

Themen für Bachelor- und Masterarbeiten

Lehrstuhl „Algebra und funktionalanalytische Anwendungen“

Mai 2018

Die unten genannten Themen stellen nur eine Auswahl dar. Interessenten können, z. B. durch Arbeiten, Seminare oder Vorlesungen unserer Arbeitsgruppe, zu eigenen Themenvorschlägen angeregt werden.

Die folgenden Gebiete dienen der groben Abgrenzung der Themen:

A: Algebra

F: Funktionalanalysis, Theorie der Operatoralgebren

W: Wahrscheinlichkeitstheorie

(**Bac**): Bachelorarbeit

(**Ma**): Masterarbeit

(**BacMa**): Bachelor- oder Masterarbeit

1. Translationsinvariante Markov-Halbgruppen auf kompakten Gruppen und Quantengruppen

(BacMa) A, F, W

Ein stochastischer Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen (d. h. ein so genannter Lévy-Prozess), der Werte in einer topologischen Gruppe annimmt, wird durch seine translationsinvariante Markovsche Halbgruppe beschrieben; siehe z. B. [App06]. Dieser Zusammenhang zwischen Markovschen Halbgruppen und Lévy-Prozessen soll im klassischen Fall kompakter Gruppen referiert und als neueres Ergebnis die Verallgemeinerung dieses Satzes auf kompakte Quanten-Halbgruppen (siehe [CFK12]) dargestellt werden.

2. Klassische und nichtkommutative Prozesse mit unabhängigen, stationären Zuwächsen

(BacMa) W, F

Es geht um die Realisierung klassischer gruppenwertiger Lévy-Prozesse als Operatorprozesse. Aufgabe der Arbeit ist, den Spezialfall von Lévy-Prozessen auf der unitären Gruppe zu untersuchen und aufzuzeigen, wie deren Verallgemeinerung zu nichtkommutativen unitären Prozesse realisiert werden kann; siehe [Sch93, Vos13, SchV07, SchV14, Ulr].

3. Vollständig positive Abbildungen und deren Dilatationen

(BacMa) F

Quantendynamische Halbgruppen beschreiben die Zeitentwicklung physikalischer Quantensysteme. Die Generatoren solcher 1-Parameter-Halbgruppen werden durch die Formel von Lindblad charakterisiert. In der Arbeit sollen zunächst die Form des Lindblad-Generators und dann die „Erweiterung“ (Dilatation) der Halbgruppen, z. B. mit Hilfe quantenstochastischer Differentialgleichungen, dargestellt werden; siehe [Par92, Mey95].

4. Die Gelfand-Naimark-Segal-Konstruktion

(Bac) F

Die GNS-Konstruktion ordnet jedem „Zustand“ auf einer involutiven Algebra eine Darstellung dieser Algebra auf einem Vektorraum mit Skalarprodukt zusammen mit einem zyklischen Vektor zu. Aufgabe der Arbeit ist, eine Übersicht über die Bedeutung dieser Konstruktion in der Mathematik, evtl. unter besonderer Berücksichtigung der Rolle in der Quantenstochastik, zu geben; siehe z. B. [Ger14, Gal14].

5. Symmetrische Fockräume

(Bac) A, F, W

Die Bedeutung des Fockraums und seine unterschiedlichen Erscheinungsformen (z. B. als direkte Summe symmetrischer Tensorprodukte, als „Punktprozess-Raum“ oder als L^2 -Raum der Brownschen Bewegung) sollen erläutert werden; siehe z. B. [Par92, Mey95] oder [Gui72] sowie [Lachs14].

6. Schoenberg-Korrespondenz für bi-freie Unabhängigkeit

(Ma) A, F, W

Die bi-freie Unabhängigkeit wird von D. Voiculescu in der Arbeit [Voi14] definiert und ist eine Verallgemeinerung von „freeness“, einem nicht-kommutativen Unabhängigkeitsbegriff, der bereits in den 1980er Jahren, ebenfalls von Voiculescu, eingeführt wurde. Zu diesem Unabhängigkeitsbegriff kann man Quanten-Lévy-Prozesse über „dualen Gruppen“ betrachten. Die Prozesse sind durch ihren Generator, ein bedingt positives lineares Funktional auf der zugrunde liegenden dualen Gruppe, bis auf quantenstochastische Äquivalenz bestimmt. In der Arbeit soll die allgemeine Korrespondenz zwischen solchen Generatoren und Faltungshalbgruppen bewiesen werden. Der Spezialfall additiver Quanten-Lévy-Prozesse wurde zum Teil in der Masterarbeit [Schr] behandelt. Die Methoden orientieren sich an [Schr] und an der Arbeit [SchV14]. Die „Schoenberg-Korrespondenz“ liefert z. B. Realisierungen von bi-freien Lévy-Prozessen als Operatorprozesse auf einem vollem Fock-Raum.

