Eine Erweiterung der Rubio-Verallgemeinerung von Optimalsteuerproblemen mit Anwendung der Ky-Fan-Theorie über Systeme linearer Ungleichungen

I n a u g u r a l d i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

vorgelegt von

Holger Irrgang

geboren am 09.09.1969

in Bergen/Rügen

Greifswald, 06.06.2001

Dekan:	....
1. Gutachter:	....
2. Gutachter:	....
Tag der Promotion:	....

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

Häufig ist das Lösen von Optimalsteuerproblemen mit Schwierigkeiten verbunden. In vielen Fällen lassen sich notwendige oder auch hinreichende Bedingungen, wie das Pontrjaginsche Maximum-Prinzip oder der Satz von Roxin-Fillipov, nicht anwenden. Möglich ist auch, daß die Menge der zulässigen Paare leer ist bzw. das Minimum des Zielfunktionals über dieser Menge nicht angenommen wird.

Ein anschauliches Beispiel aus der Arbeit [31] von L. C. Young soll das Problem verdeutlichen.
Wir wollen annehmen, ein Segler möchte auf einem hinreichend breiten Fluß mit dem Strom, aber gegen den Wind von einem Punkt A zu einem Punkt B segeln. Es ist bekannt, daß der Segler gegen den Wind „kreuzen“ muß und daß der Fluß aufgrund der unterschiedlichen Tiefe in der Mitte stärker fließt als in der Nähe des Ufers. Vernachlässigen wir die Zeit beim „Wenden“, so ist klar, je weiter der Segler sich von der Flußmitte entfernt, desto langsamer wird er. Das bedeutet, die optimale Lösung wäre, in der Mitte des Flußes unendlich oft zu „kreuzen“. Diese Lösung entspricht aber keiner klassischen Funktion.

Um in solchen Fällen wenigstens eine Näherungslösung zu bekommen, kann man sogenannte Verallgemeinerungen oder Relaxierungen des Optimalsteuerproblems betrachten. Dabei ist die Vergrößerung der Menge der zulässigen Paare ein typisches Vorgehen. Untersuchungen zu diesem Thema findet man z.B. in den Arbeiten von L. C. Young [31], A. D. Ioffe und V. M. Tichomirov [16], J. Warga [28], sowie von R. V. Gamkrelidze [12].
Eine andere Möglichkeit ist die Fortsetzung des Zielfunktionals zu einem unterhalbstetigen Funktional. Dies beschreibt z.B. T. Roubíček in seinen Arbeiten [21] und [22].
Beide Herangehensweisen werden von T. Roubíček in [20] und von J. E. Rubio in [26] berücksichtigt. Rubio verwertet und erweitert in seinem Buch die Ergebnisse einiger seiner früheren Arbeiten (siehe beispielsweise [23], [24] und [25]), in denen er eine neue Verallgemeinerung erstmals vorstellt. Dieses Buch bildet die Grundlage der vorliegenden Arbeit. Die spezielle Verallgemeinerung wird fortan mit Rubio-Verallgemeinerung bezeichnet.

Im Kapitel 2 werden die Originalaufgabe formuliert und die Verallgemeinerung abgeleitet. Dabei definiert jedes zulässige Paar $(x(\cdot), u(\cdot))$ des Originalproblems ein zugeordnetes lineares stetiges Funktional über einem Raum $C(\Omega)$. Die Verallgemeinerung des Originalproblems besteht nun darin, daß man nach linearen stetigen Funktionalen über $C(\Omega)$ sucht, die den Nebenbedingungen der zugeordneten Funktionale genügen.

Der zu behandelnde Aufgabentyp wird hier allerdings nach einem Ratschlag von L. Bittner durch Steuer-Zustandsbeschränkungen erweitert. Es zeigt sich, daß die Verallgemeinerung ähnlich wie bei Rubio [26] vor sich geht und teilweise auch theoretische Aussagen über Konvergenz und Existenz von Lösungen übernommen werden können.

Der Vergleich der Rubio-Verallgemeinerung mit der Relaxierung eines Optimalsteuerproblems, wie sie z.B. bei S. Butzek in [7] dargestellt ist, im Kapitel 3 stellt einen klaren Unterschied zu den Untersuchungen von Rubio heraus. Durch die zusätzlichen Steuer-Zustandsbeschränkungen kann in einigen Fällen eine sogenannte „Relaxationslücke“ zwischen dem Originalproblem und der Verallgemeinerung nachgewiesen werden.

Die Verallgemeinerung des Originalproblems erfolgt mit Hilfe von Testfunktionen und liefert ein unendlich-dimensionales lineares Optimierungsproblem. Eine endliche Auswahl der Testfunktionen und die Einschränkung des unterliegenden Raumes führen zu einem endlich-dimensionalen linearen Optimierungsproblem (kurz LOP genannt). Dies ist im Kapitel 4 beschrieben.

Die Einschränkung des unterliegenden Raumes wird einerseits wie bei Rubio [26] durch Untersuchung extremaler Punkte in der Menge der zulässigen Funktionale erreicht (siehe Kapitel 5).
Andererseits kann man auch nach Approximationen von positiven linearen stetigen Funktionalen fragen. Im Kapitel 6 werden zwei Typen von derartigen Approximationen vorgestellt.

Die Lösung des LOP nutzt man zur Konstruktion einer näherungsweise optimalen Steuerung sowie einer näherungsweise optimalen Trajektorie der Originalaufgabe. Diese Konstruktion wird im Kapitel 7 vorgeführt und es wird ein Güte-Kriterium für die Näherungslösung angegeben.

Das Beispiel im Kapitel 8 soll die Vorgänge bei der Rubio-Verallgemeinerung und bei der Konstruktion von Näherungslösungen verdeutlichen. Deshalb ist auch bewußt ein einfaches Beispiel gewählt worden.

Die lineare Optimierungsaufgabe, die man nach der Auswahl der Testfunktionen erhält (ohne Einschränkung des darunterliegenden Raumes), hat die Struktur einer Ky-Fan-Aufgabe (siehe z.B. [17] von Ky Fan).
Im Kapitel 9 werden notwendige und hinreichende Existenzkriterien solcher Aufgaben, Eigenschaften halbgeordneter Räume sowie ein Darstellungssatz von positiven linearen stetigen Funktionalen genutzt, um im Fall von L^1-Testfunktionen eine Lösung konstruktiv anzugeben.

Was ist nun im Vergleich zu den Arbeiten von Rubio vollkommen neu? Neu sind die folgenden Punkte:

1) Es werden Steuer-Zustandsbeschränkungen in die Originalaufgabe mit einbezogen.

2) Die Rubio-Verallgemeinerung wird mit einer speziellen Relaxierung eines Optimalsteuerproblems verglichen.

3) Die Approximierbarkeit der linearen stetigen Funktionale über $C(\Omega)$ durch diskrete Funktionale, d.h. durch Linearkombinationen von Dirac-Funktionalen bzw. intergralen Mittelwerten, wird konstruktiv begründet.

4) Es werden die Ky-Fan-Sätze über funktionale lineare Ungleichungen auf die Verallgemeinerung des Originalproblems angewandt. Zur Anwendung sind eine Reihe von theoretischen Aussagen entwickelt worden.

5) Das verallgemeinerte Problem, das in $C^*(\Omega)$ spielt, wird durch ein gleichartiges Problem in $L_1^*(\Omega)$ ersetzt, wodurch unter Umständen eine explizite formelmäßige Darstellung des optimalen Funktionals gewonnen werden kann.

6) Zahlreiche Ungenauigkeiten und Schlußfehler von Rubio wurden beseitigt und einige theoretische Ausführungen vereinfacht (insbesondere die Konstruktion der stetigen Hilfstrajektorie im Abschnitt 7.3).

Kapitel 2

Die Rubio-Verallgemeinerung eines Optimalsteuerproblems

2.1 Problemstellung

In der vorliegenden Arbeit werden Optimalsteuerprobleme der folgenden Form untersucht:
Minimiere das sogenannte **Zielfunktional**:

$$\int_a^b f_0(t, x(t), u(t))dt \tag{2.1}$$

über der Menge aller absolut stetigen n-dimensionalen Funktionen $x(\cdot)$ und aller Lebesgue-meßbaren r-dimensionalen Funktionen $u(\cdot)$, die den nachstehenden Bedingungen genügen:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad a \le t \le b \quad \text{f. ü.} \tag{2.2}$$

$$x(a) = x_a \qquad x(b) = x_b \tag{2.3}$$

$$g(t, x(t), u(t)) \ge 0 \quad a \le t \le b. \tag{2.4}$$

Außerdem wird

$$x(t) \in A \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r \quad \forall\, t \in [a, b] \tag{2.5}$$

gefordert sowie Kompaktheit von A und U vorausgesetzt. Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir folgende Bezeichnungen: $\Omega := I \times A \times U$ mit $I = [a, b]$. $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ besitze die Caratheodory-Eigenschaft, d.h. sie sei stetig in x und u sowie meßbar in t. Für die restlichen in der Aufgabenstellung vorkommenden Funktionen gelte: $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ sei stetig und $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ hinreichend glatt. 0 ist ein Element des $\mathbb{R}^m$ und die Relation $\geq$ komponentenweise zu verstehen. Da in dieser Arbeit immer wieder Bezug auf dieses Problem genommen wird, wollen wir es kurz mit **(OP)** bezeichnen. Außerdem werden wir ab jetzt die Formulierungen Optimalsteueraufgabe und Optimalsteuerproblem gleichbedeutend nebeneinander verwenden, um sprachliche Eintönigkeit zu vermeiden.

Bemerkung Die so gestellte Optimalsteueraufgabe ist ein spezieller Typ solcher Aufgaben. Andere Typen von Optimalsteuerproblemen findet man z.B. in [6], [9] oder [5].

Für das Problem (OP) definieren wir:

Definition 1 *Ein Paar* $p := (x(\cdot), u(\cdot))$ *von Funktionen heißt* **zulässig** *für* (OP), *wenn die Bedingungen* (2.2), (2.3), (2.4) *und* (2.5) *erfüllt sind.*

Üblicherweise nennt man $x(\cdot)$ die **Trajektorie**, die den Zustand eines Systems zu jedem Zeitpunkt beschreibt. Auf diesen Zustand läßt sich mittels der **Steuerung** $u(\cdot)$ Einfluß nehmen. Start- und Endzeitpunkt, a und b, sind fest vorgegeben. Die Bedingung (2.2) wird häufig als **Dynamik** bzw. **Bewegungsgleichung** bezeichnet. In unserem Fall liegt sie als System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung vor, das fast überall in $\text{int}(I) = (a, b)$ erfüllt sein muß. Die Caratheodory-Eigenschaft von f sichert die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(a) = x_a,$$

für zulässige Steuerungen $u(\cdot)$. Die Bedingung (2.4) stellt Steuer-Zustandsbeschränkungen dar. A heißt **Zustands-** und U **Steuerbereich**.

Bemerkung Steuer-Zustandsbeschränkungen tauchen in dem Ausgangsproblem von Rubio nicht auf. Diese Erweiterung wird hier nach einem Ratschlag von L. Bittner vorgenommen.

2.2 Die Rubio-Verallgemeinerung eines Optimalsteuerproblems

In diesem Kapitel wird die Verallgemeinerung des Optimalsteuerproblems (OP) nach Rubio vorgestellt. Die Idee dabei ist, die Menge der zulässigen Paare so zu vergrößern, daß für die neue Aufgabe sicher eine Lösung existiert.
Diese Verallgemeinerung ist von Rubio in einigen früheren Artikeln, z.B. in [23], [24] und [25], erstmals vorgestellt und in dem Buch [26] ausführlicher behandelt worden.
Wir wollen zunächst folgendes vereinbaren: Sei B eine offene Umgebung der Menge $I \times A$ im $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei weiterhin $C^1(B)$ der Raum der reellwertigen, beschränkten, stetig differenzierbaren Funktionen $\phi(\cdot)$, deren Ableitungen ebenfalls beschränkt sind. Diese Funktionen ϕ nennen wir **Funktionen vom Typ 1**.

Zu jeder Funktion ϕ definieren wir seine **formale Ableitung** $\phi^f : \Omega \to \mathbb{R}$ **bezüglich der Bewegungsgleichung** (2.2) durch

$$\phi^f(t,x,u) := \phi_x(t,x)f(t,x,u) + \phi_t(t,x) \quad \forall\ (t,x,u) \in \Omega. \tag{2.6}$$

Außerdem wollen wir reellwertige Funktionen $\psi(\cdot)$ mit folgenden Eigenschaften nutzen: Sie seien von $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^m$ abhängig, meßbar in t sowie hinreichend glatt und nichtfallend in jeder Komponente von y. Die so definierten Funktionen ψ nennen wir **Funktionen vom Typ 2**. Zu jeder Funktion ψ definieren wir ein $\psi^g : \Omega \to \mathbb{R}$ mittels

$$\psi^g(t,x,u) := \psi(t, g(t,x,u)). \tag{2.7}$$

Wenn $p = (x(\cdot), u(\cdot))$ ein zulässiges Paar der Optimalsteueraufgabe (OP) ist, dann folgt:

$$\begin{aligned} &\int_I \phi^f(t,x(t),u(t))dt = \int_I [\phi_x(t,x(t))f(t,x(t),u(t)) + \phi_t(t,x(t))]dt = \\ &\int_I \frac{d\phi}{dt}(t,x(t))dt = \phi(b,x_b) - \phi(a,x_a) =: \Delta\phi \end{aligned} \tag{2.8}$$

für jedes ϕ vom Typ 1 sowie

$$\begin{aligned} &\int_I \psi^g(t,x(t),u(t))dt = \int_I \psi(t,g(t,x(t),u(t)))dt \geq \\ &\int_I \psi(t,0)dt =: \Delta\psi \end{aligned} \tag{2.9}$$

für jedes ψ vom Typ 2. Das Ausgangsproblem kann in einem 1. Schritt wie folgt verallgemeinert (umformuliert) werden: Gesucht ist ein Λ_p, welches die Aufgabe

$$\begin{array}{rcll} \Lambda_p(f_0) & = & \text{min!} & \text{bei} \\ \Lambda_p(\phi^f) & = & \Delta\phi & \forall\ \phi \\ \Lambda_p(\psi^g) & \geq & \Delta\psi & \forall\ \psi \end{array} \tag{2.10}$$

löst. Dabei stellt Λ_p jeweils das folgende, durch ein Paar $p = (x(\cdot), u(\cdot))$ definierte, stetige lineare Funktional über $C(\Omega)$ (Raum der stetigen beschränkten Funktionen über Ω) dar:

$$\Lambda_p : F \in C(\Omega) \to \int_I F(t,x(t),u(t))dt \in \mathbb{R}.$$

Der Index p weist auf das unter dem Integral auftauchende Funktionenpaar $(x(\cdot), u(\cdot))$ hin. Man beachte, daß

$$|\Lambda_p(F)| \leq \text{mes}(I)\|F\| = (b-a)\|F\|, \quad \text{also} \quad \|\Lambda_p\| \leq \text{mes}(I) = b-a.$$

In einem 2. Schritt wird nun weiter verallgemeinert: Wir ersetzen in der vorigen Aufgabe das Λ_p durch beliebige positive Funktionale $\Lambda \in C^*(\Omega)$, wobei $C^*(\Omega)$ den Dualraum

zu $C(\Omega)$ bezeichnet. Damit stellt sich unser **verallgemeinertes Optimalsteuerproblem** endgültig wie folgt:
Gesucht ist ein positives Funktional Λ aus $C^*(\Omega)$, das die folgende Aufgabe löst

$$\left.\begin{array}{rclll} \Lambda(f_0) & = & \min! & \text{bei} & \\ \Lambda(\phi^f) & = & \Delta\phi & \forall\ \phi \text{ vom Typ 1,} & (2.11) \\ \Lambda(\psi^g) & \geq & \Delta\psi & \forall\ \psi \text{ vom Typ 2.} & (2.12) \end{array}\right\} \quad (2.13)$$

Bemerkung In allen anschließenden Ausführungen wollen wir der Kürze halber mit $C_+^*(\Omega)$ die Menge aller positiven linearen stetigen Funktionale über $C(\Omega)$ bezeichnen. Diese Funktionale haben die Eigenschaften:

- Sie sind monoton.
  Seien $F_1, F_2 \in C(\Omega)$ mit $F_1 \leq F_2$. Dann folgt $\Lambda(F_1) \leq \Lambda(F_2)$. Denn es gilt $F_2 - F_1 \geq 0$ und wegen der Positivität der Funktionale $\Lambda(F_2 - F_1) \geq 0$. Letztlich kommt die Linearität zum Tragen: $\Lambda(F_2) - \Lambda(F_1) \geq 0$, woraus sofort die Monotonie folgt.
- Sie sind beschränkt und es gilt mit der Funktion $1(z) = 1$, $\forall z \in \Omega$,
  $$\|\Lambda\| = \Lambda(1). \tag{2.14}$$
  Denn es gilt für jedes $F \in C(\Omega)$: $F(z) \leq 1(z)\|F\|\ \forall\ z \in \Omega$. Daraus folgt $\Lambda(F) \leq \|F\|\Lambda(1)$, also $\|\Lambda\| \leq \Lambda(1)$. Ferner ist $|\Lambda(1)| \leq \|1\|\|\Lambda\|$ und (2.14) ist bewiesen.

Die Verallgemeinerung der Originalaufgabe (OP) ist abgeschlossen. Nun gilt es, die verallgemeinerte Optimalsteueraufgabe (2.13) zu untersuchen.

2.3 Existenz einer Lösung des verallgemeinerten Optimalsteuerproblems

In diesem Abschnitt wird die Frage nach der Existenz einer Lösung der Aufgabe (2.13) beantwortet. Es stellt sich heraus, daß, unabhängig von der Existenz einer Lösung der ursprünglichen Optimalsteueraufgabe, (2.13) stets eine Lösung besitzt, wenn nur Ω kompakt ist.

Wie bei den Optimalsteuerproblemen wollen wir auch hier ein Funktional als **zulässig** bezeichnen, wenn alle Nebenbedingungen (2.11) und (2.12) erfüllt sind.
Nun zunächst zwei wichtige Definitionen.

Definition 2 *Sei S eine Teilmenge eines Hausdorff (oder separierten) topologischen Raumes X. S heißt* **kompakt**, *wenn sie die* **Eigenschaft des endlichen Durchschnitts** *besitzt, d.h. für jede Familie $\{F_\alpha\}_\alpha$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, bei der jede endliche Auswahl einen nichtleeren Durchschnitt hat, ist der gesamte Durchschnitt $\bigcap_\alpha F_\alpha$ ebenfalls nichtleer.*

Bemerkung

- Die in der vorigen Definition erwähnten Mengensysteme $\{F_\alpha\}_\alpha$ von abgeschlossenen Teilmengen, in welchen jede endliche Auswahl einen nichtleeren Durchschnitt besitzt, werden häufig auch zentrierte Mengensysteme genannt.
- Ist X der n-dimensionale euklidische Raum, so sind alle abgeschlossenen beschränkten Teilmengen kompakt.

Definition 3 *Eine Funktion $y : S \to \mathbb{R}$ heißt* **unterhalbstetig (uhs)** *im Punkt $s_0 \in S$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_\varepsilon(s_0)$ in S existiert, so daß $y(s_0) - y(s) < \varepsilon$ für alle $s \in U_\varepsilon(s_0)$. Wir sagen, die Funktion y ist* **unterhalbstetig in** *S, wenn sie in jedem Punkt von S unterhalbstetig ist.*

Satz 4 *Sei S eine kompakte Teilmenge des Hausdorff-Raumes X und die Funktion $y : S \to \mathbb{R}$ uhs in S. Dann gilt:*

(i) $\inf\limits_{s \in S} y(s) > -\infty$.

(ii) Es existiert ein Element $s_0 \in S$, so daß $y(s_0) \le y(s)$ für alle $s \in S$, d.h. y nimmt sein Infimum auf S an.

Dieses Kriterium ist gut bekannt, siehe z.B. [26].

Um den letzten Satz anwenden zu können, müssen wir demnach die benötigten Voraussetzungen schaffen. Dazu wählen wir in der Menge der linearen stetigen Funktionale $C^*(\Omega)$ die sogenannte schwach*- oder auch vage Topologie. Wir werden zeigen, daß für die Aufgabe (2.13) die Menge der zulässigen Funktionale kompakt und das Zielfunktional stetig in dieser Topologie ist.

Definition 5 *Sei die Familie von Halbnormen $p_F : C^*(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch*

$$p_F(\Lambda) := |\Lambda(F)|, \qquad \text{für alle } F \in C(\Omega), \tag{2.15}$$

gegeben. Die durch diese Familie auf dem Vektorraum $C^*(\Omega)$ definierte Topologie heißt **schwach*-** *oder auch* **vage Topologie**. *Eine Umgebungsbasis um den Nullpunkt von $C^*(\Omega)$ ist gegeben durch die Teilmengen*

$$U(\varepsilon; F_1, F_2, ..., F_J) := \{\Lambda \mid |\Lambda(F_j) < \varepsilon, \quad j = 1, 2, ..., J\}, \tag{2.16}$$

die durch alle $\varepsilon > 0$ und alle endlichen Teilmengen $\{F_j \in C(\Omega), j = 1, 2, ..., J\}$ bestimmt sind.

Bemerkung Häufig wird diese Topologie auch als Topologie der punktweisen Konvergenz bezeichnet, d.h. die Folge $\{\Lambda_i \in C^*(\Omega)\}_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen das Null-Funktional, wenn die Folgen $\{\Lambda_i(F)\}_{i \in \mathbb{N}}$ für alle F aus $C(\Omega)$ gegen die Zahl Null konvergieren.

In den sich anschließenden Ausführungen sind sämtliche topologische Begriffe, wie z.B. kompakt und stetig, immer im Sinne der schwach*-Topologie zu verstehen. Wir sind jetzt in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 6 *Sei in $C^*(\Omega)$ die schwach*-Topologie gegeben. Dann gilt:*

(i) Zu einer gegebenen Funktion $F \in C(\Omega)$ ist das Funktional $\Gamma_F : C^*(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma_F(\Lambda) = \Lambda(F) \quad \forall\, \Lambda \in C^*(\Omega) \tag{2.17}$$

stetig.

(ii) Die Menge der zulässigen Funktionale der Aufgabe (2.13) *(hier der Kürze halber mit Q bezeichnet) ist kompakt.*

Bemerkung Bevor wir mit dem Beweis beginnen, wollen wir noch auf den folgenden Fakt hinweisen: Unter den Testfunktionen vom Typ 1 befindet sich natürlich auch die Funktion $\phi(t,x) = t$. Folglich ist die Gleichung

$$\Lambda(1) = b - a \tag{2.18}$$

ebenfalls eine Nebenbedingung für das verallgemeinerte Optimalsteuerproblem. 1 stellt hier die 1-Funktion dar.

Beweis:

(i) Ausgehend von einer Basisumgebung der Null (2.16) hat eine Fundamental-Umgebung um ein beliebiges Funktional Λ_0 die Gestalt

$$\begin{aligned} U \;&:=\; U(\Lambda_0;\varepsilon;F_1,F_2,...,F_J) := \{\Lambda \in C^*(\Omega) \mid \\ &\qquad |\Lambda(F_j) - \Lambda_0(F_j)| < \varepsilon, j = 1,2,...,J\}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebigen endlichen Teilmengen $\{F_1, F_2, ..., F_J\}$ von Funktionen aus $C(\Omega)$. Stetigkeit von Γ_F in Λ_0 bedeutet: Für jedes $\delta > 0$ existiere eine Fundamental-Umgebung U, so daß für alle $\Lambda \in U$ gilt: $|\Gamma_F(\Lambda) - \Gamma_F(\Lambda_0)| < \delta$. Setzen wir einfach $\varepsilon = \delta$, $J = 1$, $F_1 = F$ und definieren U nach (2.19) als $U(\Lambda_0;\delta;F)$, dann gilt für alle Funktionale der resultierenden Umgebung $U = \{\Lambda \in C^*(\Omega) \mid |\Lambda(F) - \Lambda_0(F)| < \varepsilon\}$ das Geforderte.

(ii) Dieser Teil des Beweises wird der Übersichtlichkeit halber in mehreren Schritten durchgeführt. Zunächst werden folgende Mengen definiert:

- $Q := \{\Lambda \in C^*_+(\Omega) \mid \Lambda(F) = c_F, \Lambda(G) \geq c_G; \forall\, F;\ \forall\, G\}$, wobei F die Funktionen durchläuft, die sich aus denen vom Typ 1 nach der Formel (2.6) ergeben. c_F sind die dazugehörigen Konstanten, welche sich nach der Formel (2.8) berechnen. Entsprechendes gilt für G und c_G mit den Funktionen vom Typ 2 und den Formeln (2.7) sowie (2.9). Dies ist, wie im Satz bereits angegeben, die Menge der zulässigen Funktionale der Aufgabe (2.13).
- $Q_=$ sei die Teilmenge von $C^*_+(\Omega)$, die lediglich durch die Gleichungen mit den Funktionen vom Typ 1 definiert wird.

- Q_G sei die Teilmenge von $Q_=$, die durch eine Ungleichung mit einer Funktion G und der Konstanten c_G, welche sich wie oben aus der zugehörigen Testfunktion vom Typ 2 ergeben, definiert wird.
- $Q^* := \{\Lambda \in C^*(\Omega) \mid \|\Lambda\| \leq b-a\}$
- $\overline{Q} := \{\Lambda \in C_+^*(\Omega) \mid \Lambda(1) \leq b-a\}$
  Die 1 stellt hier wieder die 1-Funktion dar.
- Q_1 sei die Teilmenge von $\overline{Q}$, die sich ergibt, wenn statt des „$\leq$"-Zeichens ein Gleichheitszeichen steht.

Wir starten mit dem Beweis der Tatsache, daß die Menge $\overline{Q}$ kompakt ist. Dies nutzen wir aus, um die Kompaktheit von $Q_=$ zu zeigen. Anschließend wird Kompaktheit der Mengen Q_G nachgewiesen, woraus letztlich die Kompaktheit von Q folgt.

Ein bekannter Satz aus den Büchern [1] von H. Bauer oder [10] von N. Dunford und J. T. Schwartz besagt: Die Menge Q^* ist kompakt. Dann betrachten wir die Menge $\overline{Q}$. $\overline{Q}$ ist eine Teilmenge von Q^*, denn die Positivität von Λ und $\Lambda(1) \leq b-a$ ziehen wegen (2.14) $\|\Lambda\| \leq b-a$ nach sich.
$\overline{Q}$ ist in Q^* abgeschlossen oder anders ausgedrückt: $Q^* \backslash \overline{Q}$ ist eine offene Teilmenge von Q^*. Dies ist wie folgt einzusehen: Sei $\Lambda_1 \in Q^*$ kein Element von $\overline{Q}$. Damit ist dann Λ_1 entweder nicht positiv (d.h. $\exists\ F_1 \geq 0$ mit $\Lambda_1(F_1) < 0$) oder $\Lambda_1(1) > b-a$. In beiden Fällen gibt es eine Umgebung $U(\Lambda_1; \varepsilon; F_1)$ bzw. $U(\Lambda_1; \varepsilon; 1)$, die aus lauter Λ, welche nicht in $\overline{Q}$ liegen, besteht. Demzufolge ist $\overline{Q}$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge (eines kompakten Hausdorff-Raumes) kompakt.
Q_1 ist ebenfalls kompakt. (Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Teilmenge eines topologischen Raumes ist selbst wieder kompakt. Die Abgeschlossenheit ergibt sich aus der Tatsache, daß $\overline{Q} \backslash Q_1$ offen ist, was sich analog zu dem Obigen beweisen läßt.)

(2.18) aus der obigen Bemerkung liefert natürlicherweise $Q_= \subseteq Q_1$. Aufgrund der Kompaktheit von Q_1 ist also lediglich die Abgeschlossenheit von $Q_=$ zu zeigen. Diese ist aber klar, da $Q_=$ als Durchschnitt von lauter abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann:

$$Q_= = \bigcap_F \{\Lambda \in C_+^*(\Omega) \mid \Lambda(F) = c_F\},$$

und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist gerade wieder abgeschlossen. Der Durchschnitt wird über alle Funktionen F gebildet, die sich aus den Testfunktionen vom Typ 1 ableiten. Der Nachweis der Abgeschlossenheit der Mengen

$$\{\Lambda \in C_+^*(\Omega) \mid \Lambda(F) = c_F\}$$

erfolgt nach dem gleichen Schema wie vorher der Nachweis der Abgeschlossenheit von Q_1.

