* $*$*-Algebra,*
- $(\mathcal{B}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$ *ist eine Koalgebra und*
- $\Delta_{\mathcal{B}}$ *und* $\delta_{\mathcal{B}}$ *sind* $*$*-Algebra-Homomorphismen.*

Mit den Definitionen aus Abschnitt 1.3 ist es uns nun möglich, analog zu $*$-Bialgebren auch braided $*$-Bialgebren zu definieren, d. h. $*$-Bialgebren in einer braided Kategorie.

Definition 1.4.4 ([FS99, Chapter 4.3]) *Eine* ***braided $*$-Bialgebra*** $(\mathcal{B}, m, \mathbb{1}, \Delta, \delta, \Psi, *)$ *ist eine braided Bialgebra* $(\mathcal{B}, m, \mathbb{1}, \Delta, \delta, \Psi)$ *zusammen mit einer antilinearen Abbildung* $*\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$*, sodass* $(\mathcal{B}, m, \mathbb{1}, *)$ *eine* $*$*-Algebra im üblichen Sinn ist. Weiterhin existiere eine Involution* $*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$ *auf* $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$*, sodass die kanonischen Einbettungen* $\mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}$ *sowie die Komultiplikation* Δ $*$*-Algebra-Homomorphismen sind.*

Um Definition 1.3.7 zu rechtfertigen, wollen wir zunächst betrachten, wie die Involution auf $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ aussieht. Wir verwenden in diesem Fall für den Beweis keine Braid-Diagramme, um besser zwischen den Involutionen unterscheiden zu können.

Lemma 1.4.5 *Die Involution auf* $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ *ist durch*

$$\Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau =: *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$$

gegeben.

Beweis: Wir erinnern zunächst daran, dass $\mathbb{1}$ Ψ-kompatibel ist, da $(\mathcal{B}, m, \mathbb{1})$ insbesondere eine braided Algebra ist, d. h. es gelten

$$\begin{aligned} \Psi \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) &= (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}), \\ \Psi \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) &= (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}). \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

$(\mathcal{B}, m, \mathbb{1})$ ist insbesondere aber auch eine Algebra im klassischen Sinn. Dies bedeutet nach Bemerkung 1.3.2, dass $(\mathcal{B}, m, \mathbb{1}, \tau)$ eine braided Algebra ist. Deswegen ist die Eins $\mathbb{1}$ ebenso τ-kompatibel, d. h. es gelten

$$\begin{aligned} \tau \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) &= (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}), \\ \tau \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) &= (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}). \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Da die kanonischen Einbettungen einer braided ∗-Bialgebra per Definition ∗-Algebra-Homomorphismen sind, gelten

$$\begin{aligned} *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) &= (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) \circ *_{\mathcal{B}}, \\ *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) &= (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) \circ *_{\mathcal{B}}. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Es gilt insgesamt

$$\begin{aligned} *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}(a \otimes b) &= *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ \underbrace{\big((m \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1})) \otimes (m \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id})\big)}_{\overset{(A.2.2)}{=} \mathrm{id}\otimes\mathrm{id}}(a \otimes b) \\ &\overset{(1.4.2)}{=} *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ \underbrace{(m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id})}_{= m_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}} \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathrm{id})(a \otimes b) \\ &= m_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ (*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \otimes *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}) \circ \tau_{2,2} \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathrm{id})(a \otimes b) \\ &\overset{(1.4.3)}{=} m_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ (*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \otimes *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}) \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) \circ \tau(a \otimes b) \\ &= m_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ \big(\big(*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id})\big) \otimes \big(*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1})\big)\big) \circ \tau(a \otimes b) \\ &\overset{(1.4.4)}{=} m_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ \big(((\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) \circ *) \otimes ((\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) \circ *)\big) \circ \tau(a \otimes b) \\ &= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) \circ (* \otimes *) \circ \tau(a \otimes b) \\ &= \underbrace{(m \otimes m) \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathbb{1})}_{\overset{(A.2.2)}{=} \mathrm{id}\otimes\mathrm{id}} \circ \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau(a \otimes b) \\ &= \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau(a \otimes b) \end{aligned}$$

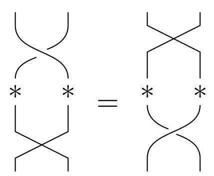
□

Bemerkung 1.4.6 Da $*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$ eine Involution ist, ist sie insbesondere selbstinvers, d. h. es gilt

$$(*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}})^2 = (\Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau)^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$$

und somit

$$\Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau = \tau \circ (* \otimes *) \circ \Psi^{-1}. \tag{1.4.5}$$



Für eine braided ∗-Bialgebra gilt somit immer $*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} = \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau$. Da eine braided ∗-Bialgebra insbesondere auch eine braided $*$-Koalgebra ist, haben wir Definition 1.3.7 so gewählt, um eine gewisse Konsistenz zu erreichen.

Kapitel 2

Quasi- und Coquasitriangulare Bi- und Hopf-Algebren

In diesem Kapitel möchten wir uns Grundlagen über quasitriangulare und coquasitriangulare Bialgebren aneignen und die Zusammenhänge zu der sogenannten Quanten-Yang-Baxter- und der bereits bekannten Braid-Gleichung erläutern. Die Suche nach Lösungen der Quanten-Yang-Baxter-Gleichung ist einer der Hauptgründe für die Entwicklung der Theorie der Quantengruppen.

2.1 Quasitriangulare Bialgebren

Quasitriangulare Bialgebren wurden zuerst bei Drinfeld (siehe z. B. [Dri87]) eingeführt. Dies sind Bialgebren, die weder kommutativ, noch kokommutativ sind, sondern deren „Kommutativität“ durch sogenannte universelle R-Matrizen „kontrolliert“ wird, d. h. dass sich Δ und Δ^{op} nur um Konjugation mit der universellen R-Matrix R unterscheiden. Diese R-Matrizen liefern uns wiederum Lösungen zu der bereits erwähnten Quanten-Yang-Baxter-Gleichung. Wir orientieren uns für diesen Abschnitt erneut an [Kas95] und [KS97] und stellen die für unsere Zwecke notwendigen Grundlagen zusammen.

Sei $\mathcal{B}$ eine Bialgebra (bzw. Hopf-Algebra) und $R \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$. Für $R = \sum_i x_i \otimes y_i$ definieren wir R_{12}, R_{13} und $R_{23} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ durch

$$R_{12} \coloneqq \sum_i x_i \otimes y_i \otimes 1,$$

$$R_{13} \coloneqq \sum_i x_i \otimes 1 \otimes y_i,$$

$$R_{23} \coloneqq \sum_i 1 \otimes x_i \otimes y_i.$$

Definition 2.1.1 *Eine Bialgebra (bzw. Hopf-Algebra) $\mathcal{B}$ heißt* ***quasitriangular****, falls ein invertierbares Element $R \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, genannt* ***universelle R-Matrix****, existiert, sodass die Gleichungen*

$$\Delta^{op}(a)R = R\Delta(a), \tag{2.1.1}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}, \tag{2.1.2}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} \tag{2.1.3}$$

gelten.

Bemerkung 2.1.2 Da wir im weiteren Verlauf die Gleichungen (2.1.1), (2.1.2) und (2.1.3) auch in Sweedler-Notation (siehe Abschnitt A.2) benötigen werden, wollen wir diese hier auch in dieser angeben. Es gelten also

$$\sum a_{(2)}x_i \otimes a_{(1)}y_i = \sum x_i a_{(1)} \otimes y_i a_{(2)}, \tag{2.1.4}$$

$$\sum (x_i)_{(1)} \otimes (x_i)_{(2)} \otimes y_i = \sum x_i \otimes x_j \otimes y_i y_j, \tag{2.1.5}$$

$$\sum x_i \otimes (y_i)_{(1)} \otimes (y_i)_{(2)} = \sum x_i x_j \otimes y_j \otimes y_i. \tag{2.1.6}$$

Die erste Gleichheit ergibt sich aus der folgenden Rechnung.

$$\begin{aligned}
\sum a_{(2)}x_i \otimes a_{(1)}y_i &= \Big(\sum a_{(2)} \otimes a_{(1)}\Big) \cdot \Big(\sum x_i \otimes y_i\Big) = \tau\Big(\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}\Big) \cdot \Big(\sum x_i \otimes y_i\Big) \\
&= (\tau \circ \Delta)(a) \cdot R = \Delta^{op}(a)R \overset{(2.1.1)}{=} R \cdot \Delta(a) \\
&= \Big(\sum x_i \otimes y_i\Big) \cdot \Big(\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}\Big) = \sum x_i a_{(1)} \otimes y_i a_{(2)},
\end{aligned}$$

Analog berechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum (x_i)_{(1)} \otimes (x_i)_{(2)} \otimes y_i &= (\Delta \otimes \mathrm{id})\Big(\sum x_i \otimes y_i\Big) = (\Delta \otimes \mathrm{id})(R) \\
&\overset{(2.1.2)}{=} R_{13} \cdot R_{23} = \Big(\sum_i x_i \otimes 1 \otimes y_i\Big) \cdot \Big(\sum_j 1 \otimes x_j \otimes y_j\Big) \\
&= \sum x_i \otimes x_j \otimes y_i y_j,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sum x_i \otimes (y_i)_{(1)} \otimes (y_i)_{(2)} &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Big(\sum x_i \otimes y_i\Big) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) \\
&\overset{(2.1.3)}{=} R_{13} \cdot R_{12} = \Big(\sum_i x_i \otimes 1 \otimes y_i\Big) \cdot \Big(\sum_j x_j \otimes y_j \otimes 1\Big) \\
&= \sum x_i x_j \otimes y_j \otimes y_i.
\end{aligned}$$

Wir wollen hier zunächst ein einfaches Beispiel für eine quasitriangulare Bialgebra angeben. Am Ende des Abschnittes führen wir noch ein weiteres grundlegendes Beispiel, welches jedoch nicht so leicht ersichtlich ist, aus.

Beispiel 2.1.3 Sei $\mathcal{B}$ eine kokommutative Bialgebra, d. h. es gilt $\Delta = \tau \circ \Delta$ bzw. in Sweedler-Notation

$$\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} = \sum a_{(2)} \otimes a_{(1)}.$$

Dann ist $R = 1 \otimes 1$ eine R-Matrix für $\mathcal{B}$. Gleichung (2.1.4) ist in diesem Fall gerade die Bedingung der Kokommutativität und für Gleichung (2.1.5) und (2.1.6) erhalten wir

$$\sum 1 \otimes 1 \otimes 1 = \sum 1 \otimes 1 \otimes 1.$$

Somit ist $R = 1 \otimes 1$ offensichtlich eine R-Matrix für $\mathcal{B}$.

Wir wollen hier nur die für uns notwendigen und wichtigen Eigenschaften von quasitriangularen Bialgebren festhalten. Weitere grundlegende Eigenschaften sind z. B. in [Kas95, Chapter VIII.2] oder [KS97, Chapter 8] zu finden. Hierbei ist zu beachten, dass in der Literatur verschiedene Begriffe für quasitriangulare Bialgebren bzw. Hopf-Algebren verwendet werden. So werden diese z. B. in [Kas95] „braided Bialgebren“ genannt. Diese Bezeichnung wird durch den folgenden Satz zusammen mit Abschnitt 2.3 gerechtfertigt.

Satz 2.1.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine quasitriangulare Bialgebra. Dann erfüllt die zugehörige universelle R-Matrix R die Gleichungen*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \tag{2.1.7}$$

sowie

$$(\delta \otimes \mathrm{id})(R) = (\mathrm{id} \otimes \delta)(R) = 1. \tag{2.1.8}$$

Beweis: Wir beginnen mit dem Beweis von Gleichung (2.1.7).

$$\begin{aligned}
R_{12} \cdot R_{13} \cdot R_{23} &\overset{(2.1.2)}{=} R_{12} \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(R) \overset{(2.1.1)}{=} (\Delta^{op} \otimes \mathrm{id})(R) \cdot R_{12} \\
&= (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})(R) \cdot R_{12} \overset{(2.1.2)}{=} \underbrace{(\tau \otimes \mathrm{id})(R_{13} \cdot R_{23})}_{=R_{23}\cdot R_{12}} \cdot R_{12} \\
&= R_{23} \cdot R_{13} \cdot R_{12}
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun noch Gleichung (2.1.8).

$$\begin{aligned}
R &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(R) \overset{(A.2.4)}{=} (\delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) \\
&\overset{(2.1.2)}{=} (\delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(R_{13} \cdot R_{23}) = (\delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\Big(\sum x_i \otimes x_j \otimes y_i y_j\Big) \\
&= \sum \delta(x_i) \otimes x_j \otimes y_i y_j = \Big(\sum \delta(x_i) \otimes y_i\Big) \cdot \Big(\sum x_j \otimes y_j\Big) \\
&= (\delta \otimes \mathrm{id})(R) \cdot R
\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit R^{-1} auf beiden Seiten (R ist nach Voraussetzung invertierbar), ergibt sich die Behauptung

$$\mathrm{id} = (\delta \otimes \mathrm{id})(R).$$

Der Beweis für die zweite Behauptung in Gleichung (2.1.8) verläuft analog. □

Bemerkung 2.1.5 Gleichung (2.1.7) lautet in Sweedler-Notation

$$\sum_{i,j,k} x_i x_j \otimes y_i x_k \otimes y_j y_k = \sum_{i,j,k} x_j x_k \otimes x_i y_k \otimes y_i y_j, \tag{2.1.9}$$

da die folgende Rechnung gilt.

$$\sum_{i,j,k} x_i x_j \otimes y_i x_k \otimes y_j y_k = \Big(\sum_i x_i \otimes y_i \otimes 1\Big)\Big(\sum_j x_j \otimes 1 \otimes y_j\Big)\Big(\sum_k 1 \otimes x_k \otimes y_k\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= R_{12}R_{13}R_{23} \overset{(2.1.7)}{=} R_{23}R_{13}R_{12}\\
&= \Big(\sum_i 1 \otimes x_i \otimes y_i\Big)\Big(\sum_j x_j \otimes 1 \otimes y_j\Big)\Big(\sum_k x_k \otimes y_k \otimes 1\Big)\\
&= \sum_{i,j,k} x_j x_k \otimes x_i y_k \otimes y_i y_j.
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.1.6 Wenn $\mathcal{A}$ eine invertierbare Antipode S hat, so gelten zusätzlich

$$
\begin{aligned}
(S \otimes \mathrm{id})(R) = R^{-1} &= (\mathrm{id} \otimes S^{-1})(R),\\
(S \otimes S)(R) &= R.
\end{aligned}
$$

Sweedlers vier-dimensionale Hopf-Algebra $\mathcal{H}_4$ als Beispiel für eine quasitriangulare Hopf-Algebra

Wir wollen nun ein nichttriviales Beispiel für eine quasitriangulare Hopf-Algebra angeben und beweisen. Dieses Beispiel für eine Hopf-Algebra wurde zuerst in [Swe69] betrachtet und trägt daher den Namen „Sweedlers Hopf-Algebra“. Die zugehörige R-Matrix R_λ ist zuerst in [Rad93] zu finden.

Wir betrachten die komplexe Algebra $\mathcal{H}_4$ (über einem Körper $\mathbb{K}$ mit Charakteristik ungleich 2), die von den Generatoren x und g mit

$$
g^2 = 1, \qquad x^2 = 0, \qquad gx = -xg \tag{2.1.10}
$$

erzeugt wird. Hierbei bezeichnet 1 das neutrale Element der Multiplikation und 0 das neutrale Element bzgl. der Addition. Die dritte Gleichung liefert uns die Gleichungen

$$
gxg = -xgg = -xg^2 = -x, \tag{2.1.11}
$$

$$
xgx = -gxx = -gx^2 = 0. \tag{2.1.12}
$$

$\mathcal{H}_4$ wird durch $\Delta\colon \mathcal{H}_4 \to \mathcal{H}_4 \otimes \mathcal{H}_4$ und $\delta\colon \mathcal{H}_4 \to \mathbb{C}$ mit

$$
\begin{aligned}
\Delta(g) &= g \otimes g, & \delta(g) &= 1,\\
\Delta(x) &= 1 \otimes x + x \otimes g, & \delta(x) &= 0
\end{aligned}
$$

zu einer Koalgebra $(\mathcal{H}_4, \Delta, \delta)$. Wir zeigen hier die Koassoziatvität. Es genügt diese auf den Generatoren zu zeigen, da Δ ein Algebra-Homomorphismus sein soll. Für $g \in \mathcal{H}_4$ gilt

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(g) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(g \otimes g) = g \otimes g \otimes g\\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(g \otimes g) = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(g).
\end{aligned}
$$

Für $x \in \mathcal{H}_4$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x + x \otimes g) = \Delta(1) \otimes x + \Delta(x) \otimes g\\
&= 1 \otimes 1 \otimes x + (1 \otimes x + x \otimes g) \otimes g = 1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes g + x \otimes g \otimes g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \otimes (1 \otimes x + x \otimes g) + x \otimes g \otimes g = 1 \otimes \Delta(x) + x \otimes \Delta(g) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(1 \otimes x + x \otimes g) = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(x).
\end{aligned}
$$

Die Koeins-Eigenschaft gilt für $g \in \mathcal{H}_4$, da

$$
\begin{aligned}
(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(g) &= (\delta \otimes \mathrm{id})(g \otimes g) = \delta(g) \otimes g = 1_{\mathbb{C}} \otimes g = g \\
&= g \otimes 1_{\mathbb{C}} = g \otimes \delta(g) = (\mathrm{id} \otimes \delta)(g \otimes g) = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta(g)
\end{aligned}
$$

gilt. Analog erhalten wir für $x \in \mathcal{H}_4$

$$
\begin{aligned}
&(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x) = (\delta \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x + x \otimes g) = \delta(1) \otimes x + \delta(x) \otimes g = 1_{\mathbb{C}} \otimes x + 0 \otimes g \\
&= x = 1 \otimes 0 + x \otimes 1_{\mathbb{C}} = 1 \otimes \delta(x) + x \otimes \delta(g) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \delta)(1 \otimes x + x \otimes g) = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta(x).
\end{aligned}
$$

Wir setzen also Δ so fort, dass Δ ein Algebra-Homomorphismus sein soll und somit die Bialgebren-Gleichung gilt, d.h. wir haben

$$
\begin{aligned}
\Delta(gx) &= \Delta \circ m(g \otimes x) \\
&\overset{(A.3.1)}{=} (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(g \otimes x) \\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\big(g \otimes g \otimes (1 \otimes x + x \otimes g)\big) \\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(g \otimes g \otimes 1 \otimes x + g \otimes g \otimes x \otimes g) \qquad (2.1.13) \\
&= (m \otimes m)(g \otimes 1 \otimes g \otimes x + g \otimes x \otimes g \otimes g) \\
&= g \otimes gx + gx \otimes g^2 \\
&\overset{(2.1.10)}{=} g \otimes gx + gx \otimes 1
\end{aligned}
$$

Die Abbildung $S\colon \mathcal{H}_4 \to \mathcal{H}_4$ mit

$$
S(g) = g \qquad S(x) = gx
$$

ist eine Antipode für $\mathcal{H}_4$, da für $g \in \mathcal{H}_4$ die Rechnungen

$$
\begin{aligned}
m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(g) &= m \circ (S \otimes \mathrm{id})(g \otimes g) = m(S(g) \otimes g) \\
&= g^2 \overset{(2.1.10)}{=} 1 = g^2 \\
&= m\big(g \otimes S(g)\big) = m \circ (\mathrm{id} \otimes S)(g \otimes g) = m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(g),
\end{aligned}
$$

und

$$
\mathbb{1} \circ \delta(g) = \mathbb{1}(1) = 1_{\mathbb{C}}
$$

gelten. Analog gilt für $x \in \mathcal{H}_4$

$$
\begin{aligned}
&m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x) = m \circ (S \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x + x \otimes g) = m(S(1) \otimes x + S(x) \otimes g) \\
&= x + gxg \overset{(2.1.11)}{=} x + (-x) = 0 = gx - gx \overset{(2.1.10)}{=} gx + xg
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= m(1 \otimes gx + x \otimes g) = m(1 \otimes S(x) + x \otimes S(g)) \\
&= m \circ (\mathrm{id} \otimes S)(1 \otimes x + x \otimes g) = m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x)
\end{aligned}
$$

sowie

$$\mathbb{1} \circ \delta(x) = \mathbb{1}(0) = 0.$$

Somit ist $\mathcal{H}_4$ eine Hopf-Algebra mit Antipode S.

Bemerkung 2.1.7 Die Hopf-Algebra $\mathcal{H}_4$ ist weder kommutativ (wegen Gleichung (2.1.10)), noch kokommutativ, da

$$\tau \circ \Delta(x) = \tau(1 \otimes x + x \otimes g) = x \otimes 1 + g \otimes x \neq \Delta(x)$$

gilt.

Wir betrachten nun für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ das Element

$$R_\lambda := \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \frac{\lambda}{2}(x \otimes x + x \otimes gx + gx \otimes gx - gx \otimes x).$$

und zeigen, dass R_λ eine universelle R-Matrix von $\mathcal{H}_4$ mit der Inversen $(R_\lambda)^{-1} = \tau(R_\lambda)$ definiert. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(R_\lambda)_{13} = \frac{1}{2}&(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes 1 \otimes g) \\
&+ \frac{\lambda}{2}(x \otimes 1 \otimes x + x \otimes 1 \otimes gx + gx \otimes 1 \otimes gx + gx \otimes 1 \otimes x), \\
(R_\lambda)_{23} = \frac{1}{2}&(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes g \otimes 1 + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes g \otimes 1) \\
&+ \frac{\lambda}{2}(x \otimes x \otimes 1 + x \otimes gx \otimes 1 + gx \otimes gx \otimes 1 + gx \otimes x \otimes 1), \\
(R_\lambda)_{12} = \frac{1}{2}&(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g) \\
&+ \frac{\lambda}{2}(1 \otimes x \otimes x + 1 \otimes x \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes x)
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun Gleichung (2.1.1) für $g \in \mathcal{H}_4$ überprüfen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\tau \circ \Delta(g) \cdot R_\lambda \\
&= (g \otimes g)\Big(\frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \frac{\lambda}{2}(x \otimes x + x \otimes gx + gx \otimes gx - gx \otimes x)\Big) \\
&= \frac{1}{2}(g \otimes g + g \otimes g^2 + g^2 \otimes g - g^2 \otimes g^2) + \frac{\lambda}{2}(gx \otimes gx + gx \otimes g^2x + g^2x \otimes g^2x - g^2x \otimes gx) \\
&\overset{(2.1.10)}{=} \frac{1}{2}(g \otimes g + g \otimes 1 + 1 \otimes g - 1 \otimes 1) + \frac{\lambda}{2}(gx \otimes gx + gx \otimes x + x \otimes x - x \otimes gx) \\
&\underset{(2.1.11)}{\overset{(2.1.10)}{=}} \frac{1}{2}(g \otimes g + g \otimes 1 + 1 \otimes g - 1 \otimes 1) + \frac{\lambda}{2}(xg \otimes xg + xg \otimes gxg + gxg \otimes gxg - gxg \otimes xg)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g) + \frac{\lambda}{2}(x\otimes x + x\otimes gx + gx\otimes gx - gx\otimes x)\right)(g\otimes g)$$
$$= R_\lambda \cdot \Delta(g)$$

Analog betrachten wir Gleichung (2.1.1) für $x \in \mathcal{H}_4$.

$$\tau \circ \Delta(x) \cdot R_\lambda$$
$$= (x\otimes 1 + g\otimes x)\Big(\frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g)$$
$$+ \frac{\lambda}{2}(x\otimes x + x\otimes gx + gx\otimes gx - gx\otimes x)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}(x\otimes 1 + x\otimes g + xg\otimes 1 - xg\otimes g + g\otimes x + g\otimes xg + g^2\otimes x - g^2\otimes xg)$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\underbrace{(x^2\otimes x + x^2\otimes gx + xgx\otimes gx - xgx\otimes x + gx\otimes x^2 + gx\otimes xgx + g^2x\otimes xgx - g^2x\otimes x^2)}_{\overset{(2.1.10),(2.1.12)}{=}0}$$
$$\overset{(2.1.10)}{\underset{(2.1.11)}{=}} \frac{1}{2}(x\otimes 1 + x\otimes g - gx\otimes 1 + gx\otimes g + g\otimes x - g\otimes gx + 1\otimes x + 1\otimes gx)$$
$$\overset{(2.1.10)}{=} \frac{1}{2}(1\otimes x + 1\otimes gx + g\otimes x - g\otimes gx + x\otimes g + x\otimes g^2 + gx\otimes g - gx\otimes g^2)$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\underbrace{(x\otimes x^2 + x\otimes gx^2 + gx\otimes gx^2 - gx\otimes x^2 + x^2\otimes xg + x^2\otimes gxg + gx^2\otimes gxg - gx^2\otimes xg)}_{\overset{(2.1.10),(2.1.12)}{=}0}$$
$$= \frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g)(1\otimes x + x\otimes g)$$
$$+ \frac{\lambda}{2}(x\otimes x + x\otimes gx + gx\otimes gx - gx\otimes x)(1\otimes x + x\otimes g)$$
$$= \left(\frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g) + \frac{\lambda}{2}(x\otimes x + x\otimes gx + gx\otimes gx - gx\otimes x)\right)(1\otimes x + x\otimes g)$$
$$= R_\lambda \cdot \Delta(x)$$

Nun wollen wir Gleichung (2.1.2) überprüfen. Wir betrachten hierfür zunächst die linke Seite der Gleichung.

$$(\Delta\otimes \mathrm{id})(R_\lambda)$$
$$= \frac{1}{2}(\Delta(1)\otimes 1 + \Delta(1)\otimes g + \Delta(g)\otimes 1 - \Delta(g)\otimes g)$$
$$+ \frac{\lambda}{2}(\Delta(x)\otimes x + \Delta(x)\otimes gx + \Delta(gx)\otimes gx - \Delta(gx)\otimes x)$$
$$\overset{(2.1.13)}{=} \frac{1}{2}(1\otimes 1\otimes + 1\otimes 1\otimes g + g\otimes g\otimes 1 - g\otimes g\otimes g)$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\Big((1\otimes x + x\otimes g)\otimes x + (1\otimes x + x\otimes g)\otimes gx$$

$$
\begin{aligned}
&+ (g \otimes gx + gx \otimes 1) \otimes gx - (g \otimes gx + gx \otimes 1) \otimes x\Big) \\
&= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g) \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}(1 \otimes x \otimes x + x \otimes g \otimes x + 1 \otimes x \otimes gx + x \otimes g \otimes gx \\
&\quad + g \otimes gx \otimes gx + gx \otimes 1 \otimes gx - g \otimes gx \otimes x - gx \otimes 1 \otimes x).
\end{aligned}
$$

Analog betrachten wir die rechte Seite von Gleichung (2.1.2).

$$
\begin{aligned}
&(R_\lambda)_{13} \cdot (R_\lambda)_{23} \\
&= \frac{1}{4}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes 1 \otimes g) \\
&\qquad \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g) \\
&\quad + \frac{\lambda}{4}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes 1 \otimes g) \\
&\qquad \cdot (1 \otimes x \otimes x + 1 \otimes x \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes gx - 1 \otimes gx \otimes x) \\
&\quad + \frac{\lambda}{4}(x \otimes 1 \otimes x + x \otimes 1 \otimes gx + gx \otimes 1 \otimes gx - gx \otimes 1 \otimes x) \\
&\qquad \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g) \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{4}(x \otimes 1 \otimes x + x \otimes 1 \otimes gx + gx \otimes 1 \otimes gx - gx \otimes 1 \otimes x) \\
&\qquad \cdot (1 \otimes x \otimes x + 1 \otimes x \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes gx - 1 \otimes gx \otimes x) \\
&= \frac{1}{4}(2 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1) + 2 \cdot (1 \otimes 1 \otimes g) + 2 \cdot (g \otimes g \otimes 1) - 2 \cdot (g \otimes g \otimes g)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{4}(2 \cdot (1 \otimes x \otimes x) + 2 \cdot (1 \otimes x \otimes gx) + 2 \cdot (g \otimes gx \otimes gx) - 2 \cdot (g \otimes gx \otimes x)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{4}(2 \cdot (x \otimes g \otimes x) + 2 \cdot (x \otimes g \otimes gx) + 2 \cdot (gx \otimes 1 \otimes gx) - 2 \cdot (gx \otimes 1 \otimes x)) \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{4} \cdot 0 \\
&= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g) \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}(1 \otimes x \otimes x + x \otimes g \otimes x + 1 \otimes x \otimes gx + x \otimes g \otimes gx \\
&\quad + g \otimes gx \otimes gx + gx \otimes 1 \otimes gx - g \otimes gx \otimes x - gx \otimes 1 \otimes x)
\end{aligned}
$$

Anhand dieser Rechnungen sehen wir, dass wir für beide Seiten das gleiche Ergebnis erhalten und somit Gleichung (2.1.2) erfüllt ist. Die Rechnung für Gleichung (2.1.3) verläuft analog. Somit ist $\mathcal{H}_4$ eine quasitriangulare Hopf-Algebra mit universeller R-Matrix R_λ.

2.2 Die Quanten Yang-Baxter-Gleichung

Die Quanten-Yang-Baxter-Gleichung hat ihren Usprung in der Physik (siehe [Yan67] und [Bax82]). Das Suchen nach Lösungen für diese Gleichung hat sich als nichttriviales Problem herausgestellt und so zu einer Fülle an verschiedenen Lösungsansätzen geführt. Wir werden zeigen, dass die Quanten-Yang-Baxter-Gleichung in einem engen Zusammenhang zur Braid-Gleichung steht. Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an [LR97], verweisen aber z. B. auch auf [Kau13].

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $R\colon V \otimes V \to V \otimes V$ linear. Definiere $R_{ij} \in \mathrm{End}(V \otimes V \otimes V)$ für $1 \leq i < j \leq 3$ durch

$$
\begin{aligned}
R_{12} &= R \otimes \mathrm{id}, \\
R_{23} &= \mathrm{id} \otimes R, \\
R_{13} &= (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (R \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes R),
\end{aligned}
$$

wobei $\tau\colon V \otimes V \to V \otimes V$ mit $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ für alle $v, w \in V$ den Flip-Operator bezeichnet.

Definition 2.2.1 *Die Gleichung*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \tag{2.2.1}$$

heißt paramter-unabhängige Form der ***Quanten Yang-Baxter-Gleichung****, kurz* ***QYBE****. Wir nennen lineare Operatoren $R \in End(V \otimes V)$, die diese Gleichung erfüllen* ***R-Matrix*** *oder* ***konstante Lösungen der QYBE****.*

Die folgende Bemerkung liefert uns den für uns wichtigen Zusammenhang zwischen der Quanten-Yang-Baxter-Gleichung und quasitriangularen Bialgebren.

Bemerkung 2.2.2 Sei $\mathcal{A}$ eine quasitriangulare Bialgebra mit universeller R-Matrix $R = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ und M ein (linker) $\mathcal{A}$-Modul. Definiere die lineare Abbildung

$$R_M\colon M \otimes M \to M \otimes M \qquad R_M(m \otimes n) := \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot m \otimes y_i \cdot n.$$

R_M ist genau dann für alle linken $\mathcal{A}$-Moduln M eine Lösung von (2.2.1), wenn R eine Lösung von Gleichung (2.1.7) ist (siehe hierfür [LR97, Chapter 6]). Wir sagen dann in diesem Fall ebenfalls, dass die universelle R-Matrix R die Quanten-Yang-Baxter-Gleichung erfüllt. Somit folgt insbesondere aus Satz 2.1.4, dass jede universelle Matrix einer quasitriangularen Bialgebra $\mathcal{A}$ eine Lösung der QYBE liefert.

Da die QYBE in vielen verschiedenen Kontexten auftaucht, existieren verschiedene Arten der Formulierung. Wir wollen hier die für uns interessanten vorstellen und verweisen für weitere Formen (insbesondere für die ein- und zwei-Parameter-Form) auf [LR97, Chapter 2].

Die parameter-unabhängige Form der QYBE in Sweedler-Notation

Für diesen Zugang verwenden wir die abgewandelte Sweedler-Notation

$$R(m \otimes n) := m_{[1]} \otimes n_{[2]}, \qquad \mathrm{id}(m) := m_{[0]}$$

und wollen nun die QYBE in dieser angeben. Wir berechnen hierfür zunächst R_{12}, R_{23} und R_{13} und erhalten

$$\begin{aligned}
R_{12}(l \otimes m \otimes n) &= (R \otimes \mathrm{id})(l \otimes m \otimes n) = l_{[1]} \otimes m_{[2]} \otimes n_{[0]},\\
R_{23}(l \otimes m \otimes n) &= (\mathrm{id} \otimes R)(l \otimes m \otimes n) = l_{[0]} \otimes m_{[1]} \otimes n_{[2]},\\
R_{13}(l \otimes m \otimes n) &= (\mathrm{id} \otimes \tau)(R \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(l \otimes m \otimes n) = l_{[1]} \otimes m_{[0]} \otimes n_{[2]}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{13}R_{23}(l \otimes m \otimes n) &= R_{12}R_{13}(l_{[0]} \otimes m_{[1]} \otimes n_{[2]})\\
&= R_{12}(l_{[0][1]} \otimes m_{[1][0]} \otimes n_{[2][2]})\\
&= l_{[0][1][1]} \otimes m_{[1][0][2]} \otimes n_{[2][2][0]}
\end{aligned}$$

für die linke Seite der QYBE und

$$\begin{aligned}
R_{23}R_{13}R_{12}(l \otimes m \otimes n) &= R_{23}R_{13}(l_{[1]} \otimes m_{[2]} \otimes n_{[0]})\\
&= R_{23}(l_{[1][1]} \otimes m_{[2][0]} \otimes n_{[0][2]})\\
&= l_{[1][1][0]} \otimes m_{[2][0][1]} \otimes n_{[0][2][2]}
\end{aligned}$$

für die rechte Seite. Die parameter-unabhängige QYBE in Sweedler-Notation lautet also

$$l_{[0][1][1]} \otimes m_{[1][0][2]} \otimes n_{[2][2][0]} = l_{[1][1][0]} \otimes m_{[2][0][1]} \otimes n_{[0][2][2]}.$$

Koordinaten-Form der parameter-unabhängigen QYBE

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ und $R\colon V \otimes V \to V \otimes V$ linear mit

$$R(v_i \otimes v_j) = R_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l,$$

d. h. $\{R_{ij}^{kl}\}_{i,j,k,l}$ sind die Koordinaten von R bzgl. der Basis B. Wir wollen nun eine Koordinaten-abhängige Form der QYBE angeben. Wir betrachten zunächst die linke Seite und verwenden immer dann, wenn wir mit der Koordinaten-Form rechnen, die Einsteinsche Summenkonvention.

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{13}R_{23}(v_i \otimes v_j \otimes v_k) &= R_{12}R_{13}(R_{jk}^{qr} v_i \otimes v_q \otimes v_r)\\
&= (R \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(R \otimes \mathrm{id})(1 \otimes \tau)(R_{jk}^{qr} v_i \otimes v_q \otimes v_r)\\
&= (R \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(R_{jk}^{qr} R_{i\,r}^{pc} v_p \otimes v_c \otimes v_q)\\
&= R_{jk}^{qr} R_{i\,r}^{pc} R_{pq}^{ab} v_a \otimes v_b \otimes v_c.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$R_{23}R_{13}R_{12}(v_i \otimes v_j \otimes v_k) = R_{i\,j}^{xy} R_{pk}^{az} R_{yz}^{bc} v_a \otimes v_b \otimes v_c$$

für die rechte Seite. Also erfüllt R die QYBE genau dann, wenn für die Koordinaten $\{R^{kl}_{ij}\}_{i,j,k,l}$ bzgl. der Basis B die Gleichung

$$R^{qr}_{jk} R^{pc}_{i\,r} R^{ab}_{pq} = R^{xy}_{i\,j} R^{az}_{pk} R^{bc}_{yz}$$

gilt.

2.3 Zusammenhang zwischen der QYBE und der Braid-Gleichung

In diesem Abschnitt wollen wir nun den Zusammenhang zwischen der QYBE und der Braid-Gleichung zeigen, sowie die Existenz einer Lösung der QYBE auf jedem Modul über einer quasitriangularen Bialgebra $\mathcal{A}$ mit R-Matrix $R = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ beweisen. Seien V und W zwei $\mathcal{A}$-Moduln. Wir definieren die linearen Abbildung $\tilde{R}$ und $\hat{R}_{VW}$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{R} \colon \mathbb{C} &\to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}\\ 1_{\mathbb{C}} &\mapsto \sum_i x_i \otimes y_i\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\hat{R}_{V,W} \colon V \otimes W \to W \otimes V\\ &\hat{R}_{V,W} \coloneqq \tau \circ (\alpha_V \otimes \alpha_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\tilde{R} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}).\end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.1 Für eine kokommutative Bialgebra $\mathcal{B}$ mit R-Matrix $R = 1 \otimes 1$ gilt gerade $\hat{R}_{V,W} = \tau$.

Verwende die Notation $v.w \coloneqq \alpha(v \otimes w)$. Dann gilt für $a \in V$, $b \in W$ die Gleichheit

$$\hat{R}_{V,W}(a \otimes b) = y_i.b \otimes x_i.a$$

wegen

$$\begin{aligned}\hat{R}_{V,W}(v \otimes w) &= \tau \circ (\alpha_V \otimes \alpha_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\tilde{R} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(w \otimes w)\\ &= \tau \circ (\alpha_V \otimes \alpha_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\Big(\sum_i x_i \otimes y_i \otimes v \otimes w\Big)\\ &= \tau \circ (\alpha_V \otimes \alpha_W)\Big(\sum_i x_i \otimes v \otimes y_i \otimes w\Big)\\ &= \tau\Big(\sum_i x_i.v \otimes y_i.w\Big)\\ &= \sum_i y_i.w \otimes x_i.v\ .\end{aligned}$$

Weiterhin gilt (wegen Gleichung (A.4.1)) $a.(b.c) = ab.c$für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $c \in V$. Wegen Gleichung (A.4.5) gilt dann

$$a.(v \otimes w) = \alpha_{V \otimes W}(a \otimes v \otimes w) \tag{2.3.1}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha_V \otimes \alpha_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})(a \otimes v \otimes w) \\
&= (\alpha_V \otimes \alpha_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v \otimes w) \\
&= (\alpha_V \otimes \alpha_W)(a_{(1)} \otimes v \otimes a_{(2)} \otimes w) \\
&= a_{(1)}.v \otimes a_{(2)}.w \ .
\end{aligned}
$$

Satz 2.3.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine quasitriangulare Bialgebra mit universeller R-Matrix R und V,W,U $\mathcal{A}$-Moduln mit Wirkungen $\alpha_U, \alpha_V, \alpha_W$. Dann gilt*

$$(\hat{R}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes \hat{R}_{V,W}) = \hat{R}_{U \otimes V,W}, \tag{2.3.2}$$

$$(\mathrm{id}_V \otimes \hat{R}_{U,W})(\hat{R}_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) = \hat{R}_{U,V \otimes W}, \tag{2.3.3}$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes \hat{R}_{U,V})(\hat{R}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes \hat{R}_{VW}) = (\hat{R}_{VW} \otimes \mathrm{id}_U)(\mathrm{id}_V \otimes \hat{R}_{UW})(\hat{R}_{UV} \otimes \mathrm{id}_W). \tag{2.3.4}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst Gleichung (5.3.6).

$$
\begin{aligned}
&(\hat{R}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_U \otimes \hat{R}_{V,W})(u \otimes v \otimes w) \\
&\quad = (\hat{R}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V)\Big(\sum_j u \otimes y_j.w \otimes x_j.v\Big) \\
&\quad = \sum_{i,j} \underbrace{y_i.(y_j.w)}_{\overset{(A.4.1)}{=} y_i y_j.w} \otimes x_i.u \otimes x_j.v \\
&\quad = (\alpha_W \otimes \alpha_U \otimes \alpha_V) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\Big(\underbrace{\sum_{i,j} x_i \otimes x_j \otimes y_i y_j}_{\overset{(2.1.5)}{=} \sum_i (x_i)_{(1)} \otimes (x_i)_{(2)} \otimes y_i} \otimes w \otimes u \otimes v\Big) \\
&\quad = (\alpha_W \otimes \alpha_U \otimes \alpha_V)\Big(\sum_i y_i \otimes w \otimes (x_i)_{(1)} \otimes u \otimes (x_i)_{(2)} \otimes v\Big) \\
&\quad = \sum_i y_i.w \otimes \underbrace{(x_i)_{(1)}.u \otimes (x_i)_{(2)}.v}_{\overset{(2.3.1)}{=} x_i.(u \otimes v)} \\
&\quad = \sum_i y_i.w \otimes x_i.(u \otimes v) \\
&\quad = \hat{R}_{U \otimes V,W}(u \otimes v \otimes w)
\end{aligned}
$$

Analog betrachten wir nun Gleichung (5.3.7).

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_V \otimes \hat{R}_{U,W}) \circ (\hat{R}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_W) \circ (u \otimes v \otimes w) \\
&\quad = (\mathrm{id}_V \otimes \hat{R}_{U,W})(\sum_j y_j.v \otimes x_j.u \otimes w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} y_j.v \otimes y_i.v \otimes \underbrace{x_i.(x_j.u)}_{\overset{(2.3.1)}{=}(x_ix_j).u} \\
&= (\alpha_W \otimes \alpha_U \otimes \alpha_V)\Big(\sum_{i,j} y_j \otimes v \otimes y_i \otimes w \otimes x_i y_j \otimes u \Big) \\
&= (\alpha_W \otimes \alpha_U \otimes \alpha_V) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ \ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \Big(\underbrace{\sum_{i,j} x_i x_j \otimes y_i \otimes y_j}_{\overset{(2.1.6)}{=} \sum_i x_i \otimes (y_i)_1 \otimes (y_i)_{(2)}} \otimes v \otimes w \otimes u \Big) \\
&= (\alpha_W \otimes \alpha_U \otimes \alpha_V)\Big(\sum_i (y_i)_{(2)} \otimes v \otimes (y_i)_{(1)} \otimes w \otimes x_i \otimes u \Big) \\
&= \sum_i \underbrace{(y_i)_{(1)}.v \otimes (y_i)_{(2)}.w}_{\overset{(2.3.1)}{=} y_i.(v \otimes w)} \otimes x_i.u \\
&= \sum_i y_i.(v \otimes w) \otimes x_i.u \\
&= \hat{R}_{U,V\otimes W}(u \otimes v \otimes w)
\end{aligned}
$$

Zuletzt überprüfen wir noch Gleichung (5.3.8).

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_W \otimes \hat{R}_{U,V}) \circ (\hat{R}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\mathrm{id}_U \otimes \hat{R}_{V,W})(u \otimes v \otimes w) \\
&\quad = (\mathrm{id}_W \otimes \hat{R}_{U,V}) \circ (\hat{R}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_W)\Big(\sum_i u \otimes y_i.w \otimes x_i.v \Big) \\
&\quad = (\mathrm{id}_W \otimes \hat{R}_{U,V})\Big(\sum_{i,j} y_j.(y_i.w) \otimes x_j.u \otimes x_i.v \Big) \\
&\quad = \sum_{i,j,k} \underbrace{y_j.(y_i.w)}_{\overset{(A.4.1)}{=} y_j y_i.w} \otimes \underbrace{y_k.(x_i.v)}_{\overset{(A.4.1)}{=} y_k x_i.v} \otimes \underbrace{x_k.(x_j.u)}_{\overset{(A.4.1)}{=} x_k x_j.u} \\
&\quad = (\alpha_W \otimes \alpha_V \otimes \alpha_U)\Big(\sum_{i,j,k} y_j y_i \otimes w \otimes y_k x_i \otimes v \otimes x_k x_j \otimes u \Big) \\
&\quad = (\alpha_W \otimes \alpha_V \otimes \alpha_U) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad \Big(\underbrace{\sum_{i,j,k} x_k x_j \otimes y_k x_i \otimes y_j y_i}_{\overset{(2.1.9)}{=} x_j x_i \otimes x_k y_i \otimes y_k y_j} \otimes w \otimes v \otimes u \Big) \\
&\quad = (\alpha_W \otimes \alpha_V \otimes \alpha_U)(\sum_{i,j,k} y_k y_j \otimes w \otimes x_k y_i \otimes v \otimes x_j x_i \otimes u)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k} y_k y_j.w \otimes x_k y_i.v \otimes x_j x_i.u \\
&= (\hat{R}_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U)\Big(\sum_{i,j} y_i.v \otimes y_j.w \otimes \underbrace{x_j x_i.u}_{\overset{(A.4.1)}{=} x_j.(x_i.u)}\Big) \\
&= (\hat{R}_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \hat{R}_{U,W})\Big(\sum_i y_i.v \otimes x_i.u \otimes w\Big) \\
&= (\hat{R}_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \hat{R}_{U,W}) \circ (\hat{R}_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W)(u \otimes v \otimes w)
\end{aligned}
$$

Somit haben wir alle drei Gleichungen überprüft und den Beweis beendet. □

Bemerkung 2.3.3 Bezeichne nun $\hat{R} := \hat{R}_{V,V}$. Dann erhalten wir aus Gleichung (5.3.8) die bereits bekannte Braid-Gleichung (1.1.1) für $\hat{R}$, d. h.

$$(\hat{R} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \hat{R})(\hat{R} \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \hat{R})(\hat{R} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \hat{R}).$$

Mit der Konvention

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{12} &:= (\hat{R} \otimes \mathrm{id}) = \sum y_i \otimes x_i \otimes 1, \\
\hat{R}_{23} &:= (\mathrm{id} \otimes \hat{R}) = \sum 1 \otimes y_i \otimes x_i.
\end{aligned}
$$

aus Abschnitt 2.1 lässt sich die Braid-Gleichung für $\hat{R}$ also auch als

$$\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23} \tag{2.3.5}$$

schreiben.

Wir erhalten damit den folgenden Zusammenhang zwischen der Braid- und der QYB-Gleichung.