7. Momente und Kumulanten für nichtkommutative Unabhängigkeiten

(BacMa) A, F, W

In [ManSch] wird eine Theorie entwickelt, die universellen Produkten, d. h. Tensorprodukten in der Kategorie $\text{AlgP}_{d,m}$ der algebraischen Wahrscheinlichkeitsräume, eine Familie von „Kumulantenfunktionen“ und „Kumulanten-Lie-Algebren“ zuordnet. Dabei sind die Parameter d und m natürliche Zahlen. Kumulanten und die Beziehung zwischen Momenten von Verteilungen und deren Kumulanten spielen auch in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie eine bedeutende Rolle. Die Kumulanten der Arbeit [ManSch] schließen praktisch alle bekannten nicht-kommutativen Unabhängigkeitsbegriffe ein, z. B. beinhaltet $d = 1$, $m = 2$ den Fall der bi-freien Unabhängigkeit (vgl. Thema 6). Die Hauptaufgabe liegt bei diesem Bachelor/Master-Thema darin, den Fall $m > 1$, der in [ManSch] nur relativ knapp behandelt wird, genauer und ausführlicher darzustellen.

8. Bi-monotone Grenzwertsätze

(BacMa) A, F, W

Auf Voiculescu's Entdeckung der bi-freien Unabhängigkeit, ein Unabhängigkeitsbegriff für Paare von nichtkommutativen Zufallsgrößen, folgte die Suche nach weiteren Beispielen von „Bi-Unabhängigkeiten“. Ein solches ist die bi-monotone Unabhängigkeit, für die auch ein zentraler Grenzwertsatz gezeigt werden kann [Ger17]. Die Grenzverteilung wird dabei mit Hilfe bi-monotoner Paarpartitionen beschrieben. Ziel der Bachelor/Master-Arbeit wäre es, den zentralen Grenzwertsatz der bi-monotonen Unabhängigkeit ausführlich darzustellen und weitere stochastische Grenzwertsätze, insbesondere Poissons Gesetz der kleinen Zahlen, auf die bi-monotone Unabhängigkeit zu übertragen.

Literatur

- [AHO07] L. Accardi, A. Hora, N. Obata: Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs. Springer 2007
- [App06] D. Applebaum: Lévy Processes in Euclidean Spaces and Groups. In: Quantum Independent Increment Processes I (eds. M. Schürmann, U. Franz). Lect. Notes Math. vol. 1865, Springer 2006
- [CFK12] F. Cipriani, U. Franz, A. Kula: Symmetries of Lévy processes, their Marcov semigroups and potential theory on compact groups. Preprint arXiv:1210.6768
- [Fra06] U. Franz: Lévy processes on quantum groups and dual groups. In: Quantum Independent Increment Processes II (eds. M. Schürmann, U. Franz). Lect. Notes Math. vol. 1866, Springer 2006
- [Ger11] M. Gerhold: Additive deformations of Hopf algebras. Journal of Algebra 339 (2011), 114-134

- [**Ger17**] M. Gerhold: Bimonotone Brownian motion. Preprint arXiv:1708.03510
- [**GKL11**] M. Gerhold, S. Kietzmann, S. Lachs: Additive deformations of braided Hopf algebras. Banach Center Publ. 96 (2011), 175-191
- [**GeSk14**] M. Gerhold, M. Skeide: Discrete subproduct systems and word systems. Preprint 2014
- [**GeLa14**] M. Gerhold, S. Lachs: Classification and GNS-construction for general universal products. *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.* 18 (2015) [29 pages]
- [**GeLaSch**] M. Gerhold, S. Lachs, M. Schürmann: Categorical Lévy processes. Preprint arXiv:1612.05139
- [**Gui72**] A. Guichardet: Symmetric Spaces and Related Topics. *Lect. Notes Math.*, vol. 261, Springer 1972
- [**Maj95**] S. Majid: Foundations of Quantum Group Theory. Cambridge Univ. Press 1995
- [**ManSch**] S. Manzel, M. Schürmann: Non-commutative stochastic independence and cumulants. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 20 (2017) [38 pages]. Preprint arXiv:1601.06779
- [**Mey95**] P.-A. Meyer: Quantum Probability for Probabilists, *Lect. Notes Math.*, vol. 1538, Springer 1995
- [**Mur03**] N. Muraki: The five independences as natural products. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 6 (2003), 337-371
- [**Par92**] K.R. Parthasarathy: An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Birkhäuser 1992
- [**Schoen38**] I. J. Schoenberg: Metric spaces and positive definite functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1938), 522-536
- [**Sch93**] M. Schürmann: White Noise on Bialgebras, *Lect. Notes Math.*, vol. 1544, Springer 1993
- [**SchV07**] M. Schürmann, S. Voß: Positivity of free convolution semigroups. In: *Quantum Probability and Related Topics*, vol. 23 of QP-PQ. World Sci. Publ. 2008
- [**SchV14**] M. Schürmann, S. Voß: Schoenberg correspondence on dual groups. *Commun. Math. Phys.* 328 (2014), 849-865
- [**SSV10**] M. Schürmann, M. Skeide, S. Volkwardt: Transformations of quantum Lévy processes on Hopf algebras. *Commun. Stoch. Anal.* 4 (2010), 553-577
- [**VDN92**] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica: Free Random Variables. AMS 1992
- [**Voi14**] D. Voiculescu: Free probability for pairs of faces I. *Commun. Math. Phys.* 332 (2014), 955-980