Wenden wir uns nun also der Menge Q_G zu. Da sie eine Teilmenge der kompakten Menge $Q_=$ ist, genügt es auch hier, nur die Abgeschlossenheit zu zeigen. Dies läuft exakt genauso wie beim Nachweis der Abgeschlossenheit von $\overline{Q}$ ab, soll aber der Vollständigkeit halber im Detail vorgeführt werden.
Zu zeigen ist also, daß $C^*(\Omega)\backslash Q_G$ offen ist, folglich auch $Q_=\backslash Q_G$ in $Q_=$ offen ist. Sei dazu Λ_1 nicht aus Q_G, d.h. es gilt $\Lambda_1(G) < c_G$ oder Λ_1 ist nicht positiv oder Λ_1 verletzt eine Gleichung, d.h. $\Lambda_1(F) \neq c_F$ für ein F. Wähle nun im ersten Fall $\varepsilon = \frac{c_G - \Lambda_1(G)}{2}$, $n = 1$ und $F_1 = G$. Dann folgt für alle Funktionale Λ der Umgebung $U(\Lambda_1; \varepsilon; F_1)$:

$$\Lambda(G) = \Lambda(F_1) < \varepsilon + \Lambda_1(F_1) = \frac{1}{2}(c_G + \Lambda_1(G)) < c_G.$$

Damit gibt es um Λ_1 eine ganze Umgebung, die nicht zu Q_G gehört. Falls Λ_1 nicht positiv ist, gibt es, wie schon oben erwähnt, eine Funktion $G \geq 0$ mit $\Lambda_1(G) < 0$. Dann wählen wir einfach $\varepsilon = |\Lambda_1(G)|$, $n = 1$ und $F_1 = G$. Dann folgt wieder für alle Λ der zugehörigen Umgebung $U(\Lambda_1; \varepsilon; F_1)$:

$$\Lambda(G) = \Lambda(F_1) < \varepsilon + \Lambda_1(F_1) = |\Lambda_1(G)| + \Lambda_1(G) = 0.$$

Also gibt es auch in diesem Fall um Λ_1 eine ganze Umgebung, die nicht zu Q_G gehört. Falls $\Lambda_1(F) \neq c_F$ für ein F ist, wollen wir annehmen $\Lambda_1(F) < c_F$ und wir können analog zum ersten Fall vorgehen. Ist $\Lambda_1(F) > c_F$, wählen wir $\varepsilon = \frac{\Lambda_1(F) - c_F}{2}$, $n = 1$ sowie $F_1 = F$ und argumentieren ähnlich wie vorher: Jedes $\Lambda \in U(\Lambda_1; \varepsilon; F_1)$ erfüllt

$$\Lambda(F) = \Lambda(F_1) > -\varepsilon + \Lambda_1(F_1) = \frac{1}{2}(c_F + \Lambda_1(F)) > c_F$$

und gehört folglich nicht zu Q_G. Demnach ist $C^*(\Omega)\backslash Q_G$ offen, was bedeutet, daß Q_G in $Q_=$ abgeschlossen ist. Letztendlich gilt für Q

$$Q = Q_= \bigcap \left(\bigcap_G Q_G \right),$$

wobei G die Funktionen durchläuft, die sich mit der Formel (2.7) aus den Testfunktionen des Typs 2 ergeben. Als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist Q somit auch abgeschlossen und mithin als Teil von $Q_=$ kompakt, womit der Beweis beendet ist.

$\square$

Kapitel 3

Die Rubio-Verallgemeinerung des relaxierten Problems

Die typische Vorgehensweise bei der Verallgemeinerung von Optimalsteueraufgaben ist die Vergrößerung der Menge der zulässigen Paare. Diese Vergrößerung kann in unterschiedlichem Maße geschehen. Wie stark bei der Rubio-Verallgemeinerung vergrößert wurde, wird in diesem Abschnitt angedeutet, indem mit einer Relaxierung der Originalaufgabe (OP), wie sie z.B. S. Butzek in [7] beschreibt, verglichen wird. Dabei werden wir feststellen, daß durch die Hinzunahme von Steuer-Zustandsbeschränkungen (2.4) ein wesentlicher Unterschied zu dem in [26] untersuchten Problem besteht.

3.1 Das relaxierte Problem

Das zu unserem Originalproblem (OP) nach [7] relaxierte Problem hat folgendes Aussehen:

$$\begin{gathered}
\int_a^b \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f_0(t, x(t), u_i(t))dt = \min_{x(\cdot),\alpha(\cdot),u(\cdot)} !\\
\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f(t, x(t), u_i(t)), \quad a \le t \le b\\
x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b\\
\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) g(t, x(t), u_i(t)) \ge 0, \quad a \le t \le b\\
x(t) \in A \subset \mathbb{R}^n, \quad u_i(t) \in U \subset \mathbb{R}^r,\ i = 1, 2, ..., n+1, \quad \forall\, t \in [a, b]\\
\alpha_i(t) \ge 0,\ i = 1, 2, ..., n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) = 1 \quad \forall\, t \in [a, b].
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Diese Relaxierung ist natürlich auch eine Verallgemeinerung der Orginalaufgabe. Man setze z.B. $\alpha_1(t) \equiv 1$ und $\alpha_i(t) \equiv 0$, $i = 2, ..., n+1$. Dann ist $u_1(\cdot)$ die einzig interessante gesuchte Steuerfunktion und wir erhalten die Originalaufgabe.

3.2 Vergleich des relaxierten Problems mit der Rubio-Verallgemeinerung

In welchem Verhältnis stehen nun die obige Relaxierung und die Rubio-Verallgemeinerung? Dazu schreiben wir die Ungleichungsnebenbedingungen unter Benutzung des Lemmas 35 aus dem Anhang um:

$$\int_a^b \chi_T(t) \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) g(t, x(t), u_i(t)) \geq 0 \quad \forall\, T \subseteq [a,b],\ T \text{ meßbar.}$$

χ_T ist die charakteristische Funktion von T. Sei nun p eine Abkürzung für das System $(x(\cdot), \alpha_1(\cdot), ..., \alpha_{n+1}(\cdot), u_1(\cdot), ..., u_{n+1}(\cdot))$ und Λ_p das dadurch über $C(\Omega)$ erzeugte Funktional mit den Werten

$$\Lambda_p(F) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) F(t, x(t), u_i(t)) dt \quad \forall\, F \in C(\Omega). \tag{3.2}$$

Sei wie vorher ϕ eine Testfunktion vom Typ 1 und ϕ^f die formale Ableitung bezüglich der Bewegungsgleichung (2.2). Wir definieren weiter

$$\phi_p^f(t, x, u_1, ..., u_{n+1}, \alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) := \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \phi^f(t, x, u_i).$$

Dann folgt aus dem relaxierten Problem folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_p(f_0) = \min_p \\
\text{bei} \quad &\int_a^b \tfrac{d}{dt}\phi(t, x(t))dt = \Delta\phi = \phi(b, x_b) - \phi(a, x_a) \\
\text{bzw.} \quad &\int_a^b [\phi_x(t, x(t)) \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f(t, x(t), u_i(t)) + \phi_t(t, x(t))] dt = \Delta\phi \\
\text{bzw.} \quad &\int_a^b \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) [\phi_x(t, x(t)) f(t, x(t), u_i(t)) + \phi_t(t, x(t))] dt = \Delta\phi \\
\text{bzw.} \quad &\int_a^b \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) \phi_p^f(t, x(t), u_i(t)) dt = \Delta\phi \\
\text{d.h.} \quad &\Lambda_p(\phi_p^f) = \Delta\phi \quad \forall\, \phi.
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\Lambda_p(\chi_T g) \geq 0 \quad \forall\, T \subseteq [a,b],\ T \text{ meßbar.}$$

Dies ist formal die gleiche Form wie die im 1. Schritt erreichte Verallgemeinerung (2.10) der Originalaufgabe (OP). Ersetzen wir Λ_p durch ein beliebiges positives Funktional Λ aus $C^*(\Omega)$, so gelangen wir wieder zu der Verallgemeinerung (2.13).

Seien Q_{OP} die Menge der zulässigen Paare $(x(\cdot), u(\cdot))$ für die Originalaufgabe (OP), Q_{RP} die Menge der zulässigen relaxierten Systeme $(x(\cdot), \alpha_1(\cdot), ..., \alpha_{n+1}(\cdot), u_1(\cdot), ...,$ $u_{n+1}(\cdot))$ der Aufgabe (3.1) und Q_{VP} die Menge der zulässigen Funktionale Λ von (2.13). Dann gilt $(x(\cdot), 1, 0, ..., 0, u(\cdot), ..., u(\cdot)) \in Q_{RP}$, $\Lambda_p \in Q_{VP}$ und mithin resultiert für die zugehörigen Infima:

$$\inf_{Q_{OP}} \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))dt \geq \inf_{Q_{RP}} \int_a^b \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f_0(t, x(t), u_i(t))dt \geq \inf_{Q_{VP}} \Lambda(f_0). \tag{3.3}$$

Zu dem Fall, daß keine Steuer-Zustandsbeschränkungen (2.4) im Originalproblem (OP) vorliegen, wird in [26] folgendes erwähnt: Prinzipiell ist es möglich, daß

$$\inf_{Q_{OP}} \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))dt > \inf_{Q_{VP}} \Lambda(f_0)$$

gilt. Ob dies allerdings tatsächlich vorkommt, ist ungeklärt. Das Gegenteil ist jedoch auch nicht bewiesen.

In der hier vorliegenden Arbeit liegt der Sachverhalt etwas anders. Aus [7] geht hervor, daß bei auftretenden Steuerzustandsbeschränkungen (2.4) sehr wohl eine sogenannte „Relaxationslücke“ zwischen dem Originalproblem (OP) und dem relaxierten Problem (3.1) entstehen kann, d.h. es gilt

$$\inf_{Q_{OP}} \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))dt > \inf_{Q_{RP}} \int_a^b \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f_0(t, x(t), u_i(t))dt.$$

Aus (3.3) geht dann sofort hervor, daß auch

$$\inf_{Q_{OP}} \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))dt > \inf_{Q_{VP}} \Lambda(f_0) \tag{3.4}$$

gilt. Beispiele für Probleme mit einer Relaxationslücke sowie Bedingungen für die Nichtexistenz einer solchen zwischen Originalproblem und relaxiertem Problem findet der Leser in [7]. Zum Verhältnis der Infima der relaxierten Aufgabe (3.1) und der verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe (2.13) sind dem Autor der vorliegenden Arbeit keine weiteren Aussagen bekannt.

Kapitel 4

Die Lösung des verallgemeinerten Steuerproblems

Das in den vorangegangenen Kapiteln hergeleitete verallgemeinerte Optimalsteuerproblem hatte folgende Gestalt:
Minimiere die lineare Funktion

$$\Lambda \to \Lambda(f_0) \tag{4.1}$$

über der Menge $Q \subset C_+^*(\Omega)$ von linearen stetigen positiven Funktionalen über $C(\Omega)$, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{rcll} \Lambda(\phi^f) & = & \Delta\phi & \forall\, \phi \\ \Lambda(\psi^g) & \geq & \Delta\psi & \forall\, \psi, \end{array} \tag{4.2}$$

wobei die Funktionen ϕ vom Typ 1 und die Funktionen ψ vom Typ 2 waren.
Dieses lineare Optimierungsproblem ist unendlich-dimensional, denn der Raum $C^*(\Omega)$ ist nicht endlich-dimensional und auch die Anzahl der Gleichungen bzw. Ungleichungen in (4.2) ist nicht endlich. Es besteht nun die Möglichkeit, die Lösung eines solchen unendlich-dimensionalen linearen Optimierungsproblems durch die Lösung eines endlich-dimensionalen linearen Optimierungsproblems von hinreichend großer Dimension anzunähern. Um so ein endlich-dimensionales Problem zu erhalten, muß man demnach sowohl die Gleichungen (4.2) auf eine endliche Anzahl einschränken wie auch zu einem Teilraum von $C^*(\Omega)$ kleinerer Dimension übergehen.
Den ersten Punkt können wir dadurch erfüllen, daß wir uns auf eine endliche Anzahl von solchen Funktionen des jeweiligen Typs beschränken, deren Linearkombinationen in einem gewissen approximativen Sinn gleichmäßig dicht in dem entsprechenden Funktionenraum liegen. (Im Fall Typ 2 interessieren nur die nichtnegativen Linearkombinationen.) Man nehme z.B. die Monome in t und den einzelnen Komponenten der Zustandsvariablen x als Testfunktionen vom Typ 1 und die Funktionen aus der Definition (A.1) im Anhang A.1 als Testfunktionen vom Typ 2.

4.1 Eine erste Diskretisierung des verallgemeinerten Optimalsteuerproblems

Im folgenden nehmen wir an, daß ϕ_i $(i = 1, 2, ...)$ Testfunktionen vom Typ 1 sind, deren lineare Hülle dicht im Sinne der Norm

$$\|\phi\| = \max_{(t,x)\in B} |\phi(t,x)| + \max_{(t,x)\in B} |\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)| + \max_{(t,x)\in B} |\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x)|$$

im Raum $C^1(B)$ ist. Desgleichen nehmen wir an, daß die lineare Hülle von Testfunktionen ψ_j $(j = 1, 2, ...)$ vom Typ 2 dicht in $C(I \times \mathbb{R}^m)$ bezüglich der Maximumsnorm ist.

Damit wollen wir zunächst folgende in einem ersten Schritt diskretisierte Variante des verallgemeinerten Optimalsteuerproblems betrachten (Funktionale und Funktionen besitzen die gleichen Eigenschaften wie vorher):

$$\begin{array}{rcll} \Lambda(f_0) & = & \min! & \Lambda \in C_+^*(\Omega) \quad \text{bei} \\ \Lambda(\phi_i^f) & = & \Delta\phi_i & \forall\, i = 1, 2, ..., M_1 \\ \Lambda(\psi_j^g) & \geq & \Delta\psi_j & \forall\, j = 1, 2, ..., M_2. \end{array} \tag{4.3}$$

Die Menge der zulässigen Funktionale für die nicht diskretisierte Aufgabe werde wie vorher mit Q bezeichnet (also die Funktionale aus $C_+^*(\Omega)$, die die Bedingungen (4.2) erfüllen). Sie sei nicht leer. Die Menge der zulässigen Funktionale für die Aufgabe (4.3) bezeichnen wir mit $Q(M_1, M_2)$. $Q(M_1, 0)$ bezeichne die Menge der Funktionale Λ, welche nur Gleichungen erfüllen.

Lemma 7 *Seien* $\eta(M_1, M_2) := \inf_{Q(M_1,M_2)} \Lambda(f_0)$ *und* $\eta := \inf_Q \Lambda(f_0) > -\infty$. *Dann konvergiert* $\eta(M_1, M_2)$ *für* $M_1 \to \infty$ *und* $M_2 \to \infty$ *nach* η.

Beweis:

(i) Als erstes wollen wir nachweisen, daß die Folge $\{\eta(M_1, M_2); M_1, M_2 \in \mathbb{N}\}$ einen Grenzwert besitzt, wenn M_1 und M_2 jeweils nach unendlich streben.
Dazu führen wir zunächst eine Halbordnung „$\leq$" in der Menge aller Paare (i, k) aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ein, indem wir folgendes festlegen:
$(i, k) \leq (i', k')$ genau dann, wenn $i \leq i'$ und $k \leq k'$.
Betrachten wir nun zwei beliebige Paare (M_1, M_2) und (M_1', M_2') mit $(M_1, M_2) \leq (M_1', M_2')$, dann gilt offensichtlich für die zugehörigen Mengen von zulässigen Funktionalen

$$Q(M_1, M_2) \supseteq Q(M_1', M_2') \supseteq Q. \tag{4.4}$$

Daraus ergibt sich sofort für die entsprechenden Infima

$$\eta(M_1, M_2) \leq \eta(M_1', M_2') \leq \eta. \tag{4.5}$$

Halten wir ein beliebiges M_1 fest, so folgt die Konvergenz der Folge $\{\eta(M_1, M_2) \mid M_2 \in \mathbb{N}\}$, weil sie nichtfallend und nach oben durch η beschränkt ist. Sei deshalb

$$\zeta(M_1) := \lim_{M_2 \to \infty} \eta(M_1, M_2).$$

Aus (4.5) folgt offensichtlich

$$\zeta(M_1) \leq \eta \quad \forall\, M_1$$

und

$$\zeta(M_1) \leq \zeta(M_1') \quad \forall\, M_1 \leq M_1'.$$

Diese beiden Ungleichungen zeigen, daß die Folge $\{\zeta(M_1) \mid M_1 \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt und nichtfallend, mithin konvergent ist. Bezeichnen wir ihren Grenzwert mit ζ, also $\zeta := \lim\limits_{M_1 \to \infty} \zeta(M_1)$, so gilt nach der vorletzten Ungleichung $\zeta \leq \eta$.

(ii) Abschließend bleibt noch zu zeigen, daß $\zeta = \eta$ ist. Dazu vergleichen wir die Mengen Q und

$$P := \bigcap_{M_1=1}^{\infty} \bigcap_{M_2=1}^{\infty} Q(M_1, M_2).$$

Klar ist die Inklusion $Q \subset P$. Die umgekehrte Inklusion wollen wir indirekt nachweisen, d.h. wir wollen annehmen $\Lambda \notin Q$, aber $\Lambda \in P$. Wenn Λ nicht aus Q ist, so können 2 Fälle auftreten:

1. Fall: Es existiert eine Funktion ϕ_* vom Typ 1 mit $\Lambda(\phi_*^f) \neq \Delta\phi_*$. $\Lambda \in P$ bedeutet $\Lambda(\phi^f) = \Delta\phi$ für alle Funktionen ϕ_i und mithin auch für alle Funktionen ϕ, die in dem Unterraum liegen, der durch die Menge $\{\phi_i \mid i = 1, 2, ...\}$ linear aufgespannt wird. Diese Linearkombinationen der ϕ_i liegen nach Voraussetzung gleichmäßig dicht in $C^1(B)$. Also gibt es daraus eine Folge $\{\phi_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen ϕ_* konvergiert. Daraus erhalten wir, daß die Suprema $\sup\limits_B |\frac{\partial}{\partial t}\phi_*(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\phi_i^*(t,x)|$, $\sup\limits_B \|\frac{\partial}{\partial x}\phi_*(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\phi_i^*(t,x)\|$ und $\sup\limits_B |\phi_*(t,x) - \phi_i^*(t,x)|$ gegen Null konvergieren, falls i gegen unendlich strebt. Demnach folgt

$$\begin{aligned}
|\Lambda(\phi_*^f) - \Delta\phi_*| &= |\Lambda(\phi_*^f) - \Lambda(\phi_i^{*f}) + \Delta\phi_i^* - \Delta\phi_*| \\
&= |\Lambda(\frac{\partial}{\partial t}\phi_* - \frac{\partial}{\partial t}\phi_i^*) + \Lambda([\frac{\partial}{\partial x}\phi_* - \frac{\partial}{\partial x}\phi_i^*]f) \\
&\quad + \Delta\phi_i^* - \Delta\phi_*| \\
&\leq |\Lambda(\frac{\partial}{\partial t}\phi_* - \frac{\partial}{\partial t}\phi_i^*)| + |\Lambda([\frac{\partial}{\partial x}\phi_* - \frac{\partial}{\partial x}\phi_i^*]f)| \\
&\quad + |\Delta\phi_i^* - \Delta\phi_*| \\
&\leq \Lambda(\sup_B |\frac{\partial}{\partial t}\phi_*(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\phi_i^*(t,x)|) \\
&\quad + \Lambda(\sup_B \|\frac{\partial}{\partial x}\phi_*(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\phi_i^*(t,x)\| \sup_\Omega \|f(t,x,u)\|) \\
&\quad + 2\sup_B |\phi_*(t,x) - \phi_i^*(t,x)| \\
&= K \sup_B |\frac{\partial}{\partial t}\phi_*(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\phi_i^*(t,x)| \\
&\quad + K \sup_B \|\frac{\partial}{\partial x}\phi_*(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\phi_i^*(t,x)\| \sup_\Omega \|f(t,x,u)\| \\
&\quad + 2\sup_B |\phi_*(t,x) - \phi_i^*(t,x)|,
\end{aligned}$$

was wegen der obigen Bemerkungen für $i \to \infty$ gegen Null strebt. K steht in der letzten Gleichung anstelle von $\Lambda(1)$. Also gilt $|\Lambda(\phi_*^f) - \Delta\phi_*| = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Bemerkung In der obigen Rechnung wurden die Monotonie und die Beschränktheit von Λ ausgenutzt.

2. Fall: Es existiert eine Funktion ψ_* vom Typ 2 mit $\Lambda(\psi_*^g) < \Delta\psi_*$. Dieser Fall kann analog zum Fall 1 zum Widerspruch geführt werden.

Folglich ist die Annahme, $\Lambda \notin Q$, zu verwerfen. Damit gilt $P \subset Q$ und mithin $P = Q$.

Im sich anschließenden Kapitel wird die Kompaktheit der Mengen $Q(M_1, M_2)$ nachgewiesen und aus dem Satz 6 wissen wir, daß das Funktional $\Gamma_{f_0} : C_+^*(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma_{f_0}(\Lambda) = \Lambda(f_0)$, $\Lambda \in C_+^*(\Omega)$, stetig ist. Folglich gibt es zu jedem $M_2 \in \mathbb{N}$ ein Funktional Λ_{M_2} aus $Q(M_1, M_2)$ mit

$$\Lambda_{M_2}(f_0) = \Gamma_{f_0}(\Lambda_{M_2}) = \inf_{\Lambda \in Q(M_1, M_2)} \Gamma_{f_0}(\Lambda).$$

Die Menge $Q(M_1, 0)$ ist natürlich auch kompakt und enthält jedes $Q(M_1, M_2)$. Mithin ist das Bild dieser Menge unter der Abbildung Γ_{f_0} kompakt in $\mathbb{R}$ und enthält jedes $\eta(M_1, M_2)$. Also liegt der Grenzwert $\zeta(M_1)$ ebenfalls in diesem Bild. Somit existiert in $Q(M_1, 0)$ ein Funktional Λ^{M_1} mit $\Gamma_{f_0}(\Lambda^{M_1}) = \zeta(M_1)$. Wir wollen uns Λ^{M_1} genauer ansehen. Angenommen, Λ^{M_1} ist kein Element von

$$Q(M_1) := \bigcap_{M_2=1}^{\infty} Q(M_1, M_2).$$

Das bedeutet, es gibt eine natürliche Zahl $\overline{M}_2$ mit $\Lambda^{M_1} \notin Q(M_1, \overline{M}_2)$. Nun ist aber die Bildmenge $\Gamma_{f_0}(Q(M_1, \overline{M}_2))$ kompakt in $\mathbb{R}$. $Q(M_1, \overline{M}_2)$ enthält jedes $Q(M_1, M_2)$ mit $M_2 \geq \overline{M}_2$. $\Gamma_{f_0}(Q(M_1, \overline{M}_2))$ enthält daher jedes $\eta(M_1, M_2)$ mit $M_2 \geq \overline{M}_2$, also auch den Grenzwert $\lim\limits_{M_2 \to \infty} \eta(M_1, M_2) = \zeta(M_1)$. Demnach ist auch $\zeta(M_1)$ ein Element dieser Bildmenge. Daraus folgt, daß Λ^{M_1} ein Element von $Q(M_1, \overline{M}_2)$ ist, was im Widerspruch zur Annahme steht. Somit ist Λ^{M_1} ein Element der Menge $Q(M_1)$, woraus sich

$$\Lambda^{M_1}(f_0) = \Gamma_{f_0}(\Lambda^{M_1}) \geq \inf_{\Lambda \in Q(M_1)} \Gamma_{f_0}(\Lambda) = \inf_{\Lambda \in Q(M_1)} \Lambda(f_0)$$

ergibt. Für jedes $M_2 \in \mathbb{N}$ ist $Q(M_1, M_2) \supseteq Q(M_1)$ und somit $\eta(M_1, M_2) \leq \inf\limits_{\Lambda \in Q(M_1)} \Lambda(f_0)$. Hieraus erhalten wir $\Gamma_{f_0}(\Lambda^{M_1}) \leq \inf\limits_{\Lambda \in Q(M_1)} \Gamma_{f_0}(\Lambda)$ und wegen der obigen Ungleichung $\Gamma_{f_0}(\Lambda^{M_1}) = \inf\limits_{\Lambda \in Q(M_1)} \Gamma_{f_0}(\Lambda) = \zeta(M_1)$. Also ist die Gleichung

$$\zeta(M_1) = \lim_{M_2 \to \infty} \inf_{\Lambda \in Q(M_1, M_2)} \Lambda(f_0) = \inf_{\Lambda \in Q(M_1)} \Lambda(f_0)$$

bewiesen. Analog läßt sich die Gleichung

$$\lim_{M_1 \to \infty} \inf_{\Lambda \in Q(M_1)} \Lambda(f_0) = \inf_{\Lambda \in P} \Lambda(f_0)$$

beweisen. Insgesamt ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\zeta &= \lim_{M_1 \to \infty} \lim_{M_2 \to \infty} \inf_{\Lambda \in Q(M_1, M_2)} \Lambda(f_0) = \\
&= \lim_{M_1 \to \infty} \inf_{\Lambda \in Q(M_1)} \Lambda(f_0) = \\
&= \inf_{\Lambda \in P} \Lambda(f_0) = \inf_{\Lambda \in Q} \Lambda(f_0) = \\
&= \eta,
\end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist.

□

Hiermit wäre die erste Stufe der Diskretisierung des unendlich-dimensionalen Optimierungsproblems abgeschlossen und wir können uns der Menge der zulässigen Funktionale zuwenden.

4.2 Eine zweite Diskretisierung des verallgemeinerten Optimalsteuerproblems

Es ist nun möglich, ein endlich-dimensionales lineares Optimierungsproblem aufzustellen, welches auf der einen Seite eine Lösung mit einer einfachen Struktur besitzt und auf der anderen Seite das Optimierungsproblem (4.3) vorgegeben gut approximiert.

O.B.d.A. werde nun vorausgesetzt, daß $\phi_1 = t$, also $\phi_1^f = 1$ für $(t, x, u) \in \Omega$ und damit $\Lambda(1) = \Delta t = b - a$ ist. Für die Tripel (t, x, u) werden wir ab jetzt kürzer z schreiben. Aus einem Resultat von **Rosenbloom**, siehe dazu [19], folgt das nachstehende Lemma.

Lemma 8 *Es existiert ein Funktional $\Lambda^* \in Q(M_1, M_2)$, das die Optimierungsaufgabe (4.3) löst und die Form*

$$\Lambda^* = \sum_{k=1}^{M_1+M_2} \alpha_k^* \delta(z_k^*) \tag{4.6}$$

besitzt, mit Punkten $z_k^* \in \Omega$ und Koeffizienten $\alpha_k^* \geq 0$, $k = 1, ..., M_1 + M_2$. Dabei bezeichnet $\delta(z) \in C_+^*(\Omega)$ das Dirac-Funktional zum Punkt z.

Die Herleitung dieses Lemmas wird im nächsten Abschnitt dargelegt, in dem Mengen von Funktionalen auf extremale Punkte untersucht werden.
Mit dem obigen Lemma ist das weitere Vorgehen zur Gewinnung eines endlich-dimensionalen Problems klar. Das diskretisierte Problem (4.3) kann durch ein nichtlineares ersetzt werden, in dem die Koeffizienten α_k^* und die Punkte z_k^*, $k = 1, ..., M_1 + M_2$, die Unbekannten sind.
Um wieder zu einem linearen Problem zurückzugelangen, wählt man nun aus einer abzählbar dichten Teilmenge ω von Ω hinreichend viele Punkte $z_1, z_2, ..., z_N$ aus und optimiert dann nur noch die Koeffizienten α_k^*, $k = 1, ..., N$. Bei der Auswahl der Punkte $z_1, z_2, ..., z_N$ sollte darauf geachtet werden, daß jeder Punkt z aus Ω hinreichend nahe bei einem z_k, $k \in \{1, ..., N\}$, liegt.