Satz 2.3.4 *R erfüllt die QYBE* (2.2.1) *genau dann, wenn $\hat{R}$ die Braid-Gleichung* (1.1.1) *erfüllt.*

Beweis: Die Braid-Gleichung für $\hat{R}$ lautet

$$\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}$$

und die QYBE (2.1.9) in Sweedler-Notation

$$l_{[1][1][0]} \otimes m_{[2][0][1]} \otimes n_{[2][2][0]} = l_{[0][1][1]} \otimes m_{[1][0][2]} \otimes n_{[0][2][2]}.$$

Wir betrachten nun die linke Seite von Gleichung (2.3.5) und erhalten

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12}(l \otimes m \otimes n) &= \hat{R}_{12}\hat{R}_{23}(m_{[2]} \otimes l_{[1]} \otimes n_{[0]}) \\
&= \hat{R}_{12}(m_{[2][0]} \otimes n_{[0][2]} \otimes l_{[1][1]}) \\
&= n_{[0][2][2]} \otimes m_{[2][0][1]} \otimes l_{[1][1][0]} \\
&= (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)\big(l_{[1][1][0]} \otimes m_{[2][0][1]} \otimes n_{[2][2][0]}\big)
\end{aligned}
$$

Für die rechte Seite gilt analog

$$\hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}(l \otimes m \otimes n) = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}(l_{[0]} \otimes n_{[2]} \otimes m_{[1]})$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{R}_{23}\big(n_{[2][2]} \otimes l_{[0][1]} \otimes m_{[1][0]}\big) \\
&= n_{[2][2][0]} \otimes m_{[1][0][2]} \otimes l_{[0][1][1]} \\
&\overset{(2.1.9)}{=} (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)\big(l_{[0][1][1]} \otimes m_{[1][0][2]} \otimes n_{[0][2][2]}\big)
\end{aligned}
$$

Die linke Seite der Braid-Gleichung für $\hat{R}$ liefert uns also die linke Seite der QYBE für die R-Matrix R und analog für die rechte Seite. Somit ist die Braid-Gleichung für $\hat{R}$ genau dann erfüllt, wenn die QYBE für R erfüllt ist und somit ist die Bahuptung bewiesen. □

Wir haben somit insbesondere gezeigt, dass $\hat{R}$ für jeden $\mathcal{A}$-Modul eine Lösung der QYBE ist. Diese Tatsache begründet auch die Bezeichnung „universelle R-Matrix“.

2.4 Coquasitriangulare Bi- und Hopf-Algebren

Wir wollen nun das zu den quasitriangularen Bialgebren „duale“ Konstrukt eine coquasitriangularen Bialgebra einführen. Diese wurden z. B. in [Scha92] ausführlich studiert. Erneut orientieren wir uns in diesem Abschnitt an [KS97] und [Kas95]. Wir weisen darauf hin, dass wir in Rechnungen in denen die sogenannte r-Form auftaucht, keine Braid-Diagramme benutzen.

Definition 2.4.1 *Eine* ***coquasitriangulare*** *Bialgebra ist eine Bialgebra $\mathcal{A}$ zusammen mit einer bzgl. der Faltung $\star$ invertierbaren Linearform $\boldsymbol{r}\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ (d. h. es existiert eine Linearform $\bar{\boldsymbol{r}}\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, sodass $\boldsymbol{r} \star \bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}} \star \boldsymbol{r} = \delta \otimes \delta$ gilt), sodass die Bedingungen*

$$m^{op} = \boldsymbol{r} \star m \star \bar{\boldsymbol{r}}, \tag{2.4.1}$$

$$\boldsymbol{r_{13}} \star \boldsymbol{r_{23}} = \boldsymbol{r} \circ (m \otimes \mathrm{id}), \tag{2.4.2}$$

$$\boldsymbol{r_{13}} \star \boldsymbol{r_{12}} = \boldsymbol{r} \circ (\mathrm{id} \otimes m), \tag{2.4.3}$$

gelten, wobei $\boldsymbol{r_{12}}, \boldsymbol{r_{23}}, \boldsymbol{r_{13}}\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ durch $\boldsymbol{r_{12}} \coloneqq \boldsymbol{r}\otimes\delta$, $\boldsymbol{r_{23}} \coloneqq \delta\otimes\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r_{13}} \coloneqq (\boldsymbol{r}\otimes\delta)\circ(\mathrm{id}\otimes \tau)$ definiert sind. Eine Linearform, die (2.4.1) *bis* (2.4.3) *erfüllt, heißt* ***(universelle) r-Form*** *von $\mathcal{A}$. Eine coquasitriangulare Hopf-Algebra ist eine Hopf-Algebra, die eine coquasitriangulare Bialgebra ist.*

Bemerkung 2.4.2 Coquasitriangulare Bialgebren bzw. Hopf-Algebren sind auch unter dem Begriff einer „cobraided“ (z. B. in [Kas95]) oder „dual quasitriangularen“ (z. B. [Maj95]) Bialgebra zu finden.

Erneut werden wir die obigen Gleichungen auch in Sweedler-Notation benötigen und geben diese daher hier an. Wir führen hier noch einmal exemplarisch die Umformung der linken Seite aus. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{r} \star \bar{\boldsymbol{r}})(a \otimes b) &= m \circ (\boldsymbol{r} \otimes \bar{\boldsymbol{r}}) \circ \Delta_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}(a \otimes b) \\
&= m \circ (\boldsymbol{r} \otimes \bar{\boldsymbol{r}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(a \otimes b) \\
&= m \circ (\boldsymbol{r} \otimes \bar{\boldsymbol{r}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\big(a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b_{(1)} \otimes b_{(2)}\big) \\
&= m \circ (\boldsymbol{r} \otimes \bar{\boldsymbol{r}})\big(a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)}\big) \\
&= m\big(\boldsymbol{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes \bar{\boldsymbol{r}}(a_{(2)} \otimes b_{(2)})\big) \\
&= \boldsymbol{r}\big(a_{(1)} \otimes b_{(1)}\big)\bar{\boldsymbol{r}}\big(a_{(2)} \otimes b_{(2)}\big)
\end{aligned}
$$

Somit lautet die Invertierbarkeit der r-Form in Sweedler-Notation

$$\boldsymbol{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})\bar{\boldsymbol{r}}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \bar{\boldsymbol{r}}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})\boldsymbol{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \delta(a)\delta(b).$$

Für Gleichungen (2.4.1) bis (2.4.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} ba &= \boldsymbol{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}\bar{\boldsymbol{r}}(a_{(3)} \otimes b_{(3)}), \\ \boldsymbol{r}(ab \otimes c) &= \boldsymbol{r}(a \otimes c_{(1)})\boldsymbol{r}(b \otimes c_{(2)}), \\ \boldsymbol{r}(a \otimes bc) &= \boldsymbol{r}(a_{(1)} \otimes c)\boldsymbol{r}(a_{(2)} \otimes b). \end{aligned}$$

Analog zu Abschnitt 2.3 induziert eine coquasitriangulare Bialgebra $\mathcal{B}$ eine Lösung der QYBE auf jedem $\mathcal{B}$-Komodul (siehe hierfür z. B. [Kas95, Chapter VIII.5]). Sei $\mathcal{A}$ eine coquasitrangulare Bialgebra mit universeller r-Form $\boldsymbol{r}$ und V,W rechte $\mathcal{A}$-Komoduln mit Kowirkungen γ_V bzw. γ_W. Wir definieren dann (analog zu $\hat{R}_{V,W}$) eine lineare Abbildung $\hat{\boldsymbol{r}}_{V,W}$ durch

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{r}}_{V,W} \colon V \otimes W \to W \otimes V \\ &\hat{\boldsymbol{r}}_{V,W} \coloneqq (\boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma_V \otimes \gamma_W) \circ \tau, \end{aligned}$$

d.h in Sweedler-Notation gilt

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{V,W}(v \otimes w) = \boldsymbol{r}(v^{(2)} \otimes w^{(2)})w_{(1)} \otimes v_{(1)},$$

wobei $\gamma(u) = u^{(1)} \otimes u^{(2)}$. Dann gilt analog zu Abschnitt 2.3

Satz 2.4.3 *Seien U, V und W $\mathcal{A}$-Komoduln. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{r}}_{U\otimes V,W} &= (\hat{\boldsymbol{r}}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes \hat{\boldsymbol{r}}_{V,W}) \\ \hat{\boldsymbol{r}}_{U,V\otimes W} &= (\mathrm{id}_V \otimes \hat{\boldsymbol{r}}_{U,W})(\hat{\boldsymbol{r}}_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) \\ (\hat{\boldsymbol{r}}_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U)(\mathrm{id}_V \otimes \hat{\boldsymbol{r}}_{U,W})(\hat{\boldsymbol{r}}_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) &= (\mathrm{id}_W \otimes \hat{\boldsymbol{r}}_{U,V})(\hat{\boldsymbol{r}}_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes \hat{\boldsymbol{r}}_{V,W}) \end{aligned}$$

BEWEIS: Siehe [Kas95, Chapter VIII.5] für den Beweis. □

Bemerkung 2.4.4 Wegen Satz 2.4.3 erfüllt $\hat{\boldsymbol{r}}$ die Braid-Gleichung, also ist $\tau \circ \boldsymbol{r}$ eine Lösung der QYBE.

Also induzieren coquasitriangulare Bialgebren Lösungen der QYBE auf ihren Komoduln so wie das quasitriangulare Bialgebren auf ihren Moduln tun.

Die folgenden beiden Sätze wollen wir hier der Vollständigkeit halber (jedoch ohne Beweis) angeben, um die Dualität zwischen R-Matrizen und r-Formen zu unterstreichen.

Lemma 2.4.5 *Sei $\mathcal{A}$ eine coquasitriangulare Bialgebra mit R-Form $\boldsymbol{r}$ und $\bar{\boldsymbol{r}}$ die Inverse bzgl. der Faltung. Dann gelten die folgenden Gleichungen*

$$\boldsymbol{r}_{12} \star \boldsymbol{r}_{13} \star \boldsymbol{r}_{23} = \boldsymbol{r}_{23} \star \boldsymbol{r}_{13} \star \boldsymbol{r}_{12} \tag{2.4.4}$$

$$\boldsymbol{r} \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) = \boldsymbol{r} \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) = \delta$$

und

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{r}}_{12} \star \bar{\boldsymbol{r}}_{13} \star \bar{\boldsymbol{r}}_{23} &= \bar{\boldsymbol{r}}_{23} \star \bar{\boldsymbol{r}}_{13} \star \bar{\boldsymbol{r}}_{12} \\ \bar{\boldsymbol{r}}_{23} \star \bar{\boldsymbol{r}}_{13} &= \bar{\boldsymbol{r}} \circ (m \otimes \mathrm{id}) \\ \bar{\boldsymbol{r}}_{12} \star \bar{\boldsymbol{r}}_{13} &= \bar{\boldsymbol{r}} \circ (\mathrm{id} \otimes m) \\ \bar{\boldsymbol{r}} \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) = \bar{\boldsymbol{r}} \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) &= \delta\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Beweis: Siehe z. B. [KS97, Chapter 10]. □

2.5 Die FRT-Bialgebra $\mathcal{A}(R)$ und die FRT-$*$-Bialgebra $\mathcal{A}_*(R)$

Die FRT-Konstruktion zeigt uns, wie wir aus jeder Lösung der QYBE eine coquasitriangulare Bialgebra konstruieren können. Die Bezeichnung „FRT-Bialgebra“ leitet sich von den Nachnamen Faddeev, Reshetikhin und Takhtadjian der Autoren des Papers [FRT88] ab, in dem diese Konstruktion zuerst durchgeführt wurde. Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an [KS97, Chapter 9].

Die klassische FRT-Konstruktion bzw. die FRT-Bialgebra $\mathcal{A}(R)$

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum mit Basis $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ und $R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ ein Endomorphismus. Definiere die zugehörigen Koeffizienten (wie in Abschnitt 2.2) durch

$$R(v_i \otimes v_j) = R^{kl}_{ij} v_k \otimes v_l.$$

Weiterhin sei $\{u^j_i\}_{i,j=1,2,\cdots,N}$ eine Familie von N^2 Unbestimmten. Wir betrachten die freie Algebra $\mathbb{C}\langle u^j_i\rangle$ und bezeichnen mit $I(R)$ das von den N^4 Elementen

$$I^{mn}_{ij} := \sum_{k,l} R^{mn}_{kl} u^k_i u^l_j - \sum_{k,l} u^n_l u^n_k R^{kl}_{ij} \tag{2.5.1}$$

erzeugte zweiseitige Ideal $(i, j, m, n = 1, 2, \cdots, N)$. $\boldsymbol{\mathcal{A}(R)}$ sei die Quotientenalgebra $\mathbb{C}\langle u^j_i\rangle / I(R)$.

Satz 2.5.1 ([KS97, Chapt. 9, Prop. 1]) *Auf $\mathcal{A}(R)$ existiert eine eindeutige Bialgebren-Struktur mit*

$$\begin{aligned}\Delta(u^j_i) &= \sum_{1\leq k\leq N} u^j_k \otimes u^k_i \\ \delta(u^j_i) &= \delta_{ij}\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\Delta\colon \mathbb{C}\langle u^j_i\rangle \to \mathbb{C}\langle u^j_i\rangle \otimes \mathbb{C}\langle u^j_i\rangle$ koassoziativ ist und $\delta\colon \mathbb{C}\langle u^j_i\rangle \to \mathbb{K}$ die Koeins-Eigenschaft erfüllt. Wir überprüfen zunächst die Koassoziativität auf den Generatoren u^j_i.

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(u^j_i) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Big(\sum_k u^j_k \otimes u^k_i\Big) = \sum_k u^j_k \otimes \Delta(u^k_i) \\ &= \sum_{k,l} u^j_k \otimes u^k_l \otimes u^l_i = \sum_l \Delta(u^j_l) \otimes u^l_i\end{aligned}$$

$$= (\Delta \otimes \mathrm{id})\Big(\sum_l u_l^j \otimes u_i^l\Big) = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(u_i^j)$$

Ebenso überprüfen wir die Koeins-Eigenschaft auf den Generatoren.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta(u_i^j) &= (\mathrm{id} \circ \delta)\Big(\sum_k u_k^j \otimes u_i^k\Big) = \sum_k u_k^j \otimes (u_i^k) \\
&= \sum_k u_k^j \otimes \delta_{ik} = u_i^j = \mathrm{id}(u_i^j) \\
&= \sum_k \delta_{kj} \otimes u_i^k = \sum_k \delta(u_k^j) \otimes u_i^k \\
&= (\delta \otimes \mathrm{id})\Big(\sum_k u_k^j \otimes u_i^k\Big) = (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(u_i^j)
\end{aligned}$$

Indem wir Δ so fortsetzen, dass die Bialgebren-Gleichung gilt, werden Δ und δ eine Komultiplikation bzw. Koeins auf $\mathbb{C}\langle u_i^j \rangle$. Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
\Delta \circ m(u_i^k \otimes u_j^l) &= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(u_i^k \otimes u_j^l) \\
&\overset{(2.5.2)}{=} (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(u_p^k \otimes u_q^l \otimes u_i^p \otimes u_j^q) \\
&= (m \otimes m)(u_p^k \otimes u_q^l \otimes u_i^p \otimes u_j^q) \\
&= u_p^k u_q^l \otimes u_i^p u_j^q.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass Δ und δ eine Komultiplikation bzw. Koeins auf $\mathbb{C}\langle u_i^j \rangle / I(R)$ induzieren. Hierfür müssen wir zeigen, dass $I(R)$ ein Koideal ist, d. h. dass

$$\begin{aligned}
&\Delta(I(R)) \subset I(R) \otimes \mathbb{C}\langle u_i^j \rangle + \mathbb{C}\langle u_i^j \rangle \otimes I(R), \\
&\delta(I(R)) = 0
\end{aligned}$$

gelten.

Wir zeigen zunächst die erste Eigenschaft.

$$\begin{aligned}
\Delta(I_{ij}^{mn}) &= \Delta\Big(\sum_{k,l} R_{kl}^{mn} u_i^k u_j^l - \sum_{k,l} u_l^n u_k^m R_{ij}^{kl}\Big) \\
&= \sum_{k,l} R_{kl}^{mn} \Delta(u_i^k u_j^l) - \sum_{k,l} \Delta(u_l^n u_k^m) R_{ij}^{kl} \\
&\overset{(2.5.3)}{=} \Big(\sum_{k,l} R_{kl}^{mn} \big(\sum_{p,q} u_p^k u_q^l \otimes u_i^p u_j^q\big)\Big) - \Big(\sum_{k,l} \big(\sum_{p,q} u_p^n u_q^m \otimes u_l^p u_k^q\big) R_{ij}^{kl}\Big) \\
&= \sum_{k,l,p,q} R_{kl}^{mn} u_p^k u_q^l \otimes u_i^p u_j^q - \sum_{k,l,p,q} u_p^n u_q^m \otimes u_l^p u_k^q R_{ij}^{kl} \\
&= \sum_{k,l,p,q} R_{kl}^{mn} u_p^k u_q^l \otimes u_i^p u_j^q
\end{aligned}$$

$$\underbrace{-\sum_{k,l,p,q} u_l^n u_j^m R_{pq}^{kl} \otimes u_i^p u_k^q + \sum_{k,l,p,q} u_l^n u_k^m R_{pq}^{kl} \otimes u_i^p u_j^q}_{=0}$$

$$-\sum_{k,l,p,q} u_p^n u_q^m \otimes u_l^p u_k^q R_{ij}^{kl}$$

$$\underbrace{+\sum_{k,l,p,q} u_p^n u_q^m \otimes R_{kl}^{qp} u_i^k u_j^l - \sum_{k,l,p,q} u_p^n u_q^m \otimes R_{kl}^{qp} u_i^k u_j^l}_{=0}$$

$$= \sum_{p,q} \Big(\sum_{k,l} R_{kl}^{mn} u_p^k u_q^l - \sum_{k,l} u_l^n u_k^m R_{pq}^{kl} \Big) \otimes u_i^p u_j^q + \sum_{k,l,p,q} u_l^n u_k^m R_{pq}^{kl} \otimes u_i^p u_j^q$$

$$+ \sum_{p,q} u_p^n u_q^m \otimes \Big(\sum_{k,l} R_{kl}^{qp} u_i^k u_j^l - \sum_{k,l} u_l^p u_k^q R_{ij}^{kl} \Big) - \sum_{k,l,p,q} u_p^n u_q^m \otimes R_{kl}^{qpl} u_i^k u_j^l$$

$$\overset{(2.5.1)}{=} \sum_{p,q} I_{ij}^{pq} \otimes u_p^m u_q^n + \sum_{k,l,p,q} u_i^k u_j^l R_{kl}^{pq} \otimes u_p^m u_q^n$$

$$+ \sum_{p,q} u_i^p u_j^q \otimes I_{pq}^{mn} - \sum_{k,l,p,q} u_i^p u_j^q \otimes R_{pq}^{kl} u_k^m u_l^n$$

$$= \sum_{p,q} I_{ij}^{pq} \otimes u_p^m u_q^n + \sum_{k,l,p,q} u_i^k u_j^l R_{kl}^{pq} \otimes u_p^m u_q^n$$

$$+ \sum_{p,q} u_i^p u_j^q \otimes I_{pq}^{mn} - \sum_{k,l,p,q} u_i^k u_j^l \otimes R_{kl}^{pq} u_p^m u_q^n$$

$$= \sum_{p,q} I_{ij}^{pq} \otimes u_p^m u_q^n + \sum_{p,q} u_i^p u_j^q \otimes I_{pq}^{mn} \quad \in I(R) \otimes \mathbb{C}\langle u_i^j \rangle + \mathbb{C}\langle u_i^j \rangle \otimes I(R).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \delta(I_{ij}^{mn}) &= \delta\Big(\sum_{k,l} R_{kl}^{mn} u_i^k u_j^l - \sum_{k,l} u_l^n u_k^m R_{ij}^{kl} \Big) \\ &= \sum_{k,l} R_{kl}^{mn} \delta(u_i^k u_j^l) - \sum_{k,l} \delta(u_l^n u_k^m) R_{ij}^{kl} \\ &= \sum_{k,l} R_{kl}^{mn} \delta_i^k \delta_j^l - \sum_{k,l} \delta_l^n \delta_k^m R_{ij}^{kl} \\ &= R_{ij}^{mn} - R_{ij}^{mn} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $I(R)$ ein Koideal und die Komultiplikation und die Koeins auf $\mathbb{C}\langle u_i^j \rangle$ setzen sich fort zur Komultiplikation und Koeins auf $\mathbb{C}\langle u_i^j \rangle / I(R) =: \mathcal{A}(R)$. □

Wir erhalten damit die folgende Definition.

Definition 2.5.2 ([KS97, Chap. 9, Def. 1]) *Die von den Elementen $\{u_j^i\}_{i,j=1,2,\cdots,N}$ bzgl. der Relationen*

$$R_{kl}^{mn} u_i^k u_j^l = u_l^n u_k^n R_{ij}^{kl}$$

$$\Delta(u_i^j) = \sum_{1 \leq k \leq N} u_k^j \otimes u_i^k$$

$$\delta(u_i^j) = \delta_{ij}$$

erzeugte Bialgebra $\mathcal{A}(R)$ heißt ***FRT-Bialgebra****.*

Wir wollen nun noch eine für uns entscheidende Eigenschaft der Bialgebra $\mathcal{A}(R)$ betrachten.

Satz 2.5.3 ([KS97, Chap. 10, Theo. 7]) *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ eine Lösung der QYBE. Dann ist die Bialgebra $\mathcal{A}(R)$ coquasitriangular und es existiert eine eindeutige universelle r-Form $\boldsymbol{r}$ mit*

$$\boldsymbol{r}(u_j^i \otimes u_l^k) = R_{jl}^{ik} \qquad \overline{\boldsymbol{r}}(u_j^i \otimes u_l^k) = (R^{-1})_{jl}^{ik} \tag{2.5.3}$$

für $i, j, k, l = 1, 2, \cdots, N$.

Beweisidee*:* Wir definieren die oben angegebene r-Form zunächst auf $\mathbb{C}\langle u_i^j \rangle \otimes \mathbb{C}\langle u_i^j \rangle$ und setzen diese so fort, dass Gleichungen (2.4.2) und (2.4.3) erfüllt sind. Mit Hilfe der QYBE kann man zeigen, dass für das von der Relation $R_{kl}^{mn} u_i^k u_j^l = u_l^n u_k^n R_{ij}^{kl}$ erzeugte Ideal $I(R)$

$$\boldsymbol{r}\big(I(R) \otimes \mathbb{C}\langle u_i^j \rangle\big) = \boldsymbol{r}\big(\mathbb{C}\langle u_i^j \rangle \otimes I(R)\big) = \{0\}$$

gilt. Somit können wir die r-Form $\boldsymbol{r}$ auf $\mathcal{A}(R) \otimes \mathcal{A}(R)$ hochheben. Man rechnet dann nach, dass die Gleichungen (2.4.1), (2.4.2) und (2.4.3) erfüllt sind und die Inverse tatsächlich wie oben gegeben ist. □

Für spätere Rechnungen benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.5.4 ([KS97, Chap. 9, Prop. 2]) *Die Abbildung $\gamma \colon V \to \mathcal{A}(R) \otimes V$ mit*

$$\gamma(v_i) = \sum_j u_j^i \otimes v_j \tag{2.5.4}$$

definiert eine Kowirkung auf V.

Beweis: Wir überprüfen Eigenschaft (A.4.3) auf den Generatoren.

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(v_i) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})\Big(\sum_j u_j^i \otimes v_j\Big) \\
&= \sum_{j,k} u_k^i \otimes u_j^k \otimes v_j \\
&= \sum_k u_k^i \otimes \gamma(v_k) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \gamma)\Big(\sum_k u_k^i \otimes v_k\Big) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \gamma) \circ \gamma(v_i)
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun noch Eigenschaft (A.4.4).

$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(v_i) = (\delta \otimes \mathrm{id})\Big(\sum_j u_j^i \otimes v_j\Big)$$

$$= \sum_j \delta(u^i_j) \otimes v_j = \delta_{ij} \otimes v_j = v_j$$

Somit ist γ eine Kowirkung auf V. □

Die FRT-$*$-Bialgebra $\mathcal{A}_*(R)$

Wir wollen nun die FRT-Bialgebra $\mathcal{A}(R)$ noch um eine Involution $*$ erweitern, siehe [FSS03]. Betrachte nun die freie Algebra $\mathbb{C}\langle a^j_i, b^k_l\rangle$, wobei $b^k_l := (a^l_k)^*$ die formalen Adjungierten der Elemente a^i_j sind. Wir bezeichnen mit $J(R)$ das $*$-Ideal, das von den Elementen

$$I^{jl}_{ik} := \sum R^{ik}_{pq} a^p_j a^q_l - \sum a^k_q a^i_p R^{pq}_{jl}$$

$$J^{ij}_{kq} := \sum R^{ij}_{kl} b^k_q a^p_l - \sum a^u_l b^i_v R^{vp}_{qu}$$

erzeugt wird. $\boldsymbol{\mathcal{A}_*(R)}$ sei erneut die Quotientenalgebra $\mathbb{C}\langle a^j_i, b^k_l\rangle / J(R)$.

Lemma 2.5.5 *Auf $\mathcal{A}_*(R)$ existiert eine eindeutige Bialgebren-Struktur mit*

$$\Delta(u^j_i) = \sum_{1\leq k\leq N} u^j_k \otimes u^k_i$$

$$\delta(u^j_i) = \delta_{ij}$$

Beweisidee*:* Der Beweis verläuft analog zu Satz 2.5.1.

Korollar 2.5.6 *Für die Adjungierten b^i_j gelten*

$$\Delta(b^i_j) = j^k_j \otimes b^i_k \quad \delta(b^i_j) = \delta_{ij} \tag{2.5.5}$$

Beweis: Die erste Gleichung gilt wegen

$$\begin{aligned}\Delta(b^i_j) &= \Delta((a^j_i)^*) = \Delta \circ *(a^j_i)\\ &\overset{(A.3.5)}{=} (* \otimes *) \circ \Delta(a^j_i) = (a^j_k)^* \otimes (a^k_i)^*\\ &= b^k_j \otimes b^i_k.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt wegen

$$\delta(b^i_j) = \delta((a^j_i)^*) = \delta \circ *(a^j_i) = \delta_{ij}$$

□

Wir definieren nun die FRT-$*$-Bialgebra.

Definition 2.5.7 ([FSS03, Chap. 5]) *Die von den Elementen $\{a^i_j\}_{i,j=1,2,\cdots,N}$ und $\{b^k_l\}_{k,l=1,2,\cdots,N}$ mit $b^k_l := (a^l_k)^*$ bzgl. der Relationen*

$$R^{ik}_{pq} a^p_j a^q_l = a^k_q a^i_p R^{pq}_{jl}$$

$$R^{ij}_{kl} b^k_q a^p_l = a^u_l b^i_v R^{vp}_{qu}$$

$$\Delta(a^i_j) = a^i_k \otimes a^k_j$$

$$\delta(a^i_j) = \delta_{ij}$$

*erzeugte Bialgebra $\mathcal{A}_*(R)$ heißt **FRT-$*$-Bialgebra**.*

Satz 2.5.8 ([FSS03, Chap. 5]) *Sei V ein endlicher Vektorraum und $R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ eine Lösung der QYBE. Dann ist $\mathcal{A}_*(R)$ coquasitriangular und durch $\boldsymbol{r}\colon \mathcal{A}_*(R) \otimes \mathcal{A}_*(R) \to \mathbb{C}$ mit*

$$\boldsymbol{r}(a^i_j \otimes a^k_l) = R^{ik}_{jl} \qquad \boldsymbol{r}(a^i_j \otimes b^k_l) = R^{ki}_{lj}$$

und der (Faltungs-)Inversen $\overline{\boldsymbol{r}}\colon \mathcal{A}_*(R) \otimes \mathcal{A}_*(R) \to \mathbb{C}$ mit

$$\overline{\boldsymbol{r}}(a^i_j \otimes a^k_l) = (R^{-1})^{ik}_{jl} \quad \overline{\boldsymbol{r}}(a^i_j \otimes b^k_l) = \widetilde{R}^{ki}_{lj}$$

wird eine eindeutige universelle r-Form auf $\mathcal{A}_*(R)$ definiert.

Beweisidee*:* Der Beweis verläuft analog zu Satz 2.5.3.

Kapitel 3

Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren

Wir wollen in diesem Kapitel sowohl die Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren mit Hilfe von Hopf-$*$-Algebren, die in [FSS03] bewiesen und in [Mal14] ausgearbeitet wurde, wiederholen und die Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren mit Hilfe von coquasitriangularen Bialgebren (siehe hierfür ebenfalls [FSS03]) beweisen. Wir betten hierfür eine braided $*$-Bialgebra mit Hilfe einer Hopf-$*$-Algebra oder einer coquasitriangularen Bialgebra in eine größere „übliche“ $*$-Bialgebra ein. Die Symmetrisierung von braided Bialgebren ohne Involution ist auch unter dem Namen „Bosonisierung“ in [Maj95] zu finden. Die Symmetrisierung erlaubt es uns unter anderem die Konstruktion und Klassifikation von Lévy-Prozessen auf braided $*$-Bialgebren auf den klassischen Fall zu reduzieren (siehe Kapitel 5).

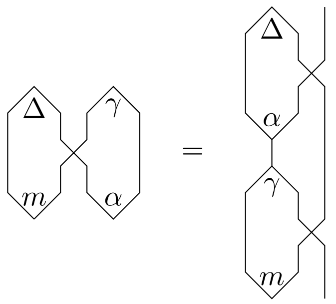
3.1 Symmetrisierung mittels Hopf-$*$-Algebren

Linke Symmetrisierung mittels Hopf-$*$-Algebren

Für diesen Abschnitt wiederholen wir zunächst die Ergebnisse aus [FSS03], die in [Mal14] ausgearbeitet wurden, und setzen diese in einen Zusammenhang mit den sogenannten Yetter-Drinfeld-Moduln. Alle in diesem Abschnitt benötigten Beweise wurden in [Mal14] ausführlich mit Hilfe von Braid-Diagrammen bewiesen.

Sei $\mathcal{A}$ eine Hopf-Algebra mit invertierbarer Antipode. Wir betrachten die Kategorie $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$, deren Objekte Tripel (V, α_V, γ_V) sind, die aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V, einer Wirkung $\alpha_V : \mathcal{A} \otimes V \to V$ und einer Kowirkung $\gamma_V : V \to \mathcal{A} \otimes V$ bestehen, sodass die Gleichung

$$\begin{aligned}(m \otimes \alpha_V) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \gamma_V) \\ = (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma_V \otimes \mathrm{id}) \circ (\alpha_V \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})\end{aligned} \tag{3.1.1}$$



erfüllt ist. Die Morphismen der Kategorie sind lineare Abbildungen $f\colon V \to W$, die sowohl Modul- als auch Komodul-Abbildungen (siehe Abschnitt A.4) sind, d. h. es gelten

$$f \circ \alpha_V = \alpha_W \circ (\mathrm{id} \otimes f),$$
$$\gamma_W \circ f = (\mathrm{id} \otimes f) \circ \gamma_V.$$

Wir definieren das Tensorprodukt in $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ wie folgt: Das Tensorprodukt von Objekten ist definiert durch

$$(V, \alpha_V, \gamma_V) \otimes (W, \alpha_W, \gamma_W) \coloneqq (V \otimes W, \alpha_{V\otimes W}, \gamma_{V\otimes W}),$$

wobei

$$\alpha_{V\otimes W} \coloneqq (\alpha_V \otimes \alpha_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}),$$
$$\gamma_{V\otimes W} \coloneqq (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma_V \otimes \gamma_W)$$

gilt. Das Tensorprodukt von Morphismen das übliche Tensorprodukt zwischen linearen Abbildungen ist. Damit wird $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ zu einer Tensorkategorie. Die Abbildung

$$\Psi = (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id})$$

ist ein Braiding für $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$, d. h. $(\mathfrak{C}(\mathcal{A}), \Psi)$ ist eine braided (Tensor-)Kategorie.

Wir wollen nun die Definition der bereits erwähnten Yetter-Drinfeld-Moduln einführen, siehe hierfür z. B. [Mon93, Chapter 10]. Wir verwenden hier erneut die abgewandelte Sweedler-Notation $\gamma(v) = v^{(1)} \otimes v^{(2)}$ für die Kowirkung.

Definition 3.1.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine Bialgebra. Wir nennen einen Vektorraum V* ***linker Yetter-Drinfeld-Modul über*** *$\mathcal{A}$, wenn V sowohl ein linker $\mathcal{A}$-Modul mit Wirkung α, als auch ein linker $\mathcal{A}$-Komodul mit Kowirkung γ ist und die (linke) Yetter-Drinfeld-Gleichung*

$$\sum a_{(1)} v^{(1)} \otimes a_{(2)}.v^{(2)} = \sum (a_{(1)}.v)^{(1)} a_{(2)} \otimes (a_{(1)}.v)^{(2)} \tag{3.1.2}$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ und $v \in V$ erfüllt ist, wobei $a.v \coloneqq \alpha(a \otimes v)$.

Wir wollen nun zeigen, dass die Objekte der Kategorie $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ Yetter-Drinfeld-Moduln sind. Hierfür zeigen wir, dass Gleichung (3.1.1) äquivalent zu Gleichung (3.1.2) ist. Wir betrachten zunächst die linke Seite von Gleichung (3.1.1) und formen diese in Sweedler-Notation um. Wir verzichten erneut auf Indizes an Abbildungen, wenn sie aus dem Zusammenhang klar sind.

$$\begin{aligned}
&(m \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \gamma)(a \otimes v) \\
&\qquad = (m \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v^{(1)} \otimes v^{(2)}) \\
&\qquad = (m \otimes \alpha)(a_{(1)} \otimes v^{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v^{(2)}) \\
&\qquad = a_{(1)} v^{(1)} \otimes a_{(2)}.v^{(2)}
\end{aligned}$$

Analog formen wir die rechte Seite in Sweedler-Notation um.

$$\begin{aligned}
&(m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes \tau)(a \otimes v) \\
&\qquad = (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)(a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v) \\
&\qquad = (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id})(a_{(1)} \otimes v \otimes a_{(2)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id})(a_{(1)}.v \otimes a_{(2)}) \\
&= (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)((a_{(1)}.v)^{(1)} \otimes (a_{(1)}.v)^{(2)} \otimes a_{(2)}) \\
&= (m \otimes \mathrm{id})((a_{(1)}.v)^{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes (a_{(1)}.v)^{(2)}) \\
&= (a_{(1)}.v)^{(1)} a_{(2)} \otimes (a_{(1)}.v)^{(2)}
\end{aligned}
$$

Wie wir sehen, entspricht Gleichung (3.1.1) in Sweedler-Notation gerade Gleichung(3.1.2). Die Objekte (V, α_V, γ_V) der Kategorie $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ bilden also (linke) Yetter-Drinfeld-Moduln. Wir nutzen daher im Folgenden die für die Kategorie der linken Yetter-Drinfeld-Moduln übliche Bezeichung ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}$. Wie oben sind die Objekte dieser Kategorie linke Yetter-Drinfeld Moduln V über $\mathcal{A}$ und die Morphismen lineare Abbildungen $f\colon V \to W$, die sowohl linke Modul- als auch linke Komodul-Abbildungen sind. Üblicherweise werden lediglich die Yetter-Drinfeld-Moduln V als Objekte dieser Kategorie aufgefasst und nicht die Tripel (V, α_V, γ_V) mit zugehöriger Wirkung und Kowirkung. Für unsere Belange ist jedoch eine explizite Auszeichnung dieser Objekte von Vorteil, sodass wir diese Schreibweise beibehalten werden. Somit erhalten wir die folgende, neue Formulierung für die Kategorie $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$:

Satz 3.1.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine Hopf-Algebra mit invertierbarer Antipode. Die Kategorie ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}$ der linken Yetter-Drinfeld-Moduln wird zu einer Tensorkategorie, indem wir das Tensorprodukt zwischen Objekten durch*

$$(V, \alpha_V, \gamma_V) \otimes (W, \alpha_W, \gamma_W) \coloneqq (V \otimes W, \alpha_{V \otimes W}, \gamma_{V \otimes W})$$

mit

$$
\begin{aligned}
\alpha_{V \otimes W} &\coloneqq (\alpha_v \otimes \alpha_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}), \\
\gamma_{V \otimes W} &\coloneqq (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma_V \otimes \gamma_W)
\end{aligned}
$$

und das Tensorprodukt zwischen Morphismen als übliches Tensorprodukt zwischen linearen Abbildungen definieren. Die Abbildung $\Psi\colon V \otimes W \to W \otimes V$ mit

$$\Psi = (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id}) \tag{3.1.3}$$

ist ein Braiding für ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}$, d. h.$({}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}, \Psi)$ ist eine braided Kategorie.

Wir wollen nun Yetter-Drinfeld-Moduln um eine Involution erweitern.

Definition 3.1.3 *Sei (V, α, γ) ein linker Yetter-Drinfeld-Modul über einer Bialgebra $\mathcal{A}$ mit involutiver Antipode S. Wir nennen V* ***involutiven Yetter-Drinfeld-Modul****, wenn zusätzlich eine Involution $*\colon V \to V$ exisitiert, sodass die Gleichungen*

$$* \circ \alpha = \alpha \circ (* \otimes *) \circ (S \otimes \mathrm{id}), \tag{3.1.4}$$

$$\gamma \circ * = (* \otimes *) \circ \gamma \tag{3.1.5}$$

gelten.

Bemerkung 3.1.4 Die Definition eines involutiven Yetter-Drinfeld-Moduls ist bisher in der Literatur nicht zu finden und soll auch hier keine allgemeine Gültigkeit besitzen, da diese Definition eine invertierbare Antipode der zugrundeliegenden Bialgebra $\mathcal{B}$ voraussetzt, die für allgemeine Yetter-Drinfeld-Moduln jedoch nicht gegeben sein muss. Wir verwenden hier in diesem Zusammenhang dennoch die Bezeichnung involutiver Yetter-Drinfeld-Modul, um uns die weitere Formulierung der Ergbenisse zu vereinfachen.

Wir bezeichnen nun die Kategorie, deren Objekte $(V, \alpha, \gamma, *)$ involutive Yetter-Drinfeld - Moduln und deren Morphismen die linearen Modul- und Komodul-Abbildungen sind, im Folgenden mit ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*$.

Bemerkung 3.1.5 Wir fordern hier bewusst für die Morphismen der Kategorie keine Verträglichkeit mit der Involution $*$, da das Braiding Ψ einer braided Tensorkategorie ebenfalls ein Morphismus sein muss und dieses jedoch nicht verträglich mit der Involution ist.

Satz 3.1.6 *Betrachte die Kategorie ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*$. Das Tensorprodukt zwischen Objekten sei definiert durch*

$$(V, \alpha_V, \gamma_V, *_V) \otimes (W, \alpha_W, \gamma_W, *_W) := (V \otimes W, \alpha_{V\otimes W}, \gamma_{V\otimes W}, *_{V\otimes W}),$$

wobei $\alpha_{V\otimes W}$ und $\gamma_{V\otimes W}$ wie in Satz 3.1.2 definiert sind und

$$*_{V\otimes W} := \underbrace{(\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id})}_{=:\Psi} \circ (*_W \otimes *_V) \circ \tau$$

gilt. Das Tensorprodukt ist erneut das übliche Tensorprodukt zwischen linearen Abbildungen. Mit diesen Definitionen wird ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*$ eine Tensorkategorie und mit Ψ eine braided Tensorkategorie.

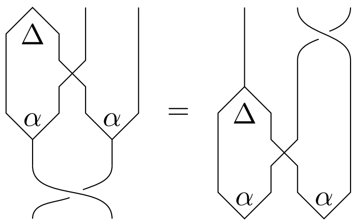
Beweis: Wegen Satz 3.1.2 bleibt nur noch zu zeigen, dass $(V \otimes W, \alpha_{V\otimes W}, \gamma_{V\otimes W}, *_{V\otimes W})$ selbst wieder ein involutiver Yetter-Drinfeld-Modul ist, d. h. dass für $\alpha_{V\otimes W}$, $\gamma_{V\otimes W}$ und $*_{V\otimes W}$ die Gleichungen (3.1.4) und (3.1.5) gelten. Insbesondere ist Ψ wegen Bemerkung (3.1.5) weiterhin ein Braiding für unsere Kategorie ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*$. Wir zeigen zunächst, dass Gleichung (3.1.4) erfüllt ist, d.h. dass

$$*_{V\otimes W} \circ \alpha_{V\otimes W} = \alpha_{V\otimes W} \circ (*_{\mathcal{A}} \circ *_{V\otimes W}) \circ (S \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$

gilt. Ψ ist ein Morphismus, also inbesondere auch eine Modul-Abbildung, d. h. es gilt

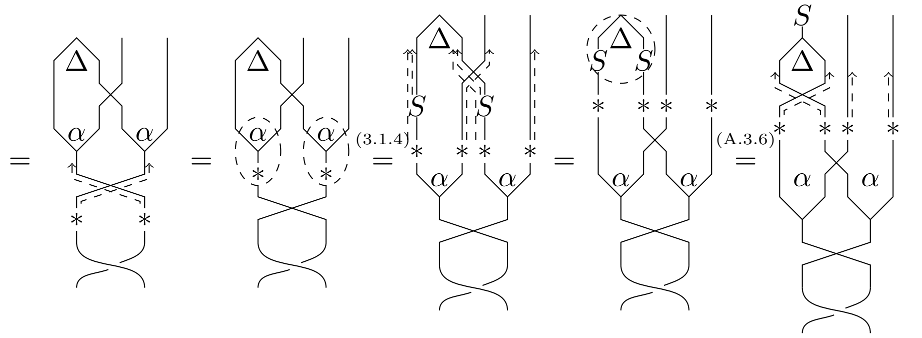
$$\Psi \circ \alpha_{V\otimes W} = \alpha_{W\otimes V} \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \tag{3.1.6}$$

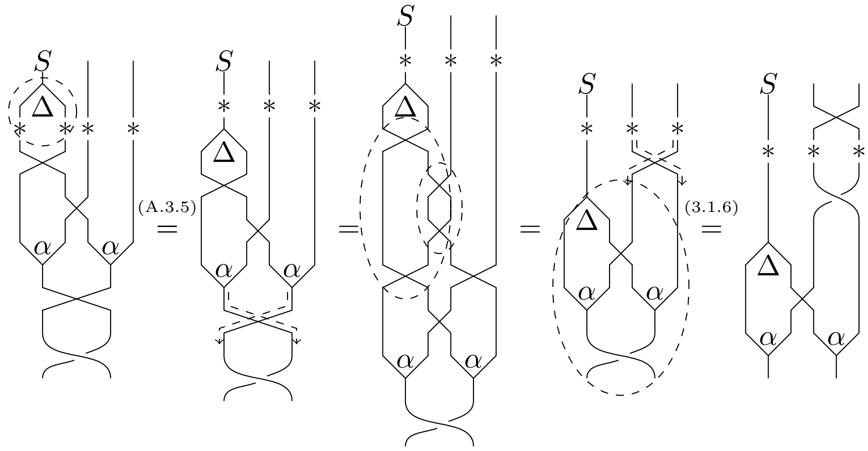
bzw. in Diagramm-Schreibweise



Somit gilt

$$*_{V\otimes W} \circ \alpha_{V\otimes W} = \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau \circ (\alpha \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$





$$= (\alpha \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (* \otimes * \otimes *) \circ (S \otimes \tau)$$

$$= \alpha_{V\otimes W} \circ (*_{\mathcal{A}} \otimes *_{V\otimes W}) \circ (S \otimes \mathrm{id})$$

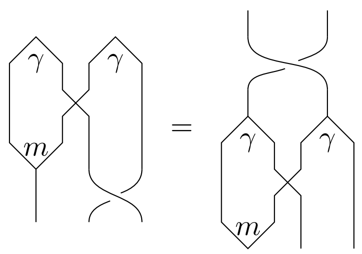
Wir zeigen nun noch, dass ebenso Gleichung (3.1.5) erfüllt ist, d. h. es gilt

$$\gamma_{V\otimes W} \circ *_{V\otimes W} = (*_{\mathcal{A}} \otimes *_{V\otimes W}) \circ \gamma_{V\otimes W}$$

gilt. Ψ ist ein Morphismus, also inbesondere auch eine Komodul-Abbildung, d. h. es gilt

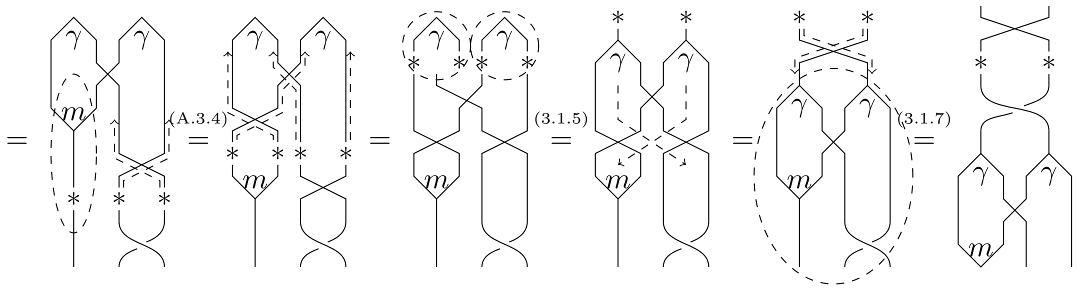
$$\gamma_{W\otimes V} \circ \Psi = (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ \gamma_{V\otimes W} \tag{3.1.7}$$

bzw. in Diagramm-Schreibweise



Somit gilt

$$(*_{\mathcal{A}} \otimes *_{V\otimes W}) \circ \gamma_{V\otimes W} = (*_{\mathcal{A}} \otimes (\Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau)) \circ (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma)$$



$$= (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \circ \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau = \gamma_{V\otimes W} \circ *_{V\otimes W}$$

Insgesamt ist also $(V \otimes W, \alpha_{V\otimes W}, \gamma_{V\otimes W}, *_{V\otimes W})$ ebenfalls wieder ein involutiver Yetter-Drinfeld-Modul und somit ein Objekt der Kategorie ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*$. □

Die neue Formulierung der linken Symmetrisierung von braided ∗-Bialgebren lautet somit

Satz 3.1.7 (Linke Symmetrisierung von braided ∗-Bialgebren mittels Hopf-∗-Algebren [FSS03, Theo 4.1]) *Sei $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}}, \Delta_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$ eine Hopf-∗-Algebra mit invertierbarer Antipode S und $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$ eine braided ∗-Bialgebra in der braided Tensorkategorie $({}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*, \Psi)$. Dann ist $\mathcal{H} := \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ (als Vektorraum) mit*

$$m_{\mathcal{H}} = (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}), \quad (3.1.8)$$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}},$$

$$\Delta_{\mathcal{H}} = (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_{\mathcal{B}} \otimes \Delta_{\mathcal{A}}), \quad (3.1.9)$$

$$\delta_{\mathcal{H}} = \delta_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}},$$

$$*_{\mathcal{H}} = (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ (*_{\mathcal{B}} \otimes *_{\mathcal{A}})$$

eine ∗-Bialgebra (im üblichen Sinn).