Abschlussarbeiten

- [**Vol07**] S. Volkwardt: Realisierung von Quanten-Lévy-Prozessen auf Bose-Fock-Räumen. Diplomarbeit, Greifswald 2007
- [**Vos07**] S. Voß: Faltungshalbgruppen auf algebraischen Strukturen. Diplomarbeit, Greifswald 2007
- [**Kie08**] S. Kietzmann: Der Begriff der bedingten Positivität in der Mathematik, Bachelorarbeit, Greifswald 2008
- [**Wil08**] L. Wilhelm: Natürliche Produkte von Darstellungen. Diplomarbeit, Greifswald 2008
- [**Lac09**] S. Lachs: Zentrale Grenzwertsätze für Momentenfunktionale. Staatsexamensarbeit, Greifswald 2009
- [**Ger09**] M. Gerhold: Quanten-Lévy-Prozesse auf Deformationen von Bialgebren. Diplomarbeit, Greifswald 2009
- [**Kie**] S. Kietzmann: Faltungsexponentiale auf dualen Gruppen. Diplomarbeit, Greifswald 2010
- [**Neu11**] A. Neumann: Faltungsexponentiale in der Quantenstochastik. Diplomarbeit, Greifswald 2011
- [**Mar12**] S. Martens: Der Fundamentalsatz für Koalgebren. Bachelorarbeit, Greifswald 2012
- [**Schm12**] M. Schmidt: Bialgebrastrukturen auf Polynomringen. Bachelorarbeit, Greifswald 2013
- [**Man13**] S. Manzel: Universelle Produkte linearer Funktionale. Bachelorarbeit, Greifswald 2013
- [**Gal13**] M. Galla: Nichtkommutative Unabhängigkeitsbegriffe und ihre Darstellungen. Bachelorarbeit, Greifswald 2013
- [**Rug13**] S. Ruge: Limiten und Kolimiten. Bachelorarbeit, Greifswald 2013
- [**Lue13**] F. Lüdke: Classical and Non-Commutative Stochastic Calculus. Bachelorarbeit, Greifswald 2013
- [**Vos13**] S. Voß: Realisierungen von Quanten-Lévy-Prozessen. Dissertation, Greifswald 2013
- [**Malc14**] M. Malczak: Symmetrisierung von „braided“ $*$ -Bialgebren. Bachelorarbeit, Greifswald 2014
- [**Burk14**] M. Burkert: $*$ -Bialgebren in verschiedenen Kategorien. Bachelorarbeit, Greifswald 2014
- [**Ger14**] M. Gerhold: On Several Problems in the Theory of Comonoidal Systems and Subproduct Systems. Dissertation Greifswald 2014

- [**Lachs14**] S. Lachs: A New Family of Universal Products and Aspects of a Non-Positive Quantum Probability Theory. Dissertation Greifswald 2015
- [**Schm**] M. Schmidt: Lévy-Prozesse auf komonoidalen Systemen. Masterarbeit, Greifswald 2015
- [**Manzel**] S. Manzel: Klassifikation positiver quantenstochastischer Unabhängigkeitsbegriffe. Masterarbeit, Greifswald 2016
- [**Ulr**] M. Ulrich: Investigating noncommutative structures: quantum groups and dual groups in the context of quantum probability. Dissertation Beasancon/Greifswald 2016
- [**Schr**] T. Schramm: Bi-freie additive Quanten-Lévy-Prozesse. Masterarbeit, Greifswald 2017
- [**Malc17**] M. Malczak: Realisierung von „braided“ Quanten-Lévy-Prozessen. Masterarbeit, Greifswald 2017