Lemma 9 *Sei ω eine abzählbar dichte Teilmenge von Ω. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Funktional $\Lambda_\varepsilon \in C_+^*(\Omega)$, so daß folgende Ungleichungen erfüllt sind:*

$$\begin{array}{rcll} |(\Lambda_\varepsilon - \Lambda^*)(f_0)| & < & \varepsilon, & \\ |(\Lambda_\varepsilon - \Lambda^*)(\phi_i^f)| & < & \varepsilon, & i = 1, ..., M_1 \\ |(\Lambda_\varepsilon - \Lambda^*)(\psi_j^g)| & < & \varepsilon, & j = 1, ..., M_2. \end{array} \tag{4.7}$$

Das Funktional Λ_ε hat die Gestalt

$$\nu = \sum_{k=1}^{M_1+M_2} \alpha_k^* \delta(z_k),$$

wobei die Koeffizienten α_k^* *dieselben wie im optimalen Funktional* (4.6) *sind und* $z_k \in \omega, k = 1, ..., M_1 + M_2$.

Dieses Ergebnis ist anschaulich und unmittelbar klar, weil zu jedem z_k^* ein hinreichend nahe bei z_k^* gelegenes Element z_k aus ω existiert, so daß $|F(z_k^*) - F(z_k)| \ll 1$ ist für jedes F aus der Menge $\{f_0, \phi_1^f, ..., \phi_{M_1}^f, \psi_1^g, ..., \psi_{M_2}^g\}$. Der Beweis ist außerdem verständlich in [26] dargestellt.

Aufgrund der beiden Lemmata (8) und (9) kann das folgende lineare Optimierungsproblem, das bezüglich der Nebenbedingungen eine Abschwächung von (4.3) darstellt, begründet untersucht werden: Gegeben sind eine Zahl $\varepsilon > 0$ und Punkte $z_k \in \omega, k = 1, ..., N$. Dann stellen wir die folgende Aufgabe:

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_0(z_k) = \min_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N} !$$

$$\begin{array}{rcll} \alpha_k & \geq & 0, & k = 1, ..., N, \\ -\varepsilon & \leq & \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_i^f(z_k) - \Delta\phi_i \leq \varepsilon, & i = 1, ..., M_1, \\ -\varepsilon & \leq & \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \psi_j^g(z_k) - \Delta\psi_j, & j = 1, ..., M_2. \end{array} \tag{4.8}$$

Bemerkung Man beachte, daß die Elemente $z_k, k = 1, ..., N$, jetzt fest gewählt sind. Die einzigen Unbekannten sind die $\alpha_k, k = 1, ..., N$. D.h. das so entstandene lineare Optimierungsproblem hat $2M_1 + M_2$ Ungleichungen und N Unbekannte.
Hierfür gilt der folgende Satz:

Satz 10 *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *besitzt die Aufgabe* (4.8) *eine Lösung* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_N^*$. *Diese Lösung erfüllt die Ungleichung*

$$\eta(M_1, M_2) + \rho(\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^* f_0(z_k) \leq \eta(M_1, M_2) + \varepsilon, \tag{4.9}$$

wobei $\rho(\varepsilon)$ *nach Null strebt für* ε *gegen Null.*

Bemerkung Der Satz besagt, daß die Lösung des endlich-dimensionalen linearen Optimierungsproblems als Näherung für das ursprüngliche, unendlich-dimensionale Problem genutzt werden kann, wenn nur die Berechnungen hinreichend exakt und die Zahlen N, M_1 und M_2 hinreichend groß sind. Das so gewonnene optimale Funktional hat die Eigenschaft, daß der Wert $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^* f_0(z_k)$ nahe bei $\inf_Q \Lambda(f_0)$ ist und viele der Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen gut erfüllt sind.

Auch der Beweis dieses Satzes kann trotz der modifizierten Aufgabenstellung analog wie in [26] durchgeführt werden.

Kapitel 5

Die Struktur eines extremalen Funktionals

In diesem Abschnitt wird die Struktur eines extremalen Funktionals in der Menge der zulässigen Funktionale der diskretisierten verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe (4.3) hergeleitet. Diese Menge ist durch Gleichungen und Ungleichungen definiert, so daß wir uns für Eigenschaften der extremalen Punkte in solchen Mengen interessieren werden.
Sei auch hier mit $C_+^*(\Omega)$ die Menge der positiven linearen stetigen Funktionale über $C(\Omega)$ bezeichnet, wobei Ω (wie in diesem gesamten Abschnitt) ein kompakter topologischer Hausdorff-Raum ist. In solchen Räumen gilt der **Riesz'sche Darstellungssatz**:

Satz 11 *Sei $\Lambda \in C_+^*(\Omega)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes positives reguläres Borel-Maß μ auf Ω, so daß*

$$\Lambda(F) = \int\limits_{\Omega} F(z) d\mu(z) = \int\limits_{\Omega} F(z) d\mu \quad \forall\, F \in C(\Omega). \tag{5.1}$$

Bemerkung Häufig schreibt man auch $\mu(F)$ anstelle des zweiten Integrals in (5.1). Im folgenden werden wir diese Schreibweise ebenfalls verwenden.

Den Beweis dieses Satzes findet man in verschiedenen Büchern über Funktionalanalysis oder Maßtheorie. Ausführlich ist er auch in [26] nachzulesen.
Der Satz läßt sich auf lokalkompakte Räume und Maße mit kompakten Trägern erweitern. Diese Erweiterung kann in demselben Buch nachgelesen werden.

5.1 Durch Gleichungen definierte Mengen

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz kann man statt der Mengen von linearen stetigen Funktionalen Mengen von regulären Borel-Maßen betrachten. In dem gerade erwähnten Buch werden die Untersuchungen an Mengen von regulären Borel-Maßen vorgenommen, die nur Gleichungen als Nebenbedingungen zu erfüllen haben. Für diese Mengen folgen wir den Ausführungen von Rubio aus [26] und erweitern im Anschluß die Aussage über die Struktur eines extremalen Maßes auf Mengen von Funktionalen, die Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen zu erfüllen haben.

Zunächst starten wir mit der Definition von extremalen Mengen und Punkten.

Definition 12 *Sei X ein Vektorraum, B eine Teilmenge von X und C eine nichtleere Teilmenge von B. C heißt extremal in oder von B, wenn aus x_1, $x_2 \in B$ und $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$ folgt, daß auch x_1 und x_2 aus C sind. Besteht C lediglich aus einem Punkt x, dann heißt x Extrempunkt oder extremaler Punkt in oder von B.*

Bemerkung

(i) Ist ein Punkt x nicht extremal in einer Menge B, so ist es immer möglich, zwei solche Punkte x_1 und x_2, $x_1 \neq x_2$, in B zu finden, daß x sich als $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ darstellen läßt.

(ii) Jede Teilmenge eines Vektorraumes ist in sich selbst extremal.

(iii) Ist Λ ein stetiges lineares Funktional auf einer kompakten Teilmenge E eines Hausdorff-Raumes, so nimmt Λ sein Infimum c auf E an. Die Menge $E_0 = \{F \in E \mid \Lambda(F) = c\}$ ist eine kompakte extremale Teilmenge in E.
Dies ist leicht zu begründen: Die Kompaktheit von E_0 rührt daher, daß E_0 als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{c\}$ unter der stetigen Abbildung Λ auch abgeschlossen ist und jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst auch kompakt ist.
Dann wollen wir annehmen, E_0 wäre nicht extremal in E. Dies bedeutet, es existiert ein Element F^* in E_0 mit $\theta F_1 + (1-\theta)F_2 = F^*$, wobei $0 < \theta < 1$ und F_1 oder F_2 nicht aus E_0 ist, o.B.d.A. sei $F_2 \notin E_0$. Also gilt

$$\begin{aligned}\Lambda(F_2) &> \min_{F\in E}\Lambda(F)\\ \Lambda(F_1) &\geq \min_{F\in E}\Lambda(F).\end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Ungleichung mit $1-\theta$, die zweite mit θ und addieren die beiden neuen Ungleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\min_{F\in E}\Lambda(F) &= \Lambda(F^*) = \theta\Lambda(F_1) + (1-\theta)\Lambda(F_2) > \\ &> \theta\min_{F\in E}\Lambda(F) + (1-\theta)\min_{F\in E}\Lambda(F) = \min_{F\in E}\Lambda(F),\end{aligned}$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

(iv) Seien E eine extremale Teilmenge in einer Menge B und E_0 wiederum eine extremale Teilmenge in E. Dann ist E_0 auch extremal in B.
Um dies zu zeigen, betrachten wir ein Element F aus E_0. Angenommen, F wäre nicht extremal in B. In diesem Fall gibt es zwei Elemente F_1 und F_2 in B, die nicht beide zu E_0 gehören, mit $F = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2$. F ist aber auch nach Definition ein Element von E, weil E_0 extremal in E ist. E ist extremal in B. Demzufolge sind F_1 und F_2 Elemente von E. Da E_0 extremal in E ist, müssen F_1 und F_2 Elemente von E_0 sein, was der Annahme widerspricht.

Wir formulieren nun eine Existenzaussage über extremale Punkte. Mit $\mathcal{M}(\Omega)$ wollen wir fortan die Menge aller regulären Borel-Maße auf Ω bezeichnen.

Satz 13 *Sei M eine nichtleere schwach*-kompakte Teilmenge des Raumes $\mathcal{M}(\Omega)$. Dann besitzt M mindestens einen extremalen Punkt.*

Beweis: In der Familie $\mathfrak{M}$ aller kompakten extremalen Teilmengen in M läßt sich durch Mengeninklusion eine Ordnung einführen. M selbst ist ebenfalls eine kompakte extremale Menge in M, gehört somit auch zu der Familie. $\mathfrak{M}$ ist demnach nicht leer. Seien $\bar{\mathfrak{M}}$ eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$ und $\bar{N} = \bigcap_{N \in \bar{\mathfrak{M}}} N$. Dann ist auch $\bar{N} \in \mathfrak{M}$ und $\bar{N}$ eine untere Schranke für $\bar{\mathfrak{M}}$. (Dies ist so einzusehen: Aus der Charakterisierung kompakter Mengen in topologischen Räumen durch die endliche Durchschnittseigenschaft (siehe z.B. Satz 157.6 aus [?]) ergibt sich, daß $\bar{N}$ nicht leer sein kann. $\bar{N}$ ist abgeschlossen, also auch kompakt. Bleibt noch nachzuprüfen, ob $\bar{N}$ auch extremal in M ist. Seien dazu μ_1 und μ_2 zwei Elemente aus M und sei $\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \in \bar{N}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$. Damit gilt aber auch $\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \in N$ für alle $N \in \bar{\mathfrak{M}}$, woraus wegen der Extremalität der einzelnen Mengen $\mu_1 \in N$ und $\mu_2 \in N$ geschlossen werden kann. Also sind μ_1 und μ_2 Elemente von $\bar{N}$.) Nach dem Zornschen Lemma gibt es demnach ein minimales Element M_0 in $\mathfrak{M}$. Wir wollen zunächst annehmen, daß es in M_0 wenigstens zwei voneinander verschiedene Elemente μ_0 und ν_0 gibt. Das bedeutet, es existiert eine Funktion $F \in C(\Omega)$ mit $\mu_0(F) \neq \nu_0(F)$. Betrachtet man das Funktional $\Lambda_F : M_0 \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda_F(\mu) := \mu(F)$, so kann man die Aussage aus der obigen dritten Bemerkung anwenden. Es müßte demnach in M_0 eine echte Teilmenge M_{00} geben, die kompakt und extremal in M_0 ist. Entsprechend der vierten Bemerkung ist M_{00} auch extremal in M. Dies widerspricht jedoch der Minimalität von M_0, was bedeutet: M_0 ist einelementig und dieser eine Punkt ist Extrempunkt.

□

Satz 14 *Seien C eine schwach*-kompakte konvexe Menge in $\mathcal{M}(\otimes)$ und $F \in C(\Omega)$. Dann nimmt das lineare Funktional $\Lambda_F : C \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda_F(\mu) := \mu(F)$ sein Minimum u.a. in einem Extrempunkt von C an.*

Der Beweis ist im Buch [26] verständlich dargelegt.

Wie in den Funktionalräumen verwenden wir auch in $\mathcal{M}(\Omega)$ die schwach*-Topologie, die durch eine Basis von Umgebungen $U_{\varepsilon;F_1,\dots,F_r}$ der Null wie in Formel (2.19) in $\mathcal{M}(\Omega)$ definiert ist.

In dem Buch [13] über lineare Optimierung werden im Kapitel 3 extremale Punkte von zulässigen Mengen linearer Gleichungssysteme untersucht. Eine der dort formulierten Aussagen soll hier in einem Lemma wiedergegeben werden. Der zugehörige Beweis ist in dem Buch gut dargelegt und wird deshalb in dieser Arbeit weggelassen.

Lemma 15 *Seien $P \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n < m$, und $Q \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Weiter sei K die Menge aller derjenigen $x \in \mathbb{R}^m$, die das Gleichungssystem $Px = Q$ lösen und deren Komponenten alle größer oder gleich Null sind. Ist nun $\overline{x} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_m)^T$ ein Extrempunkt von K, dann bilden die zu den positiven Komponenten $\overline{x}_i$ gehörigen Spalten der Matrix P eine linear unabhängige Menge. Daraus folgt, daß höchstens n der Komponenten von $\overline{x}$ positiv sein können.*

Zur Vorbereitung der Hauptaussage dieses Kapitels benötigen wir die folgenden Begriffe und die anschließenden beiden Lemmata.

Definition 16 *1) Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ heißt* **Prim-Maß**, *wenn es nicht das Null-Maß ist und nur die Werte 0 oder 1 annimmt.*

2) Sei $A \subseteq \Omega$ eine Borel-Menge und $z \in \Omega$. Das Prim-Maß δ_z mit

$$\delta_z(A) = \begin{cases} 1 & z \in A \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

heißt **atomares Einheitsmaß** *oder auch* **Dirac-Maß** *in z.*

Lemma 17 *Sei Ω ein kompakter topologischer Hausdorff-Raum und μ ein Prim-Maß aus $\mathcal{M}(\Omega)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $\bar{z} \in \Omega$, so daß*

$$\int_\Omega F(z)d\mu(z) = \int_\Omega F(z)d\delta_{\bar{z}}(z) = F(\bar{z}), \quad F \in C(\Omega). \tag{5.2}$$

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Borel-Mengen A in Ω mit $\mu(A) = 0$.
Es werde nun angenommen, daß zu jedem $x \in \Omega$ eine offene Menge $G(x) \in \mathcal{F}$ existiert. Da Ω kompakt ist, gibt es eine endliche Auswahl von offenen Mengen $G(x_1), G(x_2), ...,$ $G(x_n)$ aus $\mathcal{F}$, die Ω überdecken. Daraus folgt

$$\mu(\Omega) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^n G(x_j)\right) \le \sum_{j=1}^n \mu(G(x_j)) = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß μ ein Prim-Maß, also nicht identisch Null ist.

Damit müssen wir die obere Annahme verwerfen. Das bedeutet: Es existiert ein Punkt $\bar{z} \in \Omega$, für den jede ihn enthaltende offene Menge nicht in $\mathcal{F}$ ist.
Jetzt sei F eine beliebige Funktion aus $C(\Omega)$ und es sei ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann existiert eine offene Menge G, die z enthält, so daß

$$|F(z) - F(\bar{z})| \leq \varepsilon \qquad \forall z \in G. \tag{5.3}$$

Da alle offenen Mengen, die $\bar{z}$ enthalten, nicht in $\mathcal{F}$ sind, gilt also auch $G \notin \mathcal{F}$ und demnach $\mu(G) \neq 0$.
μ ist ein Prim-Maß, demnach gilt

$$1 = \mu(G) \leq \mu(\Omega) \leq 1$$

und wir können weiter $\mu(\Omega) = 1$ und $\mu(\Omega \backslash G) = 0$ schließen. Folglich ist

$$\int\limits_{\Omega \backslash G} F(z) d\mu(z) = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (5.3) ergeben sich daraus:

$$\begin{aligned} F(\bar{z}) - \varepsilon &= [F(\bar{z}) - \varepsilon]\mu(G) \leq \int\limits_G F(z) d\mu(z) = \\ &= \int\limits_G F(z) d\mu(z) + \int\limits_{\Omega \backslash G} F(z) d\mu(z) = \int\limits_\Omega F(z) d\mu(z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(\bar{z}) + \varepsilon &= [F(\bar{z}) + \varepsilon]\mu(G) \geq \int\limits_G F(z) d\mu(z) = \\ &= \int\limits_G F(z) d\mu(z) + \int\limits_{\Omega \backslash G} F(z) d\mu(z) = \int\limits_\Omega F(z) d\mu(z). \end{aligned}$$

Also erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$

$$F(\bar{z}) - \varepsilon \leq \int\limits_\Omega F(z) d\mu(z) \leq F(\bar{z}) + \varepsilon.$$

Damit haben wir für $F \in C(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega F(z) d\mu(z) = F(\bar{z}).$$

Ω ist ein Hausdorff-Raum, d.h. zu $\bar{z}$ und z^*, $z^* \neq \bar{z}$, existieren disjunkte offene Mengen G um $\bar{z}$ und H um z^*. Angenommen z^* sei ein weiterer Punkt aus Ω mit den gleichen

Eigenschaften wie $\bar{z}$. Nun läßt sich eine stetige Funktion F auf Ω angeben mit $F(\bar{z}) = 0$ und $F(z^*) = 1$. Es ergibt sich

$$F(\bar{z}) = \int_\Omega F(z)d\mu(z) = 0 \neq 1 = F(z^*) = \int_\Omega F(z)d\mu(z).$$

Aus dem Widerspruch folgt dann die Eindeutigkeit von $\bar{z}$.

□

Lemma 18 *Sei $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Lassen sich nicht mehr als k disjunkte Borel-Mengen $A_1, A_2, ..., A_k$ finden, so daß $\mu(A_i) \neq 0$ für alle i=1,2,...,k, dann ist μ Linearkombination von höchstens k Prim-Maßen.*

Beweis: Seien $\mu(A_i) \equiv \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Für jede Borel-Menge A definieren wir

$$\mu_i(A) := \mu(A \cap A_i)/\alpha_i, \qquad i = 1, 2, ..., k.$$

Zunächst soll gezeigt werden: Die Maße $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ sind prim. Dies ist wie folgt einzusehen:
Sei μ_i eines der obigen Maße. Ist $\mu_i(A)$ für eine Borel-Menge A weder 0 noch 1, so sind $A \cap A_i$ und A nicht leer und die $k + 1$ Borel-Mengen

$$A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i \cap A, A_i \backslash A, A_{i+1}, ..., A_k$$

sind disjunkt. Daraus folgt $\mu(A_i \cap A) = \alpha_i \mu_i(A) \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
\mu(A_i \backslash A) &= \mu((\Omega \backslash A) \cap A_i) = \alpha_i \mu_i(\Omega \backslash A) \\
&= \alpha_i(\mu_i(\Omega) - \mu_i(A)) = \alpha_i(\mu(\Omega \cap A_i)/\alpha_i - \mu_i(A)) \\
&= \alpha_i(1 - \mu_i(A)) \neq 0.
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß maximal k disjunkte Borel-Mengen mit nichtverschwindender Maßzahl bezüglich des Maßes μ existieren. Demzufolge sind die oben definierten Maße μ_i, $i = 1, 2, ..., k$ Prim-Maße.

Wie bisher sei A eine beliebige Borel-Menge. Dann sind die $k + 1$ Borel-Mengen

$$A_1, A_2, ..., A_k, A \backslash \bigcup_{i=1}^k A_i$$

disjunkt und es gilt daher

$$\mu(A \backslash \bigcup_{i=1}^k A_i) = 0.$$

Damit folgt dann:

$$\begin{aligned} A &= \left(\bigcup_{i=1}^{k} A\cap A_i\right)\cup\left(A\backslash\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right), \\ \mu(A) &= \sum_{i=1}^{k}\mu(A\cap A_i)+\mu(A\backslash\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu_i(A), \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist.

□

Die wichtigste Aussage in diesem Abschnitt stellt der folgende Satz dar.

Satz 19 *Sei Ω ein topologischer Hausdorff-Raum. Sei $\mathcal{M}^+(\Omega)$ der Unterraum von $\mathcal{M}(\Omega)$ aller positiven regulären Borel-Maße auf Ω und seien $F_1, ..., F_n$ stetige Funktionen auf Ω, wobei $F_1(z) = 1$, für alle $z \in \Omega$. Die Menge Q werde definiert durch:*

$$Q = \{\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega) \mid \mu(F_i) = c_i, i = 1, 2, ..., n\},$$

mit $c_1 > 0$. Dann gilt: Falls Q nichtleer ist, ist es eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathcal{M}^+(\Omega)$, und wenn μ^* ein extremaler Punkt von Q ist, so läßt sich μ^* darstellen in der Form

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{z_i},$$

mit gewissen $\alpha_i \geq 0$ und $z_i \in \Omega$, $i = 1, 2, ..., n$.

Beweis: In Analogie zur Formel (2.14) von Seite 11 folgt aus $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ und $\mu(1) = c_1 > 0$, daß $\|\mu\| = c_1$. Mit diesem Hinweis kann man sich von der Kompaktheit und der Konvexität von Q in [1] oder [10] überzeugen.
Nun sei μ^* ein extremaler Punkt von Q. Wir machen folgende Annahme: Es existieren $n+1$ disjunkte Borel-Mengen $A_0, A_1, ..., A_n$ in Ω mit $\mu^*(A_i) > 0$, $i = 0, 1, ..., n$. Dann setzen wir

$$A_{n+1} := \Omega\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Damit folgt $A_0 \subset A_{n+1}$ und somit $\mu^*(A_{n+1}) > 0$. Jetzt kann man jedem Vektor $a = (a_1, a_2, ..., a_{n+1})^T$ aus dem $\mathbb{R}^{n+1}$ ein Maß μ wie folgt zuordnen:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i\mu^*(A\cap A_i), \tag{5.4}$$

für jede Borel-Menge $A \subseteq \Omega$. Mit $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ werde die Menge der Vektoren bezeichnet, für die das zugehörige Maß in Q liegt. K ist nicht leer, weil $(1, ..., 1) \in K$, denn

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &:= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(A \cap A_i) = \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A \cap A_i \right) = \\ &= \mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right) \right) = \mu^*(A \cap \Omega) = \mu^*(A), \end{aligned}$$

d.h. $\mu_1 = \mu^* \in Q$. Alle Maße aus Q sind positiv und besitzen somit Darstellungsvektoren aus K, deren Komponenten sämtlich größer oder gleich Null sind. (Man setze nur nacheinander für A die disjunkten Mengen $A_1, ..., A_{n+1}$ ein. Dann steht auf der linken Seite eine nichtnegative Zahl und $\mu^*(A_j \cap A_i)$ ist Null für alle $j \neq i$ und für $i = j$ größer als Null.)

Nun sei $\bar{\mu}$ ein extremaler Punkt aus Q, dem ein Vektor $\bar{a} \in K$ zugeordnet ist. Dann ist $\bar{a}$ ein extremaler Punkt in K. Dies sieht man so ein: Wir wollen annehmen, $\bar{a}$ ist kein extremaler Punkt in K. Somit gibt es in K zwei Vektoren a^1 und a^2 mit $a^1 \neq a^2$ und eine Zahl s, $0 < s < 1$, so daß

$$\bar{a} = sa^1 + (1 - s)a^2.$$

Zu a^1 und a^2 existieren Elemente $\mu^1 \neq \mu^2$ in Q. Aus der Konvexität von Q folgt, daß $s\mu^1 + (1 - s)\mu^2 \in Q$. $\bar{\mu}$, μ^1 und μ^2 lassen sich in der Form (5.4) darstellen:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(A) &= \sum_{i=1}^{n+1} \bar{a}_i \mu^*(A \cap A_i), \\ \mu^1(A) &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^1 \mu^*(A \cap A_i), \\ \mu^2(A) &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \mu^*(A \cap A_i), \end{aligned}$$

für jede Borel-Menge $A \subseteq \Omega$. Dann gilt aber auch:

$$\begin{aligned} s\mu^1(A) + (1 - s)\mu^2(A) &= s \sum_{i=1}^{n+1} a_i^1 \mu^*(A \cap A_i) + (1 - s) \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \mu^*(A \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (sa_i^1 + (1 - s)a_i^2) \mu^*(A \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \bar{a}_i \mu^*(A \cap A_i) \\ &= \bar{\mu}(A), \end{aligned}$$

für jede Borel-Menge $A \subseteq \Omega$. Dies ist ein Widerspruch zur Extremalität von $\bar{\mu}$ in Q. Demzufolge muß jeder zu einem extremalen Maß $\bar{\mu}$ aus Q gehörige Vektor $\bar{a}$ (nach der

Darstellung 5.4) extremal in K sein.
μ^* selber ist gerade extremal in Q, also muß der zugehörige Vektor a^* auch extremal in K sein. a^* läßt sich berechnen:

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^* \mu^*(A \cap A_i),$$

also sind alle $a_i^* = 1$. (Für die Richtigkeit des zweiten Gleichheitszeichens siehe z.B. Folgerung 1.3 S.28 aus [11].) Demnach ist a^* der Vektor, dessen Komponenten alle 1 sind.
Sei $\mu_j(\cdot) = \mu^*(\cdot \cap A_j)$, $j = 1, ..., n+1$. Die Menge K als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ wird beschrieben durch n Gleichungen:

$$a_1 \int_\Omega F_i(z)\mu_1(z) + \cdots + a_{n+1} \int_\Omega F_i(z)\mu_{n+1}(z) = c_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Nach Lemma 15 können höchstens n der $\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_{n+1}^*$ größer als Null sein. Das widerspricht der Tatsache, daß der Vektor a^* aus $n+1$ Einsen besteht und auch extremal in K ist. Demnach ist die Annahme von $n+1$ disjunkten Teilmengen $A_0, A_1, ..., A_n$ aus Ω mit $\mu^*(A_i) > 0$, $i = 0, 1, ..., n$ falsch. Es können somit maximal n solcher Mengen existieren.
Nun sind wir in der Lage, die beiden vorhergehenden Lemmata anzuwenden. Das bedeutet: Da höchstens n disjunkte Borel-Mengen $A_1, ..., A_n$ mit $\mu^*(A_i) > 0$, $i = 1, ..., n$, in Ω gefunden werden können, läßt sich μ^* nach dem vorigen Lemma als Linearkombination von maximal n Prim-Maßen $\mu_1, ..., \mu_n$ darstellen, d.h.

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i.$$

Nach Lemma 17 gibt es zu jedem dieser Prim-Maße einen eindeutig bestimmten Punkt $z_i \in \Omega$, $i = 1, 2, ..., n$, so daß

$$\int_\Omega F(z) d\mu_i(z) = \int_\Omega F(z) d\delta_{z_i}(z) = F(z_i), \quad \forall\, F \in C(\Omega), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Damit erhalten wir für μ^* die Darstellung

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{z_i},$$

mit $z_i \in \Omega$, $i = 1, 2, ..., n$. Die Nichtnegativität der α_i, $i = 1, 2, ..., n$, erhält man wie folgt: Betrachten wir die Borel-Mengen $B_j = \{z_j\}$, $j = 1, 2, ..., n$, die jeweils nur aus einem einzelnen Punkt bestehen, in denen eines der obigen Dirac-Maße konzentriert ist. Für jede dieser Mengen folgt:

$$0 \leq \mu^*(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{z_i}(B_j) = \alpha_j.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

□

Bis hierhin sind wir den Gedanken von Rubio aus seinem Buch [26] gefolgt. Die Aussage des letzten Satzes wird mit dem Riesz'schen Darstellungssatzes zurückübersetzt in die Sprache linearer stetiger Funktionale:

Satz 20 *Sei $C_+^*(\Omega)$ wie vorher der Raum aller positiven linearen stetigen Funktionale über $C(\Omega)$ und seien $F_1, ..., F_n$ stetige Funktionen auf einem kompakten topologischen Hausdorff-Raum Ω, mit $F_1(z) = 1$, für alle $z \in \Omega$. Die Menge Q werde definiert durch:*

$$Q = \{\Lambda \in C_+^*(\Omega) \mid \Lambda(F_i) = c_i, \ i = 1, 2, ..., n\},$$

mit $c_1 > 0$. Dann gilt: Falls Q nichtleer ist, ist es eine kompakte konvexe Teilmenge von $C_+^*(\Omega)$, und wenn Λ^* ein extremaler Punkt von Q ist, so läßt er sich darstellen in der Form

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{z_i},$$

mit $\alpha_i \geq 0$, $z_i \in \Omega$, $i = 1, 2, ..., n$.

