**ÜA 1:** Angenommen, die Cholesterinwerte in der Bevölkerung können durch eine normalverteilte Zufallsgröße $X \sim N(\mu_X = 236mg/dl, \sigma_X = 46mg/dl)$ modelliert werden (vgl. ÜA 3) von Blatt 8), wie ist dann die Stichprobenfunktion $\overline{X}_{(n)}$ der arithmetischen Mittelwerte in Stichproben vom Umfang $n \in \mathbb{N}$ verteilt?

**a)** Skizzieren Sie den Verlauf der Dichtfunktion der normalverteilten ZG $X$.

**b)** Geben Sie an, wie der Erwartungswert $E(\overline{X}_{(n)})$, die Varianz $V(\overline{X}_{(n)})$ und der Standardfehler der ZG $\overline{X}_{(n)}$ aus den geg. Werten $\mu_X$, $\sigma_X^2$ bzw. $\sigma_X$ berechnet werden können.

**c)** Begründen Sie, warum die ZG $\overline{X}_{(n)}$ für alle SP-Umfänge $n \in \mathbb{N}$ normalverteilt ist.

**d)** Skizzieren Sie den Verlauf der Dichtfunktion der ZG $\overline{X}_{(n)}$ für die Stichprobenumfänge $n = 25$, $n = 2500$ und $n = 250000$. Was bewirkt der wachsende Stichprobenumfang $n$?

**e)** Wenn wir nicht die ZG $\overline{X}_{(n)}$, sondern deren standardisierte Version $Z$ betrachten, welche Aussagen können dann zur Verteilung dieser ZG $Z$ gemacht werden und warum?

**ÜA 2:** Bestimmen Sie für die fünf gegebenen Verteilungen jeweils das 2.5%-Quantil und das 97.5%-Quantil. Skizzieren Sie den Verlauf der fünf zugehörigen Dichtefunktionen in einer gemeinsamen Grafik und zeichnen Sie alle abgelesenen Quantile ein. Was fällt auf?

**a)** $t_{df=3}$, $t_{df=8}$, $t_{df=29}$, $t_{df=90}$

**b)** $N(0, 1)$

**ÜA 3:** Für die spezielle Population musikalisch früh geförderter Erwachsener nehmen wir an, dass der IQ $X$ dort durch eine Normalverteilung mit der üblichen Standardabweichung $\sigma_X = 15$ modelliert werden kann, der geltende Erwartungswert $\mu_X$ aber unbekannt ist.

**a)** Berechnen Sie einen geeigneten *Punktschätzer* $\hat{\mu}_X$ für den unbekannten Erwartungswert $\mu_X = E(X)$ von $X$ aus folgenden IQ-Stichprobendaten $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (110, 100, 120, 110)$.

**b)** Bestimmen Sie aus diesen Daten nun auch das 95%-*Konfidenzintervall* von $\mu_X$. Was ändert sich, wenn Sie anstelle von 95% das *Konfidenzniveau* 99% nutzen?

**c)** Welcher Informationsgehalt steckt in den beiden berechneten Konfidenzintervallen?

**ÜA 4:** Ausgehend von $n = 9$ $X$-Messwerten $4, 6, 8, 4, 3, 4, 5, 7, 4$ (in $mm$) für die Länge $X$ der Kelchblätter bestimmter Pflanzen soll die wahre unbekannte mittlere Länge $\mu_X$ unter der Annahme geschätzt werden, dass $X$ in der Population normalverteilt ist.

**a)** Berechnen Sie aus den Daten einen geeigneten *Punktschätzer* $\hat{\mu}_X$ für die wahre (unbekannte) mittlere Kelchblattlänge $\mu_X = E(X)$ in der betrachteten Pflanzen-Population.

**b)** Um welchen Faktor müsste man den SP-Uumfang $n = 9$ erhöhen, wenn man *doppelt so hohe* Genauigkeit für $\hat{\mu}_X$ haben möchte, der *Standardfehler* sich also *halbieren* soll?

**c)** Berechnen Sie aus den Daten einen erwartungstreuen *Punktschätzer* $\hat{\sigma}_X^2$ für die unbekannte Varianz $\sigma_X^2 = V(X)$ von $X$ in der betrachteten Pflanzen-Population.

**d)** Bestimmen Sie aus den Daten das 95%-*Konfidenzintervall* für die wahre (unbekannte) mittlere Kelchblattlänge $\mu_X$. Was sagt dieses berechnete Intervall aus?

**e)** Was würde sich bei dem unter d) berechneten 95%-*Konfidenzintervall* ändern, wenn die unter a) und c) bestimmten Schätzwerte $\hat{\mu}_X$ und $\hat{\sigma}_X^2$ weiterhin gelten, aber nicht von $n = 9$, sondern von $n = 4$, $n = 30$ bzw. $n = 91$ Messwerten stammen würden ?