Beweis: Siehe [FSS03] oder für eine mit Hilfe von Braid-Diagrammen bewiesene Variante [Mal14, Kapitel 4.3, Satz 5]. □

Rechte Symmetrisierung mittels Hopf-∗-Algebren

Trotz der Tatsache, dass ein rechter $\mathcal{A}$-Modul bzw. -Komodul als linker $\mathcal{A}$-Modul bzw. -Komodul in der Algebra $\mathcal{A}^{op}$ aufgefasst werden kann und es somit genügt linke Moduln und Komoduln zu betrachten, wollen wir hier der Vollständgkeit halber eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse für die rechte Symmetrisierung von braided (∗)-Bialgebren mit Hilfe von Hopf-∗-Algebren formulieren. Die Beweise verlaufen analog zu den Beweisen für die linke Symmetrisierung mittels Hopf-∗-Algebren in [Mal14]. Das bedeutet, dass wir die Beweise durch Spiegelung der Diagramme an der Senkrechten erhalten. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass wir zwar die Position des Braidings (wenn vorhanden) „spiegeln“, das Braiding als solches jedocht nicht, da wir sonst nicht das Braiding Ψ, sondern sein Inverses Ψ^{-1} betrachten würden.

Analog zur Definition eines linken Yetter-Drinfeld-Moduls heißt ein Vektorraum V **rechter Yetter-Drinfeld-Modul über $\mathcal{A}$**, wenn V sowohl ein rechter $\mathcal{A}$-Modul mit (rechter) Wirkung $\overline{\alpha}\colon V \otimes \mathcal{A} \to V$, als auch ein rechter $\mathcal{A}$-Komodul mit (rechter) Kowirkung $\overline{\gamma}\colon V \to V \otimes \mathcal{A}$ ist und die (rechte) Yetter-Drinfeld-Gleichung

$$v^{(1)}.a_{(1)} \otimes v^{(2)}a_{(2)} = (v.a_{(2)})^{(1)} \otimes a_{(1)}(v.a_{(2)})^{(2)}$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ und $v \in V$ erfüllt ist, wobei $\overline{\alpha}(v \otimes a) = v.a$ und $\overline{\gamma}(v) = v^{(1)} \otimes v^{(2)}$. Diese Bedingung entspricht der Gleichung

$$\begin{aligned}&(\overline{\alpha} \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\gamma} \otimes \Delta)\\ &\qquad = (\mathrm{id} \otimes m) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta).\end{aligned}$$

Wir nennen V **involutiv**, falls eine Involution $*\colon V \to V$ exisitiert, sodass die Gleichungen

$$\begin{aligned}* \circ \overline{\alpha} &= \overline{\alpha} \circ (* \otimes *) \circ (\mathrm{id} \otimes S),\\ \overline{\gamma} \circ * &= (* \otimes *) \circ \overline{\gamma},\end{aligned}$$

erfüllt sind.

Wir wollen nun analog die Kategorie $(\mathcal{YD}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})_*$ definieren. Die Objekte sind Quadrupel $(V, \overline{\alpha}, \overline{\gamma}, *)$ sind involutive (rechte) Yetter-Drinfeld-Moduln und die Morphismen lineare Modul- und Komodul-Abbildungen.

Für eine Bialgebra $\mathcal{B}$ und (rechte) Yetter-Drinfeld-Moduln $(V, \overline{\alpha}_V, \overline{\gamma}_V)$ und $(W, \overline{\alpha}_W, \overline{\gamma}_W)$ kann man analog zeigen, dass der Vektorraum $V \otimes W$ ein Rechts-Modul mit Wirkung

$$\overline{\alpha}_{V\otimes W} := (\overline{\alpha}_V \otimes \overline{\alpha}_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta),$$

sowie ein Rechts-Komodul mit Kowirkung

$$\overline{\gamma}_{V\otimes W} := (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\gamma}_V \otimes \overline{\gamma}_W)$$

ist.

Sei $\mathcal{A}$ nun eine Hopf-Algebra mit invertierbarer Antipode und V, W rechte $\mathcal{A}$-Moduln und Komoduln. Dann ist

$$\overline{\Psi} = (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma})$$

invertierbar mit der Inversen

$$\overline{\Psi}^{-1} = \tau \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes S^{-1}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}).$$

Weiterhin ist

$$*_{V\otimes W} := \overline{\Psi} \circ (*_W \otimes *_V) \circ \tau$$

eine Involution auf $V \otimes W$. Sind V, W sogar rechte Yetter-Drinfeld-Moduln über $\mathcal{A}$, so ist $\overline{\Psi}$ eine rechte Modul-und Komodul-Abbildung, d. h. es gelten

$$\begin{aligned}\overline{\Psi} \circ \overline{\alpha}_{V\otimes W} &= \overline{\alpha}_{W\otimes V} \circ (\overline{\Psi} \otimes \mathrm{id}),\\ \overline{\gamma}_{W\otimes V} \circ \overline{\Psi} &= (\overline{\Psi} \otimes \mathrm{id}) \circ \overline{\gamma}_{V\otimes W}.\end{aligned}$$

Wir können also analog die Kategorie $(\mathcal{YD}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})_*$ der rechten Yetter-Drinfeld-Moduln über $\mathcal{A}$ definieren.

Satz 3.1.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine Hopf-Algebra mit invertierbarer Antipode. Dann können wir die Tensorkategorie $(\mathcal{YD}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})_*$ wie folgt definieren: Die Objekte $(V, \overline{\alpha}_V, \overline{\gamma}_V, *_V)$ sind rechte involutive Yetter-Drinfeld-Moduln über $\mathcal{A}$. Die Morphismen der Kategorie sind lineare Abbildungen, die sowohl rechte Modul- als auch rechte Komodul-Abbildungen sind. Das Tensorprodukt von Objekten definieren wir durch*

$$(V, \overline{\alpha}_V, \overline{\gamma}_V, *_V) \otimes (W, \overline{\alpha}_W, \overline{\gamma}_W, *_W) := (V \otimes W, \overline{\alpha}_{V\otimes W}, \overline{\gamma}_{V\otimes W}, *_{V\otimes W}),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{V\otimes W} &= (\overline{\alpha}_v \otimes \overline{\alpha}_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}),\\
\overline{\gamma}_{V\otimes W} &= (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\gamma}_V \otimes \overline{\gamma}_W),\\
*_{V\otimes W} &:= \underbrace{(\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma})}_{=\overline{\Psi}} \circ (*_W \otimes *_V) \circ \tau
\end{aligned}$$

gilt. Das Tensorprodukt von Morphismen ist das übliche Tensorprodukt zwischen linearen Abbildungen. Die Abbildung $\overline{\Psi} = (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma})$ ist ein Braiding für $(\mathcal{YD}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})_*$, d. h. $((\mathcal{YD}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})_*, \overline{\Psi})$ ist eine braided Kategorie.

Analog erhalten wir somit für die rechte Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren den folgenden Satz.

Satz 3.1.9 (Rechte Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren mittels Hopf-$*$-Algebren) *Sei $\mathcal{A}$ eine Hopf-Algebra mit invertierbarer Antipode und $\mathcal{B}$ eine braided $*$-Bialgebra in $(\mathcal{YD}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}, \overline{\Psi})_*$. Dann ist $\mathcal{H}_R := \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ als Vektorraum eine (übliche) $*$-Bialgebra mit*

$$\begin{aligned}
m_{\mathcal{H}_R} &= (m_{\mathcal{A}} \otimes m_{\mathcal{B}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}),\\
\mathbb{1}_{\mathcal{H}_R} &= \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}},\\
\Delta_{\mathcal{H}_R} &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_{\mathcal{A}} \otimes \Delta_{\mathcal{B}}),\\
\delta_{\mathcal{H}_R} &= \delta_{\mathcal{A}} \otimes \delta_{\mathcal{B}},\\
_{\mathcal{H}_R} &= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ (\otimes *).
\end{aligned}$$

3.2 Symmetrisierung mittels coquasitriangularer $*$-Bialgebren

Linke Symmetrisierung mittels coquasitriangularer $*$-Bialgebren

In diesem Abschnitt wollen wir erneut eine Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren vornehmen. Diesmal verwenden wir jedoch zur Konstruktion unserer zugrundliegenden Kategorie keine Hopf-$*$-Algebren, sondern Bialgebren, die coquasitriangular sind und eine Involution $*$ besitzen. Insbesondere bedeutet dies, dass wir bei diesem Ansatz keine invertierbare Antipode brauchen. Auch diese Konstruktion wurde zuerst in [FSS03] ausgeführt. Wir weisen an dieser Stelle ausdrücklich darauf hin, dass wir, wenn wir von einer coquasitriangularen $*$-Bialgebra sprechen, eine Bialgebra meinen, die coquasitriangular und eine $*$-Bialgebra und keine Verträglichkeit zwischen der zugehörigen r-Form $\boldsymbol{r}$ und der Involution $*$ fordern. Wir lassen wie bereits vorher die Indizes an Abbildungen weg, wenn sie aus dem Zusammenhang zu erschließen sind.

Wir betrachten zunächst das folgende Lemma.

Lemma 3.2.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine coquasitriangulare Bialgebra mit universeller r-Form $\boldsymbol{r}$ und γ_V eine linke Kowirkung von $\mathcal{A}$ auf V. Dann definiert*

$$\alpha_V = (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma_V) \tag{3.2.1}$$

eine Wirkung von $\mathcal{A}$ auf V.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass Gleichung (A.4.1) gilt.

$$\begin{aligned}
\alpha\circ(m\otimes\mathrm{id}) &\overset{(3.2.1)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma)\circ(m\otimes\mathrm{id})\\
&= (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(m\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\\
&\overset{(2.4.5)}{=} \Big((\bar{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{23}}\star\bar{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{13}})\otimes\mathrm{id}\Big)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\\
&\overset{(1.3.6)}{=} \Big((((\delta\otimes\bar{\boldsymbol{r}})\otimes((\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\delta)\circ(\mathrm{id}\otimes\tau)))\circ\Delta_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}})\otimes\mathrm{id}\Big)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\\
&= \Big(((\delta\otimes\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\delta)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\\
&\qquad\circ(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\tau\otimes\mathrm{id})\circ(\Delta\otimes\Delta\otimes\Delta))\otimes\mathrm{id}\Big)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\\
&= (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\\
&\qquad\circ(\Delta\otimes\Delta\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\\
&\overset{(A.4.4)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\tau\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\\
&\overset{(A.4.3)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\tau\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\\
&= (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma)\circ(\mathrm{id}\otimes\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\gamma)\\
&= (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma)\circ\Big(\mathrm{id}\otimes((\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma))\Big)\\
&= \alpha\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha)
\end{aligned}$$

Nun überprüfen wir Gleichung (A.4.2).

$$\begin{aligned}
\alpha\circ(\mathbb{1}\otimes\mathrm{id}) &\overset{(3.2.1)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma)\circ(\mathbb{1}\otimes\mathrm{id})\\
&= (\bar{\boldsymbol{r}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathbb{1}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ\gamma\\
&= \Big((\bar{\boldsymbol{r}}\circ(\mathbb{1}\otimes\mathrm{id}))\otimes\mathrm{id}\Big)\circ\gamma\\
&\overset{(2.4.4)}{=} (\delta\otimes\mathrm{id})\circ\gamma\\
&\overset{(A.4.4)}{=} \mathrm{id}
\end{aligned}$$

Somit ist α_V eine Wirkung vom $\mathcal{A}$ auf V. □

Nun wollen wir zeigen, dass diese Paare aus einer Kowirkung γ und der nach Lemma 3.2.1 zugehörigen Wirkung α die Yetter-Drinfeld-Gleichung (3.1.2) erfüllen und V somit ein (linker) Yetter-Drinfeld-Modul ist.

Satz 3.2.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine coquasitriangulare Bialgebra und γ eine Kowirkung von $\mathcal{A}$ auf V. Weiterhin sei α die zugehörige Wirkung aus Lemma 3.2.1. Dann ist (V, α, γ) ein Yetter-Drinfeld-Modul.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Yetter-Drinfeld-Gleichung (3.1.2) gilt.

$$
\begin{aligned}
&(m \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \gamma)\\
&\quad \overset{(3.2.1)}{=} (m \otimes \bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma) \circ (\Delta \otimes \gamma)\\
&\quad \overset{(A.4.3)}{=} (m \otimes \bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)\\
&\quad \overset{(1.3.6)}{=} ((m \star \bar{\boldsymbol{r}}) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)\\
&\quad \overset{(2.4.1)}{=} ((\bar{\boldsymbol{r}} \star m^{op}) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)\\
&\quad \overset{(1.3.6)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)\\
&\quad \overset{(A.4.3)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \gamma) \circ (\Delta \otimes \gamma)\\
&\quad = (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})\\
&\qquad\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \gamma)\\
&\quad = (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})\\
&\qquad\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})\\
&\quad \overset{(3.2.1)}{=} (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})
\end{aligned}
$$

Somit haben wir gezeigt, dass α und γ die Yetter-Drinfeld-Gleichung (3.1.2) erfüllen und somit V ein Yetter-Drinfeld-Modul ist. □

Erneut wollen wir eine braided Tensorkategorie definieren, für die wir die Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren formulieren können. Diese enthält Komoduln (V, γ) einer coquasitriangularen Bialgebra $\mathcal{A}$ als Objekte und Komodul-Abbildungen als Morphimsen. In Anlehnung an die für die Kategorie der (linken) Komoduln einer Algebra $\mathcal{A}$ übliche Bezeichnung ${}^{\mathcal{A}}\mathrm{Komod}$, bezeichnen wir diese Kategorie mit ${}^{\mathcal{A}}\mathbf{C}$. Das folgende Lemma zeigt uns, dass wir unsere neue Kategorie als Unterkategorie von ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*$ betrachten können.

Lemma 3.2.3 *Seien V,W $\mathcal{A}$-Komoduln und $f\colon V \to W$ eine lineare Komodul-Abbbildung. Dann ist f auch eine Modul-Abbildung.*

Beweis: Sei $f\colon V \to W$ eine Komodul-Abbildung, d. h. es gilt

$$\gamma_W \circ f = (\mathrm{id} \otimes f) \circ \gamma_V. \tag{3.2.2}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_W \circ (\mathrm{id} \otimes f) &\overset{(3.2.1)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma_W) \circ (\mathrm{id} \otimes f) \\
&\overset{(3.2.2)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes f) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma_W) \\
&= f \circ (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma_W) \\
&\overset{(3.2.1)}{=} f \circ \alpha_V
\end{aligned}$$

□

Wir sehen also mit Satz (3.2.2), dass unsere Objekte (V, γ) mit der nach Satz (3.2.1) zugehörigen Wirkung α wieder Yetter-Drinfeld-Moduln sind. Die Morphismen sind wieder sowohl Modul- als auch Komodul-Abbildungen. Da wir uns somit in einer Unterkategorie von ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}$ befinden, folgt direkt der folgende Satz.

Satz 3.2.4 *Die Kategorie ${}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}$ bildet eine Tensorkategorie mit*

$$(V, \gamma_V) \otimes (W, \gamma_W) := (V \otimes W, \gamma_{V\otimes W}),$$

wobei

$$\gamma_{V\otimes W} := (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma_V \otimes \gamma_W)$$

gilt. Das Tensorprodukt zwischen Morphismen ist das übliche Tensorprodukt zwischen linearen Abbildungen.

Beweis: Dass $\gamma_{V\otimes W}$ eine Kowirkung auf $V \otimes W$ ist, haben wir bereits bei der Symmetrisierung mit Hilfe von Hopf-$*$-Algebren gezeigt. Das Tensorprodukt von Komodul-Abbildungen ist wieder eine Komodul-Abbildung. □

Um nun ein Braiding in der Kategorie ${}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}$ zu definieren, setzen wir Gleichung (3.2.1) in Gleichung (3.1.3) ein und erhalten somit

$$\Psi_{VW} = (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma). \tag{3.2.3}$$

Das folgende Lemma zeigt uns, dass wir in dieser Situation keine invertierbare Antipode brauchen, um ein Braiding zu erhalten.

Lemma 3.2.5 *Sei $\mathcal{A}$ eine coquasitriangulare Bialgebra mit universeller r-Form $\boldsymbol{r}$. Dann ist Ψ_{VW} invertierbar mit*

$$\Psi_{VW}^{-1} = \tau \circ ((\boldsymbol{r} \circ \tau) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma). \tag{3.2.4}$$

Beweis: Wir zeigen, dass Ψ^{-1} die Linksinverse von Ψ ist.

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \circ (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(\gamma \otimes \gamma) \\
&\quad = (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&\quad \overset{(A.4.3)}{=} (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&= (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&\overset{(1.3.6)}{=} ((\bar{\boldsymbol{r}} \star \boldsymbol{r}) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&= (\delta \otimes \delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&\overset{(A.4.4)}{=} \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

Hierbei verwenden wir in der vorletzten Zeile die Tatsache, dass $\bar{\boldsymbol{r}}$ die Inverse bzgl. der Faltung von $\boldsymbol{r}$ ist und somit $\bar{\boldsymbol{r}} \star \boldsymbol{r} = \delta \otimes \delta$ gilt. Die andere Richtung verläuft komplett analog. □

Als Konsequenz der vorangegangen Sätze und Abschnitte erhalten wir somit die folgende Aussage.

Satz 3.2.6 *Die Kategorie* ${}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}$ *ist mit der in Lemma 3.2.5 definierten Abbildung* Ψ *eine braided Tensorkategorie.*

Beweis: Nach Satz (3.2.4) ist ${}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}$ eine Tensorkategorie. Dass Ψ ein Braiding für ${}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}$ ist, folgt aus dem vorherigen Abschnitt, da wir hier ebenfalls Yetter-Drinfel-Moduln betrachten, und Lemma 3.2.6. □

Erneut wollen wir nun die Objekte um eine Involution erweitern und somit die Kategorie ${}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*$ definieren. Die Objekte sind nun Tripel $(V, \gamma_V, *_V)$, bestehend aus einem Vektorraum V, einer Kowirkung γ_V und einer Involution $*_V$ auf V, sodass erneut

$$\gamma \circ * = (* \otimes *) \circ \gamma \tag{3.2.5}$$

gilt. Die Morphismen sind weiterhin Komodul-Abbildungen.

Bemerkung 3.2.7 Anders als bei den vorherigen Aussagen folgt hier aus der ∗-Verträglichkeit von γ nicht die ∗-Verträglichkeit mit α aus dem vorherigen Abschnitt. Dies können wir direkt einsehen, da wir in der aktuellen Situation insbesondere keine invertierbare Antipode S haben. Wir sprechen im weiteren Verlauf somit auch nicht von involutiven Yetter-Drinfeld-Moduln und können die Kategorie auch nicht als Unterkategorie von $({}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*, \Psi)$ auffassen.

Lemma 3.2.8 *Seien* $(V, \gamma_V, *_V)$ *und* $(W, \gamma_W, *_W)$ *Objekte der Kategorie* ${}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*$ *und* $\mathcal{A}$ *eine coquasitriangulare ∗-Bialgebra, deren r-Form* $\boldsymbol{r}$ *die Gleichung*

$$*_{\mathbb{C}} \circ \boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{r}} \circ (*_{\mathcal{A}} \otimes *_{\mathcal{A}}) \tag{3.2.6}$$

erfüllt, wobei $*_{\mathbb{C}}$ *die komplexe Konjugation auf* $\mathbb{C}$ *bezeichnet. Dann ist*

$$*_{V \otimes W} = \Psi_{WV} \circ (*_W \otimes *_V) \circ \tau$$

eine Involution auf $V \otimes W$ *und* $*_{V \otimes W}$ *und* $\gamma_{V \otimes W}$ *erfüllen Gleichung* (3.2.5)*.*

Beweis: Wir betrachten zunächst die folgende Hilfsrechnung.

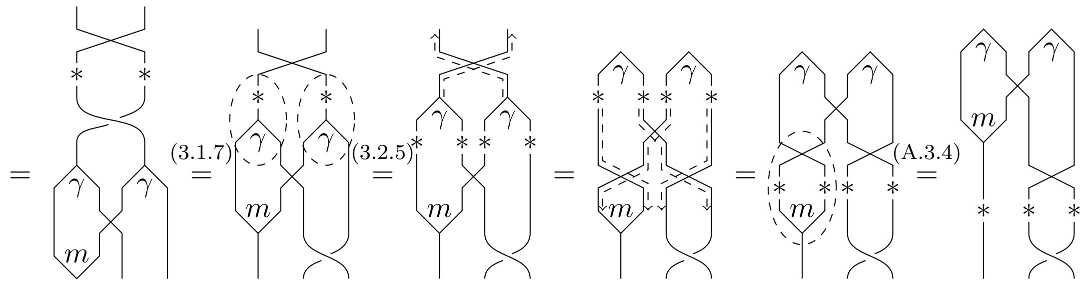
$$
\begin{aligned}
(* \otimes *) &\circ \Psi \circ (* \otimes *) \\
&\overset{(3.2.3)}{=} (* \otimes *) \circ \tau \circ (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \circ (* \otimes *) \\
&\overset{(3.2.5)}{=} \tau \circ (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes * \otimes *) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (* \otimes * \otimes * \otimes *) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&= \tau \circ (\bar{\boldsymbol{r}} * \otimes *) \circ (* \otimes * \otimes * \otimes *) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&\overset{(3.2.6)}{=} \tau \circ (\boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&= (\boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ \underbrace{(\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})}_{=\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}} \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&= (\boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ \underbrace{(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})}_{=\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}} \circ (\tau \otimes \tau) \\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma) \\
&= \tau \circ \underbrace{\tau \circ (\boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma)}_{\overset{(3.2.4)}{=} \Psi^{-1}} \circ \tau \\
&= \tau \circ \Psi^{-1} \circ \tau
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

Mit dieser Rechnung folgt nun

$$
\begin{aligned}
*_{V \otimes W} \otimes *_{V \otimes W} &= \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau \circ \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau \\
&= \Psi \circ \tau \circ (* \otimes *) \circ \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau \\
&\overset{(3.2.7)}{=} \Psi \circ \tau \circ \tau \circ \Psi^{-1} \circ \tau \circ \tau \\
&= \Psi \circ \Psi^{-1} \\
&= \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

Es bleibt somit nur noch zu zeigen, dass $\gamma_{V \otimes W}$ und $*_{V \otimes W}$ erneut Gleichung (3.2.5) erfüllen. Es gilt

$\gamma_{V\otimes W} \circ *_{V\otimes W}$



$= (*_{\mathcal{B}} \otimes *_{V\otimes W}) \circ \gamma_{V\otimes W}$

Somit haben wir die Behauptung gezeigt. □

Zusammenfassend erhalten wir aus den vorangegangenen Sätzen und Lemmata die folgende Aussage.

Satz 3.2.9 *Sei $\mathcal{A}$ eine coquasitriangulare $*$-Bialgebra mit universeller r-Form $\boldsymbol{r}$, die Gleichung* (3.2.6) *erfüllt. Dann können wir wie folgt die braided Kategorie $({}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*, \Psi)$ konstruieren: Die Objekte sind Tripel $(V, \gamma_V, *_V)$ bestehend aus einem komplexen Vektorraum V, einer Kowirkung γ_V und einer Involution $*_V$, sodass Gleichung* (3.2.5) *erfüllt ist. Die Morphismen sind Komodul-Abbildungen. Das Tensorprodukt von Objekten ist definiert durch*

$$(V, \gamma_V, *_V) \otimes (W, \gamma_W, *_W) := (V \otimes W, \gamma_{V\otimes W}, *_{V\otimes W})$$

mit

$$\gamma_{V\otimes W} := (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma_V \otimes \gamma_W),$$

$$*_{V\otimes W} := \underbrace{\tau \circ (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \gamma)}_{=\Psi} \circ (*_W \otimes *_V) \circ \tau.$$

Das Tensorprodukt von Morphismen ist erneut das übliche Tensorprodukt von linearen Abbildungen. Die Abbbildung

$$\Psi_{VW} = \tau \circ (\bar{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma_V \otimes \gamma_W)$$

ist ein Braiding und somit ist $({}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*, \Psi)$ eine braided Kategorie.

Analog zur Symmetrisierung mit Hilfe von Hopf-$*$-Algebren erhalten wir nun den folgenden Satz, wobei der Beweis erneut analog zum Fall der Symmetrisierung mit Hilfe von Hopf-$*$-Algebren ist.

Satz 3.2.10 (Linke Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren mittels coquasitriangularer $*$-Bialgebren [FSS03, Theo. 4.1]) *Sei $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}}, \Delta_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}})$ eine coquasitrangulare $*$-Bialgebra und $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}}, *_{\mathcal{B}})$ eine braided $*$-Bialgebra in $({}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*, \Psi)$. Dann wird $\mathcal{H} := \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ (als Vektorraum) mit*

$$m_{\mathcal{H}} = (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \bar{\boldsymbol{r}} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}),$$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}},$$

$$\Delta_{\mathcal{H}} = (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_{\mathcal{B}} \otimes \Delta_{\mathcal{A}}), \tag{3.2.8}$$

$$\delta_{\mathcal{H}} = \delta_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}},$$

$$*_{\mathcal{H}} = (\overline{\boldsymbol{r}} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma \otimes \Delta) \circ (*_{\mathcal{B}} \otimes *_{\mathcal{A}})$$

zu einer $*$-Bialgebra.

Rechte Symmetrisierung mittels coquasitriangularer $*$-Bialgebren

Auch hier wollen wir der Vollständigkeit halber die rechte Symmetrisierung angeben. Erneut laufen die Beweise analog zur linken Symmetrisierung und werden deshalb nicht ausgeführt. Sei $\mathcal{A}$ eine coquasitriangulare Bialgebra mir universeller r-Form $\boldsymbol{r}$ und $\overline{\gamma}_V$ eine rechte Kowirkung von $\mathcal{A}$ auf V. Dann definiert

$$\overline{\alpha}_V := (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\overline{\gamma}_V \otimes \mathrm{id})$$

eine rechte Wirkung von $\mathcal{A}$ auf V.

Satz 3.2.11 *Sei $\mathcal{A}$ eine coquasitriangulare $*$-Bialgebra mit universeller r-Form $\boldsymbol{r}$, die Gleichung* (3.2.6) *erfüllt. Dann können wir wie folgt die braided Kategorie $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}})_*, \Psi)$ konstruieren: Die Objekte sind Tripel $(V, \overline{\gamma}_V, *_V)$ bestehend aus einem komplexen Vektorraum V, einer rechten Kowirkung $\overline{\gamma}_V$ und einer Involution $*_V$, sodass Gleichung* (3.2.5) *erfüllt ist. Die Morphismen sind rechte Komodul-Abbildungen. Das Tensorprodukt von Objekten ist definiert durch*

$$(V, \overline{\gamma}_V, *_V) \otimes (W, \overline{\gamma}_W, *_W) := (V \otimes W, \overline{\gamma}_{V \otimes W}, *_{V \otimes W})$$

mit

$$\overline{\gamma}_{V \otimes W} := (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\gamma}_V \otimes \overline{\gamma}_W)$$

$$*_{V \otimes W} := \underbrace{(\tau \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\gamma}_V \otimes \overline{\gamma}_W)}_{=\overline{\Psi}} \circ (*_W \otimes *_V) \circ \tau$$

Das Tensorprodukt von Morphismen ist erneut das übliche Tensorprodukt von linearen Abbildungen. Die Abbbildung

$$\overline{\Psi} = (\tau \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\gamma}_V \otimes \overline{\gamma}_W)$$

ist ein Braiding und somit ist $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}})_*, \Psi)$ eine braided Kategorie.

Die Formulierung der rechten Symmetrisierung liest sich in diesem Fall wie folgt.

Satz 3.2.12 ***(Rechte Symmetrisierung von braided $*$-Bialgebren mittels coquasitriangularer $*$-Bialgebren)*** *Sei $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}}, \Delta_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}})$ eine coquasitriangulare $*$-Bialgebra und $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}}, *_{\mathcal{B}})$ eine braided $*$-Bialgebra in $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}})_*, \Psi)$. Dann wird $\mathcal{H}_R := \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ (als Vektorraum) mit*

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{H}_R} &= (m_{\mathcal{A}} \otimes m_{\mathcal{B}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\ &\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}), \end{aligned}$$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}_R} = \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}},$$

$$\Delta_{\mathcal{H}_R} = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_{\mathcal{A}} \otimes \Delta_{\mathcal{B}}),$$

$$\delta_{\mathcal{H}_R} = \delta_{\mathcal{A}} \otimes \delta_{\mathcal{B}},$$

$$*_{\mathcal{H}_R} = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\gamma} \otimes \Delta) \circ (* \otimes *)$$

zu einer $*$-Bialgebra.

Abschließend wollen wir bemerken, dass die linke (bzw. rechte) Symmetrisierung in beiden Fällen, unabhängig davon, ob wir eine zugrundeliegende Hopf-$*$-Algebra oder eine coquasitriangulare $*$-Bialgebra haben, dieselbe Bialgebren-Struktur auf der symmetrisierten Bialgebra $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}_R$ liefert. Im weiteren Verlauf werden wir die im zweiten Teil ausgeführte Symmetrisierung mit Hilfe von coquasitriangularen $*$-Bialgebren verwenden.

3.3 Einbettung von $\mathcal{B}$ in die symmetrisierte Bialgebra

Wir wollen nun noch betrachten, auf welche Weise unsere braided $*$-Bialgebra in der Symmetrisierung $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}_R$ „enthalten“ ist. Siehe hierfür erneut [FSS03].

Einbettung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{H}$

Wir betrachten zunächst die linke Symmetrisierung.

Satz 3.3.1 *Gelte Satz 3.1.7 oder Satz 3.2.10. Dann ist*

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{H}$$

ein $*$-Algebra-Homomorphismus und es kommutieren die folgenden Diagramme.

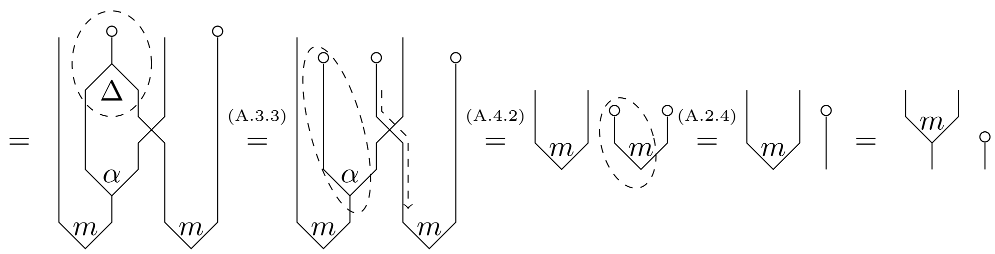
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{H}}"] \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}"] & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{H} \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}}"'] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{H}}"] \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}$$

Beweis: Wir wollen zunächst zeigen, dass $\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ ein $*$-Algebra-Homomorphismus ist, d. h. dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \circ m_{\mathcal{B}} &= m_{\mathcal{H}} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}), \\
(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \circ \mathbb{1}_{\mathcal{B}} &= \mathbb{1}_{\mathcal{H}}, \\
(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \circ *_{\mathcal{B}} &= *_{\mathcal{H}} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}})
\end{aligned}$$

gelten. Die zweite Gleichung gilt offensichtlich. Wir beweisen zunächst die erste Gleichung.

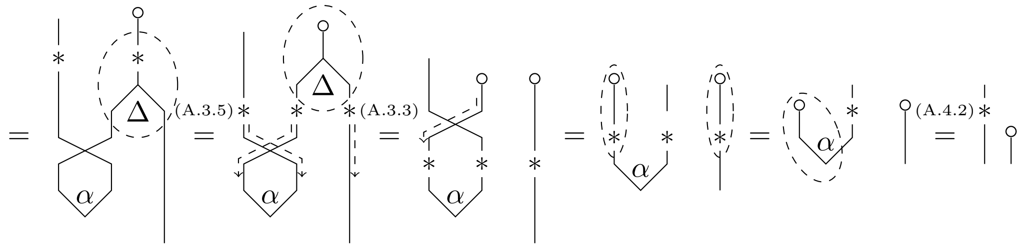
$m_{\mathcal{H}} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$



$$= (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \circ m_{\mathcal{B}}$$

Wir kommen nun zur dritten Gleichung.

$*_{\mathcal{H}} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$



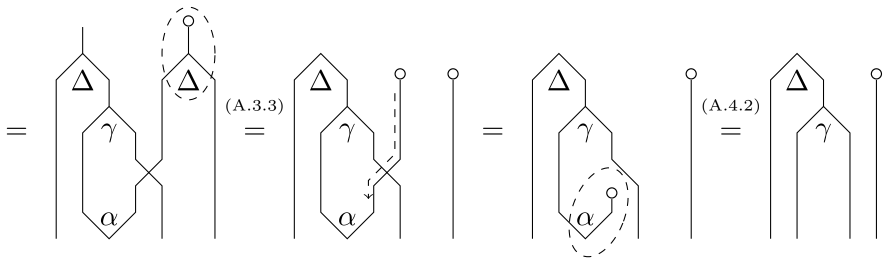
$= (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \circ *_{\mathcal{B}}$

Wir zeigen nun, dass das erste Diagramm kommutiert, d.h. dass

$$\Delta_{\mathcal{H}} \circ \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \circ \Delta_{\mathcal{B}}$$

gilt.

$\Delta_{\mathcal{H}} \circ \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$



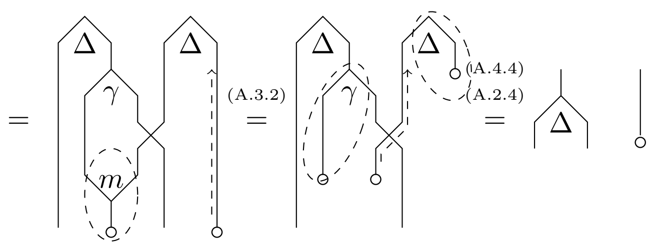
$= (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \circ \Delta_{\mathcal{B}}$

Nun beweisen wir noch, dass das zweite Diagramm kommutiert, d.h. dass

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ \Delta_{\mathcal{H}} = \Delta_{\mathcal{B}} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}})$$

erfüllt ist.

$(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ \Delta_{\mathcal{H}}$



$= \Delta_{\mathcal{B}} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}})$

$\square$

Einbettung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{H}_R$

Erneut wollen wir hier der Vollständigkeit halber das analoge Ergebnis für die rechte Symmetrisierung formulieren. Wie bisher verläuft der Beweis analog, sodass wir ihn an dieser Stelle nicht ausführen.

Satz 3.3.2 *Gelte Satz 3.1.9 oder Satz 3.2.12. Dann ist*

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{H}_R$$

ein $*$-Algebra-Homomorphismus und die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{H}_R \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{H}_R}"] \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{H}_R \arrow[l, "\delta_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}}"'] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{H}_R}"] \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_R \arrow[l, "\delta_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zur linken Variante. $\square$

Kapitel 4

Quanten-Lévy-Prozesse auf $*$-Bialgebren

Die Arbeiten [Wal73] und [Wal84] über die Theorie von Lasern basieren bereits auf der Struktur einer Bialgebra. Darauf aufbauend wurde eine Theorie der Lévy-Prozesse auf $*$-Bialgebren entwickelt, siehe [Sch90] und [Sch93]. Hier wird unter anderem bewiesen, dass jeder Quanten-Lévy-Prozess auf einer $*$-Bialgebra als Lösung einer quantenstochastischen Differentialgleichung über dem symmetrischen Fockraum realisiert werden kann. Für Details zum quantenstochastischen Kalkül verweisen wir auf [HP84] und [Par92]. Wichtige Grundlagen für die Theorie der Quantenstochastik, wie z. B. der Begriff eines Quantenwahrscheinlichkeitsraums, sind zuerst in [AFL82] zu finden. Die Theorie der Quanten-Lévy-Prozesse auf $*$-Bialgebren kann als Beispiel für kategorielle Lévy-Prozesse aufgefasst werden, siehe [GLS16].

4.1 Quanten-Lévy-Prozesse auf $*$-Bialgebren

In diesem Kapitel wollen wir einen kurzen Abriss über die Theorie der Quanten-Lévy-Prozesse auf klassischen $*$-Bialgebren geben, da wir einige der Ergebnisse im weiteren Verlauf noch benötigen werden. Wir orientieren uns in diesem Kapitel an [Fra04, Chapter 1] und verzichten vollständig auf Beweise. Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen.

Definition 4.1.1 *Ein **Quantenwahrscheinlichkeitsraum (QWR)** ist ein Paar $(\mathcal{A}, \Phi)$, bestehend aus einer $*$-Algebra $\mathcal{A}$ und einem Zustand $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ (d. h. einem normalisierten, positiven linearen Funktional). Eine **Quantenzufallsvariable (QZ)** j über einem QWR $(\mathcal{A}, \Phi)$ auf einer $*$-Algebra $\mathcal{B}$ ist ein $*$-Algebra-Homomorphismus $j\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Wir nennen $\varphi_j := \Phi \circ j$ die **Verteilung** von j im Zustand Φ. Ein **quantenstochastischer Prozess (QSP)** ist eine Familie $(j_t)_{t\in I}$ von QZV $j_t\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Für einen QSP $(j_t)_{t\in I}$ heißen die Funktionale $\varphi_t := \Phi \circ j_t$ **Marginalverteilungen** von $(j_t)_{t\in I}$.*

Definition 4.1.2 *Zwei QSP $(j_t)_{t\in I}$ und $(k_t)_{t\in I}$ über QWR $(\mathcal{A}, \Phi)$ bzw. $(\mathcal{A}', \Phi')$ auf der selben $*$-Algebra $\mathcal{B}$ heißen genau dann **äquivalent**, wenn ihre gemeinsamen Verteilungen übereinstimmen. Dies ist genau dann der Fall, wenn wenn alle ihre Momente übereinstimmen, d. h. falls*

$$\Phi \circ (j_{t_1} \otimes \cdots \otimes j_{t_n})(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = \Phi' \circ (k_{t_1} \otimes \cdots \otimes k_{t_n})(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_n$ und $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ gilt.

Definition 4.1.3 *Sei $(\mathcal{A}, \Phi)$ ein QWRen und $\mathcal{B}$ eine $*$-Algebra. Ein n-Tupel $(j_1, \cdots, j_n)$ von QZV $j_i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $i = 1, \cdots, n$, über $(\mathcal{A}, \Phi)$ auf $\mathcal{B}$ heißt **tensor-unabhängig**, falls die Bedingungen*

- $\Phi(j_1(b_1)\cdots j_n(b_n)) = \Phi(j_1(b_1))\cdots\Phi(j_n(b_n))$ *für alle* $b_1,\cdots,b_n \in \mathcal{B}$,
- $[j_l(b_1), j_k(b_2)] \coloneqq j_l(b_1)\cdot j_k(b_2) - j_k(b_2)\cdot j_l(b_1) = 0$ *für alle* $k \neq l$ *und alle* $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$

gelten.

Definition 4.1.4 *Sei $\mathcal{B}$ eine ∗-Bialgebra. Ein QSP $(j_{st})_{0\leq s\leq t}$ auf $\mathcal{B}$ über einem QWR $(\mathcal{A},\Phi)$ heißt* ***(Quanten) Lévy-Prozess (QLP)****, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind*

i.) (Zuwachs-Eigenschaft)

$$j_{rs} \star j_{st} = j_{rt} \quad \forall\, 0 \leq r \leq s \leq t$$

$$j_{tt} = \mathbb{1} \circ \delta$$

ii.) (Unabhängigkeite der Zuwächse) $(j_{s_1t_1},\cdots,j_{s_nt_n})$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \cdots \leq t_n$ unabhängig.

iii) (Stationarität der Zuwächse) Die Verteilung $\varphi_{st} = \Phi \circ j_{st}$ hängt nur von der Differenz $t-s$ ab.

iii.) (Schwache Stetigkeit) j_{st} konvergiert in Verteilung gegen j_{ss} für $t \searrow s$.

Die Marginalverteilungen $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ eines QLP $(j_{st})_{0\leq s\leq t}$ bilden eine Faltungshalbgruppe, d. h. es gilt

$$\varphi_{s+t} = \varphi_s \star \varphi_t \text{ für alle } s,t \geq 0,$$

$$\varphi_0 = \delta,$$

siehe [Fra04, Lemma 1.1.3]. Man kann zeigen, dass die Faltungshalbgruppe von Zuständen einen Lévy-Prozess auf einer ∗-Bialgebra bis auf Äquivalenz charakteristiert ([Fra04, Lemma 1.1.4]). Umgekehrt kann man einen Lévy-Prozess aus der zugehörigen Faltungshalbgruppe rekonstruieren ([Sch93, Section 1.9], [FS99, Section 4.5]). Somit erhalten wir eine 1:1-Korrespondenz zwischen Lévy-Prozessen auf einer ∗-Bialgebra $\mathcal{B}$ und Faltungshalbgruppen von Zuständen auf $\mathcal{B}$.

4.2 Generator und Schürmann-Tripel eines QLP

Wir wollen nun zwei weitere Objekte, die Lévy-Prozesse charakterisieren, einführen. Wir orientieren uns erneut an [Fra04] und [Mey93].

Wir erinnern daran, dass wir ein lineares Funktional $L\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ auf einer ∗-Koalgebra (oder ∗-Bialgebra) **hermitesch** nennen, falls für alle $b \in \mathcal{B}$

$$L(b^*) = \overline{L(b)}$$

gilt und **bedingt positiv**, falls für alle $b \in \ker\delta_{\mathcal{B}}$

$$L(b^*b) \geq 0$$

gilt. Wir wiederholen zunächst den folgenden wichtigen Satz.

Satz 4.2.1 (Fundamentalsatz über Koalgebren [DNR01, Theorem 1.4.7]) *Jedes Element einer Koalgebra $\mathcal{C}$ ist in einer endlichen Unterkoalgebra von $\mathcal{C}$ enthalten.*

Als Konsequenz aus dem Fundamentalsatz über Koalgebren erhalten wir das folgende Lemma.

Lemma 4.2.2 ([Fra04, Lemma 1.2.1]) *i.) Sei $\psi\colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional auf einer Koalgebra $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$. Dann konvergiert für alle $c \in \mathcal{C}$ der Ausdruck*

$$e_\star^\psi(c) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\psi^{\star k}(c) = \delta(c) + \psi(c) + \frac{1}{2}(\psi \star \psi)(c) + \frac{1}{6}(\psi \star \psi \star \psi)(c) + \cdots \tag{4.2.1}$$

*Wir bezeichnen den Grenzwert $(e_\star^\psi)(c)$ als das **Faltungsexponential** von ψ.*

ii.) Falls $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe über einer Koalgebra $\mathcal{C}$ ist, dann existiert der Grenzwert

$$L(c) = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t}(\varphi_t(c) - \delta(c))$$

für alle $c \in \mathcal{C}$. Weiterhin gilt $\varphi_t = e_\star^{tL}$ für alle $t \geq 0$.

Wir wiederholen nun zunächst einen Satz, den wir auch in einem späteren Abschnitt noch benötigen werden.

Satz 4.2.3 (Schoenberg-Korrespondenz [Sch85, Theorem 4.2]) *Sei $\mathcal{C}$ eine $*$-Koalgebra und K eine Bilinearform auf $\mathcal{C}$. Dann sind äquivalent*

i.) $e_\star^{tK}(c^* \otimes c) \geq 0$ für alle $c \in \mathcal{C}$ und $t \in \mathbb{R}_+$,

ii.) $K(c^* \otimes c) \geq 0$ für $c \in \ker \delta$.

Als Konsequenz aus diesem Satz erhalten wir

Satz 4.2.4 ([FSS03, Prop. 2.1]) *Sei $\mathcal{B}$ eine $*$-Bialgebra, $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe von linearen Funktionalen auf $\mathcal{B}$ und es gelte*

$$L = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t}(\varphi_t - \delta).$$

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i.) $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ ist eine Faltungshalbgruppe von Zuständen.

ii.) $L\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ erfüllt $L(1) = 0$ und ist hermitesch und bedingt positiv.

Ein lineares Funktional L, das Bedingung *ii.)* des vorangegangenen Satzes erfüllt, heißt **Generator** der Faltungshalbgruppe $(\varphi_t)_{t\geq 0}$. Damit folgt, dass ein Lévy-Prozess durch seinen Generator $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi_t$ charakteristiert werden kann.

Sei nun D ein Prä-Hilbert-Raum und $\mathcal{D}$ die Menge der linearen Operatoren auf $\mathcal{L}(D)$, deren adjungierter Operator überall definiert ist, d. h.

$$\mathcal{L}(D) := \{X\colon D \to D \text{ linear } \mid \exists X^*\colon D \to D, \text{ sodass } \langle u, Xv\rangle = \langle X^*u, v\rangle\ \forall u, v \in D\}$$

$\mathcal{L}(D)$ ist insbesondere eine unitale $*$-Algebra.

Definition 4.2.5 ([Sch93, Chapter 2.3], [Fra04, Definition 1.2.3]) *Sei $\mathcal{B}$ eine unitale $*$-Algebra zusammen mit einem unitalen, hermitschen Charakter $\delta\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, d. h. es gelten $\delta(1) = 1$, $\delta(b^*) = \overline{\delta(b)}$ und $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$ für alle $a, b \in \mathcal{B}$. Ein **Schürmann-Tripel** auf $(\mathcal{B}, \delta)$ ist ein Tripel (ρ, η, L) bestehend aus*

- *einer unitalen $*$-Darstellung $\rho\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(D)$ von $\mathcal{B}$ auf einen Prä-Hilbert-Raum D,*

- *einem ρ-δ-1-Kozyklus $\eta\colon \mathcal{B} \to D$, d. h. einer linearen Abbildung $\eta\colon \mathcal{B} \to D$, sodass*

$$\eta(ab) = \rho(a)\eta(b) + \eta(a)\delta(b)$$

für alle $a, b \in \mathcal{B}$ gilt und

- *einem hermitschen, linearen Funktional $L\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, die eine lineare Abbildung $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \ni (a, b) \mapsto \langle \eta(a^*), \eta(b) \rangle$ als δ-δ-2-Korand hat, d. h. es gilt*

$$-\langle \eta(a^*), \eta(b) \rangle = \partial L(a, b) \coloneqq \delta(a)L(B) - L(ab) + L(a)\delta(b)$$

für alle $a, b \in \mathcal{B}$.

Ein Schürmann-Tripel heißt ***surjektiv****, falls der Kozyklus η surjektiv ist.*

Insgesamt erhalten wir den folgenden zentralen Satz, der uns einen Zusammenhang zwischen den in diesem Abschnitt eingeführen Konstrukten liefert.