5.2 Durch Gleichungen und Ungleichungen definierte Mengen

Die diskretisierte verallgemeinerte Optimalsteueraufgabe (4.3) war mit zusätzlichen Ungleichungsnebenbedingungen formuliert. Demzufolge wenden wir uns nun den Teilmengen von $C_+^*(\Omega)$ zu, die durch Gleichungen und Ungleichungen definiert werden. D.h. die Menge Q werde jetzt definiert durch:

$$Q = \{\Lambda \in C_+^*(\Omega) \mid \Lambda(F_i) = c_i, \ i = 1, 2, ..., n_1; \quad \Lambda(F_i) \geq c_i, \ i = n_1 + 1, ..., n\}.$$

Wie vorher gilt auch hier:

(i) Wenn Q nichtleer ist, so ist Q kompakt und konvex.

(ii) Die Menge Q_E der Extrempunkte ist nicht leer und $\min_Q \Lambda(F_0)$ wird auch in Q_E angenommen.

Sei $\Lambda^0 \in Q_E$, wodurch also

$$\Lambda^0(F_i) = c_i \quad (i = 1, 2, ..., n_1); \quad \Lambda^0(F_i) \geq c_i \quad (i = n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n)$$

gilt. Dann setzen wir

$$\Lambda^0(F_i) = c_i^0 \qquad i = n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n.$$

Mithin gilt $c_i^0 \geq c_i$, $i = n_1+1, n_1+2, ..., n$, und wir erhalten

$$\Lambda(F_i) = c_i,\ i = 1, 2, ..., n_1; \quad \Lambda(F_i) = c_i^0,\ i = n_1+1, ..., n.$$

Sei $Q^0 = Q(\Lambda^0)$ die Teilmenge von Funktionalen aus $C_+^*(\Omega)$, welche diesen Bedingungen genügen. Q^0 ist durch das spezielle Λ^0 definiert. Dann gilt:

(i) $Q^0 \subseteq Q$, weil $c_i^0 \geq c_i$, $i = n_1+1, n_1+2, ..., n$.

(ii) $Q^0 \neq \emptyset$, weil $\Lambda^0 \in Q^0$.

(iii) Q^0 ist wegen der schon bekannten Argumente auch konvex und kompakt (in der schwach*-Topologie) und besitzt demnach auch Extrempunkte.

Wir wollen mit Q_E^0 die Menge der Extrempunkte Λ von Q^0 bezeichnen. Ist Λ^0 nun ein Extrempunkt von Q, so ist er auch extremal in Q^0, also ein Element von Q_E^0.
Denn angenommen, $\Lambda^0 \notin Q_E^0$. Dann existieren Λ_1, $\Lambda_2 \in Q^0$, mit $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, so daß

$$\Lambda^0 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2.$$

Λ_1 und Λ_2 sind natürlich auch Elemente von Q. Somit wäre Λ^0 nicht extremal in Q. Wenden wir abschließend den Satz (19) an, dann haben wir den folgenden Satz hergeleitet.

Satz 21 *Jeder Extrempunkt Λ^0 von Q ist mit Hilfe von n Punkten $z_i \in \Omega$ und Zahlen $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, darstellbar:*

$$\Lambda^0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{z_i}.$$

Kapitel 6

Approximationen von Funktionalen aus $C_+^*(\Omega)$

Das Ziel des vorigen Kapitels war es, einen Lösungsansatz für die Aufgabe (4.3) zu finden. Das Vorgehen entsprach dem in dem Buch [26] dargestellten. Dabei wurde im Satz 21 festgestellt, daß ein extremales Funktional von der Gestalt $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{z_i}$ ist. Die Anzahl n der Punkte z_i stimmt mit der Anzahl der Nebenbedingungen der Aufgabe überein. Würde man dies als Lösungsansatz verwenden, so sähe man sich mit einem quadratischen Optimierungsproblem konfrontiert, weil sowohl die Koeffizienten $\alpha_1, ..., \alpha_n$ als auch die Punkte $z_1, ..., z_n \in \Omega$ unbekannt sind. Der Satz 10 besagt, daß das quadratische Problem durch ein lineares Optimierungsproblem mit hinreichend vielen, geeignet gewählten Punkten $z_1,...,z_N$ aus einer abzählbar dichten Teilmenge $\omega \subset \Omega$ vorgegeben gut approximiert werden kann.
Nun stellt sich die Frage, ob man nicht gleich die Funktionale aus $C_+^*(\Omega)$ durch spezielle Approximationen ersetzen kann, ohne den Umweg über die Extremalitätsuntersuchungen. Dies ist tatsächlich möglich und wird im anschließenden Abschnitt demonstriert. Dabei werden die Approximationen von Funktionalen aus $C_+^*(\Omega)$ mittels Linearkombinationen von Dirac-Funktionalen und mittels Linearkombinationen von integralen Mittelwerten vorgestellt.
Beide Approximationen liefern Lösungsansätze für die Aufgabe (4.3), die zu linearen Optimierungsproblemen führen. Natürlich sind auch weitere Approximationsmöglichkeiten denkbar.

6.1 Zwei Klassen von Approximationen

Bei der näherungsweisen Lösung der verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe spielen Approximationen von positiven linearen stetigen Funktionalen über $C(\Omega)$ eine wichtige Rolle. An dieser Stelle wollen wir sogenannte ε-Approximationen solcher Funktionale konstruieren. Dabei beschränken wir uns auf zwei Klassen von Funktionalen, aus denen die Approximationen gebildet werden, nämlich auf

(i) die Menge der Linearkombinationen von Dirac-Funktionalen, also auf Funktionale des Typs $\sum\limits_k \alpha_k \delta_{z_k}$

(ii) die Menge der Linearkombinationen von Lebesgue-Integralen über Teilmengen einer Zerlegung von Ω, also auf Funktionale des Typs

$$\sum_k \alpha_k \frac{1}{|\Omega_k|} \int\limits_{\Omega_k} F(z)dz,$$

wobei $|\Omega_k|$ hier das Lebesgue-Maß von Ω_k für alle k darstellt. (In der Literatur wird der Wert $\frac{1}{|\Omega_k|} \int\limits_{\Omega_k} F(z)dz$ manchmal auch als **integraler Mittelwert** von F über Ω_k bezeichnet.)

Kommen wir nun zunächst zum Punkt (i). D.h. wir wollen lineare stetige Funktionale über $C(\Omega)$ durch Linearkombinationen von Dirac-Funktionalen approximieren. Dazu geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor und betrachten eine offene ρ-Umgebung Ω_ρ um Ω, $\rho < \frac{\varepsilon}{2}$. Außerdem sei durch die Punkte z_k, $k = 1, ..., N$, ein endliches ε-Netz von Ω_ρ (d.h. $\forall\, z \in \Omega_\rho\ \exists\, z_k$, so daß $|z - z_k| < \varepsilon$) und offene Kugeln Ω_k, $k = 1, ..., N$ um die Punkte des ε-Netzes mit dem Radius ε gegeben. Das System $\{e_k(\cdot), k = 1, ..., N\}$ stelle eine Zerlegung der Einheit bezüglich der Überdeckung durch die Kugeln Ω_k dar (in Abschnitt 7.1.1 erklärt). Sei $N^*(z) = \{k \mid z \in \Omega_k\}$. Nun definieren wir zu einer Funktion $F \in C(\Omega)$ ihre **ε-Approximation** durch

$$F^\varepsilon(\cdot) := \sum_{k=1}^N e_k(\cdot)F(z_k).$$

Dann ist $F^\varepsilon \in C(\Omega)$ (ja sogar $\in C^\infty(\Omega)$) und es gilt für jedes $z \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|F(z) - F^\varepsilon(z)| &= |\sum_{k=1}^N e_k(z)F(z) - \sum_{k=1}^N e_k(z)F(z_k)| \le \\
&\le \sum_{k=1}^N e_k(z)|F(z) - F(z_k)| = \sum_{k\in N^*(z)} e_k(z)|F(z) - F(z_k)| \le \\
&\le \sum_{k=1}^N e_k(z)w_F(\varepsilon) = w_F(\varepsilon),
\end{aligned}$$

wobei $w_F(\cdot)$ ein Stetigkeitsmodul zu F ist. Mithin folgt

$$\|F - F^\varepsilon\| = \sup_{z\in\Omega} |F(z) - F^\varepsilon(z)| \le w_F(\varepsilon).$$

Bemerkung Ein Stetigkeitsmodul $w_F(\cdot)$ der Funktion F über Ω ist eine positive nichtfallende Funktion auf den nichtnegativen reellen Zahlen mit der Eigenschaft: Für $z_1, z_2 \in \Omega$ mit $\|z_1 - z_2\| \leq \rho$ gilt $|F(z_1) - F(z_2)| \leq w_F(\rho)$.

Nun wenden wir uns den Funktionalen zu. Sei $\Lambda \in C^*(\Omega)$, $\alpha_k := \Lambda(e_k)$, $k = 1, ..., N$. Wir definieren die **ε-Approximation** von Λ durch

$$\Lambda^\varepsilon(\cdot) := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta_{z_k}(\cdot).$$

Dann läßt sich leicht folgendes überprüfen:

$$\begin{aligned} \Lambda(F^\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{N} \Lambda(e_k) F(z_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k F(z_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k \delta_{z_k})(F) = \Lambda^\varepsilon(F) \end{aligned}$$

und somit erhält man

$$\begin{aligned} |\Lambda(F) - \Lambda^\varepsilon(F)| &= |\Lambda(F) - \Lambda(F^\varepsilon)| = |\Lambda(F - F^\varepsilon)| \\ &\leq \|\Lambda\| \cdot \|F - F^\varepsilon\| \leq \|\Lambda\| w_F(\varepsilon). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, daß sich jedes Funktional aus $C^*(\Omega)$ vorgegeben gut durch Linearkombinationen von Dirac-Funktionalen annähern läßt. Vorgegeben gut bedeutet hier gleichmäßig bezüglich der Klassen $\mathcal{F}_w$ von Funktionen mit gleichmäßig majorisierbarem Stetigkeitsmodul w_F (d.h. es existiert ein w, so daß $w_F(\varepsilon) \leq w(\varepsilon)$ für alle $F \in \mathcal{F}_w$).

Eine andere Möglichkeit der Approximation von Funktionalen aus $C^*(\Omega)$ ist die im Punkt (ii) erwähnte. Fast analog zum Punkt (i) können die ε-Approximationen der Funktionale in diesem Fall gebildet werden. Wir gehen wieder von Ω_ρ aus und zerlegen diese Menge in Teilmengen Ω_k, $k = 1, 2, ..., N$. Nun definieren wir die **ε-Approximation** einer Funktion F aus $C(\Omega)$ durch

$$F^\varepsilon(\cdot) := \sum_{k=1}^{N} e_k(\cdot) \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} F(z) dz.$$

Analog zum Punkt (i) kann dann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
|F(z) - F^\varepsilon(z)| &= |\sum_{k=1}^N e_k(z)F(z) - \sum_{k=1}^N e_k(z)\frac{1}{|\Omega_k|}\int\limits_{\Omega_k} F(z)dz| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^N e_k(z)\frac{1}{|\Omega_k|}\big|\int\limits_{\Omega_k}[F(z) - F(\rho)]d\rho)\big| \leq \\
&\leq \sum_{k\in N^*(z)} e_k(z)\frac{1}{|\Omega_k|}\int\limits_{\Omega_k}|F(z) - F(\rho)|d\rho \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^N e_k(z)w_F(\varepsilon) = w_F(\varepsilon),
\end{aligned}$$

für jedes $z \in \Omega$. Also folgt wie oben

$$\|F - F^\varepsilon\| = \sup_{z\in\Omega}|F(z) - F^\varepsilon(z)| \leq w_F(\varepsilon).$$

Sei nun wieder Λ ein beliebiges Funktional aus $C^*(\Omega)$ und seien $\Lambda(e_k) =: \alpha_k$, für alle $k = 1, 2, ..., N$. Wir definieren die **ε-Approximation** von Λ durch

$$\Lambda^\varepsilon(F) := \sum_{k=1}^N \alpha_k \frac{1}{|\Omega_k|}\int\limits_{\Omega_k} F(z)dz, \quad \forall F \in C(\Omega). \tag{6.1}$$

Damit läßt sich genauso wie im Punkt (i) zeigen, daß $\Lambda(F^\varepsilon) = \Lambda^\varepsilon(F)$ gilt und der punktweise Abstand der beiden Funktionale kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
|\Lambda(F) - \Lambda^\varepsilon(F)| &= |\Lambda(F) - \Lambda(F^\varepsilon)| = |\Lambda(F - F^\varepsilon)| \\
&\leq \|\Lambda\| \cdot \|F - F^\varepsilon\| \leq \|\Lambda\|w_F(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Somit ist es auch möglich Funktionale aus $C^*(\Omega)$ durch solche Linearkombinationen von integralen Mittelwerten anzunähern.

Motiviert durch diese Approximationen wollen wir die beiden verschiedenen Typen von Linearkombinationen als Lösungsansätze für das (verallgemeinerte) lineare Optimierungsproblem (4.3) verwenden. Wir gehen zuerst auf die Linearkombinationen aus dem Punkt (i) ein. Dazu geben wir uns aus einer abzählbar unendlich dichten Teilmenge von Ω eine endliche Anzahl von Punkten $z_1, z_2, ..., z_N$ vor. Mit diesen Punkten bilden wir die lineare Teilmenge von Funktionalen

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \delta_{z_k}.$$

Eingesetzt in die Aufgabe erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta_{z_k}(f_0) &= \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}! \qquad \text{bezüglich} \\
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta_{z_k}(\phi_i^f) &= \Delta\phi_i \qquad i = 1,2,\dots,M_1, \\
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta_{z_k}(\psi_j^g) &\geq \Delta\psi_j \qquad j = 1,2,\dots,M_2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_0(z_k) &= \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}! \qquad \text{bezüglich} \\
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_i^f(z_k) &= \Delta\phi_i \qquad i = 1,2,\dots,M_1, \\
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \psi_j^g(z_k) &\geq \Delta\psi_j \qquad j = 1,2,\dots,M_2,
\end{aligned}$$

also ein klassisches lineares Optimierungsproblem in den α_k, $k = 1,2,\dots,N$.

Ähnlich verhält es sich im Fall (ii): Sei eine Zerlegung von Ω in Teilmengen Ω_k, $k = 1,2,\dots,N$, gegeben. Mit diesen Zerlegungsmengen bilden wir die lineare Teilmenge der folgenden Funktionale mit den Werten

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} F(z)dz, \quad \forall\, F \in C(\Omega).$$

Angewandt auf die Aufgabe (4.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} f_0(z)dz &= \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}! \\
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} \phi_i^f(z)dz &= \Delta\phi_i \qquad i = 1,2,\dots,M_1, \\
\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} \psi_j^g(z)dz &= \Delta\psi_j \qquad j = 1,2,\dots,M_2.
\end{aligned}$$

Die Integrale der einzelnen Funktionen lassen sich berechnen, sind also für die Optimierung bekannte Zahlen. Damit entsteht auch in diesem Fall ein klassisches lineares Optimierungsproblem.

Kapitel 7

Konstruktion einer Näherungslösung für die Originalaufgabe

Bei der ursprünglich gestellten Aufgabe (OP) waren Steuerungen $u : I \to U$ und zugehörige Trajektorien $x : I \to A$ als Lösungen des dynamischen Systems gesucht. In diesem Kapitel wird aus der Lösung der diskretisierten verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe (4.8) eine Näherungslösung der Originalaufgabe (OP) konstruiert, deren Zielfunktionalwert sich dem Infimum der verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe (2.13) vorgegeben gut nähert.
Im folgenden wollen wir Funktionen $x(\cdot) : I \to A$ als **Hilfstrajektorien** bezeichnen.
Die Konstruktion wird in mehreren Schritten vorgenommen. Zunächst konstruiert man eine stückweise konstante Hilfstrajektorie und eine stückweise konstante Steuerung. Die stückweise konstante Hilfstrajektorie wird anschließend in eine stetige Hilfstrajektorie umgewandelt. Die stückweise konstante Steuerung liefert, eingesetzt in das Anfangswertproblem von(OP), eine absolut stetige Lösung, die dann mit der stetigen Hilfstrajektorie verglichen wird.

In den folgenden Überlegungen wenden wir lineare stetige Funktionale aus $C^*(\Omega)$ auf charakteristische Funktionen an. Zur Erläuterung dieses Vorgangs werden im nächsten Abschnitt zwei verschiedene Herangehensweisen angegeben.

7.1 Lineare stetige Funktionale und charakteristische Funktionen

$C^*_+(\Omega)$ war der Raum der positiven linearen stetigen Funktionale, die auf die stetigen Funktionen über einer Menge Ω angewendet werden. Wir wollen im folgenden zwei Wege vorstellen, wie sich der Definitionsbereich dieser Funktionale auf die charakteristischen Funktionen der Borel-Teilmengen von Ω erweitern läßt.

7.1.1 Zerlegung der Einheit

Es gilt der folgende Satz.

Satz 22 *Sei $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ der Raum der reellwertigen Funktionen, die stetige Ableitungen beliebiger Ordnung und einen kompakten Träger besitzen. Weiterhin seien Ω eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und $\{U_j\}_{j\in J}$ eine finite Überdeckung von Ω durch offene Mengen $U_j \subset \mathbb{R}^m$. Dann existieren Funktionen $\{e_j(\cdot)\}_{j\in J} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) Für jedes $j \in J$ ist der Träger $\operatorname{supp}(e_j)$ von $e_j(\cdot)$ in U_j enthalten.

b) Für jedes $j \in J$ und jedes $x \in \mathbb{R}^m$ gilt: $0 \le e_j(x) \le 1$.

c) Es ist $\sum\limits_{j\in J} e_j(x) \equiv 1$ für alle $x \in \Omega$.

d) Für jedes $x \in \Omega$ sind nur endlich viele der Werte $e_j(x)$, $j \in J$ ungleich Null.

Hierbei bedeutet

- $\operatorname{supp}(e_j) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^m \mid e_j(x) \neq 0\}}$.
- *finite Überdeckung, daß jedes $x \in \Omega$ in einem U_j enthalten ist, aber in höchstens endlich vielen U_j enthalten sein darf.*

Den Beweis dieses Satzes kann der Leser z.B. in [8] nachlesen. Wir wollen dem eben erwähnten System von Funktionen dann noch einen Namen geben.

Definition 23 *Das in dem vorigen Satz definierte System von Funktionen $\{e_j(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \mid j \in J\}$ heißt eine* **Zerlegung der Einheit bezüglich der Überdeckung $\{U_j\}_{j\in J}$ von** Ω.

In dem Spezialfall, daß J einelementig ist, ergibt sich sofort aus dem Satz 22:

Lemma 24 *Sei Ω eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, U eine offene Menge (des $\mathbb{R}^m$), die Ω enthält. Dann existiert eine Funktion $e : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ der Klasse C^∞, so daß*

$$\operatorname{supp}(e) \subset U$$

und

$$e(x) = 1 \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas definieren wir:

Definition 25 *Sei zu jedem Element der Folge* $\{\frac{1}{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *eine offene Umgebung* ω_i *des Abschlußes* $\overline{\omega}$ *von* $\omega \subset \Omega$ *gegeben, so daß* $\mathrm{mes}(\omega_i \backslash \omega) < \frac{1}{i}$ *und* $\omega_i \subset \omega_{i'}$ *für* $i \geq i'$. *(Mit* mes *ist hier das Lebesgue-Maß gemeint.) Außerdem seien* $e_i(\cdot)$ *Funktionen gemäß Lemma* 24 *bezüglich der Umgebungen* ω_i *von* $\overline{\omega}$ *und Funktionen* $f_i(\cdot)$ *definiert durch*

$$f_i(z) := \prod_{j=1}^{i} e_i(z) \quad i = 1, 2, ...$$

Dann definieren wir für $\Lambda \in C_+^*(\Omega)$

$$\Lambda(\mathcal{X}_\omega) := \lim_{i\to\infty} \Lambda(f_{i|\Omega}), \tag{7.1}$$

wobei $f_{i|\Omega}$ *die Einschränkung von* $f_i(\cdot)$ *auf* Ω *darstellt und* $\mathcal{X}_\omega(\cdot)$ *die charakteristische Funktion von* ω *ist.*

Bemerkung

- Die Definition ist gerechtfertigt, da folgendes gilt:
  Aus den Eigenschaften der Funktionen $e_i(\cdot)$ (siehe Lemma 24) erhalten wir

  $$f_i(z) = 0 \quad \forall\, z \notin \omega_i, \quad f_i(z) = 1 \quad \forall\, z \in \overline{\omega}, \quad i = 1, 2, ...$$

  und mithin

  $$f_i(z) = f_{i-1}(z) e_i(z) \leq f_{i-1}(z) \quad \forall\, z,\ i = 2, 3, ...$$

  Nun nutzen wir die Monotonie der Funktionale, woraus $\Lambda(f_i) \leq \Lambda(f_{i'})$ für $i' \leq i$ folgt. Außerdem haben wir $\Lambda(f_i) \geq 0$ für jedes i, weil alle $f_i(\cdot)$ und auch die Funktionale positiv sind. Demnach ist die Folge $\{\Lambda(f_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ für $i \to \infty$ nichtwachsend und nach unten beschränkt, also konvergent.

- Sind $\mathcal{X}_{\omega_1}(\cdot)$ die charakteristische Funktion von $\omega_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $\mathcal{X}_{\omega_2}(\cdot)$ die charakteristische Funktion von $\omega_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, dann gilt für die charakteristische Funktion $\mathcal{X}_{\omega_1\times\omega_2}(\cdot)$ der Menge $\omega_1 \times \omega_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$:

  $$\mathcal{X}_{\omega_1\times\omega_2}(x, y) = \mathcal{X}_{\omega_1}(x)\mathcal{X}_{\omega_1}(y) \quad \forall\, x \in \omega_1, y \in \omega_2. \tag{7.2}$$

7.1.2 Satz von Riesz

Sei wie vorher $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $\Lambda \in C_+^*(\Omega)$. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz (siehe Satz 11) gibt es ein positives reguläres Borel-Maß μ, so daß

$$\Lambda(F) = \int_\Omega F(z) d\mu(z) \qquad \forall\, F \in C(\Omega).$$

Ist ω eine Borel-Teilmenge von Ω, so ist die charakteristische Funktion χ_ω von ω meßbar bezüglich μ. Daher existiert das Integral $\int\limits_\Omega \chi_\omega(z)d\mu(z)$ und es gilt

$$\int\limits_\Omega \chi_\omega(z)d\mu(z) = \mu(\omega).$$

Dies motiviert folgende Definition:

Definition 26 *Seien Λ, μ, ω und χ_ω die oben eingeführten Größen. Dann definieren wir die Anwendung von Λ auf χ_ω durch*

$$\Lambda(\chi_\omega) := \int\limits_\Omega \chi_\omega(z)d\mu(z) = \mu(\omega). \tag{7.3}$$

Im folgenden sind alle Anwendungen von Funktionalen auf charakteristische Funktionen im Sinne der Definitionen 25 oder 26 zu verstehen.

7.2 Konstruktion einer stückweise konstanten Hilfstrajektorie und einer stückweise konstanten Steuerung

In den verschiedenen Relaxierungen und Verallgemeinerungen (siehe z.B. [4],[7],[20]) geschieht die Konstruktion näherungsweise optimaler Steuerungen und Trajektorien der Originalaufgabe unabhängig von der Lösung der verallgemeinerten Aufgabe. D.h. bei der Formulierung bzw. Lösung der verallgemeinerten Aufgabe wird die anschließende Konstruktion nicht berücksichtigt. Das ist in dieser Verallgemeinerung anders. Zu den Testfunktionen vom Typ 1 gehören auch Funktionen, die nur von der Zeitvariablen t abhängen. Solche Funktionen wollen wir unter einem extra Typ 3 zusammenfassen und mit χ_l, $l = 1, ..., L$, bezeichnen. Die einzelnen Anzahlen der Testfunktionen seien aber der Übersichtlichkeit halber wieder mit M_1 (Typ 1), M_2 (Typ 2) und dann zusätzlich mit L (Typ 3) bezeichnet.
Demzufolge gehen wir von der folgenden Form der „abgeschwächten" diskretisierten verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe (4.8) aus:

$$\begin{array}{rcll} \Lambda(f_0) & = & \text{min!} & \\ \text{unter den Bedingungen} & & \Lambda \in C_+^*(\Omega), & \\ |\Lambda(\phi_i^f) - \Delta\phi_i| & \leq & \varepsilon & \forall\, i = 1, 2, ..., M_1, \\ \Lambda(\psi_j^g) - \Delta\psi_j & \geq & -\varepsilon & \forall\, j = 1, 2, ..., M_2, \\ |\Lambda(\chi_l) - \Delta\chi_l| & \leq & \varepsilon & \forall\, l = 1, 2, ..., L. \end{array} \tag{7.4}$$

Um die Durchführung der Minimalfolgenkonstruktion zu erleichtern, werden die Testfunktionen vom Typ 3 wie folgt gewählt: Sei eine Zerlegung des Zeitintervalls $I = [a, b]$

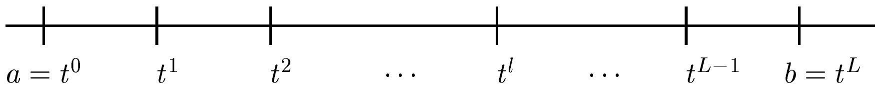

Abbildung 7.2: Zerlegung des Zeitintervalls

in Teilintervalle $I^l := [t^{l-1}, t^l)$, $(l = 1, ..., L-1)$ und $I^L := [t^{L-1}, t^L]$ (üblicherweise äquidistant, siehe Abbildung 7.2) gegeben.

Die Funktionen $\chi_l(\cdot)$ sind die charakteristischen Funktionen der Intervalle I^l. Sie werden auch als Funktionen von (t, x, u) aufgefaßt, d.h. $\chi_l(t, x, u) = \chi_l(t)$ für alle $t \in I$, $(x, u) \in V := A \times U$. $\Delta\chi_l$ ist definiert durch

$$\Delta\chi_l := \int_a^b \chi_l(t)dt = t^l - t^{l-1},$$

jeweils für $l = 1, 2, ..., L$.

Bemerkung Die mit Hilfe der charakteristischen Funktionen gestellte verallgemeinerte Optimalsteueraufgabe ist keine Erweiterung der bisherigen Verallgemeinerung. Um dies zu erläutern, sei Λ ein zulässiges Funktional für die Aufgabe (2.13). Damit erfüllt Λ unter anderem auch die Bedingungen

$$\Lambda(\phi^f) = \Delta\phi \qquad \forall\ \phi \text{ vom Typ 1.}$$

Weiterhin sei $I^* \subseteq I$. Dann gibt es eine Folge von Testfunktionen $\{\phi_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ des Typs 1, so daß die zugehörige Folge der formalen Ableitungen $\{\phi_h^f\}_{h\in\mathbb{N}}$ nur von t abhängig ist, monoton fällt und punktweise gegen die charakteristische Funktion $\chi_{I^*}(\cdot)$ des Intervalls I^* konvergiert.
(Man nehme hier einfach eine Folge stetiger, nur von t abhängiger Funktionen, die fast überall punktweise gegen $\chi_{I^*}(\cdot)$ konvergiert und integriere die Elemente dieser Folge. Da für die formale Ableitung nur von t abhängiger Testfunktionen vom Typ 1

$$\phi^f(t) = \phi^f(t, x, u) = \phi_t(t, x) + \phi_x(t, x)f(t, x, u) = \phi_t(t)$$

gilt, bekommt man so eine Folge vom gesuchten Typ.)
Nach den obigen Ausführungen ist $\Lambda(\chi_{I^*})$ definiert und aus Monotoniegründen gilt

$$\Lambda(\phi_h^f) \stackrel{h\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(\chi_{I^*}).$$

Die Folge der Werte $\Delta\phi_h$ konvergiert nach $\Delta\chi_{I^*} = \int_I \chi_{I^*}(t)dt$, was der Länge des Intervalls I^* entspricht. Also erfüllt jedes für die verallgemeinerte Aufgabe (2.13) zulässige Funktional Λ auch die Bedingung

$$\Lambda(\chi_{I^*}) = \Delta\chi_{I^*} \qquad I^* \subseteq I.$$

Bemerkung Vergleicht man dieses Vorgehen mit den Ausführungen in 7.1.1, so stellt man fest, daß die dort betrachteten Funktionen einer Zerlegung der Einheit gerade derartige Folgen von stetigen Funktionen darstellen, die punktweise gegen die charakteristischen Funktionen konvergieren.

