

# Differentialgleichungen in der Biologie

## Übungsblatt 3

1. Berechnen Sie die Matrix-Exponentialfunktion  $e^{tA}$  für  $t \in \mathbb{R}$  und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben sei ein zweidimensionales lineares Differentialgleichungssystem  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sei  $S = a + d$  die Spur und  $D = ad - bc$  die Determinante der Matrix.

- a) Stellen Sie die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  der Matrix sowie die Summe  $\lambda_1 + \lambda_2$  und das Produkt  $\lambda_1 \lambda_2$  als Formel nur mit  $S$  und  $D$  dar.
  - b) Erstellen Sie ein zweidimensionales Diagramm mit Abszisse  $S$  und Ordinate  $D$ . Teilen Sie darin den zweidimensionalen Raum auf in Gebiete mit den jeweiligen Typen der Nulllösung (Knoten, Strudel, Sattel, etc.).
3. Zur linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung  $z''(t) + \beta z'(t) + \omega^2 z(t) = 0$  lautet ein äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

mit den Parametern  $\beta, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega > 0$ . Es sei  $\beta \neq 0$ .

Untersuchen Sie die Stabilität und Attraktivität der Nulllösung durch Fallunterscheidungen an die Parameter.

Geben Sie jeweils den Typ des stationären Punkts an (Knoten, Strudel, Sattel, etc.).

4. Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  heißt schiefssymmetrisch genau dann, wenn  $A^\top = -A$  gilt.
- Beweisen Sie: Alle Eigenwerte einer schiefssymmetrischen Matrix sind rein imaginär, d.h. die Realteile sind null.
  - Beweisen Sie: Eine schiefssymmetrische Matrix ist auch eine normale Matrix, d.h.  $AA^\top = A^\top A$ .
  - Was folgt mit Teil (a) und (b) für die Stabilität oder Instabilität der Nulllösung beim linearen Differentialgleichungssystem  $\frac{dx}{dt} = Ax$  für schiefssymmetrisches  $A$ ?
  - Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem aus Aufgabe 3 für  $\beta = 0$  und beliebiges  $\omega > 0$ . Was ergibt sich für die Stabilität?
5. Untersucht wird die Dynamik freier altersgeschichteter Populationen mit Kindern  $N$ , Erwachsenen  $E$  und Senioren  $S$ . Als Modell folgt ein lineares Differentialgleichungssystem  $x' = Ax$  für  $x = (N, E, S)^\top$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & k_3 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_4 \end{pmatrix}$$

mit Alterungsraten  $k_1, k_2$ , Reproduktionsrate  $k_3$  und Sterberate  $k_4$ . Alle Parameter  $k_1, k_2, k_3, k_4$  sind positiv.

- Geben Sie eine Bedingung für die Parameter an, die äquivalent zur Regularität der Matrix  $A$  ist.
  - Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix  $A$ .
  - Geben Sie eine Bedingung für die Parameter an, die äquivalent zur asymptotischen Stabilität des Nullvektors ist. Interpretieren Sie diese Bedingung.
6. Die Euklidische Vektornorm  $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$  für  $x \in \mathbb{R}^k$  wird im folgenden verwendet. Zu einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  lautet die logarithmische Norm

$$\mu(A) = \max \left\{ x^\top A x : \|x\| = 1 \right\} \in \mathbb{R}.$$

Hier sind auch negative logarithmische Normen möglich.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem  $\frac{dx}{dt} = Ax$ ,  $x(0) = \xi$  mit  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ .

- Beweisen Sie die Ungleichung

$$\|x(t)\| \leq e^{t\mu(A)} \|\xi\| \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

*Hinweis:* Differenzieren Sie die Funktion  $g(t) = \|x(t)\|^2$ .

- Sei  $\mu(A) < 0$ . Nutzen Sie die Ungleichung aus Teil (a) für qualitative Aussagen über alle Lösungen von Anfangswertproblemen. Ist die Nulllösung stabil und/oder attraktiv?