Geben Sie bitte bei allen Aufgaben nicht nur Ergebnisse, sondern auch Ihre Ansätze und Rechenwege an. Nutzen Sie beim Rechnen bitte mindestens 2, maximal 4 Kommastellen.

Aufgabe 1: Wenn aus einer Urne mit fünf Kugeln mit den Aufdrucken $1, 2, 3, 4, 5$ ohne Zurücklegen *zwei* Kugeln gezogen werden, so lässt sich dieses Zufallsexperiment mit erfüllten Laplace-Eigenschaften modellieren. Wir betrachten die beiden disjunkten Ereignisse A*: Beide Zahlen sind gerade* und B*: Beide Kugeln zeigen eine Zahl* ≥ 3.
a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω in Mengenschreibweise an und bestimmen Sie $|\Omega|$.
b) Geben Sie die Ereignisse $C = (A \cap B)$ sowie $D = \overline{(A \cup B)}$ in Mengenschreibweise an.
c) Stellen Sie für die Zufallsvariable X: *Anzahl ungerader Zahlen unter beiden gezogenen Zahlen* die zughörige Verteilungstabelle (X-Werte x_i mit $P(X = x_i)$) auf.

Aufgabe 2: Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist,
a) aus 5 Samen mindestens 4 Keimlinge zu erhalten, wenn jeder Same zu 90% aufgeht;
b) beim 6-maligen Werfen eines sechsseitigen Laplace-Würfels genau die in einer solchen Versuchsserie zu erwartende durchschnittliche Anzahl *Zweien* zu erhalten;
c) genau doppelt so viele Nieten wie Gewinne zu erhalten, wenn man 9 Lose ohne Zurücklegen zufällig aus einer Urne zieht, die 28 Nieten und 12 Gewinne enthält;
d) $P(X < (E(X) + V(X))$ bei einer mit $k = 5$ diskret gleichverteilten Zufallsgröße X.

Aufgabe 3: Die als "Schrecksekunde" bekannte *Reaktionsdauer* beträgt nicht bei jedem Kraftfahrer genau 1 Sekunde, sondern kann in der Bevölkerung durch eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $\mu_X = 1s$ und $\sigma_X = 0.125s$ modelliert werden.

Geben Sie an, wie viel Prozent der Bevölkerung unter diesen Annahmen unter $1s$, zwischen $1s$ und $1.105s$, zwischen $1.105s$ und $1.245s$ und bei einer Reaktionsdauer über $1.245s$ liegt.

Aufgabe 4: Für einen neuen Studiengang wird kalkuliert, dass von den Studienanfängern 40% eine Wartezeit von 0 Semestern, 30% *ein* Semester, 15% *zwei* Semester, 10% *drei* Semester und der Rest 4 Semester seit dem Abitur hinter sich haben.
Berechnen Sie für die beschriebene Zufallsgröße X: *Anzahl Wartesemester* die zu erwartende mittlere Anzahl $E(X)$ sowie die zugehörige Standardabweichung $\sqrt{V(X)}$.

Aufgabe 5 : Von einer stetigen Zufallsgröße X ist die Verteilungsfunktion F gegeben, welche den Wert $F(x) = 0$ auf dem Intervall $]-\infty, -2[$ und den Wert $F(x) = 1$ auf $]+4, +\infty[$ annimmt. Für $x \in [-2, +4]$ gilt $F(x) = \frac{1}{6} \cdot (x + 2)$.
a) Bestimmen und interpretieren Sie das 80%-Quantil $\tilde{x}_{0.8}$ der Verteilung von X.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ der gegebenen Zufallsgröße X.

Aufgabe 6: Für eine Einschätzung des Konsums illegaler Drogen geht man von folgenden Wahrscheinlichkeiten aus: 11% der Gesamtpopulation sind Kinder unter 14 Jahren, 7% sind Jugendliche zwischen 14 und 18 Jahren und 82% sind Erwachsene über 18 Jahren. Man nimmt an, dass unter den Kindern 1%, unter den Jugendlichen 12% und unter den Erwachsenen 25% illegale Drogen konsumieren.
a) Wie viel Prozent der Gesamtpopulation nimmt unter diesen Annahmen illegale Drogen?
b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|D)$, wobei E : *Erwachsene* und D: *Konsumenten illegaler Drogen* bedeuten. Welchen Anteil drückt $P(E|D)$ aus?