Zur Lösung der Aufgabe (7.4) wurde in den vorigen Abschnitten folgender Lösungsansatz mit gewählten Punkten z_k, $k = 1, 2, ..., N$, aus einer dichten Teilmenge ω von Ω gemacht:

$$\Lambda^* = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta_{z_k}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \forall\, k = 1, ..., N, \tag{7.5}$$

sodaß wir bei der Konstruktion von einem Funktional dieser Gestalt ausgehen werden.

Bemerkung Die Punkte $z_k = (t_k, x_k, u_k)$, $k = 1, 2, ..., N$, seien aus bestimmten Gründen so gewählt, daß keine der ersten Komponenten t_k, $k \in \{1, 2, ..., N\}$, mit den in der Zerlegung des Zeitintervalls I gewählten Zeitpunkten t^l, $l \in \{2, 3, ..., L-1\}$, übereinstimmt.

Nun geben wir ein $\varepsilon_1 > 0$ vor und zerlegen die Menge V derart in Borel-Mengen V_s, $s = 1, 2, ..., S$, daß für jedes Element F_i der Menge von Funktionen

$$\{F_0, F_1, ..., F_{M_1}, F_{M_1+1}, ..., F_{M_1+M_2}\} := \{f_0, \phi_1^f, ..., \phi_{M_1}^f, \psi_1^g, ..., \psi_{M_2}^g\}$$

gilt

$$\begin{aligned} |F_i(t', x', u') - F_i(t'', x'', u'')| < \varepsilon_1, \qquad & \forall\, (t', x', u'), (t'', x'', u'') \in \Omega_{ls}, \\ & \forall\, l = 1, 2, ..., L; s = 1, 2, ..., S; \end{aligned} \tag{7.6}$$

wobei Ω_{ls} eine Abkürzung für $I^l \times V_s$ ist.

Bemerkung Man beachte folgendes: Sind die Testfunktionen $\phi_1, ..., \phi_{M_1}, \psi_1, ..., \psi_{M_2}$ gewählt, so müssen bei Verkleinerung von ε_1 die Zerlegungen von I (siehe Abbildung 7.2) und V verfeinert werden.
Die L Testfunktionen vom Typ 3 tauchen in der obigen Funktionenmenge nicht auf, da sie nach Definition schon die Bedingung (7.6) erfüllen.

Sehen wir uns nun die Bedingungen der obigen Aufgabe (7.4) an, die zu den charakteristischen Funktionen der Teilintervalle von I gehören. Mit ihrer Hilfe können wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 27 *Sei ε aus (7.4) hinreichend klein und Λ ein Funktional von der Form (7.5), das die letzten L Bedingungen von (7.4) erfüllt. Dann liegt in jedem Intervall I^l die erste Komponente t_{k_l} eines Punktes z_{k_l}, dessen Koeffizient α_{k_l} ungleich 0 ist.*

Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt. Sei I^l, $l \in \{1, 2, ..., L\}$, ein beliebiges Zerlegungsintervall von I, für das wir annehmen wollen, daß kein t_k der Punkte $z_k =$

(t_k, x_k, u_k) mit $\alpha_k \neq 0$, $k \in \{1, 2, ..., N\}$, in I^l liegt. Nach einer der obigen Bemerkungen stimmt keine der ersten Komponenten t_k, $k \in \{1, 2, ..., N\}$, mit den in der Zerlegung des Zeitintervalls I gewählten Zeitpunkten t^l, $l \in \{2, 3, ..., L-1\}$, überein. Sei

$$\varepsilon < \min\{t^l - t^{l-1} \mid l \in \{1, ..., L\}\} =: \Delta\bar{t}. \tag{7.7}$$

Nach der Aufgabenstellung (7.4) muß Λ^* auch die folgende Bedingung erfüllen:

$$|\Lambda^*(\chi_l) - t^l + t^{l-1}| = |\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_l(t_k) - t^l + t^{l-1}| \leq \varepsilon.$$

Aufgrund der Annahme muß für die Punkte z_k, deren erste Komponente t_k in I^l liegt, der zugehörige Koeffizient α_k gleich Null sein. Damit ist die Summe $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_l(t_k)$ gleich Null und die obige Bedingung lautet $t^l - t^{l-1} \leq \varepsilon$, was der bezüglich ε gemachten Annahme widerspricht. □

Das Funktional Λ^*, die Lösung von (7.4), wird nun genutzt, um die Zerlegungsintervalle I^l der Zerlegung von I weiter zu unterteilen. Dazu definieren wir die Größen

$$K_{ls} := \Lambda^*(\chi_{ls}), \quad l = 1, 2, ..., L; s = 1, 2, ..., S, \tag{7.8}$$

wobei die χ_{ls} die charakteristischen Funktionen der Teilmengen $\Omega_{ls} = I^l \times V_s$, $l = 1, 2, ..., L$; $s = 1, 2, ..., S$, von Ω sind.

Bemerkung

- Bei Rubio [26] kommen zwar Funktionen vom Typ 3 in der Minimalfolgenkonstruktion vor, aber sie werden noch nicht weiter spezialisiert. Damit ist eine Aussage wie die des obigen Lemmas nicht gesichert. Demzufolge kann es passieren, daß für einen Index $l \in \{1, ..., L\}$ alle K_{ls}, $s = 1, ..., S$, verschwinden. Das Intervall I^l könnte also nicht weiter zerlegt werden. Erst nachdem die Minimalfolgenkonstruktion abgeschlossen ist, wird in dem Buch [26] auf dieses Problem und die besondere Eignung der charakteristischen Funktionen hingewiesen.
- Prinzipiell können die nur von t abhängigen charakteristischen Funktionen $\chi_l(\cdot)$ vermieden werden. Man muß dann aber voraussetzen, daß hinreichend viele passende stetig ableitbare Testfunktionen ausgewählt worden sind, um die Eigenschaft aus dem Lemma 27 zu sichern.

Die Summation der K_{ls} über alle s liefert für jedes l aus $\{1, ..., L\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{S} K_{ls} &= \sum_{s=1}^{S} \Lambda^*(\chi_{ls}) = \sum_{s=1}^{S} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{ls}(z_k) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \sum_{s=1}^{S} \chi_{ls}(t_k, x_k, u_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_l(t_k) \sum_{s=1}^{S} \chi_s(x_k, u_k) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_l(t_k) = \sum_{t_k \in I^l} \alpha_k > 0. \end{aligned}$$

Im allgemeinen wird jedoch $\sum_{s=1}^{S} K_{ls} \neq t^l - t^{l-1}$ gelten. Deshalb definieren wir die Größen

$$\rho_l := \frac{t^l - t^{l-1}}{\sum_{t_k \in I_l} \alpha_k} \quad \text{und} \quad H_{ls} := \rho_l K_{ls} \tag{7.9}$$

für jedes $l = 1, ..., L$ und $s = 1, ..., S$. Nun kann man leicht nachprüfen, daß

$$\sum_{s=1}^{S} H_{ls} = t^l - t^{l-1}$$

gilt. Mit Hilfe der H_{ls} führen wir die Intervalle

$$\begin{aligned} B_{ls} &:= \Big[t^{l-1} + \sum_{i=1}^{s-1} H_{li}, t^{l-1} + \sum_{i=1}^{s} H_{li}\Big), \quad l = 1, 2, ..., L;\ s = 1, 2, ..., S; (l, s) \neq (L, S), \\ B_{LS} &:= \Big[t^{L-1} + \sum_{i=1}^{S-1} H_{Li}, t^{L-1} + \sum_{i=1}^{S} H_{Li}\Big] \end{aligned}$$

ein, wobei üblicherweise $\sum_{i=1}^{0} H_{li} = 0$ festgelegt wird. Aus jeder der Mengen V_s wählen wir einen Punkt (x^s, u^s) aus und setzen

$$x(t) := x^s, \quad u(t) := u^s, \quad \forall\, t \in B_{ls}. \tag{7.10}$$

Bemerkung Die Auswahl der Vertreter aus den einzelnen V_s kann völlig unabhängig von den bereits gewählten $z_1 = (t_1, x_1, u_1), z_2 = (t_2, x_2, u_2), ..., z_N = (t_N, x_N, u_N)$ geschehen. Selbstverständlich ist es auch erlaubt, Komponenten $(x_1, u_1), (x_2, u_2), ...,$ (x_N, u_N) als (x^s, u^s) zu verwenden.

$x(\cdot)$ und $u(\cdot)$ sind die angestrebten stückweise konstanten Funktionen. Sie wurden auf diesem speziellen Weg festgelegt, um zu sichern, daß sich die Funktionalwerte von Λ^* und Λ_p (das zu $p = (x(\cdot), u(\cdot))$ assoziierte Funktional) in den Funktionen $F_0, F_1, ..., F_{M_1+M_2+L}$, d.h. in f_0, $, \phi_1^f, ...,$ $\psi_{M_2}^g, ...\chi_L$ wenig unterscheiden. Dies wird nun vorgeführt.
Die Infima und Suprema der Funktionen F_i auf den einzelnen Teilmengen $\Omega_{ls} = I^l \times V_s$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} I_{ils} &:= \inf\{F_i(t, x, u) \mid (t, x, u) \in \Omega_{ls}\}, \qquad (7.11) \\ S_{ils} &:= \sup\{F_i(t, x, u) \mid (t, x, u) \in \Omega_{ls}\}, \qquad (7.12) \end{aligned}$$

$i = 0, 1, ..., M_1 + M_2 + L$, $l = 1, ..., L$, $s = 1, ..., S$, und definieren zu dem Paar $p = (x(\cdot), u(\cdot))$ ein Funktional Λ_p wie früher

$$\Lambda_p(F) := \int_a^b F(t, x(t), u(t))dt \quad \forall\, F \in C(\Omega). \tag{7.13}$$

Wir definieren weiter

$$\begin{aligned} T_{ils} &:= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{ls}(z_k) F_i(z_k), \\ l_{ils} &:= \int\limits_{B_{ls}} F_i(t, x(t), u(t))dt = \int\limits_{B_{ls}} F_i(t, x^s, u^s)dt. \end{aligned}$$

$\chi_{ls}(z_k)$ ist gleich Null, falls $z_k \notin \Omega_{ls}$. Damit ergeben sich für T_{ils} folgende Ungleichungen:

$$T_{ils} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{ls}(z_k) F_i(z_k) \geq \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{ls}(z_k) I_{ils} = \Lambda^*(\chi_{ls}) I_{ils}$$

bzw.

$$T_{ils} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{ls}(z_k) F_i(z_k) \leq \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{ls}(z_k) S_{ils} = \Lambda^*(\chi_{ls}) S_{ils}.$$

Für jedes Tripel (ils) aus $\{0, ..., M_1 + M_2 + L\} \times \{1, ..., L\} \times \{1, ..., S\}$ sind dann folgende Ungleichungen erfüllt:

$$\frac{H_{ls}}{\rho_l} I_{ils} = K_{ls} I_{ils} = \Lambda^*(\chi_{ls}) I_{ils} \leq T_{ils} \leq \Lambda^*(\chi_{ls}) S_{ils} = K_{ls} S_{ils} = \frac{H_{ls}}{\rho_l} S_{ils}$$

und

$$H_{ls} I_{ils} \leq l_{ils} \leq H_{ls} S_{ils}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |T_{ils} - l_{ils}| &\leq H_{ls} \max\{|\rho_l^{-1} I_{ils} - S_{ils}|, |\rho_l^{-1} S_{ils} - I_{ils}|\} = \\ &= H_{ls} \max\{|\rho_l^{-1} I_{ils} - I_{ils} + I_{ils} - S_{ils}|, |\rho_l^{-1} S_{ils} - S_{ils} + S_{ils} - I_{ils}|\} \leq \\ &\leq H_{ls} \max\{|I_{ils}||\rho_l^{-1} - 1| + |I_{ils} - S_{ils}|, |S_{ils}||\rho_l^{-1} - 1| + |S_{ils} - I_{ils}|\} \leq \\ &\leq H_{ls}(|S_{ils} - I_{ils}| + |\rho_l^{-1} - 1| \max\{|I_{ils}|, |S_{ils}|\}). \end{aligned}$$

Aus (7.6) ergibt sich dann

$$|T_{ils} - l_{ils}| \leq H_{ls}(\varepsilon_1 + |\rho_l^{-1} - 1| \max\{|I_{ils}|, |S_{ils}|\}) \tag{7.14}$$

für alle $i \in \{0, ..., M_1 + M_2 + L\}$, $l \in \{1, ..., L\}$ und $s \in \{1, ..., S\}$. Diese Ungleichungen nutzen wir zur Abschätzung des Abstandes der Funktionalwerte von Λ^* und Λ_p. Dabei wird

$$M_{ils} := \max\{|I_{ils}|, |S_{ils}|\}$$

bezeichnet.

$$\begin{aligned}
|\Lambda^*(F_i) - \Lambda_p(F_i)| &= |\sum_{k=1}^{N} \alpha_k F_i(z_k) - \int_a^b F_i(t, x(t), u(t))dt| = \\
&= |\sum_{l=1}^{L}\sum_{s=1}^{S}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{ls}(z_k) F_i(z_k) - \sum_{l=1}^{L}\sum_{s=1}^{S} \int_{B_{ls}} F_i(t, x_l, u_l)dt| \leq \\
&\leq \varepsilon_1 \sum_{l=1}^{L}\sum_{s=1}^{S} H_{ls} + \sum_{l=1}^{L}\sum_{s=1}^{S} H_{ls} |\rho_l^{-1} - 1| M_{ils} = \\
&= \varepsilon_1 (b-a) + \sum_{l=1}^{L}\sum_{s=1}^{S} H_{ls} \left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{I_l}(t_k) - t^l + t^{l-1}}{t^l - t^{l-1}} \right| M_{ils} = (*)
\end{aligned}$$

Wenn nun der Parameter ε so beschaffen ist, daß

$$\frac{\varepsilon}{t^l - t^{l-1}} M_{ils} \leq \varepsilon_1$$

für alle $l = 1, 2, ..., L$ gilt, ergibt sich aus den letzten L Bedingungen von (7.4)

$$\frac{|\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{I^l}(t_k) - t^l + t^{l-1}|}{t^l - t^{l-1}} M_{ils} \leq \frac{\varepsilon}{t^l - t^{l-1}} M_{ils} \leq \varepsilon_1 .$$

Wenn sogar ε derart ist, daß mit

$$M := \max_{ils} M_{ils} = \max_{\substack{z \in \Omega \\ 0 \leq i \leq M_1 + M_2 + L}} |F_i(z)|$$

$$\varepsilon \leq \frac{\varepsilon_1 (\Delta \bar{t})}{M} \text{ und } \varepsilon < \Delta \bar{t} \quad \text{(siehe (7.7))} \tag{7.15}$$

gilt, so können wir die obige Ungleichungskette wie folgt fortsetzen :

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \varepsilon_1 (b-a) + \sum_{l=1}^{L}\sum_{s=1}^{S} H_{ls} \varepsilon_1 = \\
&= 2\varepsilon_1 (b-a).
\end{aligned}$$

Also gilt dann für jedes i aus $\{0, 1, ..., M_1 + M_2 + L\}$

$$|\Lambda^*(F_i) - \Lambda_p(F_i)| \leq 2\varepsilon_1 (b-a). \tag{7.16}$$

Die Funktionalwerte $\Lambda^*(F_i)$ und $\Lambda_p(F_i)$ liegen also bei hinreichend kleinem ε_1 vorgegeben nahe beieinander.

Um das Vorgehen bis zu dieser Stelle zu verdeutlichen, werden das Ziel und die einzelnen Schritte noch einmal in Anleitungsform zusammengefaßt.
Die Testfunktionen $\phi_1, ..., \phi_{M_1}, \psi_1, ..., \psi_{M_2}$ seien gewählt, d.h. die Funktionen $F_0, F_1, ..., F_{M_1+M_2}$ sind fest. Das Ziel ist, für jedes i aus $\{0, 1, ..., M_1 + M_2\}$ den Wert

$$|\Lambda^*(F_i) - \Lambda_p(F_i)|$$

vorgegeben klein zu machen. Dazu wähle man ein positives ε_1 so, daß $2\varepsilon_1(b-a)$ vorgegeben klein ist. Man bestimme zu $F_0, F_1, ..., F_{M_1+M_2}$ über Ω einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul, d.h. zu (jedem) ε_1 ein $\zeta > 0$, so daß

$$|F_i(z) - F_i(z')| < \varepsilon_1, \text{ sofern } \|z - z'\| < \zeta \quad \forall\, i = 0, 1, ..., M_1 + M_2.$$

Als Norm $\|\cdot\|$ wähle man am besten für $z = (t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r)$

$$\|z\| = \max\{|t|, \max_{1\le j\le n} |x_j|, \max_{1\le k\le r} |u_k|\}.$$

Dann ist $|F_i(z) - F_i(z')| < \varepsilon_1$, sofern $|t - t'| < \zeta$, $|x_j - x_j'| < \zeta$, $j = 1, ..., n$, und $|u_k - u_k'| < \zeta$, $k = 1, ..., r$.
Nun zerlege man das Zeitintervall I in (äquidistante) Teilintervalle $I^l = [t^l, t^{l-1})$, $l = 1, ..., L-1$, und $I^L = [t^{L-1}, t^L]$ mit einer Länge, die kleiner als ζ ist. Ferner zerlege man V in Teilmengen V_s, $s = 1, ..., S$, indem man über V ein quadratisches Raster mit einer Kantenlänge kleiner als ζ legt. Man bestimme

$$M := \sup_{\substack{0\le i\le M_1+M_2 \\ z\in\Omega}} |F_i(z)|$$

und wähle ε so, daß

$$0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1 \Delta\bar{t}}{M} \text{ und } \varepsilon < \min_{1\le l\le L} (t^l - t^{l-1})$$

erfüllt sind (siehe (7.15)).
Erst jetzt stelle man die Aufgabe (7.4) mit diesem ε und wähle die (endliche) Folge $z_k = (t_k, x_k, u_k)$, $k = 1, 2, ..., N$, so daß für jeden der Zeitpunkte $t_k \neq t^l$ für jedes $l = 2, ..., L-1$ gilt. Der Ansatz

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta_{z_k}$$

liefert die Lösung Λ^*, deren Werte an den Stellen $F_0, ..., F_{M_1+M_2}$ von den entsprechenden Werten von Λ_p vorgegeben wenig abweichen.

Im folgenden zählen wir die letzten L Bedingungen von (7.4) wieder zu den ersten M_1 Bedingungen von (7.4) hinzu, um die Indizierung zu vereinfachen.

7.3 Konstruktion einer stetigen Hilfstrajektorie

Aus der im vorigen Abschnitt konstruierten stückweise konstanten Hilfstrajektorie $x(\cdot)$ wird nun eine stetige Hilfstrajektorie $x_c(\cdot)$ mit gewissen Eigenschaften gewonnen. Wir wollen die Menge A als wegzusammenhängend annehmen. Dann gilt der folgende Satz:

Satz 28 *Zu jedem $\varepsilon_2 > 0$ existiert ein Paar*

$$q(\varepsilon_2, M_1, M_2) = (x_c(\cdot), u(\cdot)),$$

mit $x_c(\cdot)$ stetig, $x_c(a) = x_a$ und $x_c(b) = x_b$, $x_c(t) \in A$ für jedes $t \in I$, und $u(\cdot)$ stückweise konstant, so daß

$$\begin{array}{rcll} |\Lambda_q(f_0) - \eta(M_1, M_2)| & \leq & \varepsilon_2, & \\ |\Lambda_q(\phi_i^f) - \Delta\phi_i| & \leq & \varepsilon_2, & i = 1, ..., M_1, \\ \Lambda_q(\psi_j^g) - \Delta\psi_j & \geq & -\varepsilon_2, & j = 1, ..., M_2. \end{array} \tag{7.17}$$

Dabei ist Λ_q das zum Paar $q(\varepsilon_2, M_1, M_2)$ gehörige Funktional, definiert durch

$$\Lambda_q(F) := \int_I F(t, x_c(t), u(t))dt \quad \forall\, F \in C(\Omega).$$

Beweis: Zu Beginn des Beweises soll noch einmal an die folgenden Größen erinnert werden:

$$\begin{array}{rcl} B_{ls} & = & [t^{l-1} + \sum\limits_{k=1}^{s-1} H_{lk}, t^{l-1} + \sum\limits_{k=1}^{s} H_{lk}) \quad (l,s) \neq (L,S) \quad \text{bzw.} \\ B_{LS} & = & [t^{L-1} + \sum\limits_{k=1}^{S-1} H_{Lk}, t^{L-1} + \sum\limits_{k=1}^{S} H_{Lk}] \\ H_{ls} & = & \rho_l K_{ls}, \quad K_{ls} = \Lambda^*(\chi_{ls}), \end{array}$$

jeweils für $l = 1, 2, ..., L$ und $s = 1, 2, ..., S$. O.B.d.A. seien alle H_{ls} größer als Null. Andernfalls ignorieren wir die verschwindenden Intervalle B_{ls} und indizieren neu.
Durch die B_{ls} und die Festsetzungen $t_{ls} := t^{l-1} + \sum\limits_{k=1}^{s} H_{lk}$, $t_{00} := t^0$, erhalten wir eine Zerlegung des Zeitintervalls I:

$$a = t_{00} < t_{11} < t_{12} < \cdots < t_{1S} < t_{21} < \cdots < t_{LS-1} < t_{LS} = b.$$

In der vorangegangenen Konstruktion entstanden eine stückweise konstante Steuerung $u(\cdot)$ und eine stückweise konstante Trajektorie $x(\cdot)$:

$$u(t) = u^s, \quad x(t) = x^s \quad \forall\, t \in B_{ls}, (x_s, u_s) \in V_s, \quad l = 1, 2, ..., L; \ s = 1, 2, ..., S.$$

$\{V_s\}_{s=1,2,...,S}$ war eine Zerlegung der Menge $V = A \times U$. An den inneren Zerlegungspunkten t_{ls}, d.h. $(ls) \neq (LS)$, kann $x(\cdot)$ demnach Unstetigkeiten besitzen. Außerdem stimmen x_1 und x_a sowie x_S und x_b im allgemeinen nicht überein. Wir nutzen die Beziehungen (7.16) zwischen dem zu dem Paar $p = (x(\cdot), u(\cdot))$ gehörigen Funktional Λ_p und Λ^* aus und verwenden (4.9). Durch Zusammensetzen der entsprechenden Ungleichungen erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} \rho(\varepsilon) - 2\varepsilon_1(b-a) & \leq & \Lambda_p(f_0) - \eta(M_1, M_2) \leq \varepsilon + 2\varepsilon_1(b-a) & \\ |\Lambda_p(\phi_i^f) - \Delta\phi_i| & \leq & \varepsilon + 2\varepsilon_1(b-a), & i = 1,2,...,M_1 \\ \Lambda_p(\psi_j^g) - \Delta\psi_j & \geq & -\varepsilon - 2\varepsilon_1(b-a), & j = 1,2,...,M_2. \end{array} \tag{7.18}$$

Die Länge eines Intervalls B_{ls} ist H_{ls}. Sei nun δ eine kleine positive Zahl, so daß gilt:

$$0 < \delta < \frac{1}{2} \min_{l,s} H_{ls}. \tag{7.19}$$

$x(\cdot)$ wird nun auf δ-Umgebungen der inneren t_{ls} so abgeändert, daß eine stetige Funktion entsteht. Diese sei mit $x_c(\cdot)$ bezeichnet. Dazu legen wir auf den Intervallen

$$I_{ls}^\delta := [t_{ls} - \delta, t_{ls} + \delta], \quad l = 1,2,...,L; \; s = 1,2,...,S; \; (ls) \neq (LS),$$

folgendes fest: Da A als wegzusammenhängend vorausgesetzt war, ist es möglich, stetige Wege $X_{ls}^\delta : I_{ls}^\delta \to A$ zu finden, so daß $X_{ls}^\delta(t_{ls} - \delta) = x^{s-1}$ und $X_{ls}^\delta(t_{ls} + \delta) = x^s$ falls $s \neq 1$ und sonst $X_{l1}^\delta(t_{l1} - \delta) = x^S$ und $X_{l1}^\delta(t_{l1} + \delta) = x^1$ gilt. Dann definieren wir $x_c(\cdot) : I \to A$ durch

$$\begin{array}{rcll} x_c(t) & := & X_{ls}^\delta(t) & \text{auf } I_{ls}^\delta \\ x_c(t) & := & x(t) & \text{sonst.} \end{array}$$

Damit ist $x_c(\cdot)$ stetig auf I. Die gleiche Prozedur wird noch einmal in den Randpunkten von I, in $a = t_{00}$ und $b = t_{LS}$, durchgeführt. Die Punkte x_a und x_b liegen in A. So lassen sich auch stetige Wege $X_{00}^\delta : I_{00}^\delta := [a, a+\delta] \to A$ und $X_{LS}^\delta : I_{LS}^\delta := [b-\delta, b] \to A$ finden, die $X_{00}^\delta(t_{00}) = x_a$ und $X_{00}^\delta(t_{00} + \delta) = x_1$ sowie $X_{LS}^\delta(t_{LS} - \delta) = x_S$ und $X_{LS}^\delta(t_{LS}) = x_b$ erfüllen. $x_c(\cdot)$ wird auf dem Intervall I_{00}^δ mittels

$$x_c(t) := X_{00}^\delta(t)$$

und auf I_{LS}^δ durch

$$x_c(t) := X_{LS}^\delta(t)$$

abgeändert. Die geänderte Funktion $x_c(\cdot)$ ist auch stetig und erfüllt die Randbedingungen des ursprünglichen Problems (OP).
Nun sei Λ_q das zu $q := (x_c(\cdot), u(\cdot))$ assoziierte Funktional, also

$$\Lambda_q(F) := \int_I F(t, x_c(t), u(t))dt \quad \forall\, F \in C(\Omega).$$

Den Abstand der beiden Funktionale Λ_p und Λ_q in den „Punkten“ F_i kann man wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|\Lambda_p(F_i) - \Lambda_q(F_i)| &= |\int\limits_I [F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,x_c(t),u(t))]dt| = \\
&= |\sum_{\substack{l,s \\ (ls)\neq(LS)}} \int\limits_{t_{ls}-\delta}^{t_{ls}+\delta} [F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,x_c(t),u(t))]dt + \\
&\quad + \int\limits_{t_{00}}^{t_{00}+\delta} [F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,x_c(t),u(t))]dt + \\
&\quad + \int\limits_{t_{LS}-\delta}^{t_{LS}} [F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,x_c(t),u(t))]dt| \leq \\
&\leq \sum_{\substack{l,s \\ (ls)\neq(LS)}} \int\limits_{t_{ls}-\delta}^{t_{ls}+\delta} |F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,x_c(t),u(t))|dt + \\
&\quad + \int\limits_{t_{00}}^{t_{00}+\delta} |F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,x_c(t),u(t))|dt + \\
&\quad + \int\limits_{t_{LS}-\delta}^{t_{LS}} |F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,x_c(t),u(t))|dt = \\
&= \sum_{\substack{l,s \\ (ls)\neq(LS)}} \int\limits_{t_{ls}-\delta}^{t_{ls}+\delta} |F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,X_{ls}^\delta(t),u(t))|dt + \\
&\quad + \int\limits_{t_{00}}^{t_{00}+\delta} |F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,X_{00}^\delta(t),u(t))|dt + \\
&\quad + \int\limits_{t_{LS}-\delta}^{t_{LS}} |F_i(t,x(t),u(t)) - F_i(t,X_{LS}^\delta(t),u(t))|dt \leq \\
&\leq \sum_{\substack{l,s \\ (ls)\neq(LS)}} 2 \max_{(t,x,u)\in\Omega} |F_i(t,x,u)| 2\delta + 2 \max_{(t,x,u)\in\Omega} |F_i(t,x,u)| 2\delta \leq \\
&\leq 4LS\delta \max_{(t,x,u)\in\Omega} |F_i(t,x,u)|.
\end{aligned}$$

Wir erinnern noch einmal an $M = \max\limits_{\substack{i\in\{0,1,2,\ldots,M_1+M_2\} \\ (t,x,u)\in\Omega}} |F_i(t,x,u)|$, dann ergibt sich

$$|\Lambda_p(F_i) - \Lambda_q(F_i)| \leq 4LSM\delta \tag{7.20}$$

für jedes $i = 0, 1, 2, ..., M_1 + M_2$. Die Formeln (7.18) sowie (7.20) erlauben die gesuchten Abschätzungen zu gewinnen.

$$\rho(\varepsilon) - 2\varepsilon_1(b-a) - 4LSM\delta \leq \Lambda_q(f_0) - \eta(M_1, M_2) \leq 4LSM\delta + \varepsilon + 2\varepsilon_1(b-a)$$

Weiter bekommen wir für jedes $i \in \{1, 2, ..., M_1\}$

$$|\Lambda_q(\phi_i^f) - \Delta\phi_i| \leq 4LSM\delta + \varepsilon + 2\varepsilon_1(b-a)$$

und für alle $j = 1, 2, ..., M_2$

$$\Lambda_q(\psi_i^g) - \Delta\psi_j \geq -4LSM\delta - \varepsilon - 2\varepsilon_1(b-a).$$

Es ist

$$\varepsilon_2 \geq 4LSM\delta + \varepsilon + 2\varepsilon_1(b-a)$$

zu sichern, also

$$\delta \leq \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon - 2\varepsilon_1(b-a)}{4LSM}, \tag{7.21}$$

wenn vorher durch ein geeignetes ε_1 (und ε nach (7.15)) die Ungleichung

$$\varepsilon + 2\varepsilon_1(b-a) < \varepsilon_2 \tag{7.22}$$

garantiert worden ist. Aus (4.9) erhalten wir $-\varepsilon_2 \leq \rho(\varepsilon) + \varepsilon - \varepsilon_2$, womit der Satz bewiesen ist.