Satz 4.2.6 ([Fra04, Theorem 2.4]) *Sei $\mathcal{B}$ eine $*$-Bialgebra. Es existiert eine 1:1-Beziehung zwischen Lévy-Prozessen auf $\mathcal{B}$ (bis auf Äquivalenz), Faltungshalbgruppen von Zuständen auf $\mathcal{B}$, Generatoren auf $\mathcal{B}$ und surjektiven Schürmann-Tripeln auf $\mathcal{B}$ (bis auf unitäre Äquivalenz).*

4.3 Konstruktion von Schürmann-Tripeln

Es gibt zwei Möglichkeiten die bereits eingeführten Schürmann-Tripel aus einem gegebenen Generator L zu erhalten. Für eine $*$-Algebra mit unitalem, hermiteschem Charakter $\delta\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ definieren wir im ersten Zugang den notwendigen Prä-Hilbertraum durch $\ker \delta / \mathcal{N}_0$, im zweiten durch $\mathcal{B}/\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$. In beiden Fällen erhalten wir surjektive Schürmann-Tripel. Wir wollen zunächst beide Zugänge kurz zusammenfassen. Die Zusammenfassung des ersten Zugangs orientiert sich an [Mey93, Chapter VII.1].

Sei $\mathcal{B}$ eine $*$-Algebra mit einem unitalen, hermiteschen Charakter $\delta\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$. Weiterhin sei $L\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ ein Generator. Wir definieren eine Sesquilinearform auf $\mathcal{B}_0 \coloneqq \ker \delta$ durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}_0}\colon \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0 &\to \mathbb{C} \\ (G, F) &\mapsto L(G^* F). \end{aligned}$$

Diese ist positiv semidefinit, da L bedingt positiv ist. Wir definieren weiterhin den Nullraum

$$\mathcal{N}_0 \coloneqq \{\, G \in \mathcal{B}_0 \mid \langle G, G \rangle = 0 \,\}.$$

Der Quotientenraum

$$P_{\mathcal{B}} \coloneqq \mathcal{B}_0 / \mathcal{N}_0$$

ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle G + \mathcal{N}_0, F + \mathcal{N}_0 \rangle_{P_{\mathcal{B}}} \coloneqq \langle G, F \rangle_{\mathcal{B}_0}$$

ein Prä-Hilbertraum. Wir definieren eine (linke) Wirkung durch

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathcal{B} \times \mathcal{B}_0 &\to \mathcal{B}_0 \\ (G, F) &\mapsto G \cdot F. \end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{bild}\alpha = \mathcal{B}_0$, da $GF \in \mathcal{B}_0$ für alle $G \in \mathcal{B}, F \in \mathcal{B}_0$ gilt. Da $\alpha(\mathcal{N}_0) \subseteq \mathcal{N}_0$ gilt, induziert α eine Wirkung

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}\colon \mathcal{B} \times \mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0 &\to \mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0\\ (G, H + \mathcal{N}_0) &\mapsto (G \cdot H) + \mathcal{N}_0.\end{aligned}$$

Für $G \in \mathcal{B}$ und $H + \mathcal{N}_0 \in \mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0$ definieren wir nun

$$\begin{aligned}\rho(G) &\in \mathcal{L}(\mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0, \mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0)\\ \rho(G)(H + \mathcal{N}_0) &:= \tilde{\alpha}(G, H + \mathcal{N}_0)\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

sowie

$$\begin{aligned}\eta\colon \mathcal{B} &\to \mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0\\ F &\mapsto (F - \delta(F) \cdot 1_{\mathcal{B}}) + \mathcal{N}_0.\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Per Konstruktion gilt

$$\eta(b) = \begin{cases} a + \mathcal{N}_0, & \text{für alle } b \in \ker \delta_{\mathcal{B}} \\ 0 + \mathcal{N}_0, & \text{für alle } b \in \langle 1_{\mathcal{B}} \rangle. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass die Gleichungen

$$\eta(G \cdot F) = \rho(G)\eta(F) + \eta(G)\delta(F)$$

und

$$\langle \eta(G), \eta(F) \rangle = L(G^*F) - \delta(G^*)L(F)\ L(G^*)\delta(F)$$

gelten. Somit ist (ρ, η, L) ein surjektives Schürmann-Tripel.

Für die zweite Variante der Konstruktion folgen wir [FS99, Chapter 4.4]. Wir betrachten zunächst analog die Sesquilinearform

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}_0}\colon \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0 &\to \mathbb{C}\\ (G, F) &\mapsto L(G^*F)\end{aligned}$$

auf $\mathcal{B}_0 := \ker \delta$. Wir können diese durch

$$\langle G, F \rangle_{\mathcal{B}} = \langle P_0(G), P_0(F) \rangle_{\mathcal{B}_0} = L((G - \delta(G) \cdot 1)^*(F - \delta(F) \cdot 1))$$

auf alle $F \in \mathcal{B}$ forstsetzen, wobei P_0 die Projektion von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{B}_0$ bezeichnet. Sei nun

$$\mathcal{N}_L := \{\, G \in \mathcal{B} \mid \langle G, G \rangle_{\mathcal{B}} = 0 \,\}.$$

Dann ist $\mathcal{B}/\mathcal{N}_L$ erneut ein Hilbertraum mit von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}_0}$ induziertem Skalarprodukt. Der Rest der Konstruktion verläuft analog und wir erhalten ein surjektives Schürmann-Tripel.

Wir betrachten nun zunächst das folgende Hilfslemma. Wir erinnern hierfür daran, dass laut Bemerkung A.2.1

$$\mathcal{B} = \mathbb{K} \cdot 1_{\mathcal{B}} \oplus \ker \delta_{\mathcal{B}}$$

gilt.

Lemma 4.3.1 *Sei (ρ, η, L) ein Schürmann-Tripel und $b = b_0 + c \cdot 1_{\mathcal{B}} \in \ker \delta_{\mathcal{B}} \oplus \mathbb{K} \cdot 1_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$. Dann gilt*

$$\eta(b) = \eta(b_0),$$

d. h. η verschwindet auf Vielfachen der Eins.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\eta(b) &= \eta(b_0 + c \cdot 1_{\mathcal{B}}) \\
&= \eta(b_0) + \eta(c \cdot 1_{\mathcal{B}}) \\
&\overset{(4.3.2)}{=} ((b_0 - \delta(b_0) \cdot 1_{\mathcal{B}}) + \mathcal{N}_0) + (\underbrace{c \cdot 1_{\mathcal{B}} - \underbrace{\delta(c \cdot 1_{\mathcal{B}})}_{=c} \cdot 1_{\mathcal{B}}}_{=0} + \mathcal{N}_0) \\
&= (b_0 - \delta(b_0) \cdot 1_{\mathcal{B}}) + \mathcal{N}_0 \\
&\overset{(4.3.2)}{=} \eta(b_0)
\end{aligned}$$

und somit gilt die Behauptung. □

Lemma 4.3.2 *Seien (ρ_1, η_1, L) und (ρ_2, η_2, L) zwei Schürmann-Tripel zum gleichen Generator L und P_i für $i = 1, 2$ die zugehörigen Prä-Hilberträume. Dann sind P_1 und P_2 isometrisch isomorph, d. h. es existiert eine unitäre Abbildung $U \colon P_1 \to \mathcal{P}_2$, sodass*

$$U^{-1} \circ \rho_2(G) \circ U = \rho_1(G) \tag{4.3.3}$$

für alle $G \in \mathcal{B}$ gilt.

Beweis: Nach Konstruktion sind beide Schürmann-Tripel surjektiv, d. h. die Kozyklen $\eta_1 \colon \mathcal{B} \to P_1$ und $\eta_2 \colon \mathcal{B} \to P_2$ sind surjektiv. Sei $i \in \{1, 2\}$. Also existiert für jedes $a \in P_i$ ein $b \in \mathcal{B}$, sodass $a = \eta_i(b)$. Wir definieren die Abbildung U durch

$$\begin{aligned}
U \colon P_1 &\to P_2 \\
\eta_1(b) &\mapsto \eta_2(b).
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

<u>Wohldefiniertheit:</u> Wir zeigen nun, dass diese Abbildung wohldefiniert ist, d. h. dass für alle $b, b' \in \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $\eta_1(b) = \eta_1(b')$ folgt, dass ebenso $\eta_2(b) = \eta_2(b')$ gilt. Sei $c \in \mathcal{B}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\langle \eta_2(b) - \eta_2(b'), \eta_2(c) \rangle_{P_2} &= \langle \eta_2(b), \eta_2(c) \rangle_{P_2} - \langle \eta_2(b'), \eta_2(c) \rangle_{P_2} \\
&= \langle \eta_1(b), \eta_1(c) \rangle_{P_1} - \langle \eta_1(b'), \eta_1(c) \rangle_{P_1} \\
&= \langle \eta_1(b) - \eta_1(b'), \eta_1(c) \rangle_{P_1} \\
&= \langle 0, \eta_1(c) \rangle_{P_1} = 0.
\end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt auf P_2 nicht entartet ist, impliziert dies die Behauptung. Wir zeigen nun, dass die soeben definierte Abbildung U tatsächlich Gleichung (4.3.3) erfüllt. Seien $a, b \in \mathcal{B}$

beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}(U^{-1} \circ \rho_2(a) \circ U)(\eta_1(b)) &\overset{(4.3.4)}{=} (U^{-1} \circ \rho_2(a))(\eta_2(b)) \\ &\overset{(4.3.1)}{=} U^{-1}(\eta_2(ab)) \\ &\overset{(4.3.4)}{=} \eta_1(ab) \\ &\overset{(4.3.1)}{=} \rho_1(a)(\eta_1(b))\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

4.4 Das Darstellungstheorem

Das Schürmann-Tripel kann insbesondere dazu verwendet werden, um eine Realisierung eines QLP auf dem sogenannten symmetrischen Fockraum zu erhalten. Die Realisierung ist hierbei die eindeutige Lösung einer quantenstochastischen Differentialgleichung. Wir wollen dieses zentrale Ergebnis der Arbeit [Sch93] an dieser Stelle der Vollständigkeit halber angeben, ohne jedoch auf Details einzugehen. Aus dem folgenden Satz folgt insbesondere die Realisierung von braided QLP, siehe Kapitel 5. Für Details zu Fock-Räumen verweisen wir z. B. auf [Par92].

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum. Der **volle Fockraum** über $\mathscr{H}$ ist definiert durch

$$\Gamma(\mathscr{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}^{\otimes n}$$

mit $\mathscr{H}^{\otimes 0} := \mathbb{C}$, wobei die direkte Summe und das Tensoprodukt vervollständigt sind. Sei $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, \cdots, n\}$. Der **Symmetrisierungsoperator** P_s ist definiert durch

$$P_s(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} f_{\pi(1)} \otimes \cdots f_{\pi(n)}.$$

Mit Hilfe dieses Operators definieren wir nun das **symmetrische Tensorprodukt** durch

$$\mathscr{H}^{\otimes_s n} := P_s(\mathscr{H}^{\otimes n})$$

und erhalten damit den **symmetrischen Fockraum (bzw. Bosonen-Fockraum)**

$$\Gamma_s(\mathscr{H}) := P_s(\Gamma(\mathscr{H})) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}^{\otimes_s n}.$$

Der Vektor $\Omega := (1, 0, \cdots)$ heißt **Vakuumvektor**. Seien $v \in \mathscr{H}$ und $T \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$. Der **Vernichtungsoperator** $A(v)$ ist definiert durch

$$A(v)(v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s \hat{v}_k \otimes_s \cdots \otimes_s v_n,$$

wobei ˆ bedeutet, dass das entsprechende Element weggelassen wird. Weiterhin ist der **Erzeugungsoperator** $A^*(v)$ durch

$$A^*(v)(v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n) := \sqrt{n+1} v \otimes_s v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n$$

und der **Erhaltungsoperator** $\Lambda(T)$ durch

$$\Lambda(T) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s T(v_k) \otimes_s \cdots \otimes_s v_n$$

definiert. Insbesondere gilt $A(v)\Omega = 0$. Es gilt der folgende Satz.

Satz 4.4.1 (Darstellungstheorem [Sch93, Theorem 2.5.3]) *Sei $\mathcal{B}$ eine $*$-Bialgebra und (ρ, η, L) ein Schürmann-Tripel auf $\mathcal{B}$. Sei $\mathrm{d}I_t \coloneqq (\mathrm{d}A_t^* \circ \eta + \mathrm{d}\Lambda_t \circ (\rho - \delta) + \mathrm{d}A_t \circ \eta \circ * + L\,\mathrm{d}t)$. Dann haben die quantenstochastischen Differentialgleichungen*

$$\mathrm{d}j_{st}(b) = j_{st} \star \mathrm{d}I_t(b)$$

mit den Initialbedingungen

$$j_{ss}(b) = \delta(b)\,\mathrm{id}$$

eine Lösung $(j_{st})_{0\le s\le t}$ als (evtl. unbeschränkte) Operatoren auf dem symmetrischen Fockraum über $D = \eta(\mathcal{B})$. Weiterhin ist $(j_{st})_{0\le s\le t}$ im Vakuumzustand $\Phi(\,\cdot\,) = \langle \Omega, \,\cdot\, \Omega\rangle$ ein Lévy-Prozess mit Generator L. Umgekehrt ist jeder Lévy-Prozess mit Generator L äquivalent zu $(j_{st})_{0\le s\le t}$.

Kapitel 5

Braided Quanten-Lévy-Prozesse

In diesem Kapitel wollen wir uns mit „braided Quanten-Lévy-Prozessen“ beschäftigen. Hiermit meinen wir Quanten-Lévy-Prozesse, die nicht (wie zuvor) auf einer $*$-Bialgebra, sondern auf einer braided $*$-Bialgebra definiert sind. Wir zeigen insbesondere, wie die Schürmann-Tripel eines QLP auf einer braided $*$-Bialgebra mit dem Schürmann-Tripel des „symmetrisierten“ Prozesses zusammenhängen, siehe [FSS03].

Wir werden im Folgenden sehen, dass der Großteil der Theorie aus Kapitel 4 analog übernommen werden kann. Um dies sicherzustellen betrachten wir zunächst den folgenden Abschnitt.

5.1 Schoenberg-Korrespondenz für braided $*$-Koalgebren

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass die Schoenberg-Korrespondenz (Satz 4.2.3 bzw. Satz 4.2.4) auch für braided $*$-Koalgebren gilt, siehe [GKL12, Chapter 5] oder [Ger14, Chapter 3]. Wir betrachten hierfür eine braided $*$-Koalgebra $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, *, \Psi)$ und fassen die Involution $*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ als lineare Abbildung zwischen $\mathcal{C}$ und dem konjugierten Vektorraum $\bar{\mathcal{C}}$ bzw. zwischen $\bar{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{C}$ auf. Weiterhin definieren wir $\overline{a \otimes b} = \bar{a} \otimes \bar{b}$.

Satz 5.1.1 *Sei $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi, *)$ eine braided $*$-Koalgebra und*

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} &:= (* \otimes *) \circ \tau \circ \Psi^{-1} \circ \Delta \circ *, \\ \overline{\delta} &:= \delta \circ *, \\ \overline{\Psi} &:= (* \otimes *) \circ \tau \circ \Psi^{-1} \circ (* \otimes *) \circ \tau. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Dann ist $(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\Delta}, \overline{\delta}, \overline{\Psi})$ ebenfalls eine braided Koalgebra.

Beweis: $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi, *)$ ist nach Voraussetzung eine braided $*$-Koalgebra, d. h. es gelten per Definition insbesondere die Gleichungen

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta, \tag{5.1.2}$$

$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta = \mathrm{id}, \tag{5.1.3}$$

weil $\mathcal{C}$ eine Koalgebra im üblichen Sinn ist und die Gleichungen

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Psi^{-1} = \Psi^{-1} \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}), \tag{5.1.4}$$

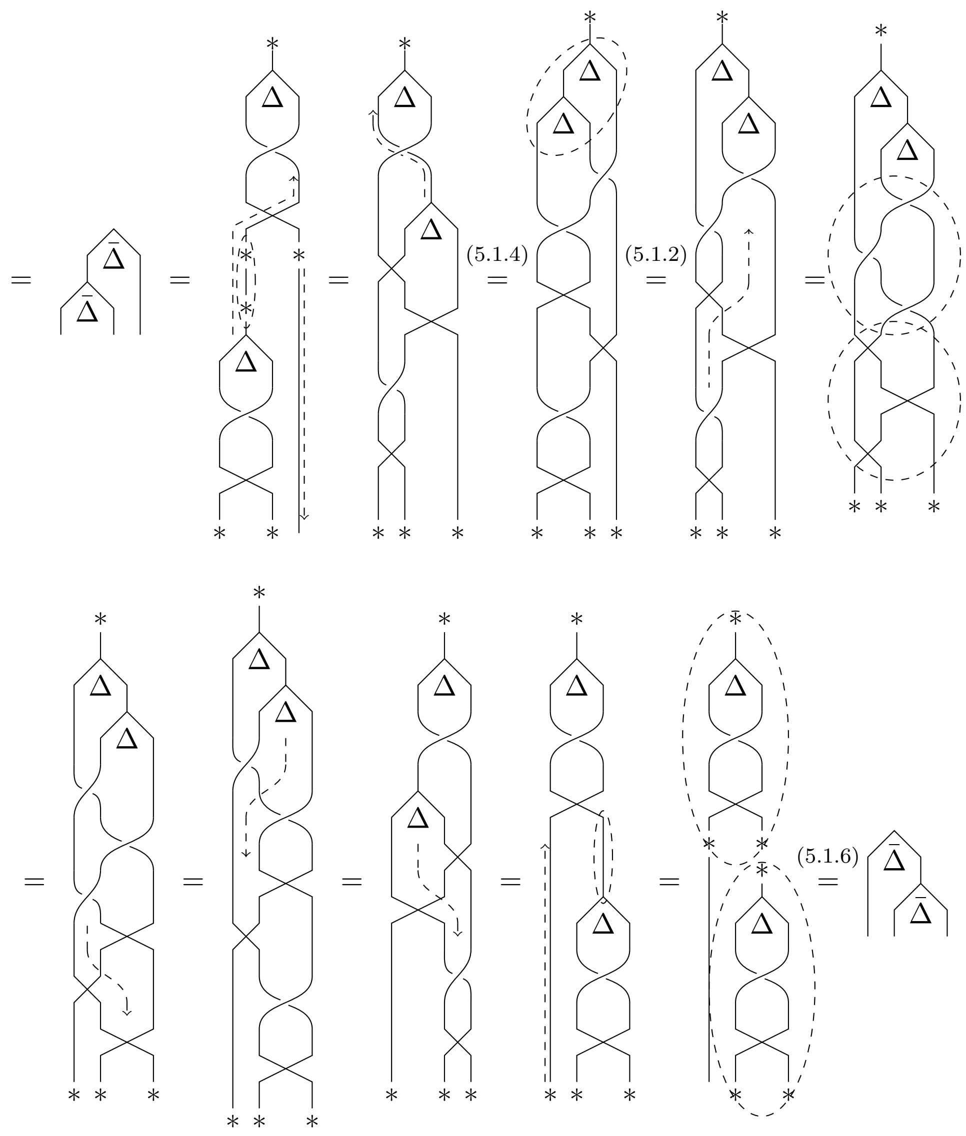
$$(\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Psi^{-1} = (\delta \otimes \mathrm{id}), \tag{5.1.5}$$

weil Δ Ψ-kompatibel ist. Weiterhin gilt

$$\Delta \circ *_{\mathcal{C}} = *_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \circ \Delta, \tag{5.1.6}$$

da $\mathcal{C}$ eine $*$-Koalgebra ist. Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\Delta}$ die Koassoziativität erfüllt.

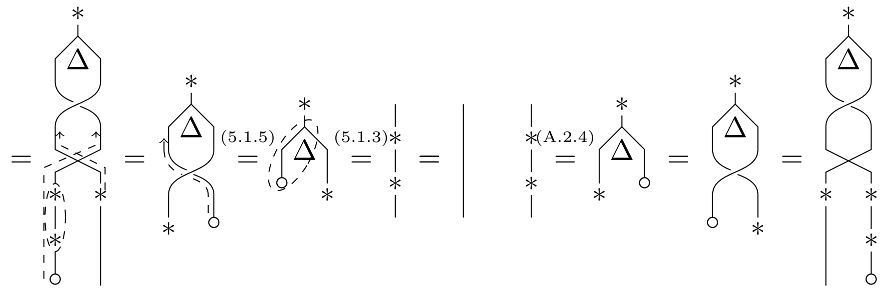
$(\overline{\Delta} \otimes \mathrm{id}) \circ \overline{\Delta}$



$= (\mathrm{id} \otimes \overline{\Delta}) \circ \overline{\Delta}$

Nun zeigen wir, dass die Koeins-Eigenschaft ebenfalls erfüllt ist.

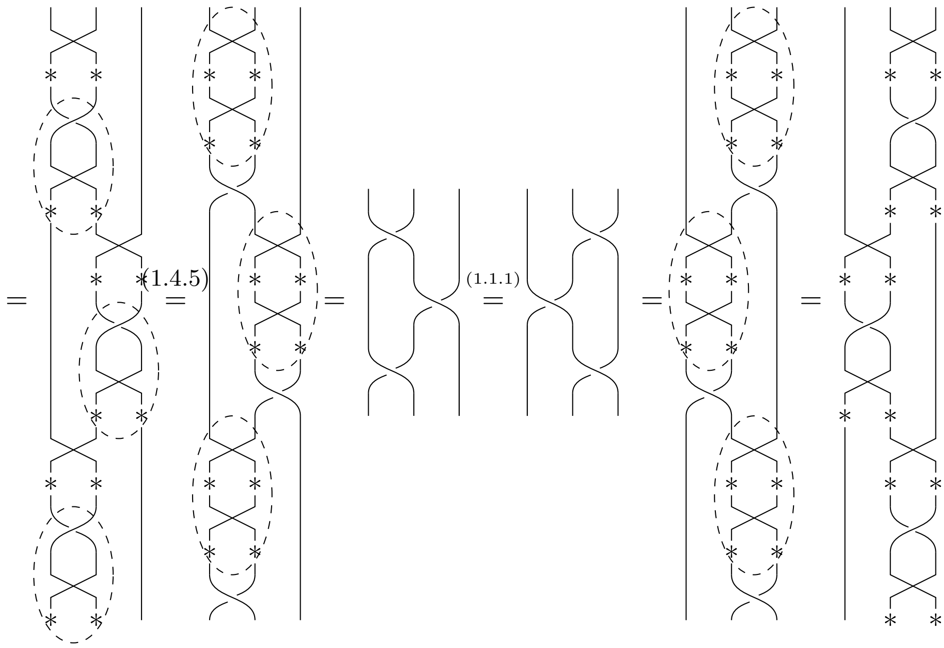
$(\overline{\delta} \otimes \mathrm{id}) \circ \overline{\Delta} = (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ (* \otimes \mathrm{id}) \circ (* \otimes *) \circ \tau \circ \Psi^{-1} \circ \Delta \circ *$



$= (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ (\mathrm{id} \otimes *) \circ (* \otimes *) \circ \tau \circ \Psi^{-1} \circ \Delta \circ * = (\mathrm{id} \otimes \overline{\delta}) \circ \Delta$

Wir zeigen nun, dass $\overline{\Psi}$ ein Braiding ist, d. h. dass Ψ die Braid-Gleichung (1.1.1) erfüllt.

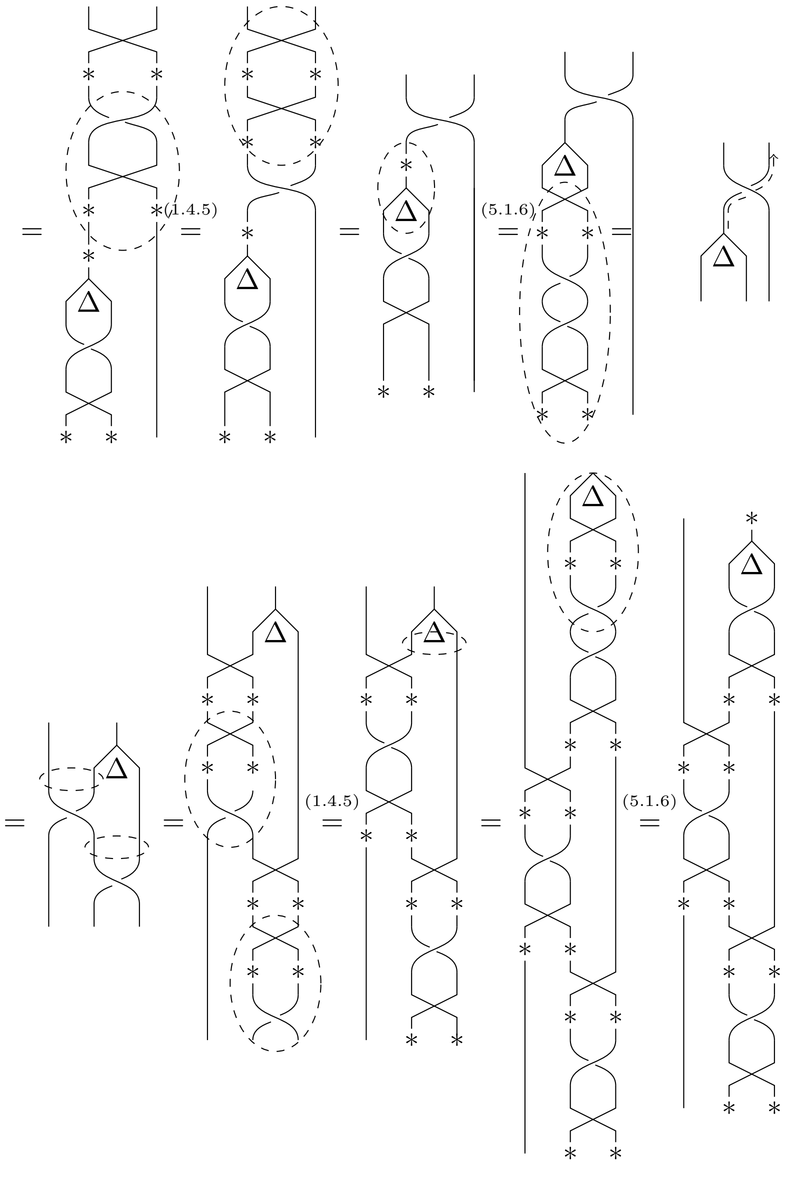
$(\overline{\Psi} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\Psi}) \circ (\overline{\Psi} \otimes \mathrm{id})$



$= (\mathrm{id} \otimes \overline{\Psi}) \circ (\overline{\Psi} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\Psi})$

Damit $\overline{\mathcal{C}}$ zu einer braided Koalgebra wird, müssen wir nun noch zeigen, dass $\overline{\Delta}$ und $\overline{\delta}$ kompatibel mit $\overline{\Psi}$ sind. Wir betrachten hierfür zunächst $\overline{\Delta}$ und zeigen, dass $\overline{\Delta}$ $\overline{\Psi}$-invariant ist.

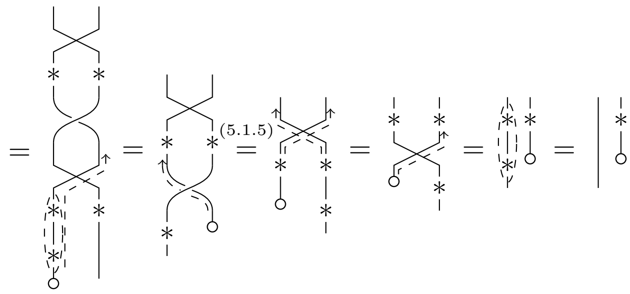
$(\overline{\Delta} \otimes \mathrm{id}) \circ \overline{\Psi}$



$= \overline{\Psi}_{1,2} \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\Delta})$

Die Rechnung für die $\overline{\Psi}^{-1}$-Invarianz von $\overline{\Delta}$ verläuft analog und somit ist $\overline{\Delta}$ insgesamt $\overline{\Psi}$-kompatibel. Analog betrachten wir nun $\overline{\delta}$. Wir betrachten die $\overline{\Psi}$-Invarianz.

$(\overline{\delta} \otimes \mathrm{id}) \circ \overline{\Psi}$



$= \mathrm{id} \otimes \overline{\delta}$

Die zweite Rechnung verläuft erneut analog und somit haben wir insgesamt gezeigt, dass $\overline{\mathcal{C}}$ eine braided Koalgebra ist. $\square$

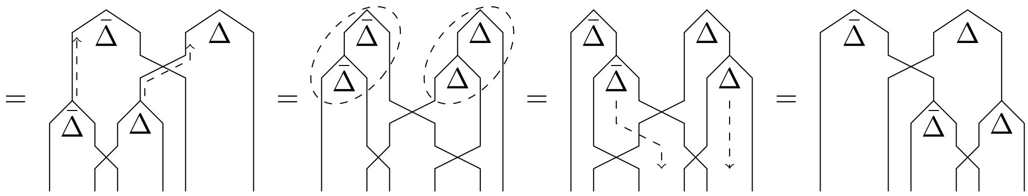
Satz 5.1.2 *Sei $(\mathcal{C}, \Delta, \delta, \Psi, *)$ eine braided $*$-Koalgebra. Dann ist $(\overline{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{C}, \Delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}}, \delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}})$ mit*

$$\Delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\Delta} \otimes \Delta),$$
$$\delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}} = \overline{\delta} \otimes \delta$$

eine Koalgebra (im üblichen Sinn).

Beweis: $\mathcal{C}$ ist nach Voraussetzung eine Koalgebra und $\overline{\mathcal{C}}$ wegen Satz 5.1.1 ebenso, d. h. sowohl Δ als auch $\overline{\Delta}$ sind koassoziativ und δ sowie $\overline{\delta}$ erfüllen die Koeins-Eigenschaft. Wir zeigen damit die Koassoziativität von $\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$.

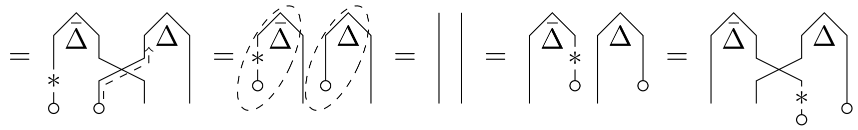
$(\mathrm{id} \otimes \Delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}}$



$= (\Delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}}$

Nun zeigen wir die Koeins-Eigenschaft.

$(\delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}}$



$= (\mathrm{id} \otimes \delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}}) \circ \delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}}$

Somit ist $(\overline{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{C})$ eine Koalgebra im klassischen Sinn. □

Eine lineare Abbildung $\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \to \mathbb{C}$ heißt **Bilinearform** und eine lineare Abbildung $\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C} \to \mathbb{C}$ **Sesquilinearform** auf $\mathcal{C}$. Für eine Bilinearform K erhalten wir die dazu korrespondierende Sesquilinearform $\widetilde{K}$ durch

$$\widetilde{K} := K \circ (* \otimes \mathrm{id}).$$

Wir bezeichnen durch $\star$ die Faltung bzgl. der Komultiplikation $\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$ auf $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ und mit $\circledast$ die Faltung bzgl. der Komultiplikation $\Delta_{\overline{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{C}} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\overline{\Delta} \otimes \Delta)$ auf $\overline{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{C}$. Dann gilt

Satz 5.1.3 ([GKL12, Lem. 5.1]) *Sei $(\mathcal{C}, \Psi)$ eine braided $*$-Koalgebra und M und K zwei Bilinearformen auf $\mathcal{C}$. Falls M Ψ-invariant ist, gilt*

$$\widetilde{M \star K} = \widetilde{M} \circledast \widetilde{K}. \tag{5.1.7}$$

Beweis: M ist Ψ-invariant, d. h. es gilt

$$(M \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi_{1,2} = \Psi_{\mathcal{C}\otimes\mathbb{C}} \circ (\mathrm{id} \otimes M). \tag{5.1.8}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{M \star K} &= (M \star K) \circ (* \circ \mathrm{id}) \\
&= (M \otimes K) \circ \Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} \circ (* \otimes \mathrm{id}) \\
&= (M \otimes K) \circ (\mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ (* \otimes \mathrm{id}) \\
&= (M \otimes K) \circ (\mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}) \circ ((\underbrace{\psi \circ (* \otimes *) \circ \tau \circ (* \otimes *) \circ \tau \circ \psi^{-1}}_{=\mathrm{id}}) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ (* \otimes \mathrm{id}) \\
&= (M \otimes K) \circ (\mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\psi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (* \otimes * \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad \circ (* \otimes * \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\psi^{-1} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ (\bar{\Delta} \otimes \Delta) \\
&\overset{(5.1.1)}{=} (M \otimes K) \circ (\mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\psi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (* \otimes * \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\bar{\Delta} \otimes \Delta) \\
&\overset{(5.1.8)}{=} K \circ (\mathrm{id} \otimes M \otimes \mathrm{id}) \circ (* \otimes * \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\bar{\Delta} \otimes \Delta) \\
&= (M \otimes K) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (* \otimes * \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\bar{\Delta} \otimes \Delta)
\end{aligned}$$

$$= (M \otimes K) \circ (* \otimes \mathrm{id} \otimes * \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ \underbrace{(\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})}_{=\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}} \circ (\bar{\Delta} \otimes \Delta)$$

$$= \Big(\underbrace{(M \circ (* \otimes \mathrm{id}))}_{=\widetilde{M}} \otimes \underbrace{(K \circ (* \otimes \mathrm{id}))}_{=\widetilde{K}}\Big) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\bar{\Delta} \otimes \Delta)$$

$$= (\widetilde{M} \otimes \widetilde{K}) \circ \Delta_{\bar{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{C}}$$

$$= \widetilde{M} \circledast \widetilde{K} \qquad \square$$

Für eine Bilinearform K gilt also insbesondere

$$K^{\star n}(c^* \otimes c) = K^{\star n}(* \otimes \mathrm{id})(\bar{c} \otimes c) = \widetilde{K^{\star n}}(\bar{c} \otimes c) \overset{(5.1.7)}{=} (\widetilde{K})^{\circledast n}(\bar{c} \otimes c).$$

Wir erhalten somit also für Ψ-invariante Bilinearformen auf $\mathcal{C}$

$$e_\star^{tK}(c^* \otimes c) = \sum \frac{K^{\star n}(c^* \otimes c)}{n!} = \sum \frac{\widetilde{K}^{\circledast n}(\bar{c} \otimes c)}{n!} = e_\circledast^{t\widetilde{K}}(\bar{c} \otimes c).$$

Wir haben somit also die Faltung auf einer braided Koalgebra auf die klassische Faltung von Sesquilinearformen zurückgeführt und können deswegen Satz 4.2.3 anwenden und erhalten dann damit die Schoenberg-Korrespondenz für braided $*$-Koalgebren.

Satz 5.1.4 (Schoenberg-Korrespondenz für braided $*$-Koalgebren [GKL12, Lem. 5.2]) *Sei $(\mathcal{C}, \Psi)$ eine braided $*$-Koalgebra und K ein Ψ-invariante Bilinearform auf $\mathcal{C}$. Dann sind äquivalent*

- $e_\star^{tK}(c^* \otimes c) \geq 0$ *für alle* $c \in \mathcal{C}$, $t \geq 0$,
- K *ist hermitesch (d. h. es gilt* $K(a^* \otimes b^*) = \overline{K(b \otimes a)}$*) und es gilt* $K(c^* \otimes c) \geq 0$ *für alle* $c \in \ker \delta$.

5.2 Quanten-Lévy-Prozesse auf braided $*$-Bialgebren

Wir wollen nun Quanten-Lévy-Prozesse auf braided $*$-Bialgebren definieren. Wir betrachten hierfür die folgende Definition.

Definition 5.2.1 ([FS99, Def. 4.2.1]) *Sei $(\mathcal{A}, \Phi)$ ein QWR, $\mathcal{B}$ eine $*$-Algebra und $\Psi\colon \mathcal{B}\otimes\mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ eine lineare Abbildung. Ein n-Tupel $(j_1, \cdots, j_n)$ von QZV $j_i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $i = 1, \cdots, n$, über $(\mathcal{A}, \Phi)$ auf $\mathcal{B}$ ist* ***Ψ-*** *oder* ***braided unabhängig****, falls*

- $\Phi(j_{\sigma(1)}(b_1) \cdots j_{\sigma(n)}(b_n)) = \Phi(j_{\sigma(1)}(b_1)) \cdots \Phi(j_{\sigma(n)}(b_n))$ *für alle Permutationen* $\sigma \in S(n)$ *und alle* $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ *und*
- $m_\mathcal{A} \circ (j_l \otimes j_k) = m_\mathcal{A} \circ (j_k \otimes j_l) \circ \Psi$ *für alle* $1 \leq k \leq l \leq n$ *gilt.*

Mit Hilfe dieser Definition von braided Unabhängigkeit erhalten wir dann die folgende Definition von Quanten-Lévy-Prozessen auf braided $*$-Bialgebren. Die Definition der Äquivalenz von stochastischen Prozessen bleibt unverändert.

Definition 5.2.2 ([FS99, Def. 4.2.1], [Sch93]) *Sei $\mathcal{B}$ eine braided $*$-Bialgebra. Ein QSP $(j_{st})_{0\leq s\leq t}$ auf $\mathcal{B}$ über einem QWR $(\mathcal{A}, \Phi)$ heißt* ***Lévy-Prozess (QLP)****, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind* *i.) (Zuwachs-Eigenschaft)*

$$\begin{aligned} j_{rs} \star j_{st} &= j_{rt} \quad \forall\, 0 \le r \le s \le t \\ j_{tt} &= \mathbb{1} \circ \delta \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

ii.) (Unabhängigkeite der Zuwächse) $(j_{s_1 t_1}, \cdots, j_{s_n t_n})$ *ist für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $0 \le s_1 \le t_1 \le s_2 \cdots \le t_n$ *ist braided unabhängig.*

iii.) (Stationarität der Zuwächse) Die Verteilung $\varphi_{st} = \Phi \circ j_{st}$ *hängt nur von der Differenz* $t - s$ *ab*

iv) (Schwache Stetigkeit) j_{st} *konvergiert in Verteilung gegen* j_{ss} *für* $t \searrow s$.

Um die Theorie aus Abschnitt 4 übertragen zu können, zeigen wir nun noch das folgende Lemma.

Lemma 5.2.3 *Sei* $\mathcal{B}$ *eine braided* $*$*-Bialgebra und seien* ϕ_1, ϕ_2 *zwei positive lineare Funktionale auf* $\mathcal{B}$. *Wenn* ϕ_1 Ψ*-invariant ist oder* ϕ_2 Ψ^{-1}*-invariant ist, so ist die Faltung* $\phi_1 \star \phi_2$ *ebenfalls wieder positiv.*

Beweis: Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} \Delta(a^*) &= \Delta \circ *(a) \\ &= *_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \circ \Delta(a) \\ &= \psi \circ (* \otimes *) \circ \tau \circ \Delta(a) \\ &= \psi \circ (* \otimes *) \circ \tau(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\ &= \psi \circ (* \otimes *)(a_{(2)} \otimes a_{(1)}) \\ &= \psi((a_{(2)})^* \otimes (a_{(1)})^*) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (\phi_1 \star \phi_2)(a^* a) &= (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \Delta(a^* a) \\ &= (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \Delta \circ m(a^* \otimes a) \\ &\overset{(A.3.1)}{=} (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(a^* \otimes a) \\ &\overset{(5.2.2)}{=} (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ (m \otimes m) \\ &\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id})\Big(\psi(((a_i)_{(2)})^* \otimes ((a_i)_{(1)})^*) \otimes (a_j)_{(1)} \otimes (a_j)_{(2)}\Big) \\ &= (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}) \\ &\qquad \circ (\psi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\Big(((a_i)_{(2)})^* \otimes ((a_i)_{(1)})^* \otimes (a_j)_{(1)} \otimes (a_j)_{(2)}\Big) \\ &= (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ (\mathrm{id} \otimes m) \circ (\psi \otimes \mathrm{id}) \\ &\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id})(\psi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\Big(((a_i)_{(2)})^* \otimes ((a_i)_{(1)})^* \otimes (a_j)_{(1)} \otimes (a_j)_{(2)}\Big) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \phi_2) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes m) \circ (\psi_{B,\mathbb{C}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \phi_1 \otimes \mathrm{id}) \\ &\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id})\Big(((a_i)_{(2)})^* \otimes ((a_i)_{(1)})^* \otimes (a_j)_{(1)} \otimes (a_j)_{(2)}\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \phi_2) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes m) \circ (\psi_{B,\mathbb{C}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \phi_1 \otimes \mathrm{id})\Big(((a_i))^*_{(2)} \otimes ((a_i)_{(1)})^*(a_j)_{(1)} \otimes (a_j)_{(2)}\Big) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \phi_2) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes m) \circ (\psi_{B,\mathbb{C}} \otimes \mathrm{id})\Big(((a_i)_{(2)})^* \otimes \phi_1\big(((a_i)_{(1)})^*(a_j)_{(1)}\big) \otimes (a_j)_{(2)}\Big) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \phi_2) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes m)\Big(\phi_1\big(((a_i)_{(1)})^*(a_j)_{(1)}\big) \otimes ((a_i)_{(2)})^* \otimes (a_j)_{(2)}\Big) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \phi_2)\Big(\phi_1\big(((a_i)_{(1)})^*(a_j)_{(1)}\big) \otimes ((a_i)_{(2)})^*(a_j)_{(2)}\Big) \\
&= \phi_1\big(((a_i)_{(1)})^*(a_j)_{(1)}\big)\phi_2\big(((a_i)_{(2)})^*(a_j)_{(2)}\big) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Wir erhalten mit diesem Lemma und der Schoenberg-Korrespondenz für braided $*$-Bialgebren aus Abschnitt 5.1 dann die folgende Verallgemeinerung von Satz 4.2.6. Die Einschränkung auf Ψ-invariante Generatoren stammt von Satz 5.1.3 und Satz 5.2.3.

Satz 5.2.4 ([FSS03, Theo 2.1]) *Sei $\mathcal{B}$ eine braided $*$-Bialgebra. Es existiert eine 1:1-Beziehung zwischen Lévy-Prozessen auf $\mathcal{B}$ (bis auf Äquivalenz), den Faltungshalbgruppen von Ψ-invarianten Zuständen auf $\mathcal{B}$, und der Menge von Ψ-invarianten, bedingt positiven linearen Funktionalen $L\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$.*

5.3 Braided Quanten-Lévy-Prozesse und ihre Symmetrisierung

Wir wollen in diesem Abschnitt den Zusammenhang zwischen Quanten-Lévy-Prozessen auf einer braided $*$-Bialgebra $\mathcal{B}$ und Quanten-Lévy-Prozessen auf ihrer (linken) Symmetrisierung $\mathcal{H}$ betrachten. Der Beweis hierfür wird in [FSS03, Chapter 4] in knapper Form angegeben und hier ausgearbeitet. Erneut lassen sich die Ergebnisse analog auf die rechte Symmetrisierung übertragen. Wir betrachten hierfür zunächst das folgende Lemma.

Lemma 5.3.1 ([FSS03, Prop. 4.1]) *Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.1.7 oder Satz 3.2.10. Dann ist die Abbildung*

$$
\begin{aligned}
F\colon \mathcal{B}' &\to \mathcal{H}' \\
\varphi &\mapsto \varphi \otimes \delta_{\mathcal{A}}
\end{aligned}
\tag{5.3.1}
$$

ein injektiver, unitaler Algebra-Homomorphismus bzgl. der Faltung. Für positive (bzw. bedingt positive und hermitesche) Ψ-invariante Funktionale $\varphi \in \mathcal{B}'$ ist $F(\varphi) \in \mathcal{H}'$ positiv (bzw. bedingt positiv und hermitesch).

Beweis: Zur Injektivität: Definiere

$$
\begin{aligned}
\widetilde{F}\colon \mathcal{H}' &\to (\mathcal{B} \otimes 1_{\mathcal{A}})' \cong \mathcal{B}' \\
\phi &\mapsto \phi \circ (\mathrm{id} \otimes 1_{\mathcal{A}})
\end{aligned}
$$

$\widetilde{F}$ ist die Linksinverse von F, da

$$(\widetilde{F} \circ F)(\varphi) = \widetilde{F}(F(\varphi)) = \widetilde{F}(\varphi \otimes \delta_{\mathcal{A}}) = (\varphi \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes 1_{\mathcal{A}}) = \varphi$$

gilt.
Zur Unitalität: Es gilt $F(\delta_{\mathcal{B}}) = \delta_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{A}} = \delta_{\mathcal{H}}$.