Aufgabe 7: Von 5 Versuchspersonen wurden die Merkmale X_1: *Augenfarbe*, X_2: *Gesundheitszustand* (auf einer "Zensuren"-Skala von 1 bis 12), X_3: *Systolischer Blutdruck* in

$mmHg$ und X_4: *Diastolischer Blutdruck* in $mmHg$ erfasst.
a) Geben Sie für die Merkmale X_1, X_2 und X_3 den Skalierungstyp an.
b) Bestimmen Sie den *Modalwert* x_{Mod} der X_1-Werte *braun, grün, blau, braun, braun* sowie den *Median* $\tilde{x}$ und den Interquartilsabstand der erfassten X_2-Werte $7, 3, 10, 8, 11$.
c) Wie würde sich der Median $\tilde{x}$ ändern, wenn noch ein sechster X_2-Wert 9 hinzukäme?
d) Aus den erhobenen X_3- und X_4-Messwerten wurde der Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient $r = +0.804$ berechnet. Was sagt dieser Wert bezüglich X_3, X_4 konkret aus?

Aufgabe 8: Von 20 unterschiedlichen Flüssen wurde jeweils deren *Nitratgehalt* X in $\frac{mg}{l}$ erfasst. Aus diesen Messwerten ergaben sich das arithmetische Mittel $\overline{x} = 3.3\frac{mg}{l}$ sowie die geschätzte Standardabweichung $\hat{\sigma}_X = 1.8\frac{mg}{l}$. Für die Population aller betrachteter Flüsse nehmen wir an, dass der Nitratgehalt X normalverteilt ist.
a) Stellen Sie die 3 Hypothesenpaare aus H_0 und H_1 für einen *ungerichteten* (d.h. 2-seitigen), *rechtsseitigen* und *linksseitigen* Einstichproben-t-Test mit $\mu_0 = 2.5\ \frac{mg}{l}$ auf.
b) Bestimmen Sie die 3 zugehörigen Akzeptanzbereiche der Nullhypothese H_0 zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ und geben Sie diese an.
c) Berechnen Sie mittels der Informationen über das Datenmaterial die Teststatistik t_{emp}.
d) Fällen Sie die Testentscheidungen für alle unter a) gestellten Hypothesenpaare.
e) Berechnen Sie das 95%-Konfidenzintervall für den wahren mittleren *Nitratgehalt* μ_X. Welche Testentscheidung kann daraus für den *2-seitigen* t-Test von a) abgeleitet werden?

Aufgabe 9: Folgende Kreuztabelle fasst (fiktives) Datenmaterial zusammen, welches von 24 Grundschülern zum möglicherweise bestehenden Zusammenhang zwischen den Merkmalen X: *Geschlecht* und Y: *Antisoziale Verhaltensauffälligkeit* erhoben wurde. Untersuchen Sie mittels eines χ^2-Unabhängigkeitstests, inwieweit bei Grundschulkindern generell von einem Zusammenhang zwischen X und Y auszugehen ist.

	0: nicht verhaltensauffällig	1: verhaltensauffällig	$\sum$
Junge	beobachtet: 4 / erwartet: 6.5	beobachtet: 9 / erwartet: 6.5	13
Mädchen	beobachtet: 8 / erwartet: 5.5	beobachtet: 3 / erwartet: 5.5	11
$\sum$	12	12	24

a) Stellen Sie H_0 und H_1 für einen entsprechenden χ^2-Unabhängigkeitstest auf.
b) Begründen Sie, dass die Voraussetzungen des χ^2-Verfahrens für die Daten erfüllt sind.
c) Geben Sie an, wie die bei stochastischer Unabhängigkeit von X und Y erwartete absolute Paar-Häufigkeit $E_{Junge,1} = 6.5$ in der Tabelle berechnet wurde!
d) Berechnen Sie aus den Stichprobendaten die Teststatistik χ^2_{emp}.
e) Geben Sie den Akzeptanzbereich von H_0 zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ an und fällen Sie anhand der Teststatistik χ^2_{emp} eine Testentscheidung.

Kleine Quantilstabellen (df : Anzahl der Freiheitsgrade)

Quantile d. Standardnormalverteilung N(0,1)		Quantile der t-Verteilung $t_{df,q}$				Quantile der χ^2-Verteilung $\chi^2_{df,q}$		
q	Quantil $\tilde{z}_q$	df	q=95%	q=97,5%	q=99%	df	q=95%	q=99%
50,0%	0,000	17	1,740	2,110	2,567	1	3,84	6,63
80,0%	0,840	18	1,734	2,101	2,552	2	5,99	9,21
90,0%	1,282	19	1,729	2,093	2,539	3	7,81	11,34
95,0%	1,645	20	1,725	2,086	2,528	4	9,49	13,28
97,5%	1,960	21	1,721	2,080	2,518	5	11,07	15,08
99,0%	2,326	22	1,717	2,074	2,508	6	12,59	16,81