□

7.4 Eine Näherungslösung für die Originalaufgabe

Unter der Annahme, daß die im Ausgangsproblem (OP) vorkommenden Funktionen f_0, f und g einer Lipschitzbedingung in x auf A genügen, wollen wir die Konstruktion einer Näherungslösung abschließen. Die entsprechenden Lipschitzkonstanten seien k_{f_0}, k_f und k_g, so daß gilt:

$$\begin{aligned} |f_0(t,x,u) - f_0(t,x',u)| &\leq k_{f_0}\|x - x'\| \\ \|f(t,x,u) - f(t,x',u)\| &\leq k_f\|x - x'\| \\ \|g(t,x,u) - g(t,x',u)\| &\leq k_g\|x - x'\| \end{aligned} \tag{7.23}$$

für alle (t, x, u) und (t, x', u) aus Ω.

Zunächst wird die konstruierte stückweise konstante Steuerung $u(\cdot)$ zur Lösung der Anfangswertaufgabe aus dem Ausgangsproblem (OP) verwendet. Sei also $x_R(\cdot)$ eine Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \qquad x(a) = x_a.$$

Wir werden mit Hilfe der Funktion $x_c(\cdot)$ zeigen, daß $x_R(\cdot)$ unter den sich anschließenden Voraussetzungen näherungsweise zulässig für das Ausgangsproblem ist und daß das zu dem Paar $p = (x_R(\cdot), u(\cdot))$ assoziierte Funktional Λ_p einen Wert $\Lambda_p(f_0)$ liefert, der nahe dem minimalen Wert η der verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe (2.13) liegt.
Dazu nehmen wir an, unter den M_1 Testfunktionen vom Typ 1 seien M_1' Funktionen, die aus den Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_h(t) &= \sin(\frac{2\pi h}{b-a}(t-a)) && h = 1, 2, ..., M_{12} \\
\varphi_h(t) &= 1 - \cos(\frac{2\pi(h-M_{12})}{b-a}(t-a)) && h = M_{12}+1, M_{12}+2, ..., 2M_{12}
\end{aligned}$$

wie folgt gebildet werden:

$$\varphi_{hj}(t, x) := x_j \varphi_h(t), \quad j = 1, .., n; h = 1, 2, ..., 2M_{12}. \tag{7.24}$$

Damit ergeben sich nach dem Vorgehen aus Abschnitt 1 die formalen Ableitungen bezüglich der Differentialgleichung (2.2) durch

$$\varphi_{hj}^f(t, x, u) := x_j \dot{\varphi}_h(t) + \varphi_h(t) f_j(t, x, u), \quad j = 1, .., n; h = 1, 2, ..., 2M_{12}. \tag{7.25}$$

Demnach gilt $M_1' = 2M_{12}n$, wobei n die Dimension des Zustandsraumes ist.

Nach Satz (28) wissen wir

$$|\Lambda_q(\varphi_{hj}^f) - \Delta\varphi_{hj}| = |\Lambda_q(\varphi_{hj}^f) - x_{bj}\varphi_h(b) + x_{aj}\varphi_h(a)| = |\Lambda_q(\varphi_{hj}^f)| \leq \varepsilon_2 \tag{7.26}$$

für alle $j = 1, 2, ..., n; h = 1, 2, ..., 2M_{12}$, denn es ist

$$\varphi_h(a) = \varphi_h(b) = 0 \tag{7.27}$$

für jedes h aus $\{1, 2, ..., 2M_{12}\}$. Aus diesem Grund ist auch die Differenz

$$\varphi_h(b) \int_a^b f_j(\tau, x_c(\tau), u(\tau)) d\tau - \varphi_h(a) \int_a^a f_j(\tau, x_c(\tau), u(\tau)) d\tau$$

gleich Null. Das verwenden wir in der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}
\left|\Lambda_q(\varphi_{hj}^f)\right| &= \Big|\int_a^b [x_{cj}(t)\dot\varphi_h(t) + f_j(t,x_c(t),u(t))\varphi_h(t)]dt\Big| = \\
&= \Big|\int_a^b x_{cj}(t)\dot\varphi_h(t)dt + \int_a^b f_j(t,x_c(t),u(t))\varphi_h(t)dt\Big| = \\
&\overset{part.}{\underset{Int.}{=}} \Big|\int_a^b x_{cj}(t)\dot\varphi_h(t)dt + \big[\varphi_h(t)\int_a^t f_j(\tau,x_c(\tau),u(\tau))d\tau\big]_a^b \\
&\quad -\int_a^b \dot\varphi_h(t)\int_a^t f_j(\tau,x_c(\tau),u(\tau))d\tau dt\Big| = \\
&= \Big|\int_a^b [x_{cj}(t)\dot\varphi_h(t)dt + \varphi_h(b)\int_a^b f_j(\tau,x_c(\tau),u(\tau))d\tau \\
&\quad -\varphi_h(a)\int_a^a f_j(\tau,x_c(\tau),u(\tau))d\tau - \int_a^b \dot\varphi_h(t)\int_a^t f_j(\tau,x_c(\tau),u(\tau))d\tau dt\Big| = \\
&= \Big|\int_a^b [x_{cj}(t) - \int_a^t f_j(\tau,x_c(\tau),u(\tau))d\tau]\dot\varphi_h(t)dt\Big|.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$y_j(t) := x_{cj}(t) - \int_a^t f_j(\tau,x_c(\tau),u(\tau))d\tau \quad \forall\, t \in I, \tag{7.28}$$

so liefert (7.26)

$$\Big|\int_I y_j(t)\dot\varphi_h(t)dt\Big| \le \varepsilon_2. \tag{7.29}$$

Die einzelnen Komponenten von $x_R(\cdot)$ seien $x_{Rj}(\cdot)$. Dann gilt für jedes t aus I

$$z_j(t) := x_{Rj}(t) - \int_a^t f_j(\tau,x_R(\tau),u(\tau))d\tau = x_{aj}.$$

Wir definieren weiter

$$w_j(t) := y_j(t) - z_j(t) = x_{cj}(t) - \int_a^t f_j(\tau,x_c(\tau),u(\tau))d\tau - x_{aj} \quad \forall\, t \in I. \tag{7.30}$$

$w_j(\cdot)$ ist also die j-te Komponente des integrierten Differentialgleichungsdefekts bezüglich (2.2) von $x_c(\cdot)$. Aufgrund von (7.29) ist

$$|\int_I w_j(t)\dot{\varphi}_h(t)dt| \leq \varepsilon_2.$$

Nutzt man nun die Definition der $\varphi_h(\cdot)$, so gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\Big|\int_I w_j(t)\sin\left(\frac{2\pi h}{b-a}(t-a)\right)dt\Big| &\leq \frac{\varepsilon_2(b-a)}{2\pi h} \\
\Big|\int_I w_j(t)\cos\left(\frac{2\pi h}{b-a}(t-a)\right)dt\Big| &\leq \frac{\varepsilon_2(b-a)}{2\pi h}
\end{aligned}$$

für $h = 1, 2, ..., M_{12}$. D.h. bis auf den konstanten Term sind die ersten $2M_{12}$ Fourierkoeffizienten der $w_j(\cdot)$ betragsmäßig klein. Wir wollen annehmen, daß die Fourierreihen der einzelnen $w_j(\cdot)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
w_j(t) &\sim \frac{1}{2}a_0^j + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i^j\cos\left(\frac{2\pi i}{b-a}(t-a)\right) + b_i^j\sin\left(\frac{2\pi i}{b-a}(t-a)\right)) = \\
&= \frac{1}{2}a_0^j + \sum_{i=1}^{M_{12}}(a_i^j\cos\left(\frac{2\pi i}{b-a}(t-a)\right) + b_i^j\sin\left(\frac{2\pi i}{b-a}(t-a)\right)) + r_j(t)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
|a_0^j| &= \frac{1}{\pi}\Big|\int_I w_j(t)dt\Big| \\
|a_i^j| &= \frac{1}{\pi}\Big|\int_I w_j(t)\cos\left(\frac{2\pi i}{b-a}(t-a)\right)dt\Big| \leq \frac{\varepsilon_2(b-a)}{2\pi^2 i} \quad \text{für } 1 \leq i \leq M_2, \\
|b_i^j| &= \frac{1}{\pi}\Big|\int_I w_j(t)\sin\left(\frac{2\pi i}{b-a}(t-a)\right)dt\Big| \leq \frac{\varepsilon_2(b-a)}{2\pi^2 i} \quad \text{für } 1 \leq i \leq M_2.
\end{aligned}$$

Es werde nun vorausgesetzt, daß die vektorwertige Funktion $w(\cdot)$ mit den Komponentenfunktionen $w_j(\cdot)$ in eine Fourier-Reihe entwickelbar ist, d.h. daß $x_c(\cdot)$ dementsprechend konstruiert wurde.
$w(\cdot)$ werde nun dargestellt durch

$$w(t) = v + \gamma(t), \qquad t \in I \tag{7.31}$$

mit dem konstanten Vektor v, der aus den Komponenten $\frac{1}{2}a_0^j$ besteht. Die euklidische Norm von $\gamma(t)$ für jedes t aus I läßt sich wie folgt abschätzen:

$$
\begin{aligned}
\|\gamma(t)\| &\leq \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{M_{12}} (|a_i^j| + |b_i^j|) \\ \vdots \end{array} \right\| + \|r(t)\| \\
&= \sqrt{\sum_j \Big(\sum_{i=1}^{M_{12}} (|a_i^j| + |b_i^j|))^2} + \|r(t)\| \\
&\leq \sqrt{(\sum_j \sum_{i=1}^{M_{12}} (|a_i^j| + |b_i^j|)))^2} + \|r(t)\| \\
&= \sum_j \sum_{i=1}^{M_{12}} (|a_i^j| + |b_i^j|) + \|r(t)\| \\
&\leq M_{12} n \frac{\varepsilon_2 (b-a)}{\pi^2} + \|r(t)\|.
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

Zu einem gegebenen $\delta_2 > 0$ gelte

$$\|r(t)\| \leq \frac{\delta_2}{2}, \qquad \forall\, t \in I. \tag{7.33}$$

ε_2 sei derart, daß

$$M_{12} n \frac{\varepsilon_2 (b-a)}{\pi^2} \leq \frac{\delta_2}{2}. \tag{7.34}$$

Demzufolge wird die euklidische Norm von $\gamma(t)$ für jedes $t \in I$ kleiner als das vorgegebene δ_2.
Es bleibt der Vektor v zu betrachten. Aus (7.30), (7.31) und den Definitionen von $y(\cdot)$ sowie $z(\cdot)$ bekommen wir für alle t aus I:

$$x_c(t) - \int_a^t f(\tau, x_c(\tau), u(\tau)) d\tau - x_R(t) + \int_a^t f(\tau, x_R(\tau), u(\tau)) d\tau = v + \gamma(t). \tag{7.35}$$

In dieser Gleichung setzen wir $t = a$ und erhalten

$$x_c(a) = x_R(a) + v + \gamma(a).$$

Weil $x_R(a) = x_c(a) = x_a$ ist, folgt

$$\|v\| = \|\gamma(a)\| \leq \delta_2. \tag{7.36}$$

Bis zu dieser Stelle wurde gezeigt, daß für geeignete M_{12} und ε_2 der integrierte Differentialgleichungsdefekt $w(\cdot)$ von $x_c(\cdot)$ vorgegeben klein wird. Selbiges wird nun auch für den Abstand von $x_R(\cdot)$ und $x_c(\cdot)$ nachgewiesen. Dazu verwenden wir (7.35) und stellen für alle $t \in I$ folgendes fest:

$$\begin{aligned}\|x_c(t) - x_R(t)\| &= \|\int_a^t f(\tau, x_c(\tau), u(\tau))d\tau - \\ &\quad \int_a^t f(\tau, x_R(\tau), u(\tau))d\tau + v + \gamma(t)\| \leq \\ &\leq k_f \int_a^t \|x_c(\tau) - x_R(\tau)\|d\tau + \|v\| + \|\gamma(t)\|.\end{aligned}$$

Hier bietet sich die Anwendung des Lemmas von Gronwall an:

$$\|x_c(t) - x_R(t)\| \leq k_f \int_a^t [\|v\| + \|\gamma(s)\|]\exp(k_f(t-s))ds + \|v\| + \|\gamma(t)\|$$

für jedes $t \in I$. Dies erlaubt weitere Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\|x_c(t) - x_R(t)\| &\leq \max_{t\in I}(\|v\| + \|\gamma(t)\|)\left\{\big[-\exp(k_f(t-s))\big]_a^t + 1\right\} = \\ &= \max_{t\in I}(\|v\| + \|\gamma(t)\|)\exp(k_f(t-a)) \leq \\ &\leq \max_{t\in I}(\|v\| + \|\gamma(t)\|)\exp(k_f(b-a))\end{aligned}$$

Gelten dann (7.33) und (7.34), so ergibt sich letztlich für jedes $t \in I$

$$\|x_c(t) - x_R(t)\| \leq 2\delta_2 \exp(k_f(b-a)). \tag{7.37}$$

Folglich haben wir gezeigt, daß für geeignete Parameter M_{12} und ε_2 auch die Werte der Funktionen $x_c(\cdot)$ und $x_R(\cdot)$ vorgegeben nahe beieinander liegen.

Im folgenden Satz werden wir auf Zerlegungen Z_λ der Feinheit kleiner λ des Zeitintervalls I Bezug nehmen. Damit ist eine äquidistante Zerlegung von I gemeint, bei der benachbarte Teilintervalle lediglich einen Punkt gemeinsam haben und die Länge der Teilintervalle durch $\frac{\text{mes}(I)}{P}$ gegeben ist. Dabei ist P eine natürliche Zahl, für die $\frac{\text{mes}(I)}{P} \leq \lambda$ gilt.

Die vorangegangenen Überlegungen nutzen wir aus, um Eigenschaften des Paares $p := (x_R(\cdot), u(\cdot))$ zu zeigen.

Satz 29 *Sei $\lambda > 0$ gegeben. Die Parameter M_1, M_{12}, M_2, L und ε aus der Aufgabe* (7.4) *und die Parameter S, ε_1, δ, ε_2 und δ_2 aus der Konstruktion können bei Berücksichtigung der Voraussetzungen und angenommenen Beziehungen zwischen ihnen so* *gewählt werden, daß das aus der Konstruktion resultierende Paar* $p = (x_R(\cdot), u(\cdot))$ *die folgenden Abschätzungen erfüllt:*

$$\begin{aligned} |\Lambda_p(f_0) - \eta| &\leq \lambda, && (7.38) \\ \|x_R(b) - x_b\| &\leq \lambda, && (7.39) \\ \mathrm{d}(x_R(t), A) &\leq \lambda \qquad \forall\, t \in I, && (7.40) \\ \frac{1}{\mathrm{mes}(J)} \int\limits_J g(t, x_R(t), u(t))dt &\geq -\lambda, \quad \forall\, J \in Z_\lambda, && (7.41) \end{aligned}$$

wobei wieder $\Lambda_p(F) = \int\limits_I F(t, x_R(t), u(t))dt$ *für jedes* F *aus* $C(\Omega)$ *ist.* $\mathrm{d}(x, a)$ *ist der Abstand eines Punktes* $x \in \mathbb{R}^n$ *zu der Menge* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *und wie in Lemma 7 ist* $\eta = \inf\limits_Q \Lambda(f_0)$.

Beweis:

Wir beginnen nun mit der Betrachtung der Aussage (7.38). Um in den Schlußfolgerungen dieses Beweises einen besseren Überblick zu haben, trennen wir die Anzahl L der Testfunktionen vom Typ 3 hier wieder von der Anzahl M_1 der Testfunktionen vom Typ 1.

Das Paar $q(\varepsilon_2, M_1, M_2, L)$ aus Satz 28 erfüllt die Bedingung

$$\eta(M_1, M_2, L) - \varepsilon_2 \leq \Lambda_q(f_0) \leq \eta(M_1, M_2, L) + \varepsilon_2. \tag{7.42}$$

Wir erhalten mit (7.37) (siehe Berechnungen vor diesem Satz) und unter Ausnutzung der Lipschitzbedingung für f_0

$$\begin{aligned} |\Lambda_p(f_0) - \Lambda_q(f_0)| &= |\int\limits_I [f_0(t, x_R(t), u(t)) - f_0(t, x_c(t), u(t))]dt| \leq \\ &\leq \int\limits_I |f_0(t, x_R(t), u(t)) - f_0(t, x_c(t), u(t))|dt \leq \\ &\leq k_{f_0} \int\limits_I \|(t, x_R(t), u(t)) - (t, x_c(t), u(t))\|dt = \\ &= k_{f_0} \int\limits_I \|x_R(t) - x_c(t)\|dt \leq \\ &\leq k_{f_0}(b-a)2\delta_2 \exp(k_f(b-a)). \end{aligned} \tag{7.43}$$

Bezeichnen wir dann $k_{f_0}(b-a)2\delta_2 \exp(k_f(b-a))$ abkürzend mit C, so läßt sich (7.43) in der Form

$$-C \leq \Lambda_p(f_0) - \Lambda_q(f_0) \leq C$$

schreiben. Wegen (7.42) folgt daraus

$$-C + \eta(M_1, M_2, L) - \varepsilon_2 \leq \Lambda_p(f_0) \leq C + \eta(M_1, M_2, L) + \varepsilon_2.$$

Das Lemma 7 liefert die Aussage, daß zu einem gegebenen $\delta_3 > 0$ die Zahlen M_1, M_2 und L so groß gewählt werden können, daß

$$|\eta(M_1, M_2, L) - \eta| \leq \delta_3. \tag{7.44}$$

(7.44) kann in

$$-\delta_3 \leq \eta(M_1, M_2, L) - \eta \leq \delta_3$$

umgeformt werden, woraus man mit dem obigen Ergebnis

$$-C - \delta_3 + \eta - \varepsilon_2 \leq \Lambda_p(f_0) \leq C + \eta + \delta_3 + \varepsilon_2$$

erhält. Um die Ungleichung (7.38) zu erfüllen, wählen wir

$$\delta_3 \leq \frac{\lambda}{3} \tag{7.45}$$

$$\varepsilon_2 \leq \frac{\lambda}{3} \tag{7.46}$$

$$k_{f_0}(b-a)2\delta_2 \exp(k_f(b-a)) \leq \frac{\lambda}{3}. \tag{7.47}$$

Wenden wir uns jetzt den beiden Bedingungen (7.39) und (7.40) des Satzes zu. Es ist

$$\|x_R(b) - x_b\| = \|x_R(b) - x_c(b)\|.$$

Nach (7.37) ist dies kleiner oder gleich $2\delta_2 \exp(k_f(b-a))$. Analog ist für alle t aus I

$$\mathrm{d}(x_R(t), A) = \inf_{y\in A} \|x_R(t) - y\| \leq \|x_R(t) - x_c(t)\| \leq 2\delta_2 \exp(k_f(b-a))$$

erfüllt. An dieser Stelle ist demnach die Ungleichung

$$2\delta_2 \exp(k_f(b-a)) \leq \lambda \tag{7.48}$$

zu sichern.
Es bleibt, die Bedingung (7.41) zu behandeln. Dazu verweisen wir zunächst auf die im Anhang unter A.1 formulierten Überlegungen. Wir gehen nämlich davon aus, daß die M_2 Testfunktionen vom Typ 2 die Form (A.1) haben. Die verwendeten charakteristischen Funktionen $\chi_J(\cdot)$ gehören zu den Intervallen J der Zerlegung Z_λ. Somit soll sichergestellt werden, daß

$$\frac{b-a}{M_2} \leq \lambda \tag{7.49}$$

gilt. Die entsprechenden Bedingungen aus dem Satz 28 lauten dann:

$$\int_a^b \chi_J(t) g(t, x_c(t), u(t)) dt \geq -\varepsilon_2 \quad \forall\ J \in Z_\lambda.$$

Unter Ausnutzung der Lipschitzbedingung für $g(\cdot)$ für jedes $J \in Z_\lambda$ kann folgendes geschlossen werden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{mes}(J)} \int\limits_J g(t, x_R(t), u(t))dt &= \frac{1}{\operatorname{mes}(J)} \int\limits_J [g(t, x_R(t), u(t)) - g(t, x_c(t), u(t)) + \\
&\quad +g(t, x_c(t), u(t))]dt \qquad \geq \\
&\geq \frac{-k_g}{\operatorname{mes}(J)} \int\limits_J \|x_R(t) - x_c(t)\|dt + \\
&\quad \frac{1}{\operatorname{mes}(J)} \int\limits_J g(t, x_c(t), u(t))dt \qquad \geq \\
&\geq -k_g 2\delta_2 \exp(k_f(b-a)) - \varepsilon_2 \frac{M_2}{b-a}.
\end{aligned}$$

Damit der letzte Ausdruck größer oder gleich $-\lambda$ wird, verlangen wir, daß die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$k_g 2\delta_2 \exp(k_f(b-a)) \leq \frac{\lambda}{2} \tag{7.50}$$

$$\varepsilon_2 \frac{M_2}{b-a} \leq \frac{\lambda}{2}. \tag{7.51}$$

Außer den Ungleichungen, in denen λ auftritt, sind noch die Ungleichungen aus der vorangegangenen Konstruktion zu erfüllen. Dazu werden noch einmal alle relevanten Formeln mit den entsprechenden Seiten aufgelistet:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &> |F_i(t', x', u') - F_i(t'', x'', u'')|, && \text{Seite 47,} && (7.52)\\
&\quad \forall\, (t', x', u'), (t'', x'', u'') \in \Omega_{ls}, \\
&\quad \forall\, l = 1, 2, ..., L; s = 1, 2, ..., S; \\
\varepsilon &< \Delta\bar{t} && \text{Seite 48,} && (7.53)\\
\varepsilon &\leq \frac{\varepsilon_1(\Delta\bar{t})}{M} && \text{Seite 51,} && (7.54)\\
\delta &< \frac{1}{2} \min_{\substack{1\leq l\leq L\\ 1\leq s\leq S}} H_{ls} && \text{Seite 54,} && (7.55)\\
\varepsilon_2 &> \varepsilon + 2\varepsilon_1(b-a) && \text{Seite 56,} && (7.56)\\
\delta &\leq \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon - 2\varepsilon_1(b-a)}{4LSM+1} && \text{Seite 56,} && (7.57)\\
\varepsilon_2 &\leq \frac{\pi^2 \delta_2}{2nM_{12}(b-a)} && \text{Seite 60.} && (7.58)
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, wie in aufeinanderfolgenden Schritten die Parameter aus dem Satz geeignet zu wählen sind:

(1) Man wähle zunächst M_1, M_2 und L, so daß (7.49) und (7.44) mit δ_3 aus (7.45) erfüllt sind. Mit dieser Wahl ändert sich $M = \sup\limits_{\substack{0 \leq i \leq M_1+M_2+L \\ z \in \Omega}} |F_i(z)|$ nicht mehr, auch falls L noch vergrößert wird.

(2) Man wähle δ_2, so daß (7.47), (7.48) und (7.50) erfüllt sind, d.h. man wähle z.B.

$$\delta_2 = \min\left\{\frac{\lambda}{6k_{f_0}(b-a)}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4k_g}\right\} \exp(-k_f(b-a)).$$

(3) Man wähle (zu geeignetem M_{12}) ε_2 so, daß (7.46), (7.51) und (7.58) erfüllt sind. Z.B. wähle man

$$\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda(b-a)}{2M_2}, \frac{\pi^2\delta_2}{2(b-a)nM_{12}}\right\}.$$

Die zusätzlichen M_{12} Testfunktionen ändern nichts an der Wahl von M_1, M_2 und L!

(4) Die Ungleichungen (7.54) und (7.56) liefern

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_2}{\frac{\Delta\bar{t}}{M} + 2(b-a)} \tag{7.59}$$

und man kann z.B.

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{2(\frac{\Delta\bar{t}}{M} + 2(b-a))}$$

wählen.

(5) Man wähle nun ein neues L und S und eine Zerlegung von Ω in Teilmengen $\Omega_{ls} = I^l \times V_s$ so, daß sie der Ungleichung (7.52) genügen, aber L nicht kleiner als das im Punkt (1) gewählte ist. Das ε_1 aus dem Punkt (4) bleibt erhalten, weil eine Vergrößerung von L eine Verkleinerung von $\Delta\bar{t}$ bewirkt, womit ε_1 immernoch die Bedingung (7.59) genügt.

(6) ε muß die Ungleichungen (7.53) und (7.54) erfüllen, also wählen wir z.B.

$$\varepsilon = \min\left\{\Delta\bar{t}, \frac{\varepsilon_1\Delta\bar{t}}{M}\right\}.$$

(7) Den Abschluß bildet δ, welches (7.55) und (7.57) genügen muß. Wir können z.B. die folgende Wahl treffen:

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}\min_{l,s} H_{ls}, \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon - 2\varepsilon_1(b-a)}{4LSM+1}\right\}.$$

Damit ist gezeigt, daß bei geschickter Wahl aller Parameter die oben aufgelisteten Ungleichungen erfüllt werden können. Das bedeutet, die Bedingungen aus dem Satz sind erfüllt, ohne die Bedingungen an die einzelnen Parameter zu verletzen.

□

Kapitel 8

Ein Beispiel für die Lösung einer Optimalsteueraufgabe mittels der Rubio-Verallgemeinerung

Um das Vorgehen der in dieser Arbeit behandelten Verallgemeinerung eines Optimalsteuerproblems bzw. die anschließende Konstruktion von Näherungslösungen zu verdeutlichen, werden in diesem Abschnitt anhand eines bewußt einfach gewählten Beispiels die einzelnen Schritte vorgeführt.

8.1 Das Originalproblem

Es wird das folgende Optimalsteuerproblem betrachtet:

$$\begin{gathered}
\int_0^1 x^2(t)dt \longrightarrow \min! \\
\dot{x}(t) = u(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \\
x(0) = x(1) = 0 \\
x(t) + u^2(t) - 1 \geq 0 \quad 0 \leq t \leq 1 \\
x(t) \in [0,1], \; u(t) \in \{-1,1\} \quad \forall\, t \in [0,1].
\end{gathered} \tag{8.1}$$

Demnach haben wir folgende Entsprechungen:

$$\begin{array}{rcl}
a = 0 \quad b = 1 \quad I = [0,1] & & A = [0,1] \quad U = \{-1,1\} \\
f_0(t,x,u) & = & x^2 \\
x_a = 0 & & x_b = 0 \\
f(t,x,u) & = & u \\
g(t,x,u) & = & x + u^2 - 1.
\end{array}$$

8.2 Ein Beispiel für die Auswahl der Testfunktionen und die Aufstellung der diskretisierten verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe

Wir setzen $M_1 = 6$ und legen die Testfunktionen vom Typ 1 wie folgt fest:

$$\begin{array}{llll}
\phi_1(t,x) := x & \Rightarrow & \phi_1^f(t,x,u) = u & \Delta\phi_1 = 0 \\
\phi_2(t,x) := tx & \Rightarrow & \phi_2^f(t,x,u) = x + tu & \Delta\phi_2 = 0 \\
\phi_3(t,x) := x^2 & \Rightarrow & \phi_3^f(t,x,u) = 2xu & \Delta\phi_3 = 0 \\
\phi_4(t,x) := t^2x & \Rightarrow & \phi_4^f(t,x,u) = 2tx + t^2u & \Delta\phi_4 = 0 \\
\phi_5(t,x) := tx^2 & \Rightarrow & \phi_5^f(t,x,u) = x^2 + 2txu & \Delta\phi_5 = 0 \\
\phi_6(t,x) := x^3 & \Rightarrow & \phi_6^f(t,x,u) = 3x^2u & \Delta\phi_6 = 0.
\end{array}$$

Die Anzahl $2M_{12}$ der für die Minimalfolgenkonstruktion benötigten Testfunktionen mit kompaktem Träger in $[a,b] = [0,1]$ (siehe (7.24) auf Seite 57) legen wir mit 10 fest. Somit haben die Testfunktionen folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{lcll}
\varphi_h(t,x) & := & x\sin(2\pi ht) & h = 1,2,...,5 \\
\varphi_h(t,x) & := & x[1-\cos(2\pi(h-5)t)] & h = 6,7,...,10.
\end{array}$$

Die formalen Ableitungen sind dann

$$\begin{array}{lcll}
\varphi_h^f(t,x,u) & = & 2\pi hx\cos(2\pi ht) + \sin(2\pi ht)u & h = 1,2,...,5 \\
\varphi_h^f(t,x,u) & = & 2\pi(h-5)x\sin(2\pi(h-5)t) + [1-\cos(2\pi(h-5)t)]u & h = 6,7,...,10,
\end{array}$$

und für jedes h aus $\{1,2,...,10\}$ gilt wegen (7.27) auf Seite 57 $\Delta\varphi_h = 0$.