<u>F ist Algebra-Homomorphismus bzgl. der Faltung:</u> Es gilt

$$\begin{aligned}
F(\varphi_1) \star F(\varphi_2) &= \big(F(\varphi_1) \otimes F(\varphi_2)\big) \circ \Delta_{\mathcal{A}} \\
&\overset{(5.3.1)}{=} (\varphi_1 \otimes \delta_{\mathcal{A}} \otimes \varphi_2 \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&\overset{(A.3.2)}{=} (\varphi_1 \otimes \delta_{\mathcal{A}} \otimes \varphi_2 \otimes \delta_{\mathcal{A}} \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&\underset{(A.2.4)}{\overset{(A.4.4)}{=}} ((\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta_{\mathcal{B}}) \otimes \delta_{\mathcal{A}} \\
&= F\big((\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta_{\mathcal{B}}\big) = F(\varphi_1 \star \varphi_2)
\end{aligned}$$

Sei nun φ positiv (d. h. es gilt $\varphi(c^*c) \geq 0$ für alle c) und Ψ-invariant, d. h. es gilt

$$(\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi = \Psi_{\mathcal{A},\mathbb{C}} \circ (\mathrm{id} \otimes \varphi), \tag{5.3.2}$$

wobei $\Psi_{\mathcal{A},\mathbb{C}}$ das triviale Braiding $\mathbb{C} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{B} \cong \mathcal{B} \otimes \mathbb{C}$ zwischen einer Bialgebra $\mathcal{B}$ und $\mathbb{C}$ bezeichnet. Wir wollen zeigen, dass dann $F(\varphi)$ ebenfalls positiv ist. Wir erinnern daran, dass wegen Lemma 1.4.5 die Involution auf $*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$ durch

$$*_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} = \Psi \circ (*_{\mathcal{B}} \otimes *_{\mathcal{B}}) \circ \tau$$

gegeben ist, d. h. es gilt

$$\Psi(a^* \otimes b^*) = (b \otimes a)^* \tag{5.3.3}$$

für alle $a, b \in \mathcal{B}$. Sei nun $c = \sum b_k \otimes a_k \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{H}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
c^*c &= \Big(\sum_k b_k \otimes a_k\Big)^* \Big(\sum_l b_k \otimes a_k\Big) \\
&= m_{\mathcal{H}}\Big(\sum_{k,l} \underbrace{(b_k \otimes a_k)^*}_{\overset{(5.3.3)}{=} \Psi(a_k^* \otimes b_k^*)} \otimes b_l \otimes a_l\Big) \\
&= m_{\mathcal{H}}\Big(\sum_{k,l} \Psi(a_k^* \otimes b_k^*) \otimes b_l \otimes a_l\Big)
\end{aligned}$$

Da m ein Morphismus und somit Ψ-invariant ist, gilt

$$(m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes m) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}). \tag{5.3.4}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
(F(\varphi))(c^*c) &= (\varphi \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ m_{\mathcal{H}}\Big(\sum_{k,l} \Psi(a_k^* \otimes b_k^*) \otimes b_l \otimes a_l\Big) \\
&= (\varphi \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ m_{\mathcal{H}} \circ (\Psi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\Big(\sum_{k,l} a_k^* \otimes b_k^* \otimes b_l \otimes a_l\Big)
\end{aligned}$$

$$\overset{(3.1.8)}{=}(\varphi\otimes\delta_{\mathcal{A}})\circ(m\otimes m)\circ(\mathrm{id}\otimes\Psi\otimes\mathrm{id})\circ(\Psi\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{k,l}a_k^*\otimes b_k^*\otimes b_l\otimes a_l\Big)$$

$$\overset{(5.3.4)}{=}(\varphi\otimes\delta_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes m)\circ(\Psi\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{k,l}a_k^*\otimes b_k^*\otimes b_l\otimes a_l\Big)$$

$$\overset{(5.3.2)}{=}\delta_{\mathcal{A}}\circ m\circ(\Psi_{\mathcal{A},\mathbb{C}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\varphi\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{k,l}a_k^*\otimes b_k^*\otimes b_l\otimes a_l\Big)$$

$$=\delta_{\mathcal{A}}\circ m\circ(\Psi_{\mathcal{A},\mathbb{C}}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\varphi\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{k,l}a_k^*\otimes b_k^*b_l\otimes a_l\Big)$$

$$=\delta_{\mathcal{A}}\circ m\circ(\Psi_{\mathcal{A},\mathbb{C}}\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{k,l}a_k^*\otimes\varphi(b_k^*b_l)\otimes a_l\Big)$$

$$=(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\otimes\delta_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\otimes m)\Big(\sum_{k,l}\varphi(b_k^*b_l)\otimes a_k^*\otimes a_l\Big)$$

$$=\sum_{k,l}\varphi(b^*b_l)\delta_{\mathcal{A}}(a^*a_l)$$

Da φ positiv ist, ist dieser Ausdruck als Schur-Produkt von zwei positiv definiten Matrizen erneut positiv und wir haben die Behauptung gezeigt. □

Mit Hilfe dieses Lemmas erhalten wir die folgende Verallgemeinerung von [Sch93, Theorem 3.3.1].

Satz 5.3.2 *Sei $(j_{st})_{0\le s\le t}$ ein Lévy-Prozess auf einer braided $*$-Bialgebra $\mathcal{B}$ in $({}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*)$ bzw. $({}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*,\Psi)$ mit Faltungshalbgruppe $(\varphi_t)_{t\ge0}$, sowie $(j^{\mathcal{H}}_{st})_{0\le s\le t}$ ein Lévy-Prozess auf der Symmetrisierung $\mathcal{H}\cong\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}$ mit Faltungshalbgruppe $(F(\varphi_t))_{t\ge0}$. Dann ist $(\hat{j}_{st})_{0\le s\le t}$ mit*

$$\hat{j}_{st}:=m\circ(j^{\mathcal{H}}_{0s}\otimes j^{\mathcal{H}}_{st})\circ(\mathbb{1}_{\mathcal{B}}\otimes\gamma\otimes\mathbb{1}_{\mathcal{A}})\tag{5.3.5}$$

ein Lévy-Prozess auf $\mathcal{B}$ und äquivalent zu $(j_{st})_{0\le s\le t\le T}$.

Beweis: Wir benutzen hier erneut die abgewandelte Sweedler-Notation

$$\gamma(b)=\sum b^{(1)}\otimes b^{(2)}$$

für die Kowirkung. Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{j}_{st}(b)&\overset{(5.3.29)}{=}m\circ(j^{\mathcal{H}}_{0s}\otimes j^{\mathcal{H}}_{st})\circ(\mathbb{1}_{\mathcal{B}}\otimes\gamma\otimes\mathbb{1}_{\mathcal{A}})(b)\\&=m\circ(j^{\mathcal{H}}_{0s}\otimes j^{\mathcal{H}}_{st})(1\otimes b^{(1)}\otimes b^{(2)}\otimes1)\\&=j^{\mathcal{H}}_{0s}(1\otimes b^{(1)})\cdot j^{\mathcal{H}}_{st}(b^{(2)}\otimes1).\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

Weiterhin gilt

$$j^{\mathcal{H}}_{0s}(1\otimes a)=j^{\mathcal{H}}_{0r}(1\otimes a_{(1)})\cdot j^{\mathcal{H}}_{rs}(1\otimes a_{(2)})\tag{5.3.7}$$

wegen

$$
\begin{aligned}
j_{0s}^{\mathcal{H}}(1\otimes a) &\overset{(5.2.1)}{=} (j_{0r}^{\mathcal{H}} \star j_{rs}^{\mathcal{H}})(1\otimes a)\\
&\overset{(1.3.6)}{=} m\circ (j_{0r}^{\mathcal{H}}\otimes j_{rs}^{\mathcal{H}})\circ \Delta_{\mathcal{H}}(1\otimes a)\\
&\overset{(3.2.8)}{=} m\circ (j_{0r}^{\mathcal{H}}\otimes j_{rs}^{\mathcal{H}})\circ (\mathrm{id}\otimes m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ (\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes \tau\otimes \mathrm{id})\\
&\qquad \circ (\mathrm{id}\otimes \gamma\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ (\Delta\otimes\Delta)(1\otimes a)\\
&= m\circ (j_{0r}^{\mathcal{H}}\otimes j_{rs}^{\mathcal{H}})\circ (\mathrm{id}\otimes m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ (\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes \tau\otimes \mathrm{id})\\
&\qquad \circ (\mathrm{id}\otimes \gamma\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})(1\otimes 1\otimes a_{(1)}\otimes a_{(2)})\\
&= m\circ (j_{0r}^{\mathcal{H}}\otimes j_{rs}^{\mathcal{H}})\circ (\mathrm{id}\otimes m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ (\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes \tau\otimes \mathrm{id})\\
&\qquad (1\otimes 1\otimes 1\otimes a_{(1)}\otimes a_{(2)})\\
&= m\circ (j_{0r}^{\mathcal{H}}\otimes j_{rs}^{\mathcal{H}})\circ (\mathrm{id}\otimes m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})(1\otimes 1\otimes a_{(1)}\otimes 1\otimes a_{(2)})\\
&= m\circ (j_{0r}^{\mathcal{H}}\otimes j_{rs}^{\mathcal{H}})(1\otimes a_{(1)}\otimes 1\otimes a_{(2)})\\
&= j_{0r}^{\mathcal{H}}(1\otimes a_{(1)})\cdot j_{rs}^{\mathcal{H}}(1\otimes a_{(2)}).
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{H}}(b^{(2)}\otimes 1) &\overset{(3.2.8)}{=} (\mathrm{id}\otimes m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ (\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes \tau\otimes \mathrm{id})\circ (\mathrm{id}\otimes \gamma\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ (\Delta\otimes\Delta)(b^{(2)}\otimes 1)\\
&= (\mathrm{id}\otimes m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ (\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes \tau\otimes \mathrm{id})\circ (\mathrm{id}\otimes \gamma\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})({b^{(2)}}_{(1)}\otimes {b^{(2)}}_{(2)}\otimes 1\otimes 1)\\
&= (\mathrm{id}\otimes m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ (\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes \tau\otimes \mathrm{id})({b^{(2)}}_{(1)}\otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(1)}\otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(2)}\otimes 1\otimes 1)\\
&= (\mathrm{id}\otimes m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})({b^{(2)}}_{(1)}\otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(1)}\otimes 1\otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(2)}\otimes 1)\\
&= {b^{(2)}}_{(1)}\otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(1)}\otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(2)}\otimes 1
\end{aligned}
$$

gilt also

$$
\Delta_{\mathcal{H}}(b^{(2)}\otimes 1) = {b^{(2)}}_{(1)}\otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(1)}\otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(2)}\otimes 1. \tag{5.3.8}
$$

Da $\Delta_{\mathcal{B}}$ ein Morphismus der Kategorie $({}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*, \Psi)$ bzw. $({}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*, \Psi)$ ist, ist $\Delta_{\mathcal{B}}$ insbesondere eine Komodul-Abbildung (siehe Abschnitt A.4), d. h. es gilt

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{id}\otimes\gamma_{\mathcal{B}})\circ\Delta_{\mathcal{B}} &= \gamma_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}\circ\Delta_{\mathcal{B}} \qquad\qquad (5.3.9)\\
&= (m\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})\circ(\gamma_{\mathcal{B}}\otimes\gamma_{\mathcal{B}})\circ\Delta_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}
$$

Sei nun $0\le r\le s\le t$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(\hat{j}_{rs}\star\hat{j}_{st})(b) &\overset{(1.3.6)}{=} m\circ(\hat{j}_{rs}\otimes\hat{j}_{st})\circ\Delta(b)\\
&= m\circ(\hat{j}_{rs}\otimes\hat{j}_{st})(b_{(1)}\otimes b_{(2)})
\end{aligned}
$$

$$= \hat{j}_{rs}(b_{(1)}) \cdot \hat{j}_{st}(b_{(2)})$$

$$\overset{(5.3.6)}{=} j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes {b_{(1)}}^{(1)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{rs}({b_{(1)}}^{(2)} \otimes 1) \cdot \underbrace{j^{\mathcal{H}}_{0s}(1 \otimes {b_{(2)}}^{(1)})}_{\overset{(5.3.7)}{=} j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(1)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{rs}(1 \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(2)})} \cdot j^{\mathcal{H}}_{st}({b_{(2)}}^{(2)} \otimes 1)$$

$$= j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes {b_{(1)}}^{(1)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(1)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{rs}({b_{(1)}}^{(2)} \otimes 1)$$
$$\cdot j^{\mathcal{H}}_{rs}(1 \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(2)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{st}({b_{(2)}}^{(2)} \otimes 1)$$

$$= j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes {b_{(1)}}^{(1)} \cdot {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(1)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{rs}({b_{(1)}}^{(2)} \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(2)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{st}({b_{(2)}}^{(2)} \otimes 1)$$

$$= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st})$$
$$(1 \otimes {b_{(1)}}^{(1)} \cdot {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(1)} \otimes {b_{(1)}}^{(2)} \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(2)} \otimes {b_{(2)}}^{(2)} \otimes 1)$$

$$= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$(1 \otimes {b_{(1)}}^{(1)} \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(1)} \otimes {b_{(1)}}^{(2)} \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(2)} \otimes {b_{(2)}}^{(2)} \otimes 1)$$

$$= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes {b_{(1)}}^{(1)} \otimes {b_{(1)}}^{(2)} \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(1)} \otimes {{b_{(2)}}^{(1)}}_{(2)} \otimes {b_{(2)}}^{(2)} \otimes 1)$$

$$= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$(1 \otimes {b_{(1)}}^{(1)} \otimes {b_{(1)}}^{(2)} \otimes {b_{(2)}}^{(1)} \otimes {b_{(2)}}^{(2)} \otimes 1)$$

$$= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ \underbrace{(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})}_{\overset{(A.4.3)}{=} (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})}$$
$$(1 \otimes b_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes 1)$$

$$= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})(1 \otimes b_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes 1)$$

$$= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \Delta \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}})(b)$$

$$= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \Delta \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}})(b)$$

$$\overset{(5.3.9)}{=} m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})$$
$$\circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}})(b)$$

$$
\begin{aligned}
&= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad (1 \otimes b^{(1)} \otimes b^{(2)} \otimes 1) \\
&= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id})(1 \otimes b^{(1)} \otimes {b^{(2)}}_{(1)} \otimes {b^{(2)}}_{(2)} \otimes 1) \\
&= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st})(1 \otimes b^{(1)} \otimes {b^{(2)}}_{(1)} \otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(1)} \otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(2)} \otimes 1) \\
&= j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes b^{(1)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{rs}({b^{(2)}}_{(1)} \otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(1)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{st}({{b^{(2)}}_{(2)}}^{(2)} \otimes 1) \\
&= j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes b^{(1)}) \cdot \Big(m \circ (j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \underbrace{({b^{(2)}}_{(1)} \otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(1)} \otimes {{b^{(2)}}_{(2)}}^{(2)} \otimes 1)}_{\overset{(5.3.8)}{=} \Delta_{\mathcal{H}}(b^{(2)} \otimes 1)} \Big) \\
&= j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes b^{(1)}) \cdot \Big(m \circ (j^{\mathcal{H}}_{rs} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ \Delta_{\mathcal{H}}(b^{(2)} \otimes 1) \Big) \\
&= j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes b^{(1)}) \cdot (j^{\mathcal{H}}_{rs} \star j^{\mathcal{H}}_{st})(b^{(2)} \otimes 1) \\
&\overset{(5.2.1)}{=} j^{\mathcal{H}}_{0r}(1 \otimes b^{(1)}) \cdot j^{\mathcal{H}}_{rt}(b^{(2)} \otimes 1) \\
&= m \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rt})(1 \otimes b^{(1)} \otimes b^{(2)} \otimes 1) \\
&= m \circ (j^{\mathcal{H}}_{0r} \otimes j^{\mathcal{H}}_{rt}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}})(b) \\
&\overset{(5.3.29)}{=} \hat{\jmath}_{rt}(b)
\end{aligned}
$$

Wir haben also gezeigt, dass $\hat{\jmath}$ die Zuwachs-Eigenschaft *i.)* aus Definition 5.2.2 erfüllt. Außerdem gilt wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse

$$
\begin{aligned}
\Phi \circ \hat{\jmath}_{st} &\overset{(5.3.29)}{=} \Phi \circ m \circ (j^{\mathcal{H}}_{0s} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \\
&= (\Phi \otimes \Phi) \circ (j^{\mathcal{H}}_{0s} \otimes j^{\mathcal{H}}_{st}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \\
&= \big((\Phi \circ j^{\mathcal{H}}_{0s}) \otimes (\Phi \circ j^{\mathcal{H}}_{st})\big) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \\
&= \big(F(\varphi_s) \otimes F(\varphi_{t-s})\big) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \\
&\overset{(5.3.1)}{=} (\varphi_s \otimes \delta_{\mathcal{A}} \otimes \varphi_{t-s} \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \\
&\overset{(A.4.4)}{=} (\varphi_s \otimes \varphi_{t-s} \otimes \delta_{\mathcal{A}}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \\
&= (\varphi_s \otimes \varphi_{t-s}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\varphi_s \circ \mathbb{1}_{\mathcal{B}}) \otimes (\varphi_{t-s} \circ \mathrm{id}) \\
&= \varphi_{t-s}
\end{aligned}
$$

Also haben die Prozesse $(\hat{\jmath}_{st})_{0 \leq s \leq t}$ und $(j_{st})_{0 \leq s \leq t}$ die gleichen Marginalverteilungen. Damit folgen die Stationarität sowie die schwache Stetigkeit der Zuwächse, d. h. $(\hat{\jmath}_{st})_{0 \leq s \leq t}$ ist ein Lévy-Prozess und äquivalent zu $(j_{st})_{0 \leq s \leq t}$. □

Für den weiteren Verlauf betrachten wir nun das folgende Hilfslemma.

Lemma 5.3.3 *Sei $\mathcal{B}$ eine braided $*$-Bialgebra und $\mathcal{H} \cong \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ ihre (linke) Symmetrisierung. Weiterhin sei $L\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ ein α-invariantes lineares Funktional. Dann gilt*

$$(L \otimes \delta_{\mathcal{A}})\big((b \otimes a)^*(d \otimes c)\big) = \delta_{\mathcal{A}}(a^*c)L(b^*d) \tag{5.3.10}$$

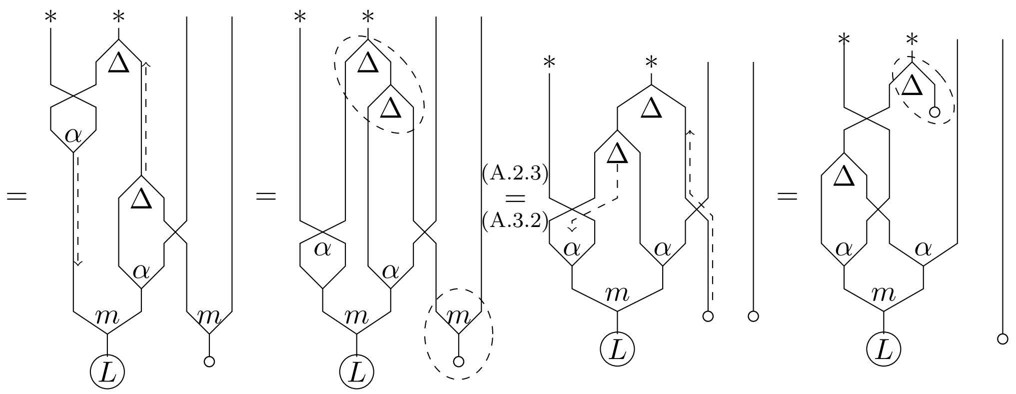
für alle $b \otimes a$, $d \otimes c \in \mathcal{H}$.

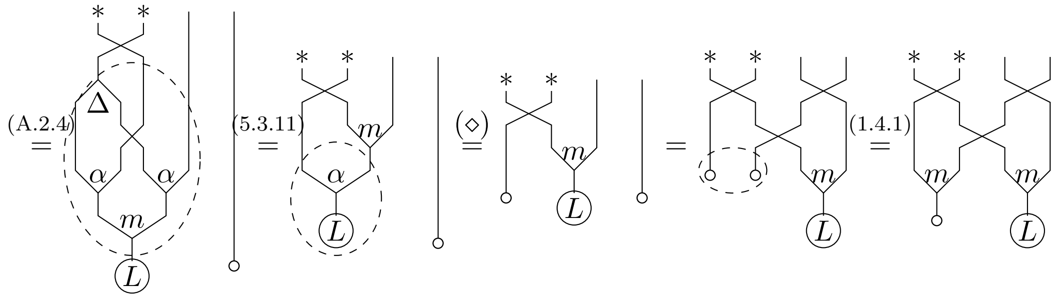
Beweis: Da m ein Morphismus in der Kategorie $({}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*, \Psi)$ bzw. $({}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*, \Psi)$ ist, ist m eine Modul-Abbildung, d.h es gilt

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{B}} \circ (\mathrm{id} \otimes m) &= m \circ \alpha_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \\ &= m \circ (\alpha_{\mathcal{B}} \otimes \alpha_{\mathcal{B}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}).\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}&L^{\mathcal{H}} \circ m_{\mathcal{H}} \circ (*_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \\ &= (L \otimes \delta) \circ (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\ &\quad \circ \Big(\big((\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ (* \otimes *)\big) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}\Big)\end{aligned}$$





$$= (\delta \otimes L) \circ (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \tau) \circ (* \otimes * \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}),$$

wobei wir an Stelle $(\diamond)$ verwendet haben, dass L α-invariant ist.

Also gilt insgesamt

$$\begin{aligned} L^{\mathcal{H}}\Big((b \otimes a)^*(d \otimes c)\Big) &= L^{\mathcal{H}} \circ m_{\mathcal{H}} \circ (*_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}})(b \otimes a \otimes d \otimes c) \\ &= (\delta_{\mathcal{A}} \otimes L) \circ (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\tau \otimes \tau) \\ &\qquad \circ (* \otimes * \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(b \otimes a \otimes d \otimes c) \\ &= \delta_{\mathcal{A}}(a^* c) L(b^* d) \end{aligned}$$

und somit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir betrachten nun einen QLP auf $\mathcal{B}$ mit Generator L. Wir können diesen dann wegen Lemma 5.3.1 durch $L^{\mathcal{H}} = F(L)$ in einen Generator $L^{\mathcal{H}}$ für den Prozess $(j^{\mathcal{H}}_{st})_{0 \le s \le t}$ aus Satz 5.3.2 überführen. Wir erhalten den folgenden Satz über den Zusammenhang zwischen den Schürmann-Tripeln des braided QLP und des symmetrisierten Prozesses.

Satz 5.3.4 ([FSS03, Theo. 4.2]) *Sei $(j_{st})_{0 \le s \le t}$ ein Lévy-Prozess auf einer braided $*$-Bialgebra $\mathcal{B}$ in $({}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YD}_*)$ bzw. $({}^{\mathcal{A}}\mathrm{C}_*, \Psi)$ mit einem α-invarianten Generator L und einem beliebigen zugehörigen Schürmann-Tripel (ρ, η, L). Weiterhin sei $(j^{\mathcal{H}}_{st})_{0 \le s \le t}$ der Lévy-Prozess auf der Symmetrisierung $\mathcal{H} \cong \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ aus Satz 5.3.2 mit beliebigem zugehörigen Tripel $(\rho^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, L^{\mathcal{H}})$. Dann gilt:*

i.) Die zu den Tripeln gehörenden Prä-Hilberträume sind isometrisch isomorph, d. h. es existiert eine lineare, bijektive Abbildung $\check{\mathrm{T}} \colon P^{\mathcal{H}} \to P^{\mathcal{B}}$ mit

$$\langle a, b \rangle_{P^{\mathcal{H}}} = \langle \check{\mathrm{T}}(a), \check{\mathrm{T}}(b) \rangle_{P^{\mathcal{B}}}.$$

ii.) Es gilt $\check{\mathrm{T}} \circ \eta^{\mathcal{H}}(b \otimes a) = \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta(b)$ und $\check{\mathrm{T}} \circ \eta^{\mathcal{H}}$ verschwindet auf $1_{\mathcal{B}} \otimes \mathcal{A}$.

iii.) Es gelten

$$\check{\mathrm{T}}\Big(\rho^{\mathcal{H}}(1_{\mathcal{B}} \otimes a)\eta^{\mathcal{H}}(b'_0 \otimes 1_{\mathcal{A}})\Big) = \eta(\alpha(a \otimes b'_0))$$

$$\check{\mathrm{T}}\Big(\rho^{\mathcal{H}}(b \otimes 1_{\mathcal{A}})\eta^{\mathcal{H}}(b'_0 \otimes 1_{\mathcal{A}})\Big) = \eta(b b'_0).$$

Beweis: Wir betrachten zunächst das Schürmann-Tripel $(\rho_{\mathrm{I}}, \eta_{\mathrm{I}}, L)$ zum Lévy-Prozess $(j_{st})_{0 \le s \le t}$, das wir aus der ersten Konstruktion aus Abschnitt 4.3 erhalten. Dieses Schürmann-Tripel ist wegen Konstruktion 1 auf dem Prä-Hilbertraum $P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}} \coloneqq \mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0$ mit Skalarprodukt

$$\langle a+\mathcal{N}_0, b+\mathcal{N}_0\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} \coloneqq \langle a,b\rangle_{\mathcal{B}_0} = L(a^*b) \tag{5.3.12}$$

definiert, wobei $\mathcal{B}_0 \coloneqq \ker\delta_{\mathcal{B}}$. Die Darstellung $\rho_{\mathrm{I}}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0, \mathcal{B}_0/\mathcal{N}_0)$ ist definiert durch

$$\rho_{\mathrm{I}}(a)(b+\mathcal{N}_0) \coloneqq \widetilde{\alpha}(a, b+\mathcal{N}_0) = (a\cdot b)+\mathcal{N}_0$$

und der ρ-Kozyklus $\eta_{\mathrm{I}}\colon \mathcal{B} \to P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}$ durch

$$\eta_{\mathrm{I}}(a) = (a-\delta(a)\cdot 1_{\mathcal{B}})+\mathcal{N}_0. \tag{5.3.13}$$

Analog haben wir ein Schürmann-Tripel $(\rho_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}, \eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}, L^{\mathcal{H}} = F(L))$ zum Prozess $(j_{st}^{\mathcal{H}})_{0\le s\le t}$ auf der (linken) Symmetrisierung $\mathcal{H}$ von $\mathcal{B}$. Auch hier betrachten wir das aus der ersten Konstruktion erhaltene Schürmann-Tripel, d. h. der Prä-Hilbertraum ist definiert durch $P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}} \coloneqq \mathcal{H}_0/\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}$ mit Skalarprodukt

$$\langle a+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}, b+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}} \coloneqq \langle a,b\rangle_{\mathcal{H}_0} = L^{\mathcal{H}}(a^*b), \tag{5.3.14}$$

wobei $\mathcal{H}_0 \coloneqq \ker\delta_{\mathcal{H}}$. Die Darstellung $\rho_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_0/\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}, \mathcal{H}_0/\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}})$ ist definiert durch

$$\rho_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(a)(b+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}) \coloneqq \widetilde{\alpha}(a, b+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}) = (a\cdot b)+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}} \tag{5.3.15}$$

und der ρ_{I}-Kozyklus $\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H} \to P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$ durch

$$\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b\otimes a) = \big(b\otimes a - \delta_{\mathcal{H}}(b\otimes a)\cdot 1_{\mathcal{H}}\big)+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}. \tag{5.3.16}$$

Wir zeigen die Behauptung nun zuerst für die auf diese Art konstruierten Tripel und zeigen dann, dass wir das Ergebnis auf beliebige Tripel erweitern können.

Zu *i.)*: Wir wollen nun zeigen, dass die beiden Prä-Hilberträume $P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}$ und $P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$ isometrisch isomorph sind, d. h. dass eine lineare, bijektive Abbildung $\widetilde{T}\colon P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}} \to P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}$ mit

$$\langle a,b\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}} = \langle \widetilde{T}(a), \widetilde{T}(b)\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}}$$

für alle $a,b\in P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$ existiert. Seien $b\otimes a$, $d\otimes c \in \ker\delta_{\mathcal{H}} = \ker(\delta_{\mathcal{B}}\otimes\delta_{\mathcal{A}})$, $b,d\in\mathcal{B}$ und $a,c\in\mathcal{A}$. Wegen Lemma 5.3.3 gilt

$$(L\otimes\delta_{\mathcal{A}})((b\otimes a)^*(d\otimes c)) = \delta_{\mathcal{A}}(a^*c)L(b^*d)$$

und somit

$$\begin{aligned}\langle b\otimes a, d\otimes c\rangle_{\mathcal{H}_0} &\overset{(5.3.14)}{=} L^{\mathcal{H}}((b\otimes a)^*(d\otimes c)) \\ &= (L\otimes\delta_{\mathcal{A}})((b\otimes a)^*(d\otimes c)) \\ &\overset{(5.3.10)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(a^*c)L(b^*d) \\ &\overset{(5.3.12)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(a^*c)\langle b,d\rangle_{\mathcal{B}_0}.\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Da $(\rho_{\mathrm{I}}, \eta_{\mathrm{I}}, L)$ ein Schürmann-Tripel ist, gilt insbesondere

$$\langle \eta_{\mathrm{I}}(b), \eta_{\mathrm{I}}(d)\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} = L(b^*d) - \delta_{\mathcal{B}}(b^*)L(d) - L(b^*)\delta_{\mathcal{B}}(d)$$

bzw.

$$L(b^*d) = \langle \eta_{\mathrm{I}}(b), \eta_{\mathrm{I}}(d) \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} + \delta_{\mathcal{B}}(b^*)L(d) + L(b^*)\delta_{\mathcal{B}}(d). \tag{5.3.18}$$

Wir bekommen also aus Gleichung (5.3.17)

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{A}}(a^*c)L(b^*d) \overset{(5.3.18)}{=} \ & \delta_{\mathcal{A}}(a^*c)\langle \eta_{\mathrm{I}}(b), \eta_{\mathrm{I}}(d) \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} \\ & + \delta_{\mathcal{A}}(a^*)\delta_{\mathcal{A}}(a)\delta_{\mathcal{B}}(b^*)L(d) + \delta_{\mathcal{A}}(a^*)\delta_{\mathcal{A}}(a)L(b^*)\delta_{\mathcal{B}}(d).\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Mit Bemerkung A.2.1 gilt

$$\begin{aligned}\ker \delta_{\mathcal{H}} &= (\ker \delta_{\mathcal{B}} \otimes (\ker \delta_{\mathcal{A}} \oplus \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle)) \oplus ((\ker \delta_{\mathcal{B}} \otimes \langle 1_{\mathcal{B}} \rangle)) \otimes \ker \delta_{\mathcal{A}} \\ &= (\ker \delta_{\mathcal{B}} \otimes \ker \delta_{\mathcal{B}}) \oplus (\ker \delta_{\mathcal{B}} \otimes \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle) \oplus (\langle 1_{\mathcal{B}} \rangle \otimes \ker \delta_{\mathcal{A}}).\end{aligned}$$

Somit verschwinden der zweite und der dritte Summand in Gleichung (5.3.19) immer, da einer der Faktoren immer gleich Null ist. Somit gilt

$$\langle \eta_{\mathrm{I}}(b), \eta_{\mathrm{I}}(d) \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} = L(b^*d) \overset{(5.3.12)}{=} \langle b, d \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} \tag{5.3.20}$$

Mit Gleichungen (5.3.17) und (5.3.20) erhalten wir also insgesamt

$$\begin{aligned}\langle b \otimes a, d \otimes c \rangle_{\mathcal{H}_0} &\overset{(5.3.17)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(a^*c)L(b^*c) \\ &\overset{(5.3.20)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(a^*c)\langle \eta_{\mathrm{I}}(b), \eta_{\mathrm{I}}(d) \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} \\ &= \langle \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta_{\mathrm{I}}(b), \delta_{\mathcal{A}}(c)\eta_{\mathrm{I}}(d) \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}}.\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Definiere nun die Abbildung

$$\begin{aligned}T\colon \mathcal{H}_0 &\to P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}} \\ b \otimes a &\mapsto \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta_{\mathrm{I}}(b)\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Wir wollen T auf $P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$ hochheben. Wir zeigen dafür, dass $T(b \otimes a) = 0$ für $b \otimes a \in \mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}$ gilt. Sei also $c \in P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}$ beliebig und $b \otimes a \in \mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}|\langle T(b \otimes a), c \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}}|^2 &\overset{CSU}{\leq} \langle T(b \otimes a), T(b \otimes a) \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} \langle c, c \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} \\ &\overset{(5.3.22)}{=} \langle \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta_{\mathrm{I}}(b), \delta_{\mathcal{A}}(c)\eta_{\mathrm{I}}(d) \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} \langle c, c \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} \\ &= 0 \cdot \langle c, c \rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} = 0,\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit gilt, weil nach Voraussetzung $b \otimes a \in \mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}$ gilt. Somit können wir T auf $P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$ hochheben und erhalten

$$\begin{aligned}\widetilde{T}\colon P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}} &\to P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}} \\ \eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}} &\mapsto \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta_{\mathrm{I}}(b).\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

Injektivität: Es gilt

$$\langle b\otimes a+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}, d\otimes c+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}} \overset{(5.3.14)}{=} \langle b\otimes a, d\otimes c\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle T(b\otimes a), T(d\otimes c)\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}}$$

Angenommen $b\otimes a+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}} \in \ker\widetilde{T}$. Dann gilt auch $T(b\otimes a)=\widetilde{T}(b\otimes a+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}})$. Damit gilt für alle $d\otimes c\in P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$

$$\langle\widetilde{T}(b\otimes a+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}), \widetilde{T}(d\otimes c)\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}} = 0.$$

Da $\langle\cdot,\cdot\rangle_{P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}}$ nicht entartet ist, folgt $b\otimes a+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}=0\in P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$ und somit $\ker\widetilde{T}=\{0\}$.
Surjektivität: Die Surjektivität von T folgt daraus, dass η_{I} surjektiv ist.
Somit haben wir insgesamt gezeigt, dass $\widetilde{T}$ ein isometrischer Isomorphismus ist. //

Zu *ii.)*: Es gilt (siehe auch Lemma 4.3.1)

$$\eta_{\mathrm{I}}(1_{\mathcal{B}}) \overset{(5.3.13)}{=} (1_{\mathcal{B}} - \underbrace{\delta_{\mathcal{B}}(1_{\mathcal{B}})}_{=1_{\mathbb{C}}}\cdot 1_{\mathcal{B}}) + \mathcal{N}_0^{\mathcal{H}} = 0+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}} \tag{5.3.24}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}\circ\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b\otimes a) &\overset{(5.3.16)}{=} \widetilde{T}\Big((b\otimes a-\delta_{\mathcal{H}}(b\otimes a)\cdot 1_{\mathcal{H}})+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\Big)\\
&= \widetilde{T}\Big((b\otimes a-(\delta_{\mathcal{B}}\otimes\delta_{\mathcal{A}})(b\otimes a)\cdot 1_{\mathcal{H}})+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\Big)\\
&= \widetilde{T}\Big((b\otimes a-(\delta_{\mathcal{B}}(b)\otimes\delta_{\mathcal{A}}(a))\cdot(1_{\mathcal{B}}\otimes 1_{\mathcal{A}}))+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\Big)\\
&= \widetilde{T}\Big((b\otimes a-(\delta_{\mathcal{B}}(b)\delta_{\mathcal{A}}(a))\cdot(1_{\mathcal{B}}\otimes 1_{\mathcal{A}}))+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\Big)\\
&= \widetilde{T}\Big(b\otimes a+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\Big)-\widetilde{T}\Big(\delta_{\mathcal{B}}(b)\delta_{\mathcal{A}}(a)\cdot(1_{\mathcal{B}}\otimes 1_{\mathcal{A}})+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\Big)\\
&\overset{(5.3.23)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta_{\mathrm{I}}(b)-\delta_{\mathcal{B}}(b)\delta_{\mathcal{A}}(a)\widetilde{T}(1_{\mathcal{B}}\otimes 1_{\mathcal{A}}+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}})\\
&\overset{(5.3.23)}{} \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta_{\mathrm{I}}(b)-\delta_{\mathcal{B}}(b)\delta_{\mathcal{A}}(a)\delta_{\mathcal{A}}(1_{\mathcal{A}})\eta_{\mathrm{I}}(1_{\mathcal{B}})\\
&\overset{(5.3.24)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta_{\mathrm{I}}(b)
\end{aligned}$$

womit der erste Teil von Behauptung *ii.)* gezeigt ist. Aus Gleichung (5.3.24) folgt insbesondere auch

$$\widetilde{T}\circ\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(1_{\mathcal{B}}\otimes a) = \delta_{\mathcal{A}}(a)\underbrace{\eta_{\mathrm{I}}(1_{\mathcal{B}})}_{\overset{(5.3.24)}{=}0} - \delta_{\mathcal{B}}(1_{\mathcal{B}})\delta_{\mathcal{A}}(a)\delta_{\mathcal{A}}(1_{\mathcal{A}})\underbrace{\eta_{\mathrm{I}}(1_{\mathcal{B}})}_{\overset{(5.3.24)}{=}0} = 0$$

für alle $a\in\mathcal{A}$ und somit verschwindet $\widetilde{T}\circ\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$ auf $1_{\mathcal{B}}\otimes\mathcal{A}$. //

Zu *iii.)*: Seien $b=b_0+c_b\cdot 1_{\mathcal{B}}\in\ker\delta_{\mathcal{B}}\oplus\mathbb{K}\cdot 1_{\mathcal{B}}=\mathcal{B}$ und $a=a_0+c_a\cdot 1_{\mathcal{A}}\in\ker\delta_{\mathcal{A}}\oplus\mathbb{K}\cdot 1_{\mathcal{A}}=\mathcal{A}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle b_0\otimes a_0, b_0\otimes a_0\rangle_{\mathcal{H}_0} &\overset{(5.3.14)}{=} L^{\mathcal{H}}\Big((b_0\otimes a_0)^*(b_0\otimes a_0)\Big)\\
&\overset{(5.3.10)}{=} \delta_{\mathcal{A}}((a_0)^*a_0)L((b_0)^*b_0)\\
&= \delta_{\mathcal{A}}((a_0)^*)\underbrace{\delta_{\mathcal{A}}(a_0)}_{=0}L((b_0)^*b_0) \;=\; 0
\end{aligned}\tag{5.3.25}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b\otimes a) &= \eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}((b_0+c_b\cdot 1_{\mathcal{B}})\otimes(a_0+c_a\cdot 1_{\mathcal{A}}))\\
&= \eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}((b_0\otimes a_0)+(b_0\otimes c_a\cdot 1_{\mathcal{A}})+(c_b\cdot 1_{\mathcal{B}}\otimes a_0)+(c_b\cdot 1_{\mathcal{B}}+c_a\cdot 1_{\mathcal{A}}))\\
&= \underbrace{\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b_0\otimes a_0)}_{\overset{(5.3.25)}{=}0}+\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b_0\otimes c_a\cdot 1_{\mathcal{A}})+\underbrace{\eta^{\mathcal{H}}(c_b\cdot 1_{\mathcal{B}}\otimes a_0)}_{\overset{ii)}{=}0}+\underbrace{\eta^{\mathcal{H}}(c_b\cdot 1_{\mathcal{B}}+c_a\cdot 1_{\mathcal{A}})}_{\overset{ii)}{=}0}\\
&= \eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b_0\otimes c_a\cdot 1_{\mathcal{A}})
\end{aligned}$$

Somit genügt es im Folgenden die Behauptung nur für $b_0\otimes c_a\cdot 1_{\mathcal{A}}\in\ker\delta_{\mathcal{B}}\oplus\mathbb{K}\cdot 1_{\mathcal{B}}$ zu zeigen. Seien also $b\in\mathcal{B}$, $a\in\mathcal{A}$ und $b_0'\in\ker\delta_{\mathcal{B}}$. Allgemein gilt mit der Multiplikation $m_{\mathcal{H}}$ aus Satz 3.1.7 bzw. Satz 3.2.10 für beliebige Elemente $b\otimes a, d\otimes c\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
&m_{\mathcal{H}}(b\otimes a\otimes d\otimes c)\\
&\quad= (m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(b\otimes a\otimes d\otimes c)\\
&\quad= (m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})(b\otimes a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes d\otimes c)\\
&\quad= (m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(b\otimes a_{(1)}\otimes d\otimes a_{(2)}\otimes c)\\
&\quad= (m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})(b\otimes\alpha(a_{(1)}\otimes d)\otimes a_{(2)}\otimes c)\\
&\quad= b\cdot\alpha(a_{(1)}\otimes d)\otimes a_{(2)}\cdot c
\end{aligned}\tag{5.3.26}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}\Big(\rho_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b\otimes a)\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b_0'\otimes 1_{\mathcal{A}})\Big) &\overset{(5.3.16)}{=} \widetilde{T}\Big(\rho_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b\otimes a)((b_0'\otimes 1_{\mathcal{A}}-\delta_{\mathcal{H}}(b_0'\otimes 1_{\mathcal{A}})\cdot 1_{\mathcal{H}}+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}})\Big)\\
&\overset{(5.3.15)}{=} \widetilde{T}\Big(((b\otimes a)\cdot_{\mathcal{H}}(b_0'\otimes 1_{\mathcal{A}})-\delta_{\mathcal{H}}(b_0'\otimes 1_{\mathcal{A}})(b\otimes a))+\mathcal{N}_0^{\mathcal{H}}\Big)\\
&= \widetilde{T}\Big((b\otimes a)\cdot_{\mathcal{H}}(b_0'\otimes 1_{\mathcal{A}})\Big)-\widetilde{T}\Big(\delta_{\mathcal{H}}(b_0'\otimes 1_{\mathcal{A}})(b\otimes a)\Big)\\
&\overset{(5.3.26)}{=} \widetilde{T}(b\cdot\alpha(a_{(1)}\otimes b_0')\otimes a_{(2)})\\
&\overset{(5.3.22)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(a_{(2)})\eta_{\mathrm{I}}(b\cdot\alpha(a_{(1)}\otimes b_0'))\\
&\overset{(A.2.4)}{=} \eta_{\mathrm{I}}(b\cdot\alpha(a\otimes b_0'))
\end{aligned}$$

Da $\rho_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}$ ein Algebra-Homomorphismus ist, genügt es die Abbildung auf Elementen der Form $1_{\mathcal{B}} \otimes a$ oder $b \otimes 1_{\mathcal{A}}$ zu kennen. Für $b \otimes a = 1_{\mathcal{B}} \otimes a$ erhalten wir somit

$$\widetilde{T}\Big(\rho_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(1_{\mathcal{B}} \otimes a)\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b_0' \otimes 1_{\mathcal{A}})\Big) = \eta_{\mathrm{I}}(\alpha(a \otimes b_0')),$$

und für $b \otimes a = b \otimes 1_{\mathcal{A}}$

$$\widetilde{T}\Big(\rho_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b \otimes 1_{\mathcal{A}})\eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b_0' \otimes 1_{\mathcal{A}})\Big) = \eta_{\mathrm{I}}(b \cdot \underbrace{\alpha(1_{\mathcal{B}} \otimes b_0')}_{\overset{(A.4.2)}{=} b_0'}) = \eta_{\mathrm{I}}(bb_0'). \qquad /\!\!/$$

Wir haben nun die Behauptung für Schürmann-Tripel $(\rho_{\mathrm{I}}, \eta_{\mathrm{I}}, L)$, die mit Hilfe von Zugang 1 konstruiert wurden, gezeigt. Wir müssen nun noch zeigen, dass sich dieses Ergebnis auf beliebige Schürmann-Tripel fortsetzen lässt. Wegen Lemma 4.3.2 existieren zwei isometrisch isomorphe Abbildungen

$$\begin{aligned} U_1 \colon P^{\mathcal{B}} &\to P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{B}} \\ \eta(b) &\mapsto \eta_{\mathrm{I}}(b) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_2 \colon P^{\mathcal{H}} &\to P_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}} \\ \eta^{\mathcal{H}}(b) &\mapsto \eta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{H}}(b). \end{aligned}$$

Damit wird wir durch

$$\check{\mathrm{T}} = U_1^{-1} \circ \widetilde{T} \circ U_2$$

eine unitäre Abbildung $\check{\mathrm{T}} \colon P^{\mathcal{H}} \to P^{\mathcal{B}}$ mit

$$\check{\mathrm{T}}\Big(\eta^{\mathcal{H}}(b \otimes a)\Big) = \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta(b) \tag{5.3.27}$$

definiert, sodass dann *ii.)* und *iii.)* für beliebige Schürmann-Tripel gelten. □

Lemma 5.3.5 *Die Inverse zu* $\check{\mathrm{T}}$ *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \check{\mathrm{S}} \colon P^{\mathcal{B}} &\to P^{\mathcal{H}} \\ \eta(b) &\mapsto \eta^{\mathcal{H}}(b \otimes 1_{\mathcal{A}}) \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit. Gelte hierfür $\eta(b) = \eta(b')$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\langle \eta^{\mathcal{H}}(b \otimes 1_{\mathcal{A}}) - \eta^{\mathcal{H}}(b' \otimes 1_{\mathcal{A}}), \eta^{\mathcal{H}}(d \otimes c)\rangle_{P^{\mathcal{H}}} \\ &\qquad = \langle \eta^{\mathcal{H}}(b \otimes 1_{\mathcal{A}}), \eta^{\mathcal{H}}(d \otimes c)\rangle_{P^{\mathcal{H}}} - \langle \eta^{\mathcal{H}}(b' \otimes 1_{\mathcal{A}}), \eta^{\mathcal{H}}(d \otimes c)\rangle_{P^{\mathcal{H}}} \\ &\qquad \overset{(5.3.21)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(c)\langle \eta(b), \eta(d)\rangle_{P^{\mathcal{B}}} - \delta_{\mathcal{A}}(c)\langle \eta(b'), \eta(d)\rangle_{P^{\mathcal{B}}} \\ &\qquad = \delta_{\mathcal{A}}(c)\langle \eta(b) - \eta(b'), \eta(d)\rangle_{P^{\mathcal{B}}} = 0 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass Š die Linksinverse von Ť ist.

$$\begin{aligned}\check{\mathrm{S}} \circ \check{\mathrm{T}}\Big(\eta^{\mathcal{H}}(b \otimes c \cdot 1_{\mathcal{A}})\Big) &\overset{(5.3.27)}{=} \check{\mathrm{S}}\Big(\delta_{\mathcal{A}}(c \cdot 1_{\mathcal{A}})\eta(b)\Big) \\ &= \check{\mathrm{S}}\Big(\eta(cb)\Big) \\ &\overset{(5.3.28)}{=} \eta^{\mathcal{H}}(c \cdot b \otimes 1_{\mathcal{A}}) \\ &= \eta^{\mathcal{H}}(b \otimes c \cdot 1_{\mathcal{A}})\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass Š ebenso die Rechtsinverse ist.

$$\begin{aligned}\check{\mathrm{T}} \circ \check{\mathrm{S}}\Big(\eta(b)\Big) &\overset{(5.3.28)}{=} \check{\mathrm{T}}\Big(\eta^{\mathcal{H}}(b \otimes 1_{\mathcal{A}})\Big) \\ &\overset{(5.3.27)}{=} \delta_{\mathcal{A}}(1_{\mathcal{A}}) \cdot \eta(b) \\ &= \eta(b)\end{aligned}$$

□

Rechte Version

Wie bereits in Kapitel 3 erhalten wir für die rechte Symmetrisierung analoge Ergebnisse, die wir hier aufführen wollen. In allen Fällen verlaufen die Beweise analog zu denen der linken Symmetrisierung.

Lemma 5.3.6 *Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.1.9 oder Satz 3.2.12. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}F_R \colon \mathcal{B}' &\to {\mathcal{H}_R}' \\ \varphi &\mapsto \delta_{\mathcal{A}} \otimes \varphi\end{aligned}$$

ein injektiver, unitaler Algebra-Homomorphismus bzgl. der Faltung. Für positive (bzw. bedingt positive und hermitesche) Ψ-invariante Funktionale $\varphi \in \mathcal{B}'$ ist $F(\varphi) \in {\mathcal{H}_R}'$ positiv (bzw. bedingt positiv und hermitesch).

Satz 5.3.7 *Sei $(j_{st})_{0\leq s\leq t}$ ein Lévy-Prozess auf $\mathcal{B}$ mit Faltungshalbgruppe $(\varphi_t)_{t\geq 0}$, sowie $(j_{st}^{\mathcal{H}_R})_{0\leq s\leq t}$ ein Lévy-Prozess auf der Symmetrisierung $\mathcal{H}_R \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit Faltungshalbgruppe $(F_R(\varphi_t))_{t\geq 0}$. Dann ist $(\hat{j}_{st})_{0\leq s\leq t}$ mit*

$$\hat{j}_{st} := m \circ (j_{0s}^{\mathcal{H}_R} \otimes j_{st}^{\mathcal{H}_R}) \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}}) \tag{5.3.29}$$

ein Lévy-Prozess auf $\mathcal{B}$ und äquivalent zu $(j_{st})_{0\leq s\leq t}$.

Auch hier erhalten wir analog eine „rechte“ Variante von Satz 5.3.4.

Satz 5.3.8 *Sei $(j_{st})_{0\leq s\leq t}$ ein Lévy-Prozess auf einer braided $*$-Bialgebra $\mathcal{B}$ in $(\mathcal{YD}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \overline{\Psi})_*$ bzw. $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}})_*, \Psi)$ mit einem $\overline{\alpha}$-invarianten Generator L und einem beliebigen zugehörigen Schürmann-Tripel (ρ, η, L). Weiterhin sei $(j_{st}^{\mathcal{H}_R})_{0\leq s\leq t\leq T}$ der Lévy-Prozess auf der rechten Symmetrisierung $\mathcal{H}_R \cong \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ aus Satz 5.3.7 mit beliebigem zugehörigen Tripel $(\rho^{\mathcal{H}_R}, \eta^{\mathcal{H}_R}, L^{\mathcal{H}_R})$. Dann gilt:*

i.) Die zu den Tripeln gehörenden Prä-Hilberträume sind isometrisch isomorph, d. h. es existiert eine lineare, bijektive Abbildung $\check{\mathrm{T}}_R \colon P^{\mathcal{H}_R} \to P^{\mathcal{B}}$ *mit*

$$\langle a, b \rangle_{P^{\mathcal{H}_R}} = \langle \check{\mathrm{T}}_R(a), \check{\mathrm{T}}_R(b) \rangle_{P^{\mathcal{B}}}.$$

ii.) Es gilt $\check{\mathrm{T}}_R \circ \eta^{\mathcal{H}_R}(a \otimes b) = \delta_{\mathcal{A}}(a)\eta(b)$ *und* $\check{\mathrm{T}}_R \circ \eta^{\mathcal{H}_R}$ *verschwindet auf* $\mathcal{A} \otimes 1_{\mathcal{B}}$.

iii.) Es gelten

$$\check{\mathrm{T}}_R\Big(\rho^{\mathcal{H}_R}(a \otimes 1_{\mathcal{B}})\eta^{\mathcal{H}_R}(1_{\mathcal{A}} \otimes b_0')\Big) = \eta(\overline{\alpha}(b_0' \otimes a))$$

$$\check{\mathrm{T}}_R\Big(\rho^{\mathcal{H}_R}(1_{\mathcal{A}} \otimes b)\eta^{\mathcal{H}_R}(1_{\mathcal{A}} \otimes b_0')\Big) = \eta(bb_0').$$

Lemma 5.3.9 *Die Inverse zu* $\check{\mathrm{T}}_R$ *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned}\check{\mathrm{S}}_R \colon P^{\mathcal{B}} &\to P^{\mathcal{H}_R}\\ \eta(b) &\mapsto \eta^{\mathcal{H}_R}(1_{\mathcal{A}} \otimes b).\end{aligned}$$

Kapitel 6

Beispiele für braided $*$-Bialgebren und ihre Symmetrisierung

In diesem Kapitel wollen wir nun Beispiele für braided $*$-Bialgebren und ihre Symmetrisierungen betrachten. Diese wurden bereits in [FSS03] angegeben, jedoch ohne Beweise und Rechnungen. Diese wollen wir nun in diesem Kapitel ausführen. Hierbei ist das zugehörige Braiding mit Hilfe von R-Matrizen definiert. Solche $*$-Bialgebren tragen z. B. in [Maj95] den Namen „$*$-spaces“.

6.1 Vorbetrachtungen

Sei $R \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathbb{C}^{n\times n}$ eine universelle R-Matrix, d. h. insbesondere, dass R Gleichung (2.2.1) erfüllt. Eine R-Matrix ist von **reellem Typ**, wenn

$$\overline{R^{ij}_{kl}} = R^{lk}_{ji} \tag{6.1.1}$$

gilt und **bi-invertierbar**, wenn Matrizen R^{-1} und $\widetilde{R} \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathbb{C}^{n\times n}$ existieren, sodass die Gleichungen

$$\begin{aligned} (R^{-1})^{ij}_{kl} R^{kl}_{pq} = R^{ij}_{kl} (R^{-1})^{kl}_{pq} = \delta^i_p \delta^j_q \\ \widetilde{R}^{ij}_{kl} R^{kq}_{pj} = R^{ij}_{kl} \widetilde{R}^{kq}_{pj} = \delta^i_p \delta^q_l \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

erfüllt sind. Wir betrachten zunächst das folgende Lemma.

Lemma 6.1.1 *Sei R bi-invertierbar und von reellem Typ. Dann sind die Inversen $\widetilde{R}$ und R^{-1} ebenfalls von reellem Typ.*

Beweis: Sei R von reellem Typ und bi-invertierbar. Wir zeigen zunächst, dass dann auch R^{-1} von reellem Typ ist. Es gilt

$$\overline{R^{ij}_{kl} (R^{-1})^{kl}_{pq}} = \overline{R^{ij}_{kl}}\ \overline{(R^{-1})^{kl}_{pq}} \overset{(6.1.2)}{=} \overline{\delta^i_p \delta^j_q} = \delta^i_p \delta^j_q$$

Weiterhin gilt

$$\overline{R^{ij}_{kl}}\ \overline{(R^{-1})^{kl}_{pq}} \overset{(6.1.1)}{=} R^{lk}_{ji} \overline{(R^{-1})^{kl}_{pq}} = \delta^i_p \delta^j_q$$

und damit folgt $\overline{(R^{-1})^{kl}_{pq}} = (R^{-1})^{qp}_{lk}$. Wir zeigen nun, dass auch $\widetilde{R}$ von reellem Typ ist. Es gilt analog

$$\overline{R^{ij}_{kl}\widetilde{R}^{kq}_{pj}} = \overline{R^{ij}_{kl}}\ \overline{\widetilde{R}^{kq}_{pj}} \overset{(6.1.2)}{=} \overline{\delta^i_p\delta^q_l} = \delta^i_p\delta^q_l$$

Damit folgt

$$\overline{R^{ij}_{kl}}\ \overline{\widetilde{R}^{kq}_{pj}} \overset{(6.1.1)}{=} R^{lk}_{ji}\overline{\widetilde{R}^{kq}_{pj}} = \delta^i_p\delta^q_l$$

und es folgt $\overline{\widetilde{R}^{kq}_{pj}} = \widetilde{R}^{jp}_{qk}$. Somit sind also R^{-1} und $\widetilde{R}$ ebenfalls von reellem Typ. □

Im Folgenden sei nun R eine bi-invertierbare, universelle Matrix von reellem Typ. Sei $\mathcal{V}(R)$ zunächst die von den Elementen $x_1, \cdots, x_n$ und ihren Adjungierten $v^1 = (x_1)^*, \cdots, v^n = (x_n)^*$ erzeugte freie Algebra. Diese soll im weiteren Verlauf die Rolle der braided $*$-Bialgebra $\mathcal{B}$ in der Kategorie $({}^{\mathcal{A}_*(R')}\mathrm{C}_*, \Psi)$ bzw. $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}_*(R)})_*, \Psi)$ übernehmen.

6.2 Die linke Symmetrisierung $\mathcal{H} = \mathcal{V}(R) \otimes \mathcal{A}_*(R')$

Wir betrachten nun die FRT-$*$-Bialgebra $\mathcal{A}_*(R')$ für $R' := \tau(R)$. $\mathcal{A}_*(R)$ soll in der Symmetrisierung die Rolle der coquasitriangularen $*$-Bialgebra $\mathcal{A}$ übernehmen. Wir wollen für diese nun die Kategorie $({}^{\mathcal{A}_*(R')}\mathrm{C}_*, \Psi)$ bilden. Dafür brauchen wir also eine r-Form auf $\mathcal{A}_*(R)$, sodass $\mathcal{A}_*(R)$ mit dieser r-Form die Voraussetzungen aus Satz 3.2.9 für die Kategorie $({}^{\mathcal{A}_*(R')}\mathrm{C}_*, \Psi)$ erfüllt.

Lemma 6.2.1 *Die Abbildung $\boldsymbol{r'}\colon \mathcal{A}_*(R') \otimes \mathcal{A}_*(R') \to \mathbb{C}$ mit*

$$\boldsymbol{r'}(a^i_j \otimes a^k_l) = R^{ki}_{lj}, \qquad \boldsymbol{r'}(a^i_j \otimes b^k_l) = R^{ik}_{jl} \tag{6.2.1}$$

definiert eine universelle r-Form auf $\mathcal{A}_*(R')$ mit

$$\boldsymbol{r'}(b^i_j \otimes a^k_l) = \widetilde{R}^{ki}_{lj}, \qquad \boldsymbol{r'}(b^i_j \otimes b^k_l) = (R^{-1})^{ik}_{jl} \tag{6.2.2}$$

und der (Faltungs-)Inversen $\overline{\boldsymbol{r'}}\colon \mathcal{A}_*(R') \otimes \mathcal{A}_*(R') \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{r'}}(a^i_j \otimes a^k_l) &= (R^{-1})^{ki}_{lj}, \qquad \overline{\boldsymbol{r'}}(a^i_j \otimes b^k_l) = \widetilde{R}^{ik}_{jl}, \\ \overline{\boldsymbol{r'}}(b^i_j \otimes a^k_l) &= R^{ki}_{lj}, \qquad \overline{\boldsymbol{r'}}(b^i_j \otimes b^k_l) = R^{ik}_{jl}. \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Beweis: Wir überprüfen an dieser Stelle nur die Angabe der Inversen unserer Abbildung. Dass $\boldsymbol{r'}$ eine r-Form definiert, folgt aus Satz 2.5.3 und Satz 2.5.8. Wir überprüfen zunächst die Invertierbarkeit auf Elementen der Form $a^i_j \otimes a^k_l$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{r'} \star \overline{\boldsymbol{r'}})(a^i_j \otimes a^k_l) &= m \circ (\boldsymbol{r'} \otimes \overline{\boldsymbol{r'}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(a^i_j \otimes a^k_l) \\ &\overset{(2.5.2)}{=} m \circ (\boldsymbol{r'} \otimes \overline{\boldsymbol{r'}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(a^i_p \otimes a^p_j \otimes a^k_q \otimes a^q_l) \\ &= \boldsymbol{r'}(a^i_p \otimes a^k_q)\overline{\boldsymbol{r'}}(a^p_j \otimes a^q_l) \\ &\underset{(6.2.3)}{\overset{(6.2.1)}{=}} R^{ki}_{qp} \cdot (R^{-1})^{qp}_{lj} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(6.1.2)}{=} \delta^k_l \delta^i_j \\
&\overset{(6.1.2)}{=} (R^{-1})^{ki}_{qp} \cdot R^{qp}_{lj} \\
&\overset{(6.2.1)}{\underset{(6.2.3)}{=}} \overline{\boldsymbol{r'}}(a^i_p \otimes a^k_q)\boldsymbol{r'}(a^p_j \otimes a^q_l) \\
&= (\overline{\boldsymbol{r'}} \star \boldsymbol{r'})(a^i_j \otimes a^k_l).
\end{aligned}
$$

Analog gilt auf Elementen der Form $a^i_j \otimes b^k_l$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{r'} \star \overline{\boldsymbol{r'}})(a^i_j \otimes b^k_l) &= m \circ (\boldsymbol{r'} \otimes \overline{\boldsymbol{r'}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(a^i_j \otimes b^k_l) \\
&\overset{(2.5.2)}{=} m \circ (\boldsymbol{r'} \otimes \overline{\boldsymbol{r'}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(a^i_p \otimes a^p_j \otimes b^q_l \otimes b^k_q) \\
&= \boldsymbol{r'}(a^i_p \otimes b^q_l)\overline{\boldsymbol{r'}}(a^p_j \otimes b^k_q) \\
&\overset{(6.2.1)}{\underset{(6.2.3)}{=}} R^{iq}_{pl} \cdot \widetilde{R}^{pk}_{jq} \\
&\overset{(6.1.2)}{=} \delta^i_j \delta^k_l \\
&\overset{(6.1.2)}{=} \widetilde{R}^{iq}_{pl} \cdot R^{pk}_{jq} \\
&\overset{(6.2.1)}{\underset{(6.2.3)}{=}} \overline{\boldsymbol{r'}}(a^i_p \otimes b^q_l)\boldsymbol{r'}(a^p_j \otimes b^k_q) \\
&= (\overline{\boldsymbol{r'}} \star \boldsymbol{r'})(a^i_j \otimes b^k_l).
\end{aligned}
$$

Da $\boldsymbol{r'}$ die Voraussetzungen aus Satz 3.2.9 erfüllen soll, muss inbesondere Gleichung (3.2.6) erfüllt sein. Da die Inversen $\widetilde{R}$ und R^{-1} von R wegen Lemma 6.1.1 ebenfalls von reellem Typ sind, gilt für Generatoren der Form $b^i_j \otimes a^k_l$ die Gleichheit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r'}(b^i_j \otimes a^k_l) &\overset{(3.2.6)}{=} \overline{\overline{\boldsymbol{r'}}((b^i_j)^* \otimes (a^k_l)^*)} \\
&= \overline{\overline{\boldsymbol{r'}}(a^j_i \otimes b^l_k)} \\
&\overset{(A.2.2)}{=} \overline{\widetilde{R}^{jl}_{ik}} \\
&\overset{(6.1.1)}{=} \widetilde{R}^{ki}_{lj}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r'}(b^i_j \otimes b^k_l) &= \overline{\overline{\boldsymbol{r'}}((b^i_j)^* \otimes (b^k_l)^*)} \\
&= \overline{\overline{\boldsymbol{r'}}(a^j_i \otimes a^l_k)} \\
&\overset{(A.2.2)}{=} \overline{(R^{-1})^{lj}_{ki}} \\
&\overset{(6.1.1)}{=} (R^{-1})^{ik}_{jl}
\end{aligned}
$$

für Generatoren der Form $b^i_j \otimes b^k_l$. Für die Inversen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{r'} \star \overline{\boldsymbol{r'}})(b^i_j \otimes a^k_l) &= m \circ (\boldsymbol{r'} \otimes \overline{\boldsymbol{r'}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(b^i_j \otimes a^k_l) \\
&\overset{(2.5.2)}{=} m \circ (\boldsymbol{r'} \otimes \overline{\boldsymbol{r'}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(b^p_j \otimes b^i_p \otimes a^k_q \otimes a^q_l) \\
&= \boldsymbol{r'}(b^p_j \otimes a^k_q)\overline{\boldsymbol{r'}}(b^i_p \otimes a^q_l) \\
&\underset{(6.2.3)}{\overset{(6.2.1)}{=}} \widetilde{R}^{kp}_{qj} \cdot R^{qi}_{lp} \\
&\overset{(6.1.2)}{=} \delta^l_k \delta^i_j \\
&\overset{(6.1.2)}{=} R^{kp}_{qj} \cdot \widetilde{R}^{qi}_{lp} \\
&\underset{(6.2.3)}{\overset{(6.2.1)}{=}} \overline{\boldsymbol{r'}}(b^p_j \otimes a^k_q)\boldsymbol{r'}(b^i_p \otimes a^q_l) \\
&= (\overline{\boldsymbol{r'}} \star \boldsymbol{r'})(b^i_j \otimes a^k_l)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{r'} \star \overline{\boldsymbol{r'}})(b^i_j \otimes b^k_l) &= m \circ (\boldsymbol{r'} \otimes \overline{\boldsymbol{r'}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(b^i_j \otimes b^k_l) \\
&\overset{(2.5.2)}{=} m \circ (\boldsymbol{r'} \otimes \overline{\boldsymbol{r'}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(b^p_j \otimes b^i_p \otimes b^q_l \otimes b^k_q) \\
&= \boldsymbol{r'}(b^p_j \otimes b^q_l)\overline{\boldsymbol{r'}}(b^i_p \otimes b^k_q) \\
&\underset{(6.2.3)}{\overset{(6.2.1)}{=}} (R^{-1})^{pq}_{jl} \cdot R^{ik}_{pq} \\
&= \delta^i_j \delta^k_l \\
&\overset{(6.1.2)}{=} R^{pq}_{jl} \cdot (R^{-1})^{ik}_{pq} \\
&\underset{(6.2.3)}{\overset{(6.2.1)}{=}} \overline{\boldsymbol{r'}}(b^p_j \otimes b^q_l)\boldsymbol{r'}(b^i_p \otimes b^k_q) \\
&= (\overline{\boldsymbol{r'}} \star \boldsymbol{r'})(b^i_j \otimes b^k_l).
\end{aligned}
$$

□

Wir setzen diese r-Form also so fort, dass die Gleichungen (2.4.1) bis (2.4.3) gelten und haben somit eine r-Form, die auch die Voraussetzungen aus Satz 3.2.9 erfüllt.

Um das Braiding für die Kategorie $({}^{\mathcal{A}_*(R')}\mathrm{C}_*, \Psi)$ definieren zu können, müssen wir eine linke Kowirkung definieren.

Lemma 6.2.2 *Die Abbildung* $\gamma\colon \mathcal{V}(R) \to \mathcal{A}_*(R') \otimes \mathcal{V}(R)$ *mit*

$$\gamma(1) = 1 \otimes 1, \quad \gamma(x_i) = b^j_i \otimes x_j, \quad \gamma(v^i) = a^i_j \otimes v^j \tag{6.2.4}$$

definiert eine linke Kowirkung auf $\mathcal{V}(R)$.

Beweis: Wir zeigen, dass die Eigenschaften (A.4.3) und (A.4.4) auf allen Generatoren erfüllt sind. Wegen Satz 2.5.4 gilt

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(1) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(1 \otimes 1)\\ &= 1 \otimes 1 \otimes 1 = (\mathrm{id} \otimes \gamma)(1 \otimes 1)\\ &= (\mathrm{id} \otimes \gamma) \circ \gamma(1)\end{aligned}$$

und

$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(1) = (\delta \otimes \mathrm{id})(1 \otimes 1) = 1.$$

Für die Generatoren x_i gilt

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(x_i) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(b_i^k \otimes x_k)\\ &= b_i^j \otimes b_j^k \otimes x_k = (\mathrm{id} \otimes \gamma)(b_i^j \otimes x_j)\\ &= (\mathrm{id} \otimes \gamma) \circ \gamma(x_i)\end{aligned}$$

und

$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(x_i) = (\delta \otimes \mathrm{id})(b_i^k \otimes x_k) = x_k.$$

Analog gilt für die Generatoren v^i

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(v^i) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(a_k^i \otimes v^k)\\ &= a_j^i \otimes a_k^j \otimes v^k = (\mathrm{id} \otimes \gamma)(a_j^i \otimes v^j)\\ &= (\mathrm{id} \otimes \gamma) \circ \gamma(v^i)\end{aligned}$$

und

$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(v^i) = (\delta \otimes \mathrm{id})(a_k^i \otimes v^k) = v^k.$$

Wir setzen die Abbildung nun so fort, dass die Multiplikation eine Komodul-Abbilung wird. Damit wird γ zu einer Kowirkung. □

Nun wollen wir mit Hilfe dieser Kowirkung die Linkswirkung $\alpha = (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)$ aus Satz 3.2.1 betrachten.

Lemma 6.2.3 *Betrachte $\mathcal{A}_*(R)$ mit der in Lemma 6.2.1 definierten r-Form. Dann ist die in Satz 3.2.1 definierte Wirkung durch*

$$\begin{aligned}\alpha(a_j^i \otimes x_k) &= \widetilde{R}_{jk}^{il} x_l \qquad \alpha(a_j^i \otimes v^k) = (R^{-1})_{lj}^{ki} v^l\\ \alpha(b_j^i \otimes x_k) &= R_{jk}^{il} x_l \qquad \alpha(b_j^i \otimes v^k) = R_{lj}^{ki} v^l\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

gegeben.

Beweis: Wir berechnen die Werte auf den Generatoren durch Gleichung (3.2.1) und erhalten für die Generatoren $a_j^i \otimes x_k$

$$\alpha(a_j^i \otimes x_k) = (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)(a_j^i \otimes x^k)$$

$$\stackrel{(6.2.4)}{=} (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id})(a^i_j \otimes b^l_k \otimes x_l)$$
$$\stackrel{(6.2.3)}{=} \widetilde{R}^{il}_{jk} x_l.$$

Für Generatoren der Form $a^i_j \otimes v^k$ gilt

$$\alpha(a^i_j \otimes v^k) = (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)(a^i_j \otimes v^k)$$
$$\stackrel{(6.2.4)}{=} (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id})(a^i_j \otimes a^k_l \otimes v^l)$$
$$\stackrel{(6.2.3)}{=} (R^{-1})^{ki}_{lj} v^l.$$

Auf Elementen der Form $b^i_j \otimes x_k$ gilt

$$\alpha(b^i_j \otimes x_k) = (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)(b^i_j \otimes x^k)$$
$$\stackrel{(6.2.4)}{=} (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id})(b^i_j \otimes b^l_k \otimes x_l)$$
$$\stackrel{(6.2.3)}{=} R^{il}_{jk} x_l$$

und für Elemente der Form $b^i_k \otimes v^k$ die Gleichung

$$\alpha(b^i_j \otimes v^k) = (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma)(b^i_j \otimes v^k)$$
$$\stackrel{(6.2.4)}{=} (\overline{\boldsymbol{r'}} \otimes \mathrm{id})(b^i_j \otimes a^k_l \otimes v^l)$$
$$\stackrel{(6.2.3)}{=} R^{ki}_{lj} v^l. \qquad \square$$

Nun können wir das Braiding für unsere Kategorie betrachten.

Satz 6.2.4 *Das Braiding Ψ ist (nach Gleichung* (3.2.3)*) gegeben durch*

$$\Psi(x_i \otimes x_j) = R^{kl}_{ij} x_l \otimes x_k,$$
$$\Psi(x_i \otimes v^j) = R^{jk}_{li} v^l \otimes x_k,$$
$$\Psi(v^i \otimes x_j) = \widetilde{R}^{il}_{kj} x_l \otimes v^k,$$
$$\Psi(x^i \otimes v^j) = (R^{-1})^{ji}_{lk} v^l \otimes v^k.$$

Beweis: Wie zeigen zunächst die erste Gleichung. Es gilt

$$\Psi(x_i \otimes x_j) = (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes x_j)$$
$$\stackrel{(6.2.4)}{=} (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)(b^k_i \otimes x_k \otimes x_j)$$
$$= (\alpha \otimes \mathrm{id})(b^k_i \otimes x_j \otimes x_k)$$
$$\stackrel{(6.2.5)}{=} R^{kl}_{ij} x_l \otimes x_k.$$

Analog gilt auf Generatoren der Form $x_i \otimes v^j$

$$\begin{aligned}\Psi(x_i \otimes v^j) &= (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes v^j) \\ &\overset{(6.2.4)}{=} (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)(b_i^k \otimes x_k \otimes v^j) \\ &= (\alpha \otimes \mathrm{id})(b_i^k \otimes v^j \otimes x_k) \\ &\overset{(6.2.5)}{=} R_{li}^{jk} v^l \otimes x_k.\end{aligned}$$

Die dritte Gleichung gilt wegen

$$\begin{aligned}\Psi(v^i \otimes x_j) &= (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes x_j) \\ &\overset{(6.2.4)}{=} (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)(a_k^i \otimes v^k \otimes x_j) \\ &= (\alpha \otimes \mathrm{id})(a_k^i \otimes x_j \otimes v^k) \\ &\overset{(6.2.5)}{=} \widetilde{R}_{kj}^{il} x_l \otimes v^k.\end{aligned}$$

Zuletzt gilt für die vierte Gleichung

$$\begin{aligned}\Psi(v^i \otimes v^j) &= (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes v^j) \\ &\overset{(6.2.4)}{=} (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)(a_k^i \otimes v^k \otimes v^j) \\ &= (\alpha \otimes \mathrm{id})(a_k^i \otimes v^j \otimes v^k) \\ &\overset{(6.2.5)}{=} (R^{-1})_{lk}^{ji} v^l \otimes v^k.\end{aligned}$$

Wir setzen Ψ so fort, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}\Psi(1 \otimes u) &= u \otimes 1 \\ \Psi(u \otimes 1) &= 1 \otimes u \\ \Psi(u \otimes u_1 u_2) &= (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (m \otimes \mathrm{id})(u \otimes u_1 \otimes u_2) \\ \Psi(u_1 u_2 \otimes u) &= (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\mathrm{id} \otimes m)(u_1 \otimes u_2 \otimes u)\end{aligned}$$

gelten, damit m Ψ-invariant ist. □

Wir haben somit alle für die Kategorie $({}^{\mathcal{A}_*(R')}\mathrm{C}_*, \Psi)$ notwendigen Informationen zusammen und können $\mathcal{V}(R)$ als braided $*$-Bialgebra in $({}^{\mathcal{A}_*(R')}\mathrm{C}_*, \Psi)$ auffassen.

Lemma 6.2.5 *Durch* $\Delta\colon \mathcal{V}(R) \to \mathcal{V}(R) \otimes \mathcal{V}(R)$ *mit*

$$\begin{aligned}\Delta(x_i) &= x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i \\ \Delta(v^i) &= v^i \otimes 1 + 1 \otimes v^i\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

wird eine Komultiplikation auf $\mathcal{V}(R)$ *und durch* $\delta\colon \mathcal{V}(R) \to \mathbb{C}$ *mit*

$$\delta(1) = 1, \qquad \delta(x_i) = \delta(v^i) = 0 \tag{6.2.7}$$

eine Koeins auf $\mathcal{V}(R)$ *definiert.*

Beweis: Wir rechnen die Koassoziativität auf den Generatoren nach und erhalten für die Generatoren x_i zunächst

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x_i) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) \\ &= \Delta(x_i) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes x_i \\ &= (x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_i \\ &= x_i \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_i \\ &= x_i \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes (x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) \\ &= x_i \otimes \Delta(1) \otimes 1 \otimes \Delta(x_i) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(x_i).\end{aligned}$$

Die Rechnung für v^i verläuft analog. Nun betrachten wir die Koeins-Eigenschaft für x_i. Es gilt

$$\begin{aligned}(\delta \otimes \mathrm{id})(x_i) \circ \Delta &= (\delta \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) \\ &= \delta(x_i) \otimes \mathrm{id} + \delta(1) \otimes x_i \\ &= 0 \otimes 1 + 1_{\mathbb{C}} \otimes x_i = x_i \\ &= x_i \otimes 1_{\mathbb{C}} + 1 \otimes 0 \\ &= x_i \otimes \delta(1) + 1 \otimes \delta(x_i) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \delta)(x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta(x_i)\end{aligned}$$

Auch hier verläuft die Rechnung für v^i erneut analog. Wir setzen Δ und δ so fort, dass $\mathcal{V}(R)$ zu einer braided ∗-Bialgebra wird. □

Somit können wir nun die (linke) Symmetrisierung betrachten, d. h. wir wenden Satz 3.1.7 auf $\mathcal{A} = \mathcal{A}_*(R')$ und $\mathcal{B} = \mathcal{V}(R)$ an. Wir erhalten somit die ∗-Bialgebra $\mathcal{H} = \mathcal{V}(R) \otimes \mathcal{A}(R')$, die von den Elementen $x_i \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}_*(R')}, v^i \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}_*(R')} = (x_i)^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}_*(R')}, \mathbb{1}_{\mathcal{V}(R)} \otimes a^i_j, \mathbb{1}_{\mathcal{V}_*(R)} \otimes b^j_i = \mathbb{1}_{\mathcal{V}_*(R)} \otimes (a^i_j)^*$ erzeugt wird, sodass die Relationen gelten:

$$R^{ki}_{pq} a^p_j a^q_l = a^k_q a^i_p R^{lj}_{qp} \tag{6.2.8}$$

$$R^{ji}_{lk} b^k_q a^p_j = a^u_l b^i_\nu R^{p\nu}_{uq} \tag{6.2.9}$$

$$a^j_k x_i = \widetilde{R}^{jl}_{pi} x_l a^p_k \tag{6.2.10}$$

$$b^j_k x_i = R^{pl}_{ki} x_l b^j_p \tag{6.2.11}$$

$$a^j_k v_i = (R^{-1})^{ij}_{lp} v^l a^p_k \tag{6.2.12}$$

$$b^j_k v^i = R^{ip}_{lk} v^l b^j_p \tag{6.2.13}$$

$$\Delta(a^i_j) = a^i_k \otimes a^k_j \tag{6.2.14}$$

$$\Delta(b^i_j) = b^k_j \otimes b^i_k \tag{6.2.15}$$

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + b^j_i \otimes x_j \tag{6.2.16}$$

$$\Delta(v^i) = v^i \otimes 1 + a^i_j \otimes v^j \tag{6.2.17}$$

$$\delta(a^i_j) = \delta(b^i_j) = \delta^i_j \tag{6.2.18}$$

$$\delta(x_i) = \delta(v^i) = 0, \tag{6.2.19}$$

wobei wir an dieser Stelle die Elemente als in $\mathcal{H}$ eingebettet auffassen.

Beweis: Die Gleichungen (6.2.8) und Gleichung (6.2.9) folgen direkt aus der FRT-Konstruktion. Für die Gleichungen (6.2.10) bis (6.2.13) betrachten wir die Multiplikation (3.1.8) aus Satz 3.1.7. Wir erhalten damit zunächst Gleichung (6.2.10).

$$\begin{aligned}
&m_{\mathcal{H}}(1 \otimes a^j_k \otimes x_i \otimes 1)\\
&\overset{(3.1.8)}{=} (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes a^j_k \otimes x_i \otimes 1)\\
&\overset{(2.5.2)}{=} (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(1 \otimes a^j_p \otimes a^p_k \otimes x_i \otimes 1)\\
&= (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes a^j_p \otimes x_i \otimes a^p_k \otimes 1)\\
&\overset{(6.2.5)}{=} (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}})(1 \otimes \widetilde{R}^{jl}_{pi} x_l \otimes a^p_k \otimes 1)\\
&= \widetilde{R}^{jl}_{pi} x_l \otimes a^p_k
\end{aligned}$$

Für Gleichung (6.2.11) erhalten wir analog

$$\begin{aligned}
&m_{\mathcal{H}}(1 \otimes b^j_k \otimes x_i \otimes 1)\\
&\overset{(3.1.8)}{=} (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes b^j_k \otimes x_i \otimes 1)\\
&\overset{(2.5.5)}{=} (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(1 \otimes b^p_k \otimes b^j_p \otimes x_i \otimes 1)\\
&= (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes b^p_k \otimes x_i \otimes b^j_p \otimes 1)\\
&\overset{(6.2.5)}{=} (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}})(1 \otimes R^{pl}_{ki} x_l \otimes b^j_p \otimes 1)\\
&= R^{pl}_{ki} x_l \otimes b^j_p
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun Gleichung (6.2.12).

$$\begin{aligned}
&m_{\mathcal{H}}(1 \otimes a^j_k \otimes v^i \otimes 1)\\
&\overset{(3.1.8)}{=} (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes a^j_k \otimes v^i \otimes 1)
\end{aligned}$$

$$\overset{(2.5.2)}{=}(m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})(1\otimes a^j_p\otimes a^p_k\otimes v^i\otimes 1)$$
$$=(m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(1\otimes a^j_p\otimes v^i\otimes a^p_k\otimes 1)$$
$$\overset{(6.2.5)}{=}(m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})(1\otimes(R^{-1})^{ij}_{lp}v^l\otimes a^p_k\otimes 1)$$
$$=(R^{-1})^{ij}_{lp}v^l\otimes a^p_k$$

Und zuletzt erhalten wir für Gleichung (6.2.13)

$$m_{\mathcal{H}}(1\otimes b^j_k\otimes v^i\otimes 1)$$
$$\overset{(3.1.8)}{=}(m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})$$
$$\circ(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(1\otimes b^j_k\otimes v^i\otimes 1)$$
$$\overset{(2.5.5)}{=}(m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})(1\otimes b^p_k\otimes b^j_p\otimes v^i\otimes 1)$$
$$=(m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(1\otimes b^p_k\otimes v^i\otimes b^j_p\otimes 1)$$
$$\overset{(6.2.5)}{=}(m_{\mathcal{B}}\otimes m_{\mathcal{A}})(1\otimes R^{ip}_{lk}v^l\otimes b^j_p\otimes 1)$$
$$=R^{ip}_{lk}v^l\otimes b^j_p$$

Wir betrachten nun die Komultiplikation (3.1.9) aus Satz 3.1.7 und betrachten zunächst Gleichung (6.2.14). Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{H}}(1\otimes a^i_j)&\overset{(3.1.9)}{=}(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})\\&\quad\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\Delta_{\mathcal{B}}\otimes\Delta_{\mathcal{A}})(1\otimes a^i_j)\\&\overset{(2.5.2)}{=}(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})\\&\quad\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(1\otimes 1\otimes a^i_k\otimes a^k_j)\\&\overset{(2.5.4)}{=}(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})(1\otimes 1\otimes 1\otimes a^i_k\otimes a^k_j)\\&=(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(1\otimes 1\otimes a^i_k\otimes 1\otimes a^k_j)\\&=1\otimes a^i_k\otimes 1\otimes a^k_j\end{aligned}$$

Analog betrachten wir für Gleichung (6.2.15)

$$\begin{aligned}&\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\Delta_{\mathcal{B}}\otimes\Delta_{\mathcal{A}})(1\otimes b^i_j)\\&\overset{(2.5.5)}{=}(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})\\&\quad\circ(\mathrm{id}\otimes\gamma\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(1\otimes 1\otimes b^k_j\otimes b^i_k)\\&\overset{(2.5.4)}{=}(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})(1\otimes 1\otimes 1\otimes b^k_j\otimes b^i_k)\\&=(\mathrm{id}\otimes m\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(1\otimes 1\otimes b^k_j\otimes 1\otimes b^i_k)\end{aligned}$$

$$= \quad 1 \otimes b_j^k \otimes 1 \otimes b_k^i$$

Für Gleichung (6.2.16) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathcal{H}}(x_i \otimes 1) \\
&\overset{(3.1.9)}{=} (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_{\mathcal{B}} \otimes \Delta_{\mathcal{A}})(x_i \otimes 1)) \\
&\overset{(6.2.6)}{=} (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\big((x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) \otimes 1 \otimes 1\big) \\
&= (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x_i \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes \gamma(1) \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \gamma(x_i) \otimes 1 \otimes 1) \\
&\overset{(6.2.4)}{=} (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes b_i^j \otimes x_j \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes b_i^j \otimes 1 \otimes x_j \otimes 1) \\
&= x_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes b_i^j \otimes x_j \otimes 1
\end{aligned}$$

Zuletzt erhalten wir für Gleichung (6.2.17)

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathcal{H}}(v^i \otimes 1) \\
&\overset{(3.1.9)}{=} (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ (\Delta_{\mathcal{B}} \otimes \Delta_{\mathcal{A}})(v^i \otimes 1)) \\
&\overset{(6.2.6)}{=} (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ \big((v^i \otimes 1 + 1 \otimes v^i) \otimes 1 \otimes 1\big) \\
&= (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad (v^i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes v^i \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes \gamma(1) \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \gamma(v^i) \otimes 1 \otimes 1) \\
&\overset{(6.2.4)}{=} (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a_j^i \otimes v^j \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a_j^i \otimes 1 \otimes v^j \otimes 1) \\
&= v^i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a_j^i \otimes v^j \otimes 1
\end{aligned}$$

Abschließend erhalten wir für Gleichung (6.2.18)

$$\delta_{\mathcal{H}}(a_j^i \otimes 1) = \delta_{\mathcal{B}}(a_j^i) \otimes \delta_{\mathcal{A}}(1) = \delta_j^i \otimes 1_{\mathbb{C}},$$

$$\delta_{\mathcal{H}}(b_j^i \otimes 1) = \delta_{\mathcal{B}}(b_j^i) \otimes \delta_{\mathcal{A}}(1) = \delta_j^i \otimes 1_{\mathbb{C}},$$

sowie für Gleichung (6.2.19)

$$\delta_{\mathcal{H}}(1 \otimes x_i) = \delta_{\mathcal{B}}(1) \otimes \delta_{\mathcal{A}}(x_i) = 1_{\mathbb{C}} \otimes 0 = 0,$$
$$\delta_{\mathcal{H}}(1 \otimes v^i) = \delta_{\mathcal{B}}(1) \otimes \delta_{\mathcal{A}}(v^i) = 1_{\mathbb{C}} \otimes 0 = 0.$$

Somit haben wir alle Gleichungen gezeigt und den Beweis somit beendet. □

6.3 Die rechte Symmetrisierung $\mathcal{H}_R = \mathcal{A}_*(R) \otimes \mathcal{V}(R)$

In diesem Abschnitt wollen wir nun die rechte Symmetrisierung betrachten. Hierfür betrachten wir die FRT-$*$-Bialgebra $\mathcal{A}_*(R)$ mit der in Satz 2.5.3 definierten r-Form $\boldsymbol{r}$. Wir wollen nun die Kategorie $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}_*(R)})_*, \overline{\Psi})$ aus Abschnitt 3.2 betrachten. Wie zuvor benötigen wir eine r-Form $\boldsymbol{r}$, die die Voraussetzungen für das Bilden der Kategorie $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}_*(R)})_*, \overline{\Psi})$ aus Satz 3.2.11 erfüllt.

Lemma 6.3.1 *Durch* $\boldsymbol{r}\colon \mathcal{A}_*(R) \otimes \mathcal{A}_*(R) \to \mathbb{C}$ *mit*

$$\boldsymbol{r}(a^i_j \otimes a^k_l) = R^{ik}_{jl} \qquad \boldsymbol{r}(a^i_j \otimes b^k_l) = R^{ki}_{lj}$$

wird einer r-Form $\boldsymbol{r}$ *mit*

$$\boldsymbol{r}(b^i_j \otimes a^k_l) = \widetilde{R}^{ik}_{jl} \qquad \boldsymbol{r}(b^i_j \otimes b^k_l) = (R^{-1})^{ki}_{lj}$$

und der (Faltungs-)Inversen $\overline{\boldsymbol{r}}\colon \mathcal{A}_*(R) \otimes \mathcal{A}_*(R) \to \mathbb{C}$

$$\overline{\boldsymbol{r}}(a^i_j \otimes a^k_l) = (R^{-1})^{ik}_{jl} \qquad \overline{\boldsymbol{r}}(a^i_j \otimes b^k_l) = \widetilde{R}^{ki}_{lj}$$
$$\overline{\boldsymbol{r}}(b^i_j \otimes a^k_l) = R^{ik}_{jl} \qquad \overline{\boldsymbol{r}}(b^i_j \otimes b^k_l) = R^{ki}_{lj}$$

definiert.

Beweis: Wir überprüfen an dieser Stelle erneut nur die Angabe der Inversen unserer Abbildung. Wie zuvor folgt die Tatsache, dass $\boldsymbol{r}$ eine r-Form definiert, aus Satz 2.5.3 und Satz 2.5.8. Wir zeigen an dieser Stelle, dass die angegebenen Werte tatsächlich die Inversen auf den Generatoren $a^i_j \otimes a^k_l$ sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r} \star \overline{\boldsymbol{r}})(a^i_j \otimes a^k_l) &= \boldsymbol{r}(a^i_p \otimes a^k_q)\overline{\boldsymbol{r}}(a^p_j \otimes a^q_l) \\
&= R^{ik}_{pq}(R^{-1})^{pq}_{jl} \\
&\overset{(6.1.2)}{=} \delta^i_j \delta^k_l \\
&= (R^{-1})^{ik}_{pq} R^{pq}_{jl} \\
&= \overline{\boldsymbol{r}}(a^i_p \otimes a^k_q)\boldsymbol{r}(a^p_j \otimes a^q_l) \\
&= (\overline{\boldsymbol{r}} \star \boldsymbol{r})(a^i_j \otimes a^k_l).
\end{aligned}$$

Da Gleichung (3.2.6) gelten muss und die Inversen nach Lemma 6.1.1 auch von reellem Typ sind, gilt für $\boldsymbol{r}(b^i_j \otimes b^k_l)$ zunächst

$$\boldsymbol{r}(b^i_j \otimes b^k_l) \overset{(3.2.6)}{=} \overline{\overline{\boldsymbol{r}}(a^j_i \otimes a^l_k)} = \overline{(R^{-1})^{jl}_{ik}} \overset{(6.1.1)}{=} (R^{-1})^{ki}_{lj}$$

Wir erhalten damit für das Inverse die Rechnung

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r} \star \overline{\boldsymbol{r}})(b^i_j \otimes b^k_l) &= \boldsymbol{r}(b^p_j \otimes b^q_l)\overline{\boldsymbol{r}}(b^i_p \otimes b^k_q) \\
&= (R^{-1})^{qp}_{lj} R^{ki}_{qp} \\
&\overset{(6.1.2)}{=} \delta^i_j \delta^k_l \\
&= R^{qp}_{lj} (R^{-1})^{ki}_{qp} \\
&= \overline{\boldsymbol{r}}(b^p_j \otimes b^q_l)\boldsymbol{r}(b^i_p \otimes b^k_q) \\
&= (\overline{\boldsymbol{r}} \star \boldsymbol{r})(b^i_j \otimes b^k_l).
\end{aligned}$$

Für $\boldsymbol{r}(a^i_j \otimes b^k_l) = R^{ki}_{lj}$ erhalten wir die Inverse $\overline{\boldsymbol{r}}(a^i_j \otimes b^k_l) = \widetilde{R}^{ki}_{lj}$, weil

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r} \star \overline{\boldsymbol{r}})(a^i_j \otimes b^k_l) &= \boldsymbol{r}(a^i_p \otimes b^q_l)\overline{\boldsymbol{r}}(a^p_j \otimes b^k_q) \\
&= R^{qi}_{lp} \widetilde{R}^{kp}_{qj} \\
&\overset{(6.1.2)}{=} \delta^i_j \delta^k_l \\
&= \widetilde{R}^{qi}_{lp} R^{kp}_{qj} \\
&= \overline{\boldsymbol{r}}(a^i_p \otimes b^q_l)\boldsymbol{r}(a^p_j \otimes b^k_q) \\
&= (\overline{\boldsymbol{r}} \star \boldsymbol{r})(a^i_j \otimes b^k_l)
\end{aligned}$$

gilt. Für $\boldsymbol{r}(b^i_j \otimes a^k_l)$ gilt damit zunächst

$$\boldsymbol{r}(b^i_j \otimes a^k_l) \overset{(3.2.6)}{=} \overline{\overline{\boldsymbol{r}}(a^j_i \otimes b^l_k)} = \overline{\widetilde{R}^{lj}_{ki}} \overset{(6.1.1)}{=} \widetilde{R}^{ik}_{jl}$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r} \star \overline{\boldsymbol{r}})(b^i_j \otimes a^k_l) &= \boldsymbol{r}(b^p_j \otimes a^k_q)\overline{\boldsymbol{r}}(b^i_p \otimes a^q_l) \\
&= \widetilde{R}^{pk}_{jq} R^{iq}_{pl} \\
&\overset{(6.1.2)}{=} \delta^i_j \delta^k_l \\
&= R^{pk}_{jq} \widetilde{R}^{iq}_{pl} \\
&= \overline{\boldsymbol{r}}(b^p_j \otimes a^k_q)\boldsymbol{r}(b^i_p \otimes a^q_l) \\
&= (\overline{\boldsymbol{r}} \star \boldsymbol{r})(b^i_j \otimes a^k_l)
\end{aligned}$$

□

Erneut definieren wir eine rechte Kowirkung auf $\mathcal{V}(R)$, um diesmal $\mathcal{V}(R)$ als braided $*$-Bialgebra in $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}_*(R)})_*, \overline{\Psi})$ auffassen zu können.

Lemma 6.3.2 *Durch $\overline{\gamma}\colon \mathcal{V}(R) \to \mathcal{V}(R) \otimes \mathcal{A}_*(R)$ mit*

$$\overline{\gamma}(1) = 1 \otimes 1, \quad \overline{\gamma}(x_i) = x_j \otimes a^j_i, \quad \overline{\gamma}(v^i) = v^j \otimes b^i_j \tag{6.3.1}$$

wird eine rechte Kowirkung auf $\mathcal{V}(R)$ definiert.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu Satz 6.2.3. $\square$

Wir erhalten erneut aus Satz 3.2.1 eine Wirkung aus der Kowirkung von $\mathcal{A}_*(R)$.

Lemma 6.3.3 *Durch* $\overline{\alpha}\colon \mathcal{V}(R) \otimes \mathcal{A}_*(R) \to \mathcal{V}(R)$ *mit*

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(x_i \otimes a^k_j) &= R^{lk}_{ij} x_l, & \overline{\alpha}(x_i \otimes b^k_j) &= R^{kl}_{ji} x_l, \\ \overline{\alpha}(v^i \otimes a^k_j) &= \widetilde{R}^{ik}_{lj} v^l, & \overline{\alpha}(v^i \otimes b^k_j) &= (R^{-1})^{ki}_{jl} v^l. \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Beweis: Wir nutzen im gesamten Beweis die in Lemma 6.3.1 berechnete r-Form $\boldsymbol{r}$ Die erste Gleichheit gilt wegen

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(x_i \otimes a^k_j) &= (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\overline{\gamma} \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes a^k_j) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r})(x_l \otimes a^l_i \otimes a^k_j) \\ &= x_l \otimes R^{lk}_{ij} \\ &= R^{lk}_{ij} x_l. \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(x_i \otimes b^k_j) &= (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\overline{\gamma} \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes b^k_j) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r})(x_l \otimes a^l_i \otimes b^k_j) \\ &= x_l \otimes R^{kl}_{ji} \\ &= R^{kl}_{ji} x_l. \end{aligned}$$

Für die dritte Gleichung bekommen wir

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(v^i \otimes a^k_j) &= (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\overline{\gamma} \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes a^k_j) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r})(v^l \otimes b^i_l \otimes a^k_j) \\ &= v^l \otimes \widetilde{R}^{ik}_{lj} \\ &= \widetilde{R}^{ik}_{lj} v^l \end{aligned}$$

und analog für die letzte Gleichheit

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(v^i \otimes b^k_j) &= (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\overline{\gamma} \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes b^k_j) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r})(v^l \otimes b^i_l \otimes b^k_j) \\ &= v^l \otimes (R^{-1})^{ki}_{jl} \\ &= (R^{-1})^{ki}_{jl} v^l. \end{aligned}$$

$\square$

Satz 6.3.4 *Das Braiding Ψ ist (nach Satz 3.2.11) gegeben durch*

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}(x_i \otimes x_j) &= R^{lk}_{ij} x_k \otimes x_l, \\ \overline{\Psi}(x_i \otimes v^j) &= R^{jl}_{ki} v^k \otimes x_l, \end{aligned}$$

$$\overline{\Psi}(v^i \otimes x_j) = \widetilde{R}^{ik}_{lj} x_k \otimes v^l,$$
$$\overline{\Psi}(v^i \otimes v^j) = (R^{-1})^{ji}_{kl} v^k \otimes v^l.$$

Beweis: Wie zeigen zunächst die erste Gleichung.