Für die Testfunktionen vom Typ 2 treffen wir die folgende Wahl: $M_2 = 6$ und dann

$$\psi_j(t,y) := \chi_{I_j}(t)y \quad \Rightarrow \quad \psi_j^g(t,x,u) = \chi_{I_j}(t)g(t,x,u) = \chi_{I_j}(t)(x+u^2-1),$$

sowie $\Delta\psi_j = 0$ für jedes $j = 1,...,6$ (siehe Abschnitt A.1). Dabei sind die I_j die Teilintervalle $[\frac{j-1}{6}, \frac{j}{6}]$, $j = 1,...,6$.

Die Testfunktionen vom Typ 3 (spezialisierter Typ 1) ergaben sich aus einer äquidistanten Zerlegung des Zeitintervalls. Hier wählen wir eine Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ in 10 Teilintervalle, so daß sich folgendes für diese Testfunktionen ergibt:

$$\begin{array}{lcll}
\chi_l(t) & := & \begin{cases} 1 & t \in [\frac{l-1}{10}, \frac{l}{10}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & \Delta\chi_l = \frac{1}{10} \quad l = 1,...,9 \\
\chi_{10}(t) & := & \begin{cases} 1 & t \in [\frac{9}{10}, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & \Delta\chi_{10} = \frac{1}{10}.
\end{array}$$

Die verallgemeinerte Optimalsteueraufgabe mit endlich vielen Nebenbedingungen lautet damit:

$$\left.\begin{array}{rll} \Lambda(f_0) & \to \text{min!} & \text{bezüglich} \\ \Lambda(\phi_i^f) & = \Delta\phi_i & i = 1, ..., 6; \\ \Lambda(\varphi_h^f) & = 0 & h = 1, ..., 10; \\ \Lambda(\chi_{I_j}(t) g(t, x, u)) & \geq 0 & j = 1, ..., 6; \\ \Lambda(\chi_{I_l}(t)) & = \frac{1}{10} & l = 1, ..., 10. \end{array}\right\} \tag{8.2}$$

8.3 Lösung der diskretisierten verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe

Gemäß den Betrachtungen zu (4.8) machen wir den folgenden Lösungsansatz:
Wir wählen Stützstellen aus $[0,1] \times [0,1] \times \{-1,1\}$:

$$\begin{array}{cccc} z_1 = (0,0,-1) & z_2 = (\frac{1}{33}, 0, -1) & \cdots & z_{34} = (1, 0, -1) \\ z_{35} = (0, \frac{1}{20}, -1) & z_{36} = (\frac{1}{33}, \frac{1}{20}, -1) & \cdots & z_{68} = (1, \frac{1}{20}, -1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{715} = (0,0,1) & z_{716} = (\frac{1}{33}, 0, 1) & \cdots & z_{748} = (1, 0, 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{1395} = (0,1,1) & z_{1396} = (\frac{1}{33}, 1, 1) & \cdots & z_{1428} = (1,1,1) \end{array}$$

und setzen

$$\Lambda := \sum_{k=1}^{1428} \alpha_k \delta_{z_k}$$

in die Aufgabe (8.2) ein. Es entsteht ein lineares Optimierungsproblem in den α_k, $k = 1, 2, ..., 1428$, mit 26 Gleichungs- und 6 Ungleichungsnebenbedingungen.
Dieses Problem wurde mit dem Computeralgebrasystem MATHEMATICA gelöst. In der Lösung α^* sind nur die Komponenten mit den Indizes
$2, 6, 9, 11, 16, 18, 23, 26, 28, 31, 34, 715, 718, 719, 721, 724, 728, 731, 733, 735, 739, 744$ und 747 größer als Null. Die zugehörigen Punkte z_k sind

$$\begin{array}{cccccc} (\frac{1}{33}, 0, -1) & (\frac{5}{33}, 0, -1) & (\frac{8}{33}, 0, -1) & (\frac{10}{33}, 0, -1) & (\frac{5}{11}, 0, -1) & (\frac{17}{33}, 0, -1) \\ (\frac{2}{3}, 0, -1) & (\frac{25}{33}, 0, -1) & (\frac{9}{11}, 0, -1) & (\frac{10}{11}, 0, -1) & (1, 0, -1) & (0, 0, 1) \\ (\frac{1}{11}, 0, 1) & (\frac{4}{33}, 0, 1) & (\frac{2}{11}, 0, 1) & (\frac{3}{11}, 0, 1) & (\frac{13}{33}, 0, 1) & (\frac{16}{33}, 0, 1) \\ (\frac{6}{11}, 0, 1) & (\frac{20}{33}, 0, 1) & (\frac{8}{11}, 0, 1) & (\frac{29}{33}, 0, 1) & (\frac{32}{33}, 0, 1). & \end{array}$$

Aus dieser Lösung des LOP wird nun eine Näherungslösung für das Originalproblem (8.1) konstruiert.

8.4 Konstruktion einer Näherungslösung für die Originalaufgabe

Die Menge $V := A \times U = [0,1] \times \{-1,1\}$ wird in die folgenden Teilmengen zerlegt:

$$\begin{aligned} V_s &= [\frac{s-1}{10}, \frac{s}{10}) \times \{-1\}, \quad s = 1,2,...,9; \\ V_{10} &= [\frac{9}{10}, 1] \times \{-1\}; \\ V_s &= [\frac{s-1}{10}, \frac{s}{10}) \times \{1\}, \quad s = 11,12,...,19; \\ V_{20} &= [\frac{19}{10}, 1] \times \{1\}. \end{aligned}$$

Die aus diesen Teilmengen „auszuwählenden" Steuerwerte sind

$$u_1 = \cdots = u_{10} = -1, \; u_{11} = \cdots = u_{20} = 1.$$

Es stellt sich heraus, daß alle Größen $\rho_l = \frac{t^l - t^{l-1}}{\sum\limits_{t_k \in I_l} \alpha_k}$ gleich 1 sind und somit die Zahlen $K_{l,s} = \sum\limits_{k=1}^{1428} \alpha_k \chi_l(t_k) \chi_s(x_k, u_k)$ und $H_{l,s} = \rho_l K_{l,s}, \; l = 1,2,...,10; s = 1,2,...,20,$ übereinstimmen. Es werden nur die von Null verschiedenen Größen berücksichtigt, die neu indiziert werden: $H_{l,1}$ und $H_{l,2}$, $l = 1,2,...,10$. Die $H_{l,s}$ liefern eine Zerlegung des Zeitintervalls $[0,1]$ in Teilintervalle

$$\begin{aligned} B_{l,s} &:= \Big[0 + \sum_{i=1}^{s-1} H_{l,i}, \; 0 + \sum_{i=1}^{s} H_{l,i}\Big), \quad l = 1,2,...,10; s = 1,2; \quad (l,s) \neq (10,2); \\ B_{10,2} &:= \Big[\frac{9}{10} + H_{10,1}, \; \frac{9}{10} + H_{10,1} + H_{10,2}\Big]. \end{aligned}$$

Auf diesen Teilintervallen wird die stückweise konstante Steuerung wie folgt festgelegt: Wir suchen die zu den von Null verschiedenen Größen $H_{l,s}$ gehörigen Steuerwerte aus den $u_1, ..., u_{20}$ heraus und setzen

$$u(t) := \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad t \in B_{l,1}, \; l = 1,...,10 \\ 1 & \text{falls} \quad t \in B_{l,2}, \; l = 1,...,10. \end{cases}$$

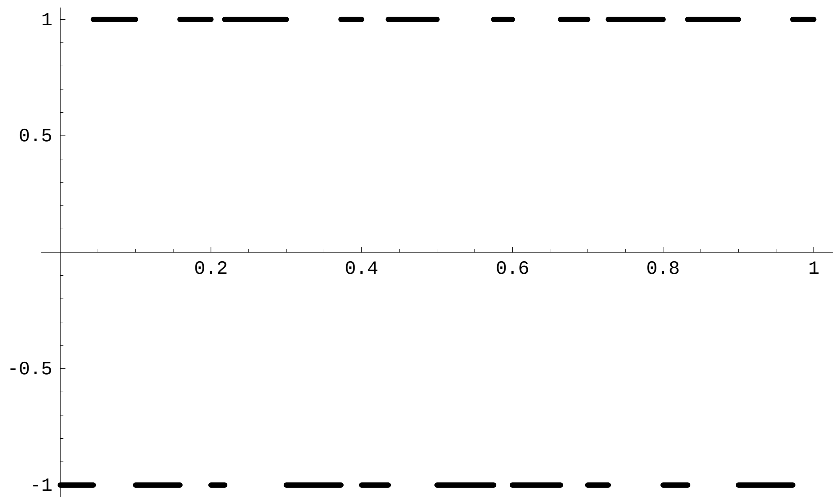

Abbildung 8.1: Die stückweise konstante Steuerung

Diese Steuerung setzen wir in das Anfangswertproblem des Originalproblems (8.1) ein und lösen es stückweise, d.h. der Funktionswert am rechten Randpunkt eines Teilintervalls wird als Anfangswert für das nächste Teilintervall genutzt. Es entsteht die folgende stückweise lineare Trajektorie $x_R(\cdot)$:

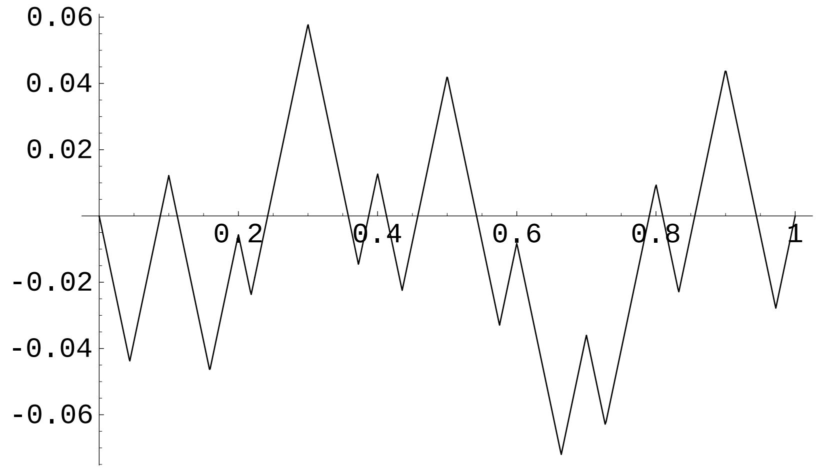

Abbildung 8.2: Die stückweise lineare Trajektorie

Dieses Funktionenpaar $(x_R(\cdot), u(\cdot))$ ist die gesuchte Näherungslösung der Originalaufgabe (8.1). Wir wollen abschließend die Zulässigkeitsbedingungen aus dem Satz 29 überprüfen und auch hierfür wurde MATHEMATICA genutzt. Die Bedingung (7.39) ist mit Maschinengenauigkeit erfüllt, also

$$x_R(b) = x_R(1) = 0.$$

Da $x_R(\cdot)$ stückweise linear und stetig ist, kann ihr Minimum nur an den Zeitpunkten $\sum\limits_{l=1}^{10}\sum\limits_{s=1}^{20} H_{l,s}$ angenommen werden. Die Bedingung (7.40) überprüfen wir also durch

$$\mathrm{d}(x_R(t), A) = \mathrm{d}(x_R(t), [0,1]) = \min\{|x_R(\sum_{l=1}^{10}\sum_{s=1}^{20} H_{l,s})| \;|\; l = 1, ..., 10;\; s = 1, ..., 20\}.$$

Dieses Minimum ergibt sich ungefähr zu 0.0720577. Die Intervalle J aus den Bedingungen (7.41) haben hier die Länge $\frac{1}{M2} = \frac{1}{6}$ und die einzelnen integralen Mittelwerte lauten bis auf 7 Stellen Genauigkeit -0.0192023, 0.0105453, 0.0038115, -0.0175494, -0.0317174 und 0.005587. Der Wert für das Zielfunktional ist 0.0008160548.

Kapitel 9

Halbgeordnete Vektorräume

9.1 Nichtnegative Funktionale

Sei $\mathcal{F}$ ein halbgeordneter Vektorraum und $\mathcal{F}_+$ die Menge der nichtnegativen (positiven) Elemente $F \in \mathcal{F}$, also $\mathcal{F}_+ = \{F \in \mathcal{F} \mid F \geq 0\}$. In der Folge sei $\mathcal{F}$ ein Verband und ein normierter Raum.

Bemerkung Ein Verband ist eine halbgeordnete Menge, in der zu je zwei Elementen F und G eine kleinste obere Schranke $\sup(F, G)$ und eine größte untere Schranke $\inf(F, G)$ existieren.

Beispiel $C(\Omega)$ ist ein Verband bezüglich der Halbordnung $F \leq G \Leftrightarrow F(z) \leq G(z)$ für alle $z \in \Omega$ und ein normierter Raum bezüglich $\|F\| := \sup\limits_{z \in \Omega} |F(z)|$.

Definition 30 *In einem Verband gibt es stets zu jedem Element F einen* **Positiv-Teil** F^+, *definiert durch* $F^+ := \sup(F, 0)$, *und einen* **Negativ-Teil** F^-, *der durch* $F^- := \sup(-F, 0) = -\inf(F, 0)$ *definiert wird.*

Damit gilt dann

$$F = F^+ - F^- \quad \text{und} \quad F^+ \geq 0 \quad \text{und} \quad F^- \geq 0. \tag{9.1}$$

Im folgenden werden wir positive (nichtnegative) Funktionale $\Lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ betrachten. Positivität bedeutet hier $\Lambda(F) \geq 0$ für jedes $F \in \mathcal{F}_+$.

9.2 Ky-Fan-Aufgabe und positive Funktionale

In diesem Abschnitt wollen wir die folgende Aufgabenstellung untersuchen: Gesucht ist ein positives lineares Funktional Λ über $\mathcal{F}$, das

$$\begin{array}{rcll} \Lambda(F_i) & \geq & a_i & \forall\, i \in I \\ \|\Lambda\| & \leq & N & \end{array}$$

erfüllt. Diese Aufgabe kann auch anders formuliert werden: Gesucht ist ein lineares Funktional Λ über $\mathcal{F}$, das

$$\begin{array}{rcll} \Lambda(F_i) & \geq & a_i & \forall\, i \in I \\ \Lambda(F) & \geq & 0 & \forall\, F \in \mathcal{F}_+ \\ \|\Lambda\| & \leq & N & \end{array} \tag{9.2}$$

erfüllt. Die notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung von Ky Fan dafür lautet:

Satz 31 *Es existiert genau dann eine Lösung Λ der Aufgabe (9.2), wenn für jede endliche Auswahl I_e von Indizes $i \in I$ und jede endliche Auswahl $\mathcal{F}_{+e}$ von Elementen $F \in \mathcal{F}_+$ sowie für zugeordnete nichtnegative Zahlen γ_i, γ_F gilt*

$$\sum_{i \in I_e} \gamma_i a_i \leq N \| \sum_{i \in I_e} \gamma_i F_i + \sum_{F \in \mathcal{F}_{+e}} \gamma_F F \|. \tag{9.3}$$

Den Beweis dieses Satzes findet der Leser z.B. in [17].

$\mathcal{F}_+$ ist ein konvexer Kegel. Damit ist jede nichtnegative Linearkombination $\sum\limits_{F \in \mathcal{F}_+ e} \gamma_F F$ von Elementen $F \in \mathcal{F}_+$ mit $\gamma_F \geq 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_+ e$ wieder ein Element von $\mathcal{F}_+$. Da außerdem für jedes $F \in \mathcal{F}_+$ wegen (9.1) $F = F_+$ und $F_- = 0$ gilt, schreiben wir

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_+ e} \gamma_F F = G = G_+.$$

Daher kann die Lösbarkeitsbedingung (9.3) einfacher so ausgedrückt werden:

$$\sum_{i \in I_e} \gamma_i a_i \leq N \| \sum_{i \in I_e} \gamma_i F_i + G_+ \| \tag{9.4}$$

für alle endlichen Teilmengen $I_e \subset I$, $\gamma_i \geq 0$; $(i \in I_e)$ und für alle $G_+ \in \mathcal{F}_+$.

Nun sei

$$\begin{aligned} S \;\; := \;\; \sup \Big\{ & \sum_{i \in I_e} \gamma_i a_i - N \| \sum_{i \in I_e} \gamma_i F_i + G_+ \| \;\; | \\ & I_e \subseteq I,\; I_e \text{ endlich}, \gamma_i \geq 0 \; (i \in I_e),\; G_+ \in \mathcal{F}_+ \Big\}. \end{aligned}$$

Dann wird folgendes behauptet:

Lemma 32 *Für S gibt es nur die zwei Möglichkeiten: $S = \infty$ oder $S = 0$.*

Beweis: 1. Fall: Es existiere eine endliche Teilmenge I_e von I, ein Satz von Zahlen $\bar{\gamma}_i \geq 0$, $i \in I_e$, und eine Funktion $\bar{G}_+ \in \mathcal{F}_+$, so daß

$$\bar{\sigma} := \sum_{i\in I_e} \bar{\gamma}_i a_i - N\|\sum_{i\in I_e} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}_+\| > 0.$$

Sei $t > 0$ beliebig und

$$\gamma_i := t\bar{\gamma}_i, \quad \forall\, i \in I_e, \quad G_+ := t\bar{G}_+.$$

Somit gilt natürlich $\gamma_i > 0$, $i \in I_e$, $G_+ \in \mathcal{F}_+$ und folglich auch

$$\sigma := \sum_{i\in I_e} \gamma_i a_i - N\|\sum_{i\in I_e} \gamma_i F_i + G_+\| = t\bar{\sigma} \longrightarrow \infty$$

für $t \to \infty$, also $S = \infty$.

2. Fall: Für jede endliche Teilmenge I_e von I, jeden Satz von Zahlen $\gamma_i \geq 0$, $i \in I_e$, und jedes Element $G_+ \in \mathcal{F}_+$ gelte $\sigma \leq 0$. Dann ist selbstverständlich

$$S = \sup\{\sigma \mid I_e \subseteq I, I_e \text{ endlich}, \gamma_i \geq 0 (i \in I_e), G_+ \in \mathcal{F}_+\} \leq 0.$$

Für $\gamma_i = 0$, $i \in I_e$, und $G_+ = 0$ ist $\sigma = 0$. Also ist $S = 0$.

$\square$

Mithin lautet die notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung auch so:

$$S = 0. \tag{9.5}$$

Bemerkung Man kann stets I statt I_e nehmen, wenn I eine endliche Indexmenge ist.

In der Folge geht es um die Kennzeichnung einer Lösung $\bar{\Lambda}$ der Aufgabe (9.2). Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 33 *Sei die Bedingung (9.5) erfüllt und es seien eine endliche Teilmenge $\bar{I}$ von I, $\bar{\gamma}_i \geq 0$, $i \in \bar{I}$, sowie eine Funktion $\bar{G}$ aus $\mathcal{F}_+$ ein solches nichttriviales System $(\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i + \|\bar{G}\| > 0)$, welches das Supremum S darstellt, also*

$$S = 0 = \sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i a_i - N\|\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\|.$$

Weiterhin sei $\bar{\Lambda}$ eine Lösung der Aufgabe (9.2). Dann gelten (außer den Bedingungen der Aufgabe)

$$\bar{\Lambda}(\bar{G}) = 0, \quad \bar{\gamma}_i(\bar{\Lambda}(F_i) - a_i) = 0, \quad \forall\, i \in \bar{I},$$

und

$$\bar{\Lambda}\big(\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i\big) = \bar{\Lambda}\big(\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\big) = \sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i a_i = N\|\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\|.$$

Beweis: Die Bedingungen, die $\bar{\Lambda}$ in (9.2) erfüllt, waren

$$\bar{\Lambda}(F_i) \geq a_i, \quad \forall\, i \in \bar{I}, \quad \|\bar{\Lambda}\| \leq N, \quad \bar{\Lambda} \geq 0. \tag{9.6}$$

Aus (9.5) folgt

$$\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i a_i = N\|\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\|. \tag{9.7}$$

Multiplikation von (9.6) mit $\bar{\gamma}_i$ und Addition ergibt

$$\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i a_i \leq \bar{\Lambda}(\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i) \leq \bar{\Lambda}\big(\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\big) \leq N\|\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\| = \sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i a_i.$$

Es muß demnach überall das Gleichheitszeichen gelten, insbesondere

$$\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i(\bar{\Lambda}(F_i) - a_i) = 0 \quad \Rightarrow \bar{\gamma}_i(\bar{\Lambda}(F_i) - a_i) = 0 \quad \forall\, i \in \bar{I},$$

weil für jedes i aus $\bar{I}$ $\bar{\gamma}_i \geq 0$ und $\bar{\Lambda}(F_i) - a_i \geq 0$ ist. D.h. entweder $\bar{\gamma}_i = 0$ (und $a_i \leq \bar{\Lambda}(F_i)$) oder $\bar{\gamma}_i > 0$ und dann $a_i = \bar{\Lambda}(F_i)$.
Aus

$$\bar{\Lambda}\big(\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i\big) = \bar{\Lambda}\big(\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i\big) + \bar{\Lambda}(\bar{G})$$

folgt sofort $\bar{\Lambda}(\bar{G}) = 0$.

□

Eine weitere einfache Folgerung aus dem obigen Lemma ist:
Wenn $\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G} \neq 0$, so ist $N\|\sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\| \neq 0$ und mithin $\|\bar{\Lambda}\| = N$.
Nun wird die folgende Optimierungsaufgabe gestellt:
Gesucht ist ein lineares Funktional Λ über $\mathcal{F}$, das

$$\begin{array}{rcll} \Lambda(f_0) & & & \text{minimiert} \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\ \Lambda(F_i) & \geq & a_i & \forall\, i \in I \\ \Lambda(F) & \geq & 0 & \forall\, F \in \mathcal{F}_+ \\ \|\Lambda\| & \leq & N. & \end{array} \tag{9.8}$$

Zunächst werde danach gefragt, ob es eine positive Lösung Λ der Nebenbedingungen gibt, welche einen Wert

$$\Lambda(f_0) \leq b_0$$

hat, wobei b_0 irgendeine Zahl ist. Zu lösen ist also die Hilfsaufgabe:

$$\begin{array}{rcll} \Lambda(-f_0) & \geq & -b_0 & \Leftrightarrow \quad \Lambda(f_0) \leq b_0 \\ \Lambda(F_i) & \geq & a_i & \forall\, i \in I \\ \Lambda(F) & \geq & 0 & \forall\, F \in \mathcal{F}_+ \\ \|\Lambda\| & \leq & N. & \end{array}$$

Ein Lösbarkeitskriterium der Hilfsaufgabe stellt das folgende Lemma dar.

Lemma 34 *Die obige Hilfsaufgabe ist lösbar genau dann, wenn*

$$b_0 \geq a_0,$$

wobei

$$\begin{aligned} a_0 \quad := \quad \sup\Big\{ & \sum_{i \in I_e} \gamma_i a_i - N\| - f_0 + \sum_{i \in I_e} \gamma_i F_i + G_+\| \ \mid \\ & I_e \subseteq I,\ I_e \text{ endlich},\ \gamma_i \geq 0\ (i \in I_e),\ G_+ \in \mathcal{F}_+ \Big\}. \end{aligned}$$

a_0 *ist auch das Minimum der Optimierungsaufgabe* (9.8).

Beweis: Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Hilfsaufgabe ist die Bedingung (9.3). Hier lautet sie

$$-\gamma_0 b_0 + \sum_{i \in I_e} \gamma_i a_i \leq N\| - \gamma_0 f_0 + \sum_{i \in I_e} \gamma_i F_i + G\| \quad \forall\ I_e, \gamma_0 \geq 0, \gamma_i \geq 0\ (i \in I_e), G \in \mathcal{F}_+. \tag{9.9}$$

Wir benutzen die Notwendigkeit. Wenn $\gamma_0 = 1$, so ist (9.9) gleichwertig mit

$$\sum_{i \in I_e} \gamma_i a_i - N\| - f_0 + \sum_{i \in I_e} \gamma_i F_i + G\| \leq b_0 \quad \forall\ I_e, \gamma_i \geq 0\ (i \in I_e), G \in \mathcal{F}_+. \tag{9.10}$$

Somit ist

$$a_0 \leq b_0 \tag{9.11}$$

notwendig für die Lösbarkeit der Hilfsaufgabe. Nun wollen wir die Hinlänglichkeit erschließen. Aus der Gültigkeit von (9.11) folgt (9.10). Denn: Sei $\gamma_0' \geq 0$ beliebig und $\gamma_i' = \gamma_0' \gamma_i$ sowie $G' = \gamma_0' G$. Nach Multiplikation von (9.10) mit γ_0' ergibt sich (9.9), allerdings mit γ_0', γ_i' und G' statt γ_0, γ_i und G. Offenbar durchlaufen auch die γ_0', γ_i' und G' alle nichtnegativen Zahlen bzw. Elemente von $\mathcal{F}_+$. Mithin ist die Hilfsaufgabe lösbar, wenn $a_0 \leq b_0$.

Nun wollen wir annehmen, daß $\inf \Lambda(f_0)$ der Optimierungsaufgabe (9.8) echt kleiner als a_0 ist. In dem Fall gäbe es eine Lösung Λ der Nebenbedingungen von (9.8) mit $b_0 := \Lambda(f_0) < a_0$. Das bedeutet, Λ wäre eine Lösung der Hilfsaufgabe zu einem $b_0 < a_0$.

Das steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß $a_0 \leq b_0$ notwendig für die Lösbarkeit der Hilfsaufgabe ist.

$\square$

Als Ergebnis steht somit fest: Λ ist eine Lösung der Optimierungsaufgabe (9.8) genau dann, wenn Λ eine Lösung der Hilfsaufgabe mit $b_0 = a_0$ ist. Für dieses Funktional Λ gilt automatisch $\Lambda(f_0) = a_0$. Wenn a_0 endlich ist, mit anderen Worten, wenn $a_0 < \infty$ ist, existiert eine optimale Lösung von (9.8).