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}(x_i \otimes x_j) &= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma})(x_i \otimes x_j) \\
&\overset{(6.3.1)}{=} (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes x_k \otimes a^k_j) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha})(x_k \otimes x_i \otimes a^k_j) \\
&\overset{(6.3.2)}{=} R^{lk}_{ij} x_k \otimes x_l.
\end{aligned}$$

Analog gilt die zweite Gleichung wegen der Rechnung

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}(x_i \otimes v^j) &= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma})(x_i \otimes v^j) \\
&\overset{(6.3.1)}{=} (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id})(x_i \otimes v^k \otimes b^j_k) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha})(v^k \otimes x_i \otimes b^j_k) \\
&\overset{(6.3.2)}{=} R^{jl}_{ki} v^k \otimes x_l.
\end{aligned}$$

Für den dritten Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}(v^i \otimes x_j) &= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma})(v^i \otimes x_j) \\
&\overset{(6.3.1)}{=} (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes x_k \otimes a^k_j) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha})(x_k \otimes v^i \otimes a^k_j) \\
&\overset{(6.3.2)}{=} \widetilde{R}^{ik}_{lj} x_k \otimes v^l.
\end{aligned}$$

Die vierte Gleichung gilt wegen

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}(v^i \otimes v^j) &= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \overline{\gamma})(v^i \otimes v^j) \\
&\overset{(6.3.1)}{=} (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}) \circ (\tau \otimes \mathrm{id})(v^i \otimes v^k \otimes b^j_k) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha})(v^k \otimes v^i \otimes b^j_k) \\
&\overset{(6.3.2)}{=} (R^{-1})^{ji}_{kl} v^k \otimes v^l.
\end{aligned}$$

Erneut setzen wir Ψ so fort, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Psi(1 \otimes u) &= u \otimes 1 \\
\Psi(u \otimes 1) &= 1 \otimes u \\
\Psi(u \otimes u_1 u_2) &= (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (m \otimes \mathrm{id})(u \otimes u_1 \otimes u_2) \\
\Psi(u_1 u_2 \otimes u) &= (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ (\mathrm{id} \otimes m)(u_1 \otimes u_2 \otimes u)
\end{aligned}$$

gelten, damit m Ψ-invariant ist. □

Wir können nun erneut $\mathcal{V}(R)$ als braided $*$-Bialgebra (diesmal in der Kategorie $((\mathrm{C}^{\mathcal{A}_*(R)})_*, \overline{\Psi}))$ auffassen, indem wir die Komultiplikation auf Satz 6.2.5 entsprechend fortsetzen.

Wir können nun die rechte Symmetrisierung $\mathcal{H}_R = \mathcal{A}_*(R) \otimes \mathcal{V}(R)$ betrachten, d. h. die von $\mathbb{1}_{\mathcal{A}_*(R)} \otimes x_i, \mathbb{1}_{\mathcal{A}_*(R)} \otimes v^i, a^i_j \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{V}(R)}, b^i_j \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{V}(R)}$ erzeugte $*$-Bialgebra mit den Relationen:

$$R^{ik}_{pq} a^p_j a^q_l = a^k_q a^i_p R^{pq}_{jl} \tag{6.3.3}$$

$$R^{ik}_{pq} b^p_k a^l_q = a^q_l b^i_p R^{pq}_{jq} \tag{6.3.4}$$

$$x_i a^j_k = R^{lp}_{ik} a^j_p \otimes x_l \tag{6.3.5}$$

$$x_i b^j_k = R^{jl}_{pi} x_l b^j_p \tag{6.3.6}$$

$$v_i a^j_k = (\widetilde{R}^{ip}_{lk} v^l a^p_k \tag{6.3.7}$$

$$v^i b^j_k = (R^{-1})^{ip}_{lk} v^l b^j_p \tag{6.3.8}$$

$$\Delta(a^i_j) = a^i_k \otimes a^k_j \tag{6.3.9}$$

$$\Delta(b^i_j) = b^k_j \otimes b^i_k \tag{6.3.10}$$

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + b^j_i \otimes x_j \tag{6.3.11}$$

$$\Delta(v^i) = v^i \otimes 1 + a^i_j \otimes v^j \tag{6.3.12}$$

$$\delta(a^i_j) = \delta(b^i_j) = \delta^i_j \tag{6.3.13}$$

$$\delta(x_i) = \delta(v^i) = 0, \tag{6.3.14}$$

wobei wir an dieser Stelle die Elemente als in $\mathcal{H}_R$ eingebettet auffassen.

Beweis: Die Gleichungen (6.3.3) und (6.3.4) kommen erneut von der Definition der FRT-Bialgebra. Wir betrachten die Multiplikation $m_{\mathcal{H}_R}$ auf $\mathcal{H}_R$ aus Satz 3.2.12. Wir überprüfen zunächst Gleichung (6.3.5).

$$\begin{aligned}
&m_{\mathcal{H}_R}(1 \otimes x_i \otimes a^j_k \otimes 1) \\
&\quad = (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x_i \otimes a^j_k \otimes 1) \\
&\quad = (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x_i \otimes a^j_p \otimes a^p_k \otimes 1) \\
&\quad = (m \otimes m)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes a^j_p \otimes x_i \otimes a^p_k \otimes 1) \\
&\quad \overset{(6.3.2)}{=} (m \otimes m)(1 \otimes a^j_p \otimes R^{lp}_{ik} x_l \otimes 1) \\
&\quad = R^{lp}_{ik} a^j_p \otimes x_l.
\end{aligned}$$

Analog betrachten wir Gleichung (6.3.6)

$$\begin{aligned}
m_{\mathcal{H}_R}&(1 \otimes x_i \otimes b^j_k \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x_i \otimes b^j_k \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x_i \otimes b^p_k \otimes b^j_p \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes b^p_k \otimes x_i \otimes b^j_p \otimes 1)\\
&\overset{(6.3.2)}{=} (m \otimes m)(1 \otimes b^p_k \otimes R^{jl}_{pi} x_l \otimes 1)\\
&= R^{jl}_{pi} b^p_k \otimes x_l.
\end{aligned}$$

Nun überprüfen wir Gleichung (6.3.7).

$$\begin{aligned}
m_{\mathcal{H}_R}&(1 \otimes v^i \otimes a^j_k \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(1 \otimes v^i \otimes a^j_k \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes v^i \otimes a^j_p \otimes a^p_k \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes a^j_p \otimes v^i \otimes a^p_k \otimes 1)\\
&\overset{(6.3.2)}{=} (m \otimes m)(1 \otimes a^j_p \otimes \widetilde{R}^{ip}_{lk} v^l \otimes 1)\\
&= \widetilde{R}^{ip}_{lk} a^j_p \otimes v^l.
\end{aligned}$$

Für Gleichung (6.3.8) gilt

$$\begin{aligned}
m_{\mathcal{H}_R}&(1 \otimes v^i \otimes b^j_k \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(1 \otimes v^i \otimes b^j_k \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes v^i \otimes b^p_k \otimes b^j_p \otimes 1)\\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\alpha} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes b^p_k \otimes v^i \otimes b^j_p \otimes 1)\\
&\overset{(6.3.2)}{=} (m \otimes m)(1 \otimes b^p_k \otimes (R^{-1})^{ji}_{pl} v^l \otimes 1)\\
&= (R^{-1})^{ji}_{pl} b^p_k \otimes v^l.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Komultiplikation aus Satz 3.2.12. Für Gleichung (6.3.9) gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{H}_R}(a^i_j \otimes 1) &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id})\\
&\quad \circ (\Delta \otimes \Delta)(a^i_j \otimes 1)\\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(a^i_k \otimes a^k_j \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(a^i_k \otimes a^k_j \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id})(a^i_k \otimes 1 \otimes a^k_j \otimes 1 \otimes 1) \\
&= a^i_k \otimes 1 \otimes a^k_j \otimes 1
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun Gleichung (6.3.10).

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{H}_R}(b^i_j \otimes 1) &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}) \\
&\circ (\Delta \otimes \Delta)(b^i_j \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad (b^k_j \otimes b^i_k \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(b^k_j \otimes b^i_k \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id})(b^k_j \otimes 1 \otimes b^i_k \otimes 1 \otimes 1) \\
&= b^k_j \otimes 1 \otimes b^i_k \otimes 1
\end{aligned}
$$

Wir erinnern daran, dass$\Delta_{\mathcal{V}(R)}(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ und $\Delta_{\mathcal{V}(R)}(v^i) = v^j \otimes 1 + 1 \otimes v^i$ gilt. Damit erhalten wir für Gleichung (6.3.11)

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{H}_R}(1 \otimes x_i) &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}) \\
&\circ (\Delta \otimes \Delta)(1 \otimes x_i) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \underbrace{(1 \otimes 1 \otimes (x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i))}_{1 \otimes 1 \otimes x_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_i} \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad (1 \otimes 1 \otimes \overline{\gamma}(x_i) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \overline{\gamma}(1) \otimes x_i) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad (1 \otimes 1 \otimes x_j \otimes a^j_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_i) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x_j \otimes 1 \otimes a^j_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_i) \\
&= (1 \otimes x_j \otimes a^j_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_i)
\end{aligned}
$$

und für Gleichung (6.3.12)

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{H}_R}(1 \otimes v^i) &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}) \\
&\circ (\Delta \otimes \Delta)(1 \otimes v^i) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \overline{\gamma} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad (1 \otimes 1 \otimes v^i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v^i)
\end{aligned}
$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$(1 \otimes 1 \otimes \overline{\gamma}(v^i) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \overline{\gamma}(1) \otimes v^i)$$
$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$$
$$(1 \otimes 1 \otimes v^j \otimes b_i^j \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v^i)$$
$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (1 \otimes v^j \otimes 1 \otimes b_i^j \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v^i)$$
$$= (1 \otimes v^j \otimes b_i^j \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v^i)$$

Für die Koeins gilt $\delta_{\mathcal{H}_R} = \delta_{\mathcal{A}} \otimes \delta_{\mathcal{B}}$, d. h. wir erhalten für Gleichung (6.3.13)

$$\delta_{\mathcal{H}_R}(a_j^i \otimes 1) = \delta_{\mathcal{A}}(a_j^i) \otimes \delta_{\mathcal{B}}(1) = \delta_j^i \otimes 1_{\mathbb{C}},$$
$$\delta_{\mathcal{H}_R}(b_j^i \otimes 1) = \delta_{\mathcal{A}}(b_j^i) \otimes \delta_{\mathcal{B}}(1) = \delta_j^i \otimes 1_{\mathbb{C}},$$

und für Gleichung (6.3.14)

$$\delta_{\mathcal{H}_R}(1 \otimes x_i) = \delta_{\mathcal{A}}(1) \otimes \delta_{\mathcal{B}}(x_i) = 1_{\mathbb{C}} \otimes 0,$$
$$\delta_{\mathcal{H}_R}(1 \otimes v^i) = \delta_{\mathcal{A}}(1) \otimes \delta_{\mathcal{B}}(v^i) = 1_{\mathbb{C}} \otimes 0.$$

Somit ist der Beweis vollständig. □

Kapitel 7

Realisierung von Quanten-Lévy-Prozessen auf braided $*$-Bialgebren

In diesem Kapitel wollen wir Brownsche Bewegung auf unseren Beispielen aus Kapitel 6 betrachten und zeigen, dass es immer einen Prozess auf diesen gibt, der als Brownsche Bewegung aufgefasst werden kann. Diese Prozesse können als multidimensionale Variante der Azéma-Martingale aufgefasst werden. Im eindimensionalen Fall existiert nur die R-Matrix $R = (q)$ für $q \neq 0$ und wir erhalten den klassischen Azéma-Prozess, siehe z. B. [Sch91]. Für höhere Dimensionen gibt es verschiedene Möglichkeiten die R-Matrizen zu wählen. Eine Klassifizierung für eine bestimmt Art von R-Matrizen ist in [FSS03, Chapter 7] zu finden.

7.1 Brownsche Bewegung auf braided $*$-Bialgebren

Definition 7.1.1 ([Sch93, Section 5.1], [FSS03, Def. 6.1]) *Sei $\mathcal{B}$ eine braided Bialgebra. Ein lineares Funktional $\phi\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ heißt **quadratisch**, wenn für alle $a, b, c \in \ker \delta_{\mathcal{B}}$*

$$\phi(abc) = 0$$

*gilt. Ein Lévy-Prozess mit quadratischem Generator heißt **Brownsche Bewegung**.*

Wir betrachten nun eine fixierte bi-invertible R-Matrix R von reellem Typ und die in Abschnitt 6 definierte $*$-Bialgebra $\mathcal{V}(R)$.

Lemma 7.1.2 *Sei $L\colon \mathcal{V}(R) \to \mathbb{C}$ definiert durch*

$$L(y) = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{für } y = x_i v^j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Funktional L ist quadratisch, Ψ^{-1}-invariant, hermitesch und bedingt positiv.

Beweis: Quadratisch: Wegen Definition (6.2.7) gilt $\ker \delta_{\mathcal{B}} = \mathcal{V}(R) \setminus \langle 1_{\mathcal{V}(R)} \rangle$. Angenommen L ist nicht quadratisch, d. h. es existieren y_1, y_2 und $y_3 \in \ker \delta_{\mathcal{B}}$, sodass $L(y_1 y_2 y_3) \neq 0$. Nach Definition gilt $L(y) \neq 0$ nur für $y = x_i v^i$. Also muss entweder $y_1 \in \langle 1_{\mathcal{V}(R)} \rangle$ oder $y_2 \in \langle 1_{\mathcal{V}(R)} \rangle$ oder $y_3 \in \langle 1_{\mathcal{V}(R)} \rangle$ gelten. Da aber $\langle 1_{\mathcal{V}(R)} \rangle \nsubseteq \ker \delta$ erhalten wir einen Widerspruch und somit ist L quadratisch. Ψ^{-1}-invariant Wir müssen zeigen, dass $(\mathrm{id} \otimes L) \circ \Psi = \Psi \circ (L \otimes \mathrm{id})$ gilt. Zunächst gilt

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{id}\otimes L)\circ\Psi(x_iv^j\otimes x_k) &= (\mathrm{id}\otimes L)\circ\Psi\circ(m\otimes\mathrm{id})(x_i\otimes v^j\otimes x_k)\\
&= (\mathrm{id}\otimes L)\circ(\mathrm{id}\otimes m)\circ(\Psi\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\Psi)(x_i\otimes v^j\otimes x_k)\\
&= (\mathrm{id}\otimes L)\circ(\mathrm{id}\otimes m)\circ(\Psi\otimes\mathrm{id})\Big(x_i\otimes\tilde{R}^{jq}_{pk}x_q\otimes v^p\Big)\\
&= (\mathrm{id}\otimes L)\circ(\mathrm{id}\otimes m)\Big(\tilde{R}^{jq}_{pk}R^{rs}_{iq}x_s\otimes x_r\otimes v^p\Big)\\
&= R^{jq}_{pk}\tilde{R}^{rs}_{iq}x_s\otimes\underbrace{L(x_rv^p)}_{=\delta^p_r}.
\end{aligned}
$$

Sei nun also $r=p$, dann gilt

$$
\tilde{R}^{jq}_{pk}R^{ps}_{iq}x_s=\delta^j_i\delta^s_kx_s=x_k\otimes\delta^i_j=\Psi(\underbrace{L(x_iv^j)}_{=\delta^i_j}\otimes x_k)=\Psi\circ(L\otimes\mathrm{id})(x_iv^j\otimes x_k).
$$

Analog betrachten wir $x_iv_j\otimes v^k$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{id}\otimes L)\circ\Psi(x_iv_j\otimes v^k) &= (\mathrm{id}\otimes L)\circ\Psi\circ(m\otimes\mathrm{id})(x_i\otimes v^j\otimes v^k)\\
&= (\mathrm{id}\otimes L)\circ(\mathrm{id}\otimes m)\circ(\Psi\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\Psi)(x_i\otimes v^j\otimes v^k)\\
&= (\mathrm{id}\otimes L)\circ(\mathrm{id}\otimes m)\circ(\Psi\otimes\mathrm{id})\Big(x_i\otimes(R^{-1})^{kj}_{pq}v^p\otimes v^q\Big)\\
&= (\mathrm{id}\otimes L)\circ(\mathrm{id}\otimes m)\Big((R^{-1})^{kj}_{pq}R^{ps}_{ri}v^r\otimes x_s\otimes v^q\Big)\\
&= (R^{-1})^{kj}_{pq}R^{ps}_{ri}v^r\otimes\underbrace{L(x_sv^q)}_{=\delta^q_s}.
\end{aligned}
$$

Sei $q=s$, dann gilt

$$
(R^{-1})^{kj}_{pq}R^{ps}_{ri}v^r=\delta^k_r\delta^j_iv^r=v^k\otimes\delta^j_i=\Psi(\delta^j_i\otimes v^k)=\Psi(L(x_iv^j)\otimes v^k)=(L\otimes\mathrm{id})(x_iv^j\otimes v^k).
$$

Hermitesch: Es gilt $y^*=x_iv^i$ genau dann, wenn

$$
y=(y^*)^*=(x_iv^i)^*=(v^i)^*(x_i)^*=x_iv_i
$$

gilt. Für $y^*\neq x_iv^i$ gilt also

$$
L(y^*)=0=\overline{L(y)}
$$

und für $y^*=x_iv^i$ gilt

$$
L\big((x_iv^i)^*\big)=L(x_iv^i)=\delta_{ij}=\overline{\delta_{ij}}=\overline{L(x_iv^i)}
$$

Bedingt positiv: Für alle $y\neq v^i$ gilt $L(y^*)=0$. Für $y=v^i$ erhalten wir $L\big((v^i)^*v^i\big)=L(x_iv^i)=\delta^i_i=1\geq 0$ und somit ist L bedingt positiv. □

Wir wollen nun Konstruktion 2 aus Abschnitt 4.3 verwenden, um das für die Realisierung benötigte Schürmann-Tripel zu bestimmen. Der Prä-Hilbertraum $P^{\mathcal{V}(R)}_{\mathrm{II}}:=\mathcal{V}(R)/\mathcal{N}$ ist gegeben durch das Bild von η_{II}, wobei

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{II}} \colon \mathcal{V}(R) &\to \mathcal{V}(R)/\mathcal{N} \\ b &\mapsto b + \mathcal{N} \end{aligned}$$

mit $\mathcal{N} := \{\, b \in \mathcal{V}(R) \mid \langle b, b\rangle_{\mathcal{V}(R)} = 0 \,\}$.

Lemma 7.1.3 $(\eta_{\mathrm{II}}(v^i))_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *ist eine Orthonormalbasis von* $P_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}(R)} := \mathcal{V}(R)/\mathcal{N}$.

Beweis: Seien $y_1 := y_{i_1} \dots y_{i_p}$, $y_2 := y_{j_1} \dots y_{i_s}$ mit $p, s \geq 0$ Wörter über dem Alphabet $X := \{x_1, \dots, x_n, v^1, \dots, v^n\}$, wobei $v^i = (x_i)^*$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt wegen Definition 4.2.5

$$\langle \eta_{\mathrm{II}}(y_1), \eta_{\mathrm{II}}(y_2)\rangle_{P_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}(R)}} = \underbrace{L\big((y_1)^*(y_2)\big)}_{=:i)} - \underbrace{\overline{L(y_1)}\delta(y_2)}_{=:ii)} - \underbrace{\overline{\delta(y_1)}L(y_2)}_{=:iii)}.$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\eta_{\mathrm{II}}(y1)\begin{cases} \neq 0, & \text{für } y_1 = v^j, \\ = 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Dafür betrachten wir die folgende Fallunterscheidung.

- Sei $(y_1)^* = x_i$. In diesem Fall ist Summand $ii)$ gleich 0, da $\overline{L(v^i)} = 0$ wegen Definition von L gilt. Der dritte Summand ist ebenfalls 0, da per Definition der Koeins in $\mathcal{V}(R)$ die Gleichung $\overline{\delta(y_1)} = 0$ für $y_1 \notin \langle 1_{\mathcal{V}(R)}$ gilt. Somit gilt für $(y_1)^* = x_i$

$$\begin{aligned} \langle \eta_{\mathrm{II}}(v^i), \eta_{\mathrm{II}}(y_1)\rangle^{P_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}(R)}} &= L\big((v^i)^* y_1\big) \\ &= L\big(x_i \cdot y_1\big) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y_1 = v^i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

- Sei nun $(y_1)^* \neq x_i$, d. h. es gilt $p = 0$ oder $p = 1$ (und somit $(y_1)^* = v^i$) oder $p \geq 2$.
  - Wir beginnen mit $p = 0$, d. h. es gilt $y_1 = 1_{\mathcal{V}(R)}$. Der zweite Summand ist gleich 0, da $L(1_{\mathcal{V}}(R)) = 0$ gilt. Summand $i)$ ist gerade dann ungleich 0, wenn $y_1 = x_i v^i = 1$ gilt. Ebenso liefert der dritte Summand nur in diesem Fall einen Beitrag und ist gerade gleich dem Negativen des ersten Summanden. Somit ist für $p = 0$ der gesamte Ausdruck gleich 0.
  - Wir betrachten nun den Fall $p = 1$. Der erste Summand verschwindet, da $(y_1)^* = v^i$ gilt und somit $L(v^i \cdot y_2) = 0$ ist. Für den Summanden $ii)$ gilt erneut $\overline{L(x_i)} = 0$ nach Definition von L. Der letzte Summand verschwindet erneut wegen der Definition der Koeins, da $\delta(v^i) = 0$ gilt.
  - Zuletzt betrachten wir den Fall $p \geq 2$. In diesem Fall kann der Ausdruck nur ungleich 0 sein, wenn das Argument von L die Länge 2 hat, d. h. wenn $(y_1)^* = x_i v^j$ und $y_2 = 1_{\mathcal{V}(R)}$ gilt. In diesem Fall gilt für den ersten Summanden $L(x_i v^i) = 1$ und für den zweiten Summanden $\overline{L(x_i v^j)}\delta(1_{\mathcal{V}(R)}) = 1$. Der dritte Summand verschwindet, da erneut $\delta(v^i) = 0$ per Definition gilt. Somit verschwindet erneut der gesamte Ausdruck.

Insgesamt hat also das Skalarprodukt den Wert 1 für $y_1 = y_2 = 1$ und ist in allen anderen Fällen gleich 0 und somit bildet $(\eta(v^i))_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Orthonormalbasis von $P_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}(R)}$. $\square$

Es gilt

$$\eta_{\mathrm{II}}(v^i) \overset{(4.3.2)}{=} (v^i - \underbrace{\delta(v^i)}_{=0} \cdot 1) + \mathcal{N} = v^i + \mathcal{N}$$

und somit insgesamt

$$\eta_{\mathrm{II}}(y_1) = \begin{cases} v^i + \mathcal{N}, & \text{für } y_1 = v^i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.1.1}$$

Nun wollen wir betrachten, wie die $*$-Darstellung ρ_{II} aussieht. Da $\rho_{\mathrm{II}}(b)$ für jedes $b \in \mathcal{V}(R)$ eine lineare Abbildung ist, genügt es die Basisvektoren $\eta_{\mathrm{II}}(v^i)$ zu betrachten. Da η_{II} ein ρ_{II}-Kozyklus ist, gilt

$$\rho_{\mathrm{II}}(x_i)\eta(v^j) = \underbrace{\eta_{\mathrm{II}}(x_i v^j)}_{\overset{(7.1.1)}{=} 0} - \underbrace{\eta_{\mathrm{II}}(x_i)}_{\overset{(7.1.1)}{=} 0} \delta(v^j) = 0$$

und

$$\rho(v^i)\eta_{\mathrm{II}}(v^j) = \underbrace{\eta_{\mathrm{II}}(v^i v^j)}_{\overset{(7.1.1)}{=} 0} - \eta_{\mathrm{II}}(v^i) \underbrace{\delta(v^j)}_{\overset{(7.1.1)}{=} 0} = 0.$$

Also gilt insgesamt

$$\rho_{\mathrm{II}} \equiv 0,$$

d. h. ρ_{II} ist die Nulldarstellung. Sei $\overline{\alpha} = (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{r}) \circ (\overline{\gamma} \otimes \mathrm{id})$ die rechte Wirkung aus Abschnitt 3.2. Man kann zeigen, dass L invariant bzgl. $\overline{\alpha}$ ist. Diesen rein technischen Beweis wollen wir an dieser Stelle jedoch nicht ausführen. Insgesamt haben wir also das Schürmann-Tripel $(\eta_{\mathrm{II}}, \rho_{\mathrm{II}}, L)$ mit dem zugehörigen Prä-Hilbertraum $P_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}(R)} := \mathcal{V}(R)/\mathcal{N}$ mit Orthonormalbasis $(\eta_{\mathrm{II}}(v^i))_{i \in \{1,\dots,n\}}$, das gegeben ist durch

- den $\overline{\alpha}$-invarianten Generator

$$L(y) = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{für } y = x_i v^j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- den ρ_{II}-Kozyklus η_{II} mit

$$\eta_{\mathrm{II}}(y) = \begin{cases} v^i + \mathcal{N}, & \text{für } y = v^i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- und die $*$-Darstellung

$$\rho_{\mathrm{II}} \equiv 0.$$

Somit sind alle Voraussetzungen von Satz 5.3.8 erfüllt und wir können das Schürmann-Tripel $(\rho^{\mathcal{H}_R}, \eta^{\mathcal{H}_R}, L^{\mathcal{H}_R})$ für die rechte Symmetrisierung $\mathcal{H}_R \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bestimmen. Nach Konstruktion 2 aus 4.3 erhalten wir

$$P^{\mathcal{H}_R} = (\mathcal{A}(R) \otimes \mathcal{V}(R))/\mathcal{N}^{\mathcal{H}_R}$$

mit

$$\mathcal{N}^{\mathcal{H}_R} := \{a \otimes b \mid L^{\mathcal{H}_R}(a \otimes b - \delta_{\mathcal{H}_R}(a \otimes b)1_{\mathcal{H}_R})^*(a \otimes b - \delta_{\mathcal{H}_R}(a \otimes b)1_{\mathcal{H}_R}) = 0\}$$

als zugrundeliegenden Prä-Hilbertraum. Mit Satz 5.3.9 erhalten wir $\check{S}_R(\eta(v^i)) = \eta^{\mathcal{H}_R}(1_\mathcal{A} \otimes v^i)$ als Basis des Prä-Hilbertraums $P^{\mathcal{H}_R}$. Der ρ-Kozyklus $\eta^{\mathcal{H}_R} \colon \mathcal{H}_R \to P^{\mathcal{H}_R}$ ist gegeben durch

$$\eta^{\mathcal{H}_R}(1 \otimes y) = \begin{cases} \eta(1 \otimes y) = v^i + \mathcal{N}, & \text{für } y = v^i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.1.2}$$

Nun betrachten wir die $*$-Darstellung $\rho^{\mathcal{H}_R}$ auf den Basiselementen. Dann gilt für die Erzeugenden $1_\mathcal{A} \otimes b$ die Gleichung

$$\rho^{\mathcal{H}_R}(1_\mathcal{A} \otimes b)\eta^{\mathcal{H}_R}(1_\mathcal{A} \otimes v^i) = \check{S}_R(\eta(b \cdot v^i)) = \begin{cases} v^i + \mathcal{N}, & \text{für } b \in \langle 1_\mathcal{B} \rangle \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wegen Satz 5.3.4 gilt für erzeugende Elemente der Form $a \otimes 1_\mathcal{B}$ zunächst

$$\rho^{\mathcal{H}_R}(a \otimes 1_\mathcal{B})\eta^{\mathcal{H}_R}(1_\mathcal{A} \otimes v^i) = \check{S}_R(\eta(\overline{\alpha}(v^i \otimes a_{(1)}))) \tag{7.1.3}$$

Wir betrachten $a = a^i_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho^{\mathcal{H}_R}(a^i_j \otimes 1_\mathcal{B})\eta^{\mathcal{H}_R}(1_\mathcal{A} \otimes v^k) &= \check{S}_R(\eta(\underbrace{\overline{\alpha}(v^k \otimes a^i_j)}_{=\widetilde{R}^{ki}_{pj}v^p})) \\ &= \widetilde{R}^{ki}_{pj}\check{S}_R(\eta(v^p)) \\ &= \widetilde{R}^{ki}_{pj}\eta^{\mathcal{H}_R}(1_\mathcal{A} \otimes v^p) \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

Analog betrachten wir nun $a = b^i_j$. Es gilt

$$\begin{aligned} \rho^{\mathcal{H}_R}(b^i_j \otimes 1_\mathcal{B})\eta^{\mathcal{H}_R}(1_\mathcal{A} \otimes v^k) &= \check{S}_R(\eta(\underbrace{\overline{\alpha}(v^k \otimes b^j_i)}_{=(R^{-1})^{ik}_{jp}v^p})) \\ &= \check{S}_R((R^{-1})^{ik}_{jp}\eta(v^p)) \\ &= (R^{-1})^{ik}_{jp}\check{S}_R(\eta(v^p)) \\ &= (R^{-1})^{ik}_{jp}\eta^{\mathcal{H}_R}(1_\mathcal{A} \otimes v^p) \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

Der Generator ist gegeben durch

$$L^{\mathcal{H}_R}(a \otimes b) = \begin{cases} \delta_{ij}\delta_{kl}, & \text{für } a = a^i_j \text{ oder } b^i_j \text{ und } b = x_k v^l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \tag{7.1.6}$$

Insgesamt haben wir also eine $*$-Bialgebra $\mathcal{H}_R$ (im klassischen Sinne) und ein Schürmann-Tripel $(\eta^{\mathcal{H}_R}, \rho^{\mathcal{H}_R}, L^{\mathcal{H}_R})$ und können damit mit der klassischen Theorie aus Kapitel 4 die braided Quanten-Lévy-Prozesse realisieren. Wir erhalten mit Hilfe von Satz 4.4.1 die folgende Realisierung der Brownschen Bewegung.

Satz 7.1.4 *Die Realisierung von $j^{\mathcal{H}_R}_{st}$ mit Schürmann-Tripel $(\eta^{\mathcal{H}_R}, \rho^{\mathcal{H}_R}, L^{\mathcal{H}_R})$ ist auf dem Fockraum $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+, K))$ durch die eindeutige Lösung der quantenstochastischen Differential-*

gleichungen

$$\mathrm{d}X_i = \mathrm{d}X_j \cdot \mathrm{d}\Lambda\Big((\widetilde{R}^{kj}_{lp} - \delta^j_p\delta^k_l)_{1\le k,l\le n}\Big) + \mathrm{d}A_i$$

$$\mathrm{d}X^*_i = \mathrm{d}X^*_j \cdot \mathrm{d}\Lambda\Big(\Big((R^{-1})^{jk}_{ip} - \delta^j_i\delta^k_p\Big)_{1\le k,p\le n}\Big) + \mathrm{d}A^*_i$$

$$\mathrm{d}A^i_j = A^i_k \cdot \mathrm{d}\Lambda\Big((\widetilde{R}^{lk}_{pj} - \delta^k_j\delta^l_p)_{1\le l,p\le n}\Big)$$

$$\mathrm{d}B^i_j = A^i_k \cdot \mathrm{d}\Lambda\Big(((R^{-1})^{il}_{kp} - \delta^i_k\delta^l_p)_{1\le l,p\le n}\Big)$$

gegeben, wobei

$$\mathrm{d}X_i \coloneqq \mathrm{d}j^{\mathcal{H}_R}_{st}(1\otimes x_i)$$

$$\mathrm{d}X^*_i \coloneqq \mathrm{d}j^{\mathcal{H}_R}_{st}(1\otimes v_i)$$

$$\mathrm{d}A^i_j \coloneqq \mathrm{d}j^{\mathcal{H}_R}_{st}(a^i_j\otimes 1)$$

$$\mathrm{d}B^i_j \coloneqq \mathrm{d}j^{\mathcal{H}_R}_{st}(b^i_j\otimes 1).$$

Beweis: Wir betrachten zunächst die folgenden Hilfsrechnungen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}I_t(a^j_p\otimes 1) &= \mathrm{d}\Lambda\Big(\underbrace{\rho^{\mathcal{H}_R}(a^j_p\otimes 1)}_{\overset{(7.1.4)}{=}(\widetilde{R}^{kj}_{lp})_{1\le k,l\le n}} - \underbrace{1\cdot\delta(a^j_p\otimes 1)}_{\overset{(6.3.13)}{=}(\delta^j_p\delta^k_l)_{1\le k,l\le n}}\Big) + \mathrm{d}A^*\circ\underbrace{\eta^{\mathcal{H}_R}(a^j_p\otimes 1)}_{\overset{(7.1.2)}{=}0} \\
&\quad + \mathrm{d}A\circ\underbrace{\eta^{\mathcal{H}_R}\big((a^j_p\otimes 1)^*\big)}_{\overset{(7.1.2)}{=}0} + \underbrace{L^{\mathcal{H}_R}(a^j_p\otimes 1)}_{\overset{(7.1.6)}{=}0}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}\Lambda\Big((\widetilde{R}^{kj}_{lp} - \delta^j_p\delta^k_l)_{1\le k,l\le n}\Big) \qquad (7.1.7)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}I_t(1\otimes x_i) &= \mathrm{d}\Lambda\Big(\underbrace{\rho^{\mathcal{H}_R}(1\otimes x_i)}_{\overset{(7.1.3)}{=}0} - \underbrace{1\cdot\delta(1\otimes x_i)}_{\overset{(6.3.14)}{=}0}\Big) + \mathrm{d}A^*\circ\underbrace{\eta^{\mathcal{H}_R}(1\otimes x_i)}_{\overset{(7.1.2)}{=}0} \\
&\quad + \mathrm{d}A\circ\underbrace{\eta^{\mathcal{H}_R}\big((1\otimes x_i)^*\big)}_{\overset{(7.1.2)}{=}v^i} + \underbrace{L^{\mathcal{H}_R}(1\otimes x_i)}_{\overset{(7.1.6)}{=}0}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}A(v^i) \eqqcolon \mathrm{d}A_i. \qquad (7.1.8)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir nun die quantenstochastische Differentialgleichung auf den Generatoren x_i betrachten.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_i &= \mathrm{d}j^{\mathcal{H}_R}_{st}(1\otimes x_i) = (j^{\mathcal{H}_R}_{st}\star \mathrm{d}I_t)(1\otimes x_i) \\
&= m\circ(j^{\mathcal{H}_R}_{st}\otimes \mathrm{d}I_t)\circ\Delta_{\mathcal{H}_R}(1\otimes x_i) \\
&= m\circ(j^{\mathcal{H}_R}_{st}\otimes \mathrm{d}I_t)\Big(1\otimes x_j\otimes a^j_p\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes 1\otimes x_i\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= j_{st}^{\mathcal{H}_R}(1\otimes x_j)\cdot \mathrm{d}I_t(a_p^j\otimes 1) + j_{st}^{\mathcal{H}_R}(1\otimes 1)\cdot \mathrm{d}I_t(1\otimes x_i)\\
&\overset{(7.1.7)}{\underset{(7.1.8)}{=}} \mathrm{d}X_j\cdot \mathrm{d}\Lambda\Big((\widetilde{R}_{lp}^{kj}-\delta_p^j\delta_l^k)_{1\le k,l\le n}\Big)+\mathrm{d}A_i.
\end{aligned}$$

Analog betrachten wir die folgenden Hilfsrechnungen. Es gelten

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}I_t(b_i^j\otimes 1) &= \mathrm{d}\Lambda\Big(\underbrace{\rho^{\mathcal{H}_R}(b_i^j\otimes 1)}_{\overset{(7.1.5)}{=}\big((R^{-1})_{ip}^{jk}\big)_{1\le k,p\le n}} - \underbrace{1\cdot\delta(b_i^j\otimes 1)}_{\overset{(6.3.13)}{=}(\delta_i^j\delta_p^k)_{1\le k,p\le n}}\Big) + \mathrm{d}A^*\circ\underbrace{\eta^{\mathcal{H}_R}(b_i^j\otimes 1)}_{\overset{(7.1.2)}{=}0}\\
&\quad + \mathrm{d}A\circ\underbrace{\eta^{\mathcal{H}_R}((b_i^j\otimes 1)^*)}_{\overset{(7.1.2)}{=}0} + \underbrace{L^{\mathcal{H}_R}(b_i^j\otimes 1)}_{\overset{(7.1.6)}{=}0}\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{d}\Lambda\Big(((R^{-1})_{ip}^{jk}-\delta_i^j\delta_p^k)_{1\le k,p\le n}\Big) \qquad (7.1.9)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}I_t(1\otimes v_i) &= \mathrm{d}\Lambda\Big(\underbrace{\rho^{\mathcal{H}_R}(1\otimes v_i)}_{\overset{(7.1.3)}{=}0} - \underbrace{1\cdot\delta(1\otimes v_i)}_{\overset{(6.3.14)}{=}0}\Big) + \mathrm{d}A^*\circ\underbrace{\eta^{\mathcal{H}_R}(1\otimes v_i)}_{\overset{(7.1.2)}{=}v^i}\\
&\quad + \mathrm{d}A\circ\underbrace{\eta^{\mathcal{H}_R}((1\otimes v_i)^*)}_{\overset{(7.1.2)}{=}0} + \underbrace{L^{\mathcal{H}_R}(1\otimes x_i)}_{\overset{(7.1.6)}{=}0}\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{d}A^*(v^i) =: \mathrm{d}A_i^* \qquad (7.1.10)
\end{aligned}$$

Wir bekommen erneut mit Hilfe dieser Gleichungen die quantenstochastischen Differentialgleichungen für den Generator $v^i=(x_i)^*$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_i^* &= \mathrm{d}j_{st}^{\mathcal{H}_R}(1\otimes v_i)\\
&= (j_{st}^{\mathcal{H}_R}\star \mathrm{d}I_t)(1\otimes v_i)\\
&= m\circ(j_{st}^{\mathcal{H}_R}\otimes \mathrm{d}I_t)\circ\Delta_{\mathcal{H}_R}(1\otimes v_i)\\
&= m\circ(j_{st}^{\mathcal{H}_R}\otimes \mathrm{d}I_t)\Big(1\otimes v^j\otimes b_i^j\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes 1\otimes v^i\Big)\\
&= j_{st}^{\mathcal{H}_R}(1\otimes v^j)\cdot \mathrm{d}I_t(b_i^j\otimes 1) + j_{st}^{\mathcal{H}_R}(1\otimes 1)\cdot \mathrm{d}I_t(1\otimes v^i)\\
&\overset{(7.1.9)}{\underset{(7.1.10)}{=}} \mathrm{d}X_j^*\cdot \mathrm{d}\Lambda\Big(\big((R^{-1})_{ip}^{jk}-\delta_i^j\delta_p^k\big)_{1\le k,p\le n}\Big)+\mathrm{d}A_i^*
\end{aligned}$$

Aus den bereits durchgeführten Hilfsrechnungen folgt nun direkt die folgende Differentialgleichungen für den Generator a_j^i

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_j^i &= \mathrm{d}j_{st}^{\mathcal{H}_R}(a_j^i\otimes 1)\\
&= (j_{st}^{\mathcal{H}_R}\star \mathrm{d}I_t)(a_j^i\otimes 1)\\
&= m\circ(j_{st}^{\mathcal{H}_R}\otimes \mathrm{d}I_t)\circ\Delta_{\mathcal{H}_R}(a_j^i\otimes 1)\\
&= m\circ(j_{st}^{\mathcal{H}_R}\otimes \mathrm{d}I_t)(a_k^i\otimes 1\otimes a_j^k\otimes 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= j_{st}^{\mathcal{H}_R}(a_k^i \otimes 1) \cdot \mathrm{d}I_t(a_j^k \otimes 1) \\
&\overset{(7.1.7)}{\underset{(7.1.8)}{=}} A_k^i \cdot \mathrm{d}\Lambda\Big((\widetilde{R}_{jp}^{kl} - \delta_j^k \delta_p^l)_{1 \le l,p \le n}\Big)
\end{aligned}
$$

und die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}B_j^i &= \mathrm{d}j_{st}^{\mathcal{H}_R}(b_j^i \otimes 1) \\
&= (j_{st}^{\mathcal{H}_R} \star \mathrm{d}I_t)(b_j^i \otimes 1) \\
&= m \circ (j_{st}^{\mathcal{H}_R} \otimes \mathrm{d}I_t) \circ \Delta_{\mathcal{H}_R}(b_j^i \otimes 1) \\
&= m \circ (j_{st}^{\mathcal{H}_R} \otimes \mathrm{d}I_t)(b_j^k \otimes 1 \otimes b_k^i \otimes 1) \\
&= j_{st}^{\mathcal{H}_R}(b_j^k \otimes 1) \cdot \mathrm{d}I_t(b_k^i \otimes 1) \\
&\overset{(7.1.9)}{\underset{(7.1.10)}{=}} A_k^i \cdot \mathrm{d}\Lambda\Big(((R^{-1})_{kp}^{il} - \delta_k^i \delta_p^l)_{1 \le l,p \le n}\Big)
\end{aligned}
$$

für den Generator $b_j^i = (a_i^j)^*$. $\square$

Somit haben wir eine Realisierung der Brownschen Bewegung auf der braided $*$-Bialgebra $\mathcal{V}(R)$ angegeben. Man erhält insbesondere eine Reihe von Beispielen, indem man verschiedene R-Matrizen wählt. Eine Klassifizierung für die sl_2-R-Matrix und die sl_3-R-Matrix sind in [FSS03, Chapter 7] zu finden.

Anhang A

Grundlagen

In diesem Abschnitt wollen wir die benötigten, aber inbesondere schon z. B. aus [Mal14] bekannten Grundlagen zusammentragen. Wir orientieren uns hierbei im Anhang vorwiegend an [DNR01], [Kas95] und [KS97].

A.1 Das Tensorprodukt

In diesem Abschnitt wollen wir die grundlegenden Eigenschaften des Tensorprodukts wiederholen und zusammenstellen (siehe z. B. [Wal16]), sowie zum Tensorprodukt von antilinearen Abbildungen verallgemeinern. Wir wollen zunächst das Tensorprodukt mit Hilfe der universellen Eigenschaft definieren.

Satz A.1.1 *Seien V und W Vektorräume. Dann existieren ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter Vektorraum $V \otimes W$ und eine bilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \otimes \colon V \times W &\to V \otimes W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w, \end{aligned}$$

die die universelle Eigenschaft erfüllt, d. h. für jeden Vektorraum U und jede bilineare Abbildung $\phi \colon V \times W \to U$ existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\tilde{\phi} \colon V \otimes W \to U$, sodass

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & U \\ & V \otimes W \arrow[ur, "\exists!\,\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d. h. es gilt $\phi = \tilde{\phi} \circ \otimes$ für alle $v \in V, w \in W$.

Wir nennen das Paar $(V \otimes W, \otimes)$ (kurz $V \otimes W$) **Tensorprodukt** von V und W. Das Tensorprodukt von Vektorräumen verhält sich assoziativ, d. h. es existiert ein eindeutiger Isomorphismus

$$\begin{aligned} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) &\to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \\ v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) &\mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{aligned}$$

wobei $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_3$. Außerdem definieren wir rekursiv das Tensorprodukt mehrerer Vektorräume durch

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \coloneqq (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n.$$

Seien nun $f_1 \colon V_1 \to W_1$ und $f_2 \colon V_2 \to W_2$ lineare Abbildungen. Dann definieren wir das Tensorprodukt

$$f_1 \otimes f_2 \colon V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$$

von linearen Abbildungen als die durch Satz A.1.1 eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$(f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2) \coloneqq f_1(v_1) \otimes f_2(v_2).$$

Eine Abbildung die wir immer wieder benötigen werden, ist der sogenannte **Flipoperator**. Dies ist die durch Satz A.1.1 eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_{V,W} \colon V \otimes W &\to W \otimes V \\ v \otimes w &\mapsto w \otimes v, \end{aligned}$$

wobei $v \in V$ und $w \in W$ gilt.

Nun wollen wir das Tensorprodukt zwischen antilinearen Abbildungen definieren. Hierfür benötigen wir zunächst den Begriff des konjugierten Vektorraums. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann ist $\overline{V} \coloneqq \{\overline{v} \mid v \in V\}$ mit

$$\begin{aligned} \overline{v + w} &\coloneqq \overline{v} + \overline{w} \\ \lambda \overline{v} &\coloneqq \overline{\overline{\lambda} v} \end{aligned}$$

ein Vektorraum, genannt **konjugierter Vektorraum**. Mit Hilfe dieses Vektorraums zeigen wir nun, dass es ebenfalls möglich ist, das Tensorprodukt von antilinearen Abbildungen zu definieren.