9.3 Kennzeichnung einer optimalen Lösung $\bar{\Lambda}$

Es sei $\bar{I}$ eine endliche Teilmenge von I, $\bar{\gamma}_i \geq 0$, $(i \in \bar{I})$, $\bar{G} \in \mathcal{F}_+$, so daß

$$a_0 = \sum_{i \in \bar{I}} \bar{\gamma}_i a_i - N\| - f_0 + \sum_{i \in \bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\| \tag{9.12}$$

und $\bar{\Lambda}$ eine optimale Lösung, mithin eine Lösung der Hilfsaufgabe zu $b_0 = a_0$. Dann liefert die Anwendung des Lemmas 33

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}(f_0) &= a_0 \\ \bar{\gamma}_i[\bar{\Lambda}(F_i) - a_i] &= 0 \quad \forall\, i \in \bar{I} \\ \bar{\Lambda}(\bar{G}) &= 0. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{gathered} \bar{\Lambda}(-f_0 + \sum_{i \in \bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}) = \bar{\Lambda}(-f_0 + \sum_{i \in \bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i) = \\ -a_0 + \sum_{i \in \bar{I}} \bar{\gamma}_i a_i = N\| - f_0 + \sum_{i \in \bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}\|. \end{gathered} \tag{9.14}$$

Wegen der Aufgabenstellung gilt sowieso

$$\bar{\Lambda}(F_i) \geq a_i \quad \forall\, i \in I. \tag{9.15}$$

(Dies gilt also auch für die Indizes $i \notin \bar{I}$.)
Aus der sich an das Lemma 33 anschließenden Folgerung erhalten wir: Wenn das Element $-f_0 + \sum_{i \in \bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i + \bar{G}$ ungleich Null ist, ist

$$\|\bar{\Lambda}\| = N. \tag{9.16}$$

9.4 Ein Beispiel für die Anwendung

Wir setzen $\mathcal{F} = \mathrm{L}_1(\Omega)$ und $\mathcal{F}_+$ gleich der Menge der nichtnegativen integrierbaren Funktionen von $z \in \Omega$. Die sich anschließenden Rechnungen werden auch durch die Untersuchungen im Anhang B motiviert.
Jedes lineare, beschränkte Funktional Λ über $\mathcal{F}$ ist mit Hilfe einer meßbaren, im wesentlichen beschränkten Funktion σ darstellbar:

$$\Lambda(F) = \int_\Omega F(z)\sigma(z)dz \qquad \forall\, F \in \mathcal{F}. \tag{9.17}$$

Bemerkung Eine solche Funktion σ wird häufig als **erzeugende Funktion** von Λ bezeichnet.

Zunächst können wir feststellen, daß Λ genau dann positiv ist, wenn $\sigma(z) \geq 0$ für fast alle z gilt. Weiterhin sind

$$\|\Lambda\| = \operatorname*{vrai\,max}_{z\in\Omega} |\sigma(z)|$$

und

$$\|F\| = \int_\Omega |F(z)|dz.$$

Sei

$$\bar{\Lambda}(F) = \int_\Omega F(z)\bar{\sigma}(z)dz \qquad \forall\, F \in \mathcal{F}$$

die Darstellung einer optimalen Lösung. Dann bedeutet (9.13)

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_0(z)\bar{\sigma}(z)dz &= a_0, \\ \int_\Omega F_i(z)\bar{\sigma}(z)dz &= a_i, \quad \text{für } \bar{\gamma}_i > 0 \\ \int_\Omega \bar{G}(z)\bar{\sigma}(z)dz &= 0, \end{aligned} \tag{9.18}$$

und (9.14)

$$\int_\Omega (-f_0(z) + \sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i(z) + \bar{G}(z))\bar{\sigma}(z)dz = N \int_\Omega |-f_0(z) + \sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i(z) + \bar{G}(z)|dz.$$

Daraus folgt mit Hilfe der Abkürzung $\bar{h}(z) := -f_0(z) + \sum_{i\in\bar{I}} \bar{\gamma}_i F_i(z) + \bar{G}(z)$

$$\int_\Omega (N|\bar{h}(z)| - \bar{h}(z)\bar{\sigma}(z))dz = 0. \tag{9.19}$$

Es ist

$$\bar{\sigma}(z) \geq 0 \quad \text{fast überall und} \quad |\bar{\sigma}(z)| \leq \operatorname*{vrai\,max}_{\text{f. ü.}} \bar{\sigma}(z) \leq N,$$

also

$$N|\bar{h}(z)| - \bar{h}(z)\bar{\sigma}(z) \geq 0 \quad \text{fast überall.}$$

Wegen (9.19) ist daher

$$N|\bar{h}(z)| - \bar{h}(z)\bar{\sigma}(z) = 0 \quad \text{fast überall.}$$

Hieraus ergibt sich, daß auf der Menge der z mit $\bar{h}(z) \neq 0$

$$\bar{\sigma}(z) = N\frac{|\bar{h}(z)|}{\bar{h}(z)} = N\mathrm{sgn}(\bar{h}(z)) \quad \text{fast überall} \tag{9.20}$$

sein muß.

9.4.1 Zur Bestimmung von a_0

a_0 war gegeben durch

$$\sup\Big\{\sum_{i\in I_e}\gamma_i a_i - N\| - f_0 + \sum_{i\in I_e}\gamma_i F_i + G_+\| \\ \mid\ I_e \subseteq I,\ I_e \text{ endlich},\ \gamma_i \geq 0\ (i \in I_e),\ G_+ \in \mathcal{F}_+\Big\}.$$

I wird nun als endlich vorausgesetzt, also $I = I_e$ gesetzt. Daraus resultiert

$$\begin{aligned} a_0 &= \sup\{\sum_{i\in I}\gamma_i a_i - N\| - f_0 + \sum_{i\in I}\gamma_i F_i + G\| \ \mid\ \gamma_i \geq 0,\ (i \in I),\ G \in \mathcal{F}_+\} \\ &= \sup_{\gamma_i\geq 0}\sup_{G\in\mathcal{F}_+}(\sum_{i\in I}\gamma_i a_i - N\| - f_0 + \sum_{i\in I}\gamma_i F_i + G\|) \\ &= \sup_{\gamma_i\geq 0}\Big(\sum_{i\in I}\gamma_i a_i + \sup_{G\in\mathcal{F}_+}[-N\| - f_0 + \sum_{i\in I}\gamma_i F_i + G\|]\Big) \\ &= \sup_{\gamma_i\geq 0}\Big(\sum_{i\in I}\gamma_i a_i - N\inf_{G\in\mathcal{F}_+}\| - f_0 + \sum_{i\in I}\gamma_i F_i + G\|\Big). \end{aligned}$$

Sei $f := -f_0 + \sum_{i\in I}\gamma_i F_i$ und $G[f]$ eine Minimumstelle von $\|f + G\|$ über der Menge der nichtnegativen Elemente G von $\mathcal{F}$, d.h.

$$\inf_{G\in\mathcal{F}_+}\|f + G\| = \|f + G[f]\|.$$

In $\mathcal{F} = \mathrm{L}_1(\Omega)$ und $\mathcal{F}_+ = \{F \in \mathcal{F} \mid F(z) \geq 0 \text{ fast überall}\}$ existiert die Minimumstelle G_f, die sich wie folgt ausrechnen läßt.
Durch die spezielle Wahl von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_+$ folgt aus der Definition 30 nämlich

$$f^+(z) = \max\{f(z), 0\}, \qquad f^-(z) = \max\{-f(z), 0\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f^+(z), f^-(z) &\geq 0, \\ f^+, f^- &\in \mathrm{L}_1(\Omega), \text{ wenn } f \in \mathrm{L}_1(\Omega), \\ f(z) &= f^+(z) - f^-(z). \end{aligned}$$

Für $f(z) \geq 0$ und $g(z) \geq 0$ ist

$$|f(z) + g(z)| = f(z) + g(z) \geq f(z) + 0 = f^+(z).$$

Für $f(z) < 0$ und $g(z) \geq 0$ ist

$$|f(z) + g(z)| \geq 0 = f^+(z),$$

Somit gilt für jedes $g \in \mathcal{F}_+$ und jedes $z \in \Omega$

$$|f(z) + g(z)| \geq f^+(z)$$

und mithin

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(z) + g(z)| dz &\geq \int_\Omega f^+(z) dz, \\ \int_\Omega |f(z) + f^-(z)| dz &= \int_\Omega f^+(z) dz. \end{aligned}$$

Dies zieht

$$\min_{g \geq 0} \|f + g\| = \|f^+\|$$

nach sich, sowie

$$G[f] = f^- \quad \text{und} \quad \|f + G[f]\| = \|f^+\|.$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \sup_{\gamma_i \geq 0} \Big(\sum_{i \in I} \gamma_i a_i - N \| - f_0 + \sum_{i \in I} \gamma_i F_i + G[-f_0 + \sum_{i \in I} \gamma_i F_i] \| \Big) = \\ &= \sup_{\gamma_i \geq 0} \Big(\sum_{i \in I} \gamma_i a_i - N \|(-f_0 + \sum_{i \in I} \gamma_i F_i)^+ \| \Big) = \\ &= \sup_{\gamma_i \geq 0} \Big(\sum_{i \in I} \gamma_i a_i - N \int_\Omega (-f_0 + \sum_{i \in I} \gamma_i F_i)^+(z) dz \Big). \end{aligned} \tag{9.21}$$

9.5 Anwendung auf die diskretisierte verallgemeinerte Optimalsteueraufgabe

Ersetzt man in der diskretisierten verallgemeinerten Optimalsteueraufgabe (4.3) die Gleichungsnebenbedingungen durch ein Paar von Ungleichungen, so hat die Aufgabe

die Form von (9.2). Lediglich die Normbedingung von (9.2) ist in (4.3) als Gleichungsbedingung vorhanden, weil die 1-Funktion in den formalen Ableitungen der Testfunktionen bezüglich der Differentialgleichung (2.2) enthalten ist. Interessanterweise ergibt sich bereits aus der zusätzlichen Positivitätsforderung in der Ky-Fan-Aufgabe, daß die Normbedingung mit Gleichheit erfüllt wird.
Die Existenz einer Lösung der Aufgabe (4.3) ist nachgewiesen. Demzufolge ist das Supremum aus dem Lemma 34 endlich. Falls sich also ein maximierendes System $\bar{\gamma}_i$, $i \in I$ für a_0 (siehe (9.21)) finden läßt, so kann im Fall $\mathcal{F} = L_1(\Omega)$ eine Lösung für das diskretisierte verallgemeinerte Optimalsteuerproblem angegeben werden.
Nun bedarf es natürlich noch weiterer Überlegungen, um aus der erzeugenden Funktion eine Näherungslösung für die Originalaufgabe zu konstruieren. Mölicherweise kann die Konstruktion sogar mit Hilfe des aus der Darstellung (9.17) mit der berechneten erzeugenden Funktion resultierenden Funktionals genauso wie im Abschnitt 7.2 durchgeführt werden.

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

Diese Dissertation stellt eine Überarbeitung und Erweiterung der Rubio-Verallgemeinerung eines Optimalsteuerproblems aus dem Buch [26] dar.

Der von J. E. Rubio betrachteten Aufgabenstellung wurden hier zusätzliche Steuer-Zustandsbeschränkungen hinzugefügt. Eine weitere Vergrößerung der mit der Rubio-Verallgemeinerung zu behandelnden Aufgabenklasse wäre von Nutzen. Insbesondere sollte die Rubio-Verallgemeinerung auf Aufgaben mit freiem rechten Ende erweitert werden.

Rubio gebraucht in seinem Buch [26] die Begriffe lineares stetiges Funktional und reguläres Borel-Maß häufig in synonymer Weise. Durch den Rieß'schen Darstellungssatz ist die eineindeutige Zuordnung unter gewissen Voraussetzungen gesichert. Allerdings führt die wechselnde Benutzung der beiden Begriffe zu Unklarheiten. In der vorliegenden Arbeit wird hauptsächlich der Begriff des Funktionals verwendet. Nur bei der Untersuchung der Extrempunkte in der Menge der zulässigen Funktionale im Kapitel 5 erfolgt der Übergang zu der Menge der regulären Borel-Maße. Nach Abschluß der Untersuchungen wird das Ergebnis mittels des Rieß'schen Darstellungssatzes wieder für Funktionale formuliert. Die gesamte Darstellung der Verallgemeinerung wäre einheitlicher, könnte man dasselbe Resultat auch durch Untersuchungen in der Menge der Funktionale erreichen.

Die Verallgemeinerung eines Optimalsteuerproblems bewirkt eine Vergrößerung der Zulässigkeitsmenge. Dabei stellt sich immer die Frage nach der Veränderung des infimalen Zielfunktionalwertes (bei Aufgaben, in denen das Minimum bzw. das Infimum des Zielfunktionals gesucht ist). Im Kapitel 3 ist die Relaxation eines Optimalsteuerproblems, wie von S. Butzek in der Arbeit [7] beschrieben wurde, als Spezialfall der Rubio-Verallgemeinerung festgestellt worden. Die Ergebnisse von S. Butzek zur Existenz einer Relaxationslücke zwischen dem Originalproblem und dem relaxierten Problem erlauben dann die Schlußfolgerung, daß auch zwischen dem Originalproblem und der Rubio-Verallgemeinerung eine solche Lücke auftreten kann. In dem Fall, daß keine Steuer-Zustandsbeschränkungen vorhanden sind, ist dem Autor dieser Arbeit diesbezüglich keine gesicherte Aussage bekannt.

Die Extrempunkte in der Menge der zulässigen Funktionale sind Linearkombinationen von Dirac-Funktionalen. Dies ergab die oben bereits erwähnte Untersuchung im Kapitel 5. Der daraus abgeleitete Lösungsansatz für die diskretisierte verallgemeinerte Optimalsteueraufgabe liefert nur eine Näherung des optimalen Funktionals. Deshalb werden im Kapitel 6 eine konstruktive Begründung für diesen Ansatz und eine weitere Möglichkeit der Approximation von Funktionalen aus $C^*(\Omega)$, nämlich die durch integrale Mittelwerte, angegeben. Hier sind sicherlich auch noch andere Approximationsansätze denkbar.

Im Kapitel 7 wird aus der Lösung des diskretisierten verallgemeinerten Optimalsteuerproblems (7.4) eine Näherungslösung für das Originalproblem gewonnen. Diese Konstruktion entspricht der Konstruktion von Rubio aus [26]. Allerdings wurde die Darstellung besser strukturiert und verkürzt. Hier sind besonders das Lemma 27 und der Satz 28 zu nennen. Aber auch hier können noch Verbesserungen vorgenommen werden. So scheint die Konstruktion der stetigen Hilfstrajektorie $x_c(\cdot)$ überflüßig, weil man die Antworttrajektorie $x_R(\cdot)$ möglicherweise auch direkt mit der stückweise konstanten Hilfstrajektorie vergleichen könnte, wenn man diese in einer kleinen Umgebung der Randpunkte wie $x_c(\cdot)$ abändert.

Das einfache Beispiel des Kapitels 8 soll das Vorgehen bei der Rubio-Verallgemeinerung veranschaulichen. Obwohl auch schon kompliziertere Beispiele behandelt wurden, z.B. in [26], sind noch weitere numerische Erfahrungen nötig, um diese Verallgemeinerung als praktikable Methode zur Lösung von Optimalsteuerproblemen zu etablieren. Aber schon bei dem einfachen Beispiel wird deutlich, daß umfangreiche Computerarbeit zur Lösung notwendig ist. Die Dimension des linearen Optimierungsproblems (4.8) steigt, wenn die Anzahl der Diskretisierungspunkte von Ω bzw. die Anzahl der Testfunktionen erhöht wird. Insbesondere die Vergrößerung der Dimensionen von Phasen- und Steuerraum zieht eine erhebliche Vergrößerung der Dimension des LOP nach sich, so daß der Einsatz von leistungsfähigen Rechnern unumgänglich ist.

Es reduzieren sich möglicherweise die Probleme, wenn man für die Aufgabe (4.3) eine explizite Lösung angeben kann. Eine Möglichkeit dies zu tun, wird im Kapitel 9 (speziell im Abschnitt 9.4) vorgestellt. Um konkrete Beispiele zu bearbeiten, müßte dann aber noch geklärt werden, wie man zu einem maximierenden System $\bar{\gamma}_i$, $i \in I$ für (9.21) gelangt und wie man letztendlich eine Näherungslösung für die Originalaufgabe erhält. Die vom Autor am Ende des Kapitels 9 geäußerte Idee besteht darin, mit der berechneten erzeugenden Funktion und der Darstellung (9.17) ein Funktional zu definieren, das in derselben Art und Weise im Abschnitt 7.2 zur Konstruktion von Näherungslösungen genutzt werden kann.

Anhang A

Ungleichungen mit integrierbaren Funktionen

Lemma 35 *Sei $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Daraus folgt, daß $v(t) \geq 0$ fast überall genau dann gilt, wenn*

$$\int_a^b \chi_T(t)v(t)dt \geq 0 \quad \forall\, T \subseteq [a, b],\ T \text{ meßbar.}$$

Hier bezeichnet χ_T die charakteristische Funktion von T.

Beweis: Zur Notwendigkeit: Wenn $v(t) \geq 0$ fast überall gilt, so ist $\chi_T(t)v(t) \geq 0$ fast überall. Mithin gilt dann auch

$$\int_a^b \chi_T(t)v(t)dt \geq 0.$$

Zur Hinlänglichkeit: Sei

$$\int_a^b \chi_T(t)v(t)dt \geq 0$$

für jede meßbare Teilmenge T von $[a, b]$. Wir wollen nun annehmen, daß $v(t)$ nicht fast überall größer oder gleich Null ist. Dann existiert eine meßbare Teilmenge T von $[a, b]$ mit positivem Maß, auf der $v(t) < 0$ gilt. Mithin gilt auch

$$\chi_T(t)v(t) < 0 \quad \forall\, t \in T.$$

Aus den Eigenschaften der charakteristischen Funktion $\chi_T(\cdot)$ erhalten wir außerdem

$$\chi_T(t)v(t) = 0 \quad \forall\, t \notin T.$$

Damit ergibt sich für das Integral über $[a, b]$

$$\int_a^b \chi_T(t)v(t)dt < 0,$$

was im Widerspruch zur obigen Voraussetzung steht.

$\square$

A.1 Äquivalenz von Mengen von Testfunktionen

Mittels des Lemmas 35 wird an dieser Stelle nachgewiesen, daß bereits eine Teilmenge der Testfunktionen vom Typ 2 ausreicht, um die verallgemeinerte Aufgabe (2.10) zu formulieren.
Sei T eine beliebige meßbare Teilmenge von $[a, b]$. Wir betrachten die Funktionen $\psi_T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi_T(t, y) := \chi_T(t)y. \tag{A.1}$$

Da T meßbar ist, ist auch $\psi_T(\cdot)$ meßbar. Zudem ist $\psi_T(\cdot)$ nichtfallend in jeder Komponente von y. Also ist jede durch (A.1) mit einer meßbaren Teilmenge T von $[a, b]$ definierte Funktion eine Testfunktion vom Typ 2. Nach (2.7) ist dann

$$\psi_T^g(t, x, u) := \chi_T(t)g(t, x, u)$$

und wegen (2.9) ergibt sich $\Delta\psi_T = 0$.
Sei nun $(x(\cdot), u(\cdot))$ ein Funktionenpaar, das die Nebenbedingungen (2.4) des Originalproblems (OP) erfüllt. Daraus folgt, daß auch die Bedingungen

$$\int_a^b \psi^g(t, x(t), u(t))dt \geq \Delta\psi \qquad \forall\, \psi \text{ vom Typ 2} \tag{A.2}$$

erfüllt sind. Das Paar $(x(\cdot), u(\cdot))$ genügt dann natürlich der folgenden Teilmenge der Bedingungen (A.2):

$$\int_a^b \psi^g(t, x(t), u(t))dt \geq \Delta\psi \qquad \forall\, T \subseteq [a, b],\ T \text{ meßbar.} \tag{A.3}$$

Demnach folgt aus (2.4) gerade (A.2), woraus sich (A.3) ergibt. Nach dem Lemma 35 ist aber (2.4) äquivalent zu (A.3). Folglich sind die Bedingungen (2.4), (A.2) und (A.3) äquivalent.

Anhang B

Zur Dichtheit von $L_1^*(\Omega)$ in $C^*(\Omega)$

Seien Ω eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $C(\Omega)$ der Raum der stetigen Funktionen und $L_1(\Omega)$ der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen über Ω. Für diese Räume gilt $C(\Omega) \subsetneq L_1(\Omega)$, wobei $\subsetneq$ die stetige Einbettung symbolisiert ($f \in C(\Omega) \Rightarrow \|f\|_{L_1} \leq \text{const}\|f\|_C$). Diese Einbettung ist sogar dicht in der Normtopologie. Aus der Relation für die Funktionenräume folgt für ihre Dualräume $L_1^*(\Omega) \subsetneq C^*(\Omega)$ ($\Lambda \in L_1^*(\Omega) \Rightarrow \|\Lambda\|_{C^*} \leq \text{const}'\|\Lambda\|_{L_1^*}$). Ist diese Einbettung dicht in einer Topologie? Um dies zu untersuchen, betrachten wir ein endliches Funktionensystem $\{F_0, F_1, ..., F_m\}$ aus $C(\Omega)$ und ein Funktional $\Lambda \in C^*(\Omega)$. Jede der Funktionen des Systems besitzt ein Stetigkeitsmodul w_{F_i}, $i = 0, 1, ..., m$. Dann sei

$$w(\rho) := \max\{w_{F_i}(\rho) \mid i = 0, 1, ..., m\} \quad \forall\, \rho \in \mathbb{R},\ \rho \geq 0.$$

Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ definieren wir nun wie im Abschnitt 6.1 durch (6.1) ein Funktional Λ^ε. Die Abschätzung (6.2) (auch aus dem Abschnitt 6.1) liefert

$$|\Lambda(F_i) - \Lambda^\varepsilon(F_i)| \leq \|\Lambda\| w_{F_i}(\varepsilon) \quad i = 0, 1, ..., m,$$

und mithin

$$|\Lambda(F_i) - \Lambda^\varepsilon(F_i)| \leq \|\Lambda\| w(\varepsilon) \quad i = 0, 1, ..., m. \tag{B.1}$$

Wir sehen uns das Funktional Λ^ε genauer an:

$$\Lambda^\varepsilon(F) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \frac{1}{|\Omega_k|} \int\limits_{\Omega_k} F(z)dz = \int\limits_{\Omega} \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \frac{\chi_{\Omega_k}(z)}{|\Omega_k|}\Big)}_{v(z)} F(z)dz.$$

$\chi_{\Omega_k}(\cdot)$ ist die charakteristische Funktion der Menge Ω_k. (B.1) kann somit durch

$$|\Lambda(F_i) - \int\limits_{\Omega} v(z)F_i(z)dz| \leq \|\Lambda\| w(\varepsilon) \quad i = 0, 1, ..., m$$

ersetzt werden. Die Funktion $v(\cdot)$ ist ein Element des $L^\infty(\Omega)$ und somit ist Λ^ε nach der Formel (9.17) ein Funktional aus $L_1^*(\Omega)$. (B.1) bedeutet dann, daß jedes Funktional Λ aus $C^*(\Omega)$ für alle endlichen Funktionensysteme vorgegeben gut durch ein Funktional Λ^ε approximiert werden kann. Anders ausgedrückt lautet dieses Resultat: $L_1^*(\Omega)$ liegt dicht in $C^*(\Omega)$ bezüglich der schwach*-Topologie.

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*
Walther de Gruyter; Berlin, New York, 1990.

[2] L. Bittner: *On Linear Inequalities (Moment Inequalities) and some Results of KY FAN*
Sonderdruck aus Mathematische Nachrichten, Band 64, Berlin, 1974.

[3] L. Bittner: *Optimization Problems for Moment Inequalities and Related Problems of Optimal Control*
ZAMM 55, 19-30, 1975.

[4] L. Bittner: *Eine Methode zur Konstruktion von Näherungslösungen für Aufgaben der optimalen Steuerung*
Seminarvortrag, Greifswald, 1993.

[5] L. Bittner: *Variationsrechnung und Optimale Steuerung*
Vorlesung, Greifswald, Sommersemester 1997.

[6] C. Büskens: *Optimierungsmethoden und Sensivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen*
Inaugural-Dissertation, Münster, 1998.

[7] S. Butzek: *Aspekte des Zusammenhangs von Optimalsteuerproblemen und zugehörigen relaxierten Problemen*
Inaugural-Dissertation, Greifswald, 1997.

[8] H. Cartan: *Calcul Différentiel Formes Différentielles*
Hermann; Paris, 1967.

[9] L. Cesari: *Optimization - Theory and Applications, Problems with Ordinary Differential Equations*
Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[10] N. Dunford, J. T. Schwartz: *Linear Operators I*
John Wiley & Sons; New York, 1988.

[11] J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*
Springer; Berlin, 1996.

[12] R. V. Gamkrelidze: *Principles of Optimal Control Theory*
Plenum Press; überarbeitete Übersetzung, New York, London, 1978; russisches Original 1975.

[13] S. I. Gass: *Linear Programming. Methods and Applications*
4th Edition McGraw-Hill; New York, 1975.

[14] H. Heuser: *Funktionalanalysis*
B. G. Teubner; Stuttgart, 1992.

[15] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*
B. G. Teubner; Stuttgart, 1995.

[16] A. D. Ioffe, V. M. Tichomirov: *Theorie der Extremalaufgaben*
Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin, 1979.

[17] Ky Fan: *On Systems of Linear Inequalities*
Princeton University Press, 1956.

[18] S. Lefschetz: *Differential Equations: Geometric Theory*
Interscience, a division of John Wiley and Sons; New York, 1962.

[19] P. C. Rosenbloom: *Quelques classes de problèmes extrémaux*
Bulletin de la Société Mathématique de France 80; 183-216; 1952.

[20] T. Roubíček: *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus*
Walter de Gruyter; Berlin, New York, 1992.

[21] T. Roubíček: *A General View to Relaxation Methods inn Optimal Control Theory*
Optimization, Vol. 23, S. 261-268; 1992.

[22] T. Roubíček: *A Generalized Solution of a Nonconvex Minimization Problem and it's Stability*
Kybernetika, Vol. 22, Nr. 4, S. 289-298; 1986.

[23] J. E. Rubio: *Extremal Points in the Calculus of Variations*
Bulletin of the London Mathematical Society 7, 159-165, 1975.

[24] J. E. Rubio: *Generalized Curves and Extremal Points*
SIAM Journal on Control 13,28-47, 1975.

[25] J. E. Rubio: *An Existence Theorem in the Calculus of Variations*
Journal of Optimization Theory and Applications 19, 81-87, 1976.

[26] J. E. Rubio: *Control and Optimisation*
Manchester University Press, Manchster 1986.

[27] J. E. Rubio: *Optimization and Nonstandard Analysis*
Marcel Dekker, Inc., New York 1994.

[28] J. Warga: *Optimal Control of Differential and Functional Equations*
Academic Press; New York, London, 1972.

[29] S. Wolfram: *Das Mathematica Buch*
3. Auflage, Addison Wesley Longman Verlag GmbH; Bonn, 1997.

[30] K. Yosida: *Functional Analysis*
Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[31] L. C. Young: *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*
Chelsea Publishing Company; New York, 1980.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Holger Irrgang, daß diese Arbeit bisher von mir weder an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald noch einer anderen wissenschaftlichen Einrichtung zum Zwecke der Promotion eingereicht wurde.
Ferner erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die darin angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Tabellarischer Lebenslauf von Holger Irrgang

Angaben zur Person:

Name:	Holger Irrgang
Anschrift:	Gützkower Straße 29 17489 Greifswald
Geburtsdatum:	09.09.1969
Geburtsort:	Bergen auf Rügen
Familienstand:	ledig, keine Kinder
Staatsangehörigkeit:	BRD

Sep. 1976 - Juli 1986	Besuch der Polytechnischen Oberschule in Putbus auf Rügen
Sep. 1986 - Juli 1988	Besuch der Spezialschule für Mathematik und Physik an der Humboldt-Universität Berlin
Nov. 1988 - Feb. 1990	Grundwehrdienst in der NVA
März 1990 - Juli 1990	Arbeit in einer Elektroinstallationsfirma in Garz auf Rügen
Sep. 1990 - Feb. 1996	Mathematik-Studium an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Sep. 1993 - Feb. 1994	Semesteraufenthalt im Rahmen des Erasmus-Studentenaustausches an der Technischen Universität Graz
März 1996 - Feb. 2001	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Sprachkenntnisse:

Englisch	in Wort und Schrift
Schwedisch	Grundkenntnisse
Russisch	Grundkenntnisse

Greifswald, 06.06.2001

Danksagung

Die Fertigstellung dieser Dissertation verdanke ich in erster Linie meinem Betreuer Prof. L. Bittner. Seine vielen Ideen und seine konstruktive Kritik haben mir häufig weitergeholfen.
Besonderer Dank gebührt aber auch Prof. B. Kugelmann, der in vielerlei Hinsicht meine wissenschaftliche Arbeit unterstützt hat.
Danken möchte ich Prof. W. Schmidt für viele anregende Gespräche und für die zur Verfügung gestellte Literatur. Mit Hinweisen jeglicher Art standen mir ebenfalls meine Kollegen Dr. V. Azmjakov und S. Buske zur Seite.
Selbstverständlich möchte ich meiner Familie für ihr Verständnis und die vielen motivierenden Worte danken.