Satz A.1.2 *Seien $\varphi_1 \colon V_1 \to W_1$ und $\varphi_2 \colon V_2 \to W_2$ antilineare Abbildungen. Dann existiert eine eindeutige antilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_1 \otimes \varphi_2 \colon V_1 \otimes V_2 &\to W_1 \otimes W_2 \\ (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v \otimes w) &= \varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w). \end{aligned}$$

Beweis: <u>Existenz:</u> Seien φ_1, φ_2 antilinear. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi \colon V_1 \times V_2 &\to \overline{W_1 \otimes W_2} \\ \Phi(v, w) &= \overline{\varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w)} \end{aligned}$$

bilinear, da

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda v + v', w) &= \overline{\varphi_1(\lambda v + v') \otimes \varphi_2(w)} \\ &= \overline{(\overline{\lambda}\varphi_1(v) + \varphi_2(v')) \otimes \varphi_2(w)} \\ &= \overline{\overline{\lambda}\varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w) + \varphi_1(v') \otimes \varphi_2(w)} \\ &= \overline{\overline{\lambda}\varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w)} + \overline{\varphi_1(v') \otimes \varphi_2(w)} \\ &= \lambda\overline{\varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w)} + \overline{\varphi_1(v') \otimes \varphi_2(w)} \\ &= \lambda\Phi(v, w) + \Phi(v', w) \end{aligned}$$

gilt. Die Rechnung für die zweite Komponente verläuft analog. Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & \overline{W_1 \otimes W_2} \arrow[r, "\widehat{\tau}"] & W_1 \otimes W_2 \\
& V_1 \otimes V_2 \arrow[ur, "\overline{\varphi_1 \otimes \varphi_2}"] \arrow[urr, "\varphi_1 \otimes \varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

wobei $\widehat{\tau}$ das komplexe Konjugieren beschreibt. Durch die universelle Eigenschaft erhalten wir die eindeutige lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_1 \otimes \varphi_2} \colon V_1 \otimes V_2 &\to \overline{W_1 \otimes W_2} \\
(\overline{\varphi_1 \otimes \varphi_2})(v \otimes w) &\coloneqq \Phi(v, w).
\end{aligned}$$

Dann ist $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \coloneqq \overline{\overline{\varphi_1 \otimes \varphi_2}} \coloneqq \widehat{\tau} \circ \overline{(\varphi_1 \otimes \varphi_2)}$, antilinear und es gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v \otimes w) &= \overline{\overline{\varphi_1 \otimes \varphi_2}}(v \otimes w) \\
&= \overline{\overline{(\varphi_1 \otimes \varphi_2)}(v \otimes w)} \\
&= \overline{\overline{\varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w)}} \\
&= \varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w).
\end{aligned}$$

Da $\overline{\varphi_1 \otimes \varphi_2}$ linear ist, ist $\overline{\overline{\varphi_1 \otimes \varphi_2}}$ folglich antilinear.
Eindeutigkeit: Seien Ψ_1, Ψ_2 antilinear mit

$$\Psi_1(v \otimes w) = \varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w) = \Psi_2(v \otimes w).$$

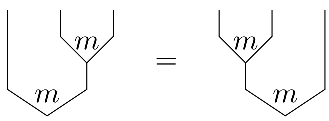
Da $\overline{\Psi_1}$ und $\overline{\Psi_2}$ linear sind und $\overline{\Psi_1}(v \otimes w) = \Phi(v, w)$, sowie $\overline{\Psi_2}(v \otimes w) = \Phi(v, w)$ gelten, folgt $\overline{\Psi_1} = \overline{\Psi_2}$ mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts. Damit ist also inbesondere auch $\Psi_1 = \Psi_2$. □

A.2 Algebren und Koalgebren

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Grundlagen zu Algebren, Koalgebren, Bi- und Hopf-Algebren, sowie ihren involutiven Varianten zusammenstellen.

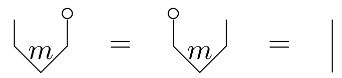
Eine **Algebra** ist ein Tripel $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$ bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{A}$, einer linearen Abbildung $m_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, genannt Multiplikation, die die Assoziativitätseigenschaft

$$m_{\mathcal{A}} \circ (m_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}) = m_{\mathcal{A}} \circ (\mathrm{id} \otimes m_{\mathcal{A}}) \tag{A.2.1}$$



erfüllt, sowie einer linearen Abbildung $\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, genannt Eins bzw. Einheit, die die Eins-Eigenschaft

$$m_{\mathcal{A}} \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}) = m_{\mathcal{A}} \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \tag{A.2.2}$$



erfüllt, wobei $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ identifiziert werden. Wir bezeichnen eine Algebra auch kurz nur mit $\mathcal{A}$. Sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Algebren, so nennen wir eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ **Algebra-Homomorphismus**, falls die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi \circ m_{\mathcal{A}_1} &= m_{\mathcal{A}_2} \circ (\varphi \otimes \varphi), \\ \varphi \circ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_1} &= \mathbb{1}_{\mathcal{A}_2} \end{aligned}$$

gelten. Eine **$*$-Algebra** $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}})$ ist eine Algebra $\mathcal{A}$ zusammen mit einer Involution genannten antilinearen, selbstinversen Abbildung $*_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \mapsto a^*$, sodass

$$*_{\mathcal{A}} \circ m_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}} \circ (*_{\mathcal{A}} \otimes *_{\mathcal{A}}) \circ \tau_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$$

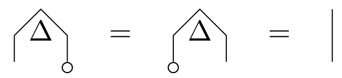
gilt, d. h. $*_{\mathcal{A}}$ ist ein Algebra-Antihomomorphismus. Für zwei $*$-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ nennen wir einen Algebra-Homomorphismus $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ **$*$-Algebra-Homomorphismus**, falls zusätzlich

$$\varphi \circ *_{\mathcal{A}_1} = *_{\mathcal{A}_2} \circ \varphi$$

gilt. Eine Algebra $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$ heißt **kommutativ**, falls $m = m \circ \tau$ gilt.

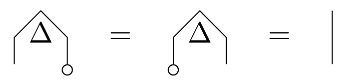
Analog ist eine **Koalgebra** ein Tripel $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \delta_{\mathcal{C}})$ bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{C}$, einer linearen Abbildung $\Delta_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$, genannt Komultiplikation, die die Koassoziativität

$$(\Delta_{\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = (\mathrm{id} \otimes \Delta_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} \tag{A.2.3}$$



erfüllt und einem linearen Funktional $\delta_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$, genannt Koeins bzw. Koeinheit, die die Koeinseigenschaft

$$(\delta_{\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = (\mathrm{id} \otimes \delta_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = \mathrm{id} \tag{A.2.4}$$



erfüllt. Sind $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Koalgebren, so nennen wir eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ **Koalgebra-Homomorphismus**, falls gilt

$$\begin{aligned} (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_{\mathcal{C}_1} &= \Delta_{\mathcal{C}_2} \circ \varphi \\ \delta_{\mathcal{C}_1} \circ \varphi &= \delta_{\mathcal{C}_2}. \end{aligned}$$

Eine **$*$-Koalgebra** $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \delta_{\mathcal{C}}, *_{\mathcal{C}})$ ist eine Koalgebra $\mathcal{C}$ zusammen mit einer Involution genannten antilinearen, selbstinversen Abbildung $*_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $a \mapsto a^*$, sodass $\Delta_{\mathcal{C}}$ ein $*$-Algebra-Homomorphismus ist, d. h. es gilt

$$\Delta_{\mathcal{C}} \circ *_{\mathcal{C}} = (*_{\mathcal{C}} \otimes *_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}}.$$

Eine Koalgebra $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \delta_{\mathcal{C}})$ heißt **kokommutativ**, wenn $\tau \circ \Delta = \Delta$ gilt. Wir verwenden in der gesamten Arbeit an geeigneten Stellen die sogenannte **Sweedler-Notation**. Wir verweisen an dieser Stelle für die Originalarbeit auf [Swe69] und für eine kurze Einführung auf [Son15, Chapter B.2]. Sei also $\mathcal{C}$ eine Koalgebra und somit $\Delta(a) \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ für $a \in \mathcal{C}$. $\Delta(a)$ ist inbesondere eine endliche Summe der Form

$$\Delta(a) = \sum_i a_{1i} \otimes a_{2i},$$

wobei a_{1i} und a_{2i} jedoch nicht eindeutig bestimmt sind. In Sweedler-Notation schreiben wir für diese Summe nun symbolisch

$$\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$

oder im summenloser Sweedler-Notation sogar

$$\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

Bemerkung A.2.1 Sei V ein Vektorraum und $f \in V' := \{f \colon V \to \mathbb{K} \mid f \text{ linear}\}$. Sei $f(x) \neq 0$. Dann gilt

$$V = \mathbb{K} \cdot 1_{\mathcal{C}} \oplus \ker f$$

(siehe z. B. [Rom05, Theorem 3.11]). Damit gilt also insbesondere für eine Koalgebra $(\mathcal{C}, \Delta, \delta)$

$$\mathcal{C} = \langle 1_{\mathcal{C}} \rangle \oplus \ker \delta_{\mathcal{C}}.$$

A.3 Bialgebren und Hopf-Algebren

Wir wollen nun Algebren und Koalgebren zu sogenannten Bialgebren und Hopf-Algebren „zusammenfügen".

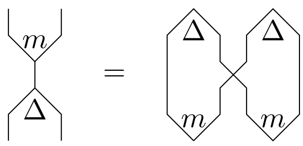
Eine **Bialgebra** ist ein Quintupel $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$, sodass $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}})$ eine Algebra ist, $(\mathcal{B}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$ eine Koalgebra ist und $\Delta_{\mathcal{B}}$ und $\delta_{\mathcal{B}}$ Algebra-Homomorphismen sind, d. h. es gelten die Gleichungen

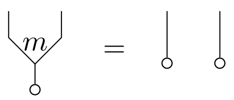
$$\Delta_{\mathcal{B}} \circ m_{\mathcal{B}} = (m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{B}}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_{\mathcal{B}} \otimes \Delta_{\mathcal{B}}) \tag{A.3.1}$$

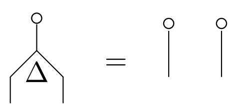
$$\delta_{\mathcal{B}} \circ m_{\mathcal{B}} = \delta_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{B}} \tag{A.3.2}$$

$$\Delta_{\mathcal{B}} \circ \mathbb{1}_{\mathcal{B}} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \tag{A.3.3}$$

$$\delta_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}$$







Wir bemerken hier für den weiteren Verlauf, dass die folgende Bedingungen äquivalent sind. (Siehe für den Beweis z. B. [Kas95, Theorem III.2.1].)

i.) $\Delta_{\mathcal{B}}$ und $\delta_{\mathcal{B}}$ sind Algebra-Homomorphismen.

ii.) $m_{\mathcal{B}}$ und $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ sind Koalgebra-Homomorphismen.

iii.) Die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "m_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{B}} \otimes \Delta_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "\Delta_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] & & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[u, "m_{\mathcal{B}} \otimes m_{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\mathbb{1}_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\mathbb{1}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "m_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "\delta_{\mathcal{B}} \otimes \delta_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\delta_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\mathbb{1}_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\delta_{\mathcal{B}}"] \\
& \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Sei nun $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$ eine Bialgebra und setze $m_{\mathcal{B}}^{op} := m_{\mathcal{B}} \circ \tau_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ und $\Delta_{\mathcal{B}}^{op} := \tau_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \circ \Delta_{\mathcal{B}}$. Dann sind auch $\mathcal{B}^{op} = (\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}^{op}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$, $\mathcal{B}^{cop} = (\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}^{op}, \delta_{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{B}^{opcop} = (\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}^{op}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}^{op}, \delta_{\mathcal{B}})$ Bialgebren. (Siehe [Kas95, Proposition III.2.3].)

Wir wollen nun Bialgebren um eine Involution $*$ zu $*$-Bialgebren erweitern.

Definition A.3.1 ([Sch93]) *Eine* ***$*$-Bialgebra*** $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}}, *_{\mathcal{B}})$ *(auch involutive Bialgebra genannt) ist eine Bialgebra $\mathcal{B}$ zusammen mit einer Involution, sodass gilt*

i.) $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, *_{\mathcal{B}})$ *ist eine $*$-Algebra,*

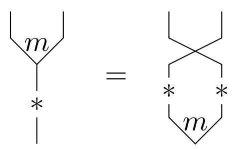
ii.) $(\mathcal{B}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$ *ist eine Koalgebra und*

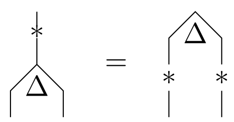
iii.) $\Delta_{\mathcal{B}}$ *ist ein $*$-Algebra-Homomorphismus.*

Wir erhalten dazu die folgende äquivalente Formulierung der Definition einer $*$-Bialgebra. Eine $*$-Bialgebra $(\mathcal{B}, m_{\mathcal{B}}, \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}}, *_{\mathcal{B}})$ ist eine Bialgebra $\mathcal{B}$ zusammen mit einer Involution, sodass die folgenden Gleichungen gelten

$$*_{\mathcal{B}} \circ m_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}} \circ (*_{\mathcal{B}} \otimes *_{\mathcal{B}}) \circ \tau_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \tag{A.3.4}$$

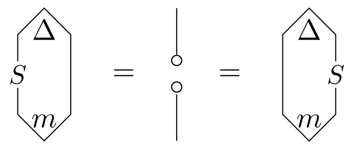
$$\Delta_{\mathcal{B}} \circ *_{\mathcal{B}} = (*_{\mathcal{B}} \otimes *_{\mathcal{B}}) \circ \Delta_{\mathcal{B}}. \tag{A.3.5}$$





Definition A.3.2 *Eine Bialgebra $\mathcal{B}$ zusammen mit einer linearen Abbildung $S\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, genannt Antipode, heißt **Hopf-Algebra**, falls*

$$m_{\mathcal{B}} \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\mathcal{B}} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \circ \delta_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}} \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta_{\mathcal{B}}$$



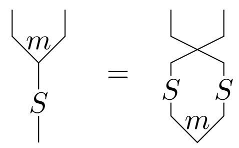
gilt, d. h. falls das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[rr, "S \otimes \mathrm{id}"] & & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[dr, "m_{\mathcal{B}}"] & \\
\mathcal{B} \arrow[ur, "\Delta_{\mathcal{B}}"] \arrow[rr, "\delta_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\Delta_{\mathcal{B}}"'] & & \mathbb{C} \arrow[rr, "\mathbb{1}_{\mathcal{B}}"] & & \mathcal{B} \\
& \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[ur, "m_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}$$

*kommutiert. Wir nennen sie **Hopf-$*$-Algebra**, falls die zugrundeliegende Bialgebra eine $*$-Bialgebra ist.*

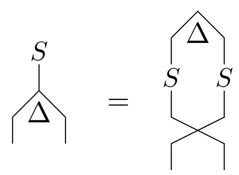
Wir wollen hier nun noch einige Eigenschaften der Antipode einer Hopf-Algebra bzw. Hopf-$*$-Algebra bemerken. Für die Beweise siehe [KS97, Chapter 1.2]. Die Antipode einer Hopf-Algebra $\mathcal{H}$ ist ein Algebra-Antihomomorphismus, d. h. es gilt

$$S \circ m_{\mathcal{H}} = m_{\mathcal{H}} \circ (S \otimes S) \circ \tau_{\mathcal{H},\mathcal{H}} \tag{A.3.6}$$



und ein Koalgebra-Antihomomorphismus, d. h. es gilt

$$\Delta_{\mathcal{H}} \circ S = \tau_{\mathcal{H},\mathcal{H}} \circ (S \otimes S) \circ \Delta_{\mathcal{H}}. \tag{A.3.7}$$



Für eine Hopf-Algebra $\mathcal{H}$ mit Antipode S sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

i.) S ist invertierbar.

ii.) $\mathcal{H}^{op}$ ist eine Hopf-Algebra mit Antipode S^{-1}.

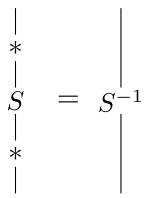
iii.) $\mathcal{H}^{cop}$ ist eine Hopf-Algebra mit Antipode S^{-1}.

Da S^{-1} eine Antipode für $\mathcal{H}^{cop}$ ist, gilt also insbesondere

$$m_{\mathcal{H}} \circ (S^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ \tau_{\mathcal{H},\mathcal{H}} \circ \Delta_{\mathcal{H}} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \circ \delta_{\mathcal{H}}$$

und S^{-1} ist ein Algebra- sowie Koalgebra-Homomorphismus. Sei $\mathcal{H}$ eine Hopf-$*$-Algebra. Dann ist die Antipode S invertierbar mit

$$S^{-1} = *_{\mathcal{H}} \circ S \circ *_{\mathcal{H}}.$$

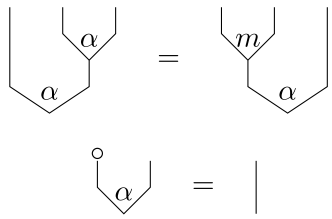


A.4 Moduln und Komoduln

Nun wollen wir die notwendigen Grundlagen zu Moduln und Komoduln wiederholen. Für eine Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir einen Vektorraum V **linker $\mathcal{A}$-Modul**, falls eine bilineare Abbildung $\alpha_V \colon \mathcal{A} \otimes V \to V$, genannt **(Links-)Wirkung**, existiert, sodass

$$\alpha_V \circ (m_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}) = \alpha_V \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha_V) \tag{A.4.1}$$

$$\alpha_V \circ (\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id} \tag{A.4.2}$$



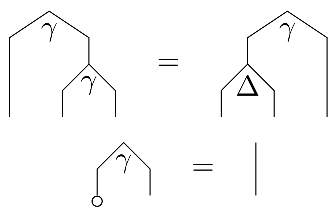
gilt. Die triviale Wirkung von einer Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $\alpha_{\mathbb{C}} = \delta \otimes \mathrm{id}$.

Analog definieren wir für eine Koalgebra $\mathcal{C}$ einen Vektorraum V als **linken $\mathcal{C}$-Komodul**, falls eine lineare Abbildung $\gamma_V \colon V \to \mathcal{C} \otimes V$, genannt **(linke) Kowirkung**, existiert, sodass

$$(\Delta_{\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma_V = (\mathrm{id} \otimes \gamma_V) \circ \gamma_V \tag{A.4.3}$$

$$(\delta_{\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma_V = \mathrm{id} \tag{A.4.4}$$

gilt.



Sei $\mathcal{B}$ eine Bialgebra und V, W (linke) $\mathcal{B}$-Moduln bzw. Komoduln. Dann ist das Tensorprodukt von V und W ebenfalls wieder ein (linker) $\mathcal{B}$-Modul mit Wirkung

$$\alpha_{V \otimes W} \coloneqq (\alpha_V \otimes \alpha_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \tag{A.4.5}$$

und ein (linker) $\mathcal{B}$-Komodul mit Kowirkung

$$\gamma_{V \otimes W} \coloneqq (m \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\gamma_V \otimes \gamma_W).$$

Seien α_V und α_W Wirkungen auf eine Algebra $\mathcal{A}$ und γ_V und γ_W Kowirkungen auf eine Koalgebra $\mathcal{C}$. Dann nennen wir eine lineare Abbildung $\Phi\colon V \to W$ **(linke) Modul-Abbildung**, falls

$$\Phi \circ \alpha_V = \alpha_W \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi)$$

und **(linke) Komodul-Abbildung**, falls

$$\gamma_W \circ \Phi = (\mathrm{id} \otimes \Phi) \circ \gamma_V$$

gilt. Das Tensorprodukt von Modul-Abbildungen ist selbst wieder eine Modul-Abbildung und analog ist das Tensorprodukt von Komodul-Abbildungen auch wieder eine Komodul-Abbildung.

Analog zu den obigen Definitionen werden wir auch die Definitionen von rechten Moduln und Komoduln benötigen. Wir erhaltenfür diesen Fall die folgenden analogen Definitionen. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und $\mathcal{C}$ eine Koalgebra. Ein Vektorraum V heißt **rechter $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-Modul**, falls eine bilineare Abbildung $\bar{\alpha}_V\colon V \otimes \mathcal{A} \to V$, genannt **(Rechts-)Wirkung**, existiert, sodass

$$\bar{\alpha}_V \circ (\mathrm{id} \otimes m_{\mathcal{A}}) = \bar{\alpha}_V \circ (\bar{\alpha}_V \otimes \mathrm{id})$$
$$\bar{\alpha}_V \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{id}$$

gilt. Wir nennen einen Vektorraum V **rechter $\boldsymbol{\mathcal{C}}$-Komodul**, falls eine lineare Abbildung $\bar{\gamma}_V\colon V \to V \otimes \mathcal{C}$, genannt **rechte Kowirkung**, existiert, sodass

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta_{\mathcal{C}}) \circ \bar{\gamma}_V = (\bar{\gamma}_V \otimes \mathrm{id}) \circ \bar{\gamma}_V$$
$$(\mathrm{id} \otimes \delta_{\mathcal{C}}) \circ \bar{\gamma}_V = \mathrm{id}$$

gilt. Analog heißt eine lineare Abbildung $\Phi\colon V \to W$ **(rechte) Modul-Abbildung**, falls

$$\Phi \circ \bar{\alpha}_V = \bar{\alpha}_W \circ (\Phi \otimes \mathrm{id})$$

und **(rechte) Komodul-Abbildung**, falls

$$\bar{\gamma}_W \circ \Phi = (\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \bar{\gamma}_V$$

gilt. Die übrigen Resultate verhalten sich analog.

A.5 Kategorientheorie

In diesem Unterkapitel wollen wir uns nun noch mit den notwendigen kategorientheoretischen Grundlagen beschäftigen. Wir wollen daher zunächst den Begriff der Kategorie, des Funktors und der natürlichen Transformation einführen, siehe z. B. [Kas95, Chapter XI]. Für ausführlichere Informationen verweisen wir auf [Mac71].

Eine **Kategorie $\mathfrak{C}$** besteht aus

i.) einer Klasse $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, deren Elemente Objekte heißen,

ii.) einer Klasse $\mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$, deren Elemente Morphismen (oder Pfeile) heißen und

iii.) Abbildungen
- $\mathrm{id}\colon \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$, genannt Identität,
- $s\colon \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, genannt Source,
- $t\colon \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, genannt Target und

- $\circ\colon \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \times_{\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})} \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, genannt Komposition

sodass die folgenden Bedingungen gelten

- $\forall\, V \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})\colon s(\mathrm{id}_V) = t(\mathrm{id}_V) = V$,
- $\forall\, f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})\colon\ \mathrm{id}_{t(f)} \circ f = f \circ \mathrm{id}_{s(f)} = f$,
- $\forall\, f, g, h \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ mit $t(f) = s(g)$ und $t(g) = s(h)$: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Ein grundlegdes Beispiele ist die Kategorie $\mathrm{Vec}(\mathbb{K})$. Die Objekte sind Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ und die Morphismen lineare Abbildungen zwischen solchen Vektorräumen. Das folgende Beispiel ist für uns von zentraler Bedeutung.

Beispiel A.5.1 Sei $\mathcal{B}$ eine Bialgebra. Die Kategorie ${}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}$ enthält als Objekte die Vektorräume, die $\mathcal{B}$-Moduln und -Komoduln sind. Die Morphismen sind die linearen Abbildungen, die sowohl Modul- als auch Komodul-Abbildungen sind. Für den Beweis siehe [Maj95, Example 9.1.8].

Seien nun $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ Kategorien. Ein **Funktor** $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ besteht aus Abbildungen

- $F\colon \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}')$ und
- $F\colon \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}')$,

sodass

- $\forall\, V \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})\colon F(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{F(V)}$,
- $\forall\, f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})\colon s(F(f)) = F(s(f))$ und $t(F(f)) = F(t(f))$ und
- $\forall\, f, g \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ mit $t(f) = s(g)\colon\ \ F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

gelten.

Nun wollen wir Kategorien zu Tensorkategorien erweitern. Hierfür klären wir zunächst einige grundlegende Begriffe. Seien $F, G\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\eta\colon F \to G$ ist eine Familie von Morphismen $\eta(V)\colon F(V) \to G(V)$ in $\mathfrak{C}'$, $V \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, sodass für alle $f\colon V \to W$, $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} F(V) \arrow[r, "\eta(V)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(V) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(W) \arrow[r, "\eta(W)"] & G(W) \end{tikzcd}$$

Falls $\eta(V)$ für alle $V \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}'$ ist, heißt $\eta\colon F \to G$ **natürlicher Isomorphismus**.

Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie und $f, g, h \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$. Eine **Assoziativitäts-Bedingung** für einen Funktor $\otimes\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ ist ein natürlicher Isomorphismus $a\colon\ \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id}) \to \otimes \circ (\mathrm{id} \times \otimes)$, d. h. für jedes Tripel (U, V, W) mit $U, V, W \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, existiert ein Isomorphismus $a_{(U,V,W)}\colon (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$, sodass

$$\begin{tikzcd} (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[d, "(f \otimes g) \otimes h"'] & U \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "f \otimes (g \otimes h)"] \\ (U' \otimes V') \otimes W' \arrow[r, "a_{U',V',W'}"] & U' \otimes (V' \otimes W') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Für ein fixiertes Objekt I aus $\mathfrak{C}$ nennen wir λ **linke Einheits-Bedingung** bzgl. I, falls $\lambda\colon \otimes \circ (I \otimes \mathrm{id}) \to \mathrm{id}$ ein natürlicher Isomorphismus ist, d. h. für jedes $V \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ ein Isomorphismus $\lambda_V\colon I \otimes V \to V$ existiert, sodass

$$\begin{tikzcd} I \otimes V \arrow[r, "\lambda_V"] \arrow[d, "\mathrm{id}_I \otimes f"'] & V \arrow[d, "f"] \\ I \otimes V' \arrow[r, "\lambda_{V'}"] & V' \end{tikzcd}$$

für alle $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ kommutiert. Analog nennen wir ρ **rechte Einheits-Bedingung** bzgl. I, falls $\rho\colon \otimes \circ (\mathrm{id} \times I) \to \mathrm{id}$ ein natürlicher Isomorphismus ist, d. h. für jedes $V \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ ein Isomorphismus $\rho_V\colon V \otimes I \to V$ existiert, sodass

$$\begin{tikzcd} V \otimes I \arrow[r, "\rho_V"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_I"'] & V \arrow[d, "f"] \\ V' \otimes I \arrow[r, "\rho_{V'}"] & V' \end{tikzcd}$$

für alle $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ kommutiert.

Eine **Tensorkategorie** $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, \lambda, \rho)$ (kurz auch nur $\mathfrak{C}$; auch monoidale Kategorie genannt) ist nun eine Kategorie $\mathfrak{C}$ zusammen mit einem Funktor $\otimes\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ (genannt Tensorprodukt), einem Objekt I, genannt Einheit der Kategorie, einer Assoziativitäts-Bedingung a, einer linken Einheits-Bedingung λ bzgl. I und einer rechten Einheits-Bedingung ρ bzgl. I, sodass das Pentagon-Axiom

$$\begin{tikzcd} & (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \arrow[dr, "a_{U,V,W \otimes X}"] & \\ ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \arrow[ur, "a_{U \otimes V,W,X}"] \arrow[d, "a_{U,V,W} \otimes \mathrm{id}_X"'] & & U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) \\ (U \otimes (V \otimes W) \otimes X) \arrow[rr, "a_{U,V \otimes W,X}"] & & U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \arrow[u, "\mathrm{id}_U \otimes a_{V,W,X}"'] \end{tikzcd}$$

und das Triangel-Axiom

$$\begin{tikzcd} U \otimes (I \otimes W) \arrow[rr, "a_{U,I,W}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_U \otimes \lambda_W"'] & & (U \otimes I) \otimes W \arrow[dl, "\rho_U \otimes \mathrm{id}_W"] \\ & U \otimes W & \end{tikzcd}$$

für alle $U, V, W, X \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ erfüllt sind.

Als grundlegendes Beispiel betrachten wir an dieser Stelle die Tensorkategorie($(\mathrm{Vec}(\mathbb{K}), \otimes)$. Die Kategorie $\mathrm{Vec}(\mathbb{K})$ wird zusammen mit dem Tensorprodukt von Vektorräumen zu einer

Tensorkategorie. Die Einheit der Kategorie ist hierbei der Körper $\mathbb{K}$. Die Assoziativitäts-Bedingung ist der natürliche Isomorphismus

$$a_{U,V,W}\colon (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$$

mit

$$a_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w).$$

Die linke und rechte Einheitsbedingung sind die natürlichen Isomorphismen

$$\lambda\colon \mathbb{K} \otimes V \to V \quad \rho\colon V \otimes \mathbb{K} \to V$$

mit

$$\lambda(k \otimes v) = kv = \rho(v \otimes k),$$

wobei $u \in U, v \in V, w \in W$ mit $U, V, W \in \mathrm{Obj}(Vec(\mathbb{K})), k \in \mathbb{K}$.

Analog zu Algebren über einem Körper $\mathbb{K}$ wollen wir nun Algebren (bzw. Monoide) und Koalgebren (bzw. Komonoide) in Tensorkategorien definieren, siehe z. B. [Mac71].

Sei $\mathfrak{C}$ eine Tensorkategorie. Ein **Monoid** $\mathcal{A}$ in $\mathfrak{C}$ (oder auch eine Algebra $\mathcal{A}$ in $\mathfrak{C}$) ist ein Objekt $\mathcal{A}$ aus $\mathfrak{C}$ zusammen mit einem Produktmorphismus $M\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, sodass

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "M \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes M"] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "M"] \\
& \mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, und einem Einheitsmorphismus $\mathbb{1}\colon I \to \mathcal{A}$, sodass

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dr, "M"] & \\
I \otimes \mathcal{A} \arrow[u, "\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, "\lambda_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{A} \otimes I \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}"] \arrow[r, "\rho_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

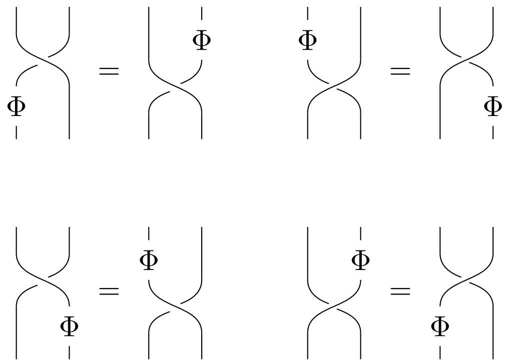
kommutieren. Wir erhalten die Definition eines **Komonoids** (bzw. einer Koalgebra) $(\mathcal{A}, \Delta, \delta)$ in einer Tensorkategorie, indem wir in der obigen Definition M durch Δ sowie $\mathbb{1}$ durch δ ersetzen und die zugehörigen Pfeile umkehren.

Eine Algebra in der Tensorkategorie $(\mathrm{Vec}(\mathbb{K}), \otimes)$ ist gerade eine Algebra im üblichen algebraischen Sinn und eine Koalgebra in $(\mathrm{Vec}(\mathbb{K}), \otimes)$ eine Koalgebra.

A.6 Übersicht Braid-Diagramme

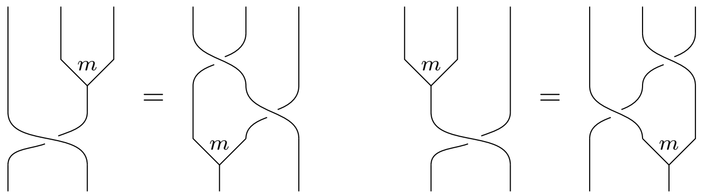
- (1.1.2) Ψ-Kompatibilität einer Abbildung $\Phi\colon V \to V$ (Seite 4)

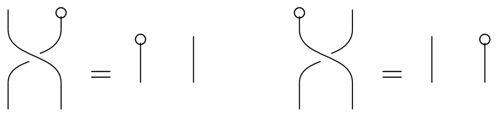
$$(\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi_{1,m} = \Psi_{1,n} \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi) \quad (\Psi^{-1})_{n,1} \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \Phi) \circ (\Psi^{-1})_{m,1},$$
$$(\mathrm{id} \otimes \Phi) \circ \Psi_{m,1} = \Psi_{n,1} \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}) \quad (\Psi^{-1})_{1,n} \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi) = (\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Psi^{-1})_{m,1}.$$



- (1.3.1) Die Multiplikation m und die Eins $\mathbb{1}$ sind Ψ-invariant (Seite 6)

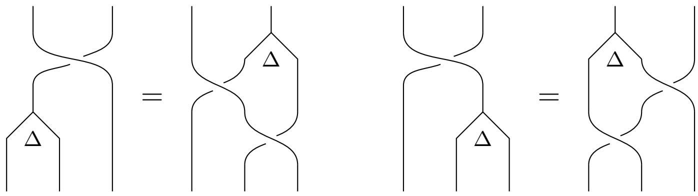
$$\Psi \circ (\mathrm{id} \otimes m) = (m \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi_{1,2} \quad \Psi \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) = (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id})$$
$$\Psi \circ (m \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes m) \circ \Psi_{2,1} \quad \Psi \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1})$$





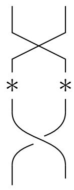
- (1.3.2) Die Komultiplikation Δ und die Koeins δ sind Ψ-invariant (Seite 7)

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi = \Psi_{1,2} \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \quad (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Psi = (\mathrm{id} \otimes \delta)$$
$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Psi = \Psi_{2,1} \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \quad (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Psi = (\delta \otimes \mathrm{id})$$



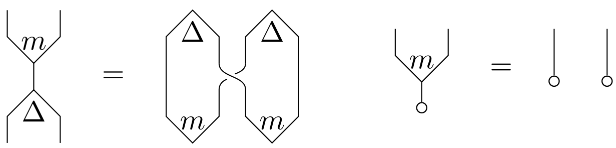
- (1.3.5) Involution $*_{c\otimes c}$ in einer braided Koalgebra (Seite 10)

$$*_{c\otimes c} := \Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau$$



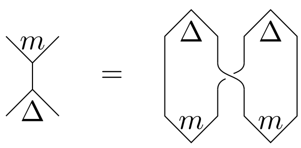
- (1.4.1) Die Komultiplikation Δ und die Koeins δ sind braided Algebra-Homomorphismen (Seite 12)

$$\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$$
$$\delta \circ m = \delta \otimes \delta$$

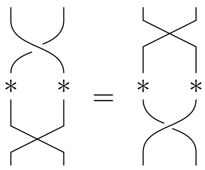


- (1.4.1) Braided Bialgebren-Gleichung (Seite 12)

$$\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$$

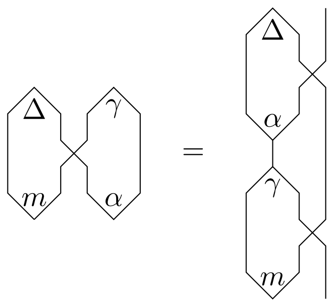


- (1.4.5) $\Psi \circ (* \otimes *) \circ \tau = \tau \circ (* \otimes *) \circ \Psi^{-1}$ (Seite 13)



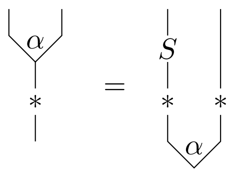
- (3.1.1) (Linke) Yetter-Drinfeld-Gleichung (Seite 37)

$$\begin{aligned}&(m \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \gamma)\\ &\quad = (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id}) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})\end{aligned}$$



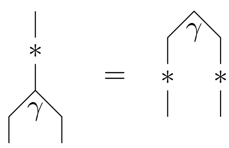
- (3.1.4) Kompatibilität der Wirkung α und der Involution $*$ (Seite 39)

$$* \circ \alpha = \alpha \circ (* \otimes *) \circ (S \otimes \mathrm{id})$$



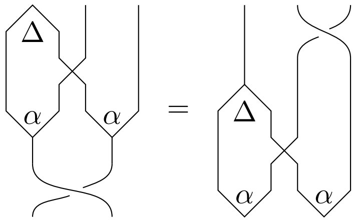
- (3.1.5) Kompatibilität der Kowirkung γ und der Involution $*$ (Seite 39 und 48)

$$\gamma \circ * = (* \otimes *) \circ \gamma$$



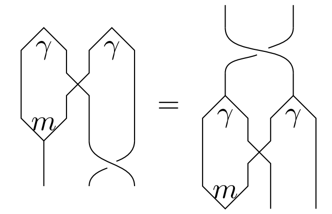
- (3.1.6) Ψ ist eine Modul-Abbildung (Seite 40)

$$\Psi \circ \alpha_{V\otimes W} = \alpha_{W\otimes V} \circ (\mathrm{id} \otimes \Psi)$$



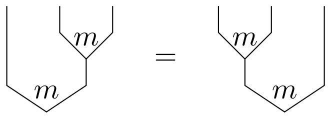
- (3.1.7) Ψ ist eine Komodul-Abbildung (Seite 41)

$$\gamma_{W\otimes V} \circ \Psi = (\mathrm{id} \otimes \Psi) \circ \gamma_{V\otimes W}$$



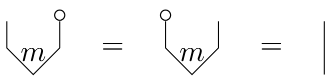
- (A.2.1) Assoziativität der Multiplikation m in einer Algebra $\mathcal{A}$ (Seite 117)

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathrm{id})$$



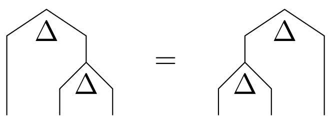
- (A.2.2) Eins-Eigenschaft der Eins $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ in einer Algebra $\mathcal{A}$ (Seite 117)

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbb{1}) = m \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id})$$



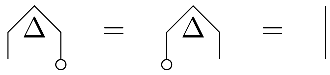
- (A.2.3) Koassoziativität der Komultiplikation Δ in einer Koalgebra $\mathcal{C}$ (Seite 118)

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$$



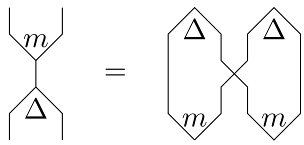
- (A.2.4) Koeins-Eigenschaft der Koeins δ in einer Koalgebra $\mathcal{C}$ (Seite 118)

$$(\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta = (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id}$$



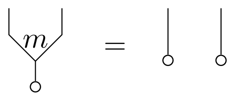
- (A.3.1) Bialgebren-Gleichung (Seite 119)

$$\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$$



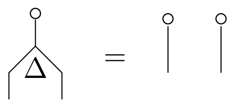
- (A.3.2) Die Koeins δ ist ein Algebra-Homomorphismus (Seite 119)

$$\delta \circ m = \delta \otimes \delta$$



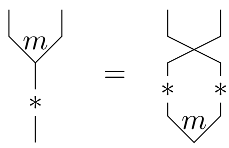
- (A.3.3) Die Komultiplikation Δ ist ein Algebra-Homomorphismus (Seite 119)

$$\Delta \circ \mathbb{1} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$$



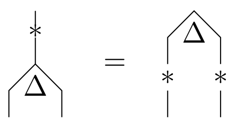
- (A.3.4) Die Involution $*$ ist ein Algebra-Antihomomorphismus (Seite 120)

$$* \circ m = m \circ (* \otimes *) \circ \tau$$



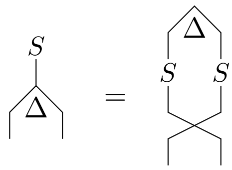
- (A.3.5) Die Komultiplikation $\Delta_{\mathcal{A}}$ ist ein $*$-Algebra-Homomorphismus (Seite 120)

$$\Delta \circ * = (* \otimes *) \circ \Delta$$



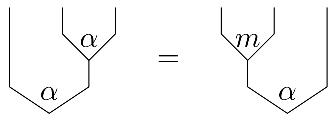
- (A.3.7) Die Antipode S einer Hopf-Algebra ist ein Koalgebra-Antihomomorphismus (Seite 121)

$$\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$$



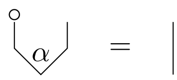
- (A.4.1) α ist eine (Links-) Wirkung (Seite 122)

$$\alpha \circ (m \otimes \mathrm{id}) = \alpha \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha)$$



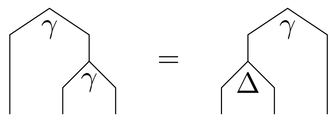
- (A.4.2) α ist eine (Links-) Wirkung (Seite 122)

$$\alpha \circ (\mathbb{1} \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id}$$



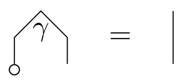
- (A.4.3) γ ist linke Kowirkung (Seite 122)

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma = (\mathrm{id} \otimes \gamma) \circ \gamma$$



- (A.4.4) γ ist linke Kowirkung (Seite 122)

$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma = \mathrm{id}$$



Literaturverzeichnis

[AFL82] ACCARDI, Luigi ; FRIGERIO, Alberto ; LEWIS, John T.: Quantum stochastic processes. In: *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 18 (1982), Nr. 1, S. 97–133

[ASW88] ACCARDI, Luigi ; SCHÜRMANN, Michael ; WALDENFELS, Wilhelm von: Quantum independent increment processes on superalgebras. In: *Math. Z.* 198 (1988), Nr. 4, S. 451–477

[Bax82] BAXTER, Rodney J.: *Exactly solved models in statistical mechanics.* Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1982. – xii+486 S.

[DNR01] DĂSCĂLESCU, Sorin ; NĂSTĂSESCU, Constantin ; RAIANU, Șerban: *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Bd. 235: *Hopf algebras.* Marcel Dekker, Inc., New York, 2001

[Dri87] DRINFELD, Vladimir: Quantum groups. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, S. 798–820

[Fra04] FRANZ, Uwe: *The Theory of Quantum Levy Processes*, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Habilitation, 2004

[FRT88] FADDEEV, Ludwig D. ; RESHETIKHIN, Nikolai Y. ; TAKHTAJAN, Armen: Quantization of Lie groups and Lie algebras. In: *Algebraic analysis, Vol. I.* Academic Press, Boston, MA, 1988, S. 129–139

[FS99] FRANZ, Uwe ; SCHOTT, René: *Mathematics and its Applications.* Bd. 490: *Stochastic processes and operator calculus on quantum groups.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999

[FSS03] FRANZ, Uwe ; SCHOTT, René ; SCHÜRMANN, Michael: Lévy Processes and Brownian Motion on Braided Spaces. In: *Preprintreihe Mathematik 2003* (2003)

[Ger14] GERHOLD, Malte: *On Several Problems in the Theory of Comonoidal Systems and Subproduct Systems*, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Diss., 2014

[GKL12] GERHOLD, Malte ; KIETZMANN, Stefan ; LACHS, Stephanie: Additive deformations of braided Hopf algebras. In: *Noncommutative harmonic analysis with applications to probability III* Bd. 96. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2012, S. 175–191

[GLS16] GERHOLD, Malte ; LACHS, Stephanie ; SCHÜRMANN, Michael: *Categorial Lévy Processes.* `arXiv:1612.05139`. Version: December 2016

[HP84] HUDSON, R. L. ; PARTHASARATHY, K. R.: Quantum Ito's formula and stochastic evolutions. In: *Comm. Math. Phys.* 93 (1984), Nr. 3, S. 301–323

[JS93] Joyal, André ; Street, Ross: Braided tensor categories. In: *Adv. Math.* 102 (1993), Nr. 1, S. 20–78

[Kak00] Kaku, Michio: *Strings, conformal fields, and M-theory.* Second. Springer-Verlag, New York, 2000 (Graduate Texts in Contemporary Physics)

[Kas95] Kassel, Christian: *Graduate Texts in Mathematics.* Bd. 155: *Quantum groups.* Springer-Verlag, New York, 1995

[Kau13] Kauffman, Louis H.: *Series on Knots and Everything.* Bd. 53: *Knots and physics.* Fourth. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013

[KS97] Klimyk, Anatoli ; Schmüdgen, Konrad: *Quantum groups and their representations.* Springer-Verlag, Berlin, 1997 (Texts and Monographs in Physics)

[LR97] Lambe, Larry A. ; Radford, David E.: *Mathematics and its Applications.* Bd. 423: *Introduction to the quantum Yang-Baxter equation and quantum groups: an algebraic approach.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997

[Mac71] MacLane, Saunders: *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. – Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5

[Maj95] Majid, Shahn: *Foundations of quantum group theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[Mal14] Malczak, Monika: *Symmetrisierung von „braided“ $*$-Bialgebren*, Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald, Bachelorarbeit, 2014

[Mey93] Meyer, Paul-André: *Lecture Notes in Mathematics.* Bd. 1538: *Quantum probability for probabilists.* Springer-Verlag, Berlin, 1993

[Mon93] Montgomery, Susan: *CBMS Regional Conference Series in Mathematics.* Bd. 82: *Hopf algebras and their actions on rings.* Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. – xiv+238 S. – ISBN 0–8218–0738–2

[Mur03] Muraki, Naofumi: The five independences as natural products. In: *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 6 (2003), Nr. 3, S. 337–371

[Par92] Parthasarathy, K. R.: *Monographs in Mathematics.* Bd. 85: *An introduction to quantum stochastic calculus.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1992

[Rad93] Radford, David E.: Minimal quasitriangular Hopf algebras. In: *J. Algebra* 157 (1993), Nr. 2, S. 285–315

[Rom05] Roman, Steven: *Graduate Texts in Mathematics.* Bd. 135: *Advanced linear algebra.* Second. Springer, New York, 2005

[Sch85] Schürmann, Michael: Positive and conditionally positive linear functionals on coalgebras. In: *Quantum probability and applications, II (Heidelberg, 1984)* Bd. 1136. Springer, Berlin, 1985, S. 475–492

[Sch90] Schürmann, Michael: Noncommutative stochastic processes with independent and stationary increments satisfy quantum stochastic differential equations. In: *Probab. Theory Related Fields* 84 (1990), Nr. 4, S. 473–490

[Sch91] SCHÜRMANN, Michael: The Azéma martingales as components of quantum independent increment processes. In: *Séminaire de Probabilités, XXV* Bd. 1485. Springer, Berlin, 1991, S. 24–30

[Scha92] SCHAUENBURG, Peter: *Algebra Berichte [Algebra Reports]*. Bd. 67: *On coquasitriangular Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*. Verlag Reinhard Fischer, Munich, 1992

[Sch93] SCHÜRMANN, Michael: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1544: *White noise on bialgebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1993

[Son15] SONTZ, Stephen B.: *Principal bundles*. Springer, Cham, 2015 (Universitext)

[Swe69] SWEEDLER, Moss E.: *Hopf algebras*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969 (Mathematics Lecture Note Series)

[Ufe04] UFER, Stefan: *Braided Hopf algebras of triangular type*, Ludwig-Maximilians-Universität München, Diss., 2004

[Wal73] WALDENFELS, Wilhelm von: An approach to the theory of pressure broadening of spectral lines. (1973), S. 19–69. Lecture Notes in Math., Vol. 296

[Wal84] WALDENFELS, Wilhelm von: Itô solution of the linear quantum stochastic differential equation describing light emission and absorption. In: *Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes (Villa Mondragone, 1982)* Bd. 1055. Springer, Berlin, 1984, S. 384–411

[Wal16] WALDMANN, Stefan: *Lineare Algebra 2: Anwendungen und Konzepte für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer Berlin Heidelberg, 2016

[Yan67] YANG, C. N.: Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. In: *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967), S. 1312–1315

Danksagung

Ich möchte mit an dieser Stelle bei den folgenden Leuten bedanken:

Bei Prof. Michael Schürmann für die fachliche Betreuung, sein Vertrauen und seine Geduld in mich; für die Möglichkeit bereits während des Studiums ein Teil der Arbeitsgruppe zu sein, sowie erste Forschungsreisen zu unternehmen und nicht zuletzt für seine menschliche Art.

Bei Malte Gerhold dafür, dass er bei Fragen immer sofort zur Stelle ist und einem nie das Gefühl gibt, dumm zu sein.

Bei Prof. Volkmar Liebscher für die kleinen Bemerkungen, die mein Selbstvertrauen immer wieder aufgebaut haben.

Bei Philipp Varšo für sein Vetrauen und seinen Glauben in mich; dafür, dass er immer sofort zur Stelle war und mich auch in schwierigen Phasen immer ertragen und wieder aufgebaut hat und nicht zuletzt für seine umfangreichen LaTeX-Kenntnisse.

Bei meinen Eltern dafür, dass sie nie den Glauben in mich verloren haben, mich immer unterstützt haben und es mir ermöglicht haben, meinen Traum trotz aller Umstände zu erfüllen. Vor allem jedoch möchte ich ihnen dafür danken, dass sie mich zu dem Menschen gemacht haben, der ich bin. In Gedanken bin ich immer bei dir.