Prof. Dr. Roland Pulch
Wintersemester 2024/25

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 6

1. Betrachtet wird das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2\alpha x - 3y + xy^2\\ \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 3x + 2\alpha y - x^2\end{aligned}$$

   mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist $(x^*, y^*) = (0,0)$ ein stationärer Punkt.

   a) Zeigen Sie, dass bei $\alpha_0 = 0$ eine Hopf-Bifurkation vorliegt.

   b) Für welche α existiert eine periodische Lösung? Machen Sie Aussagen über die Stabilität des stationären Punkts und der periodischen Lösung in Abhängigkeit des Parameters α.

   c) Welchen Wert nimmt die Periode des Grenzzyklus für kleine α näherungsweise an?

2. Das Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} &= B\Big(1 - \frac{B}{K}\Big) - R\,\frac{B}{B+1}\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}R \qquad\quad + R\,\frac{B}{B+1}\end{aligned}$$

   durchläuft in Abhängigkeit der Beute-Kapazität K eine Hopf–Bifurkation am stationären Punkt $(B^*, R^*) = (1, 2 - \frac{2}{K})$ im Inneren des positiven Quadranten. Bestimmen Sie den Bifurkationspunkt K_0. Zeigen Sie dann noch weitere Bedingungen für die Hopf–Bifurkation in diesem Punkt.
   Gibt es auch eine transkritische Bifurkation?

3. Das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= uv\\ \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -2v - u^2\end{aligned}$$

   besitzt den eindeutigen stationären Punkt $(u^*, v^*) = (0,0)$.

   a) Bestimmen Sie zu diesem stationären Punkt (näherungsweise) eine Zentrumsmannigfaltigkeit.
   Hinweis: Setzen Sie für die Funktion H eine Potenzreihe an und bestimmen Sie deren Koeffizienten bis (einschließlich) Grad 3. Begründen Sie zur Vereinfachung am Anfang, dass die Koeffizienten für Grad 0 und Grad 1 verschwinden müssen.

   b) Entscheiden Sie mittels der Zentrumsmannigfaltigkeit bzw. der Funktion H, ob der stationäre Punkt stabil oder instabil ist.

4. Untersuchen Sie, ob die Modelle (a)-(d) für verzögertes logistisches Wachstum die folgende biologische Forderung für beliebiges $\tau > 0$ erfüllen:

   Es gilt $N(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$, wenn $N(t) \geq 0$ für $-\tau \leq t \leq 0$.

   a) $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$
   b) $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t-\tau)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$
   c) $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t-\tau)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$
   d) $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t-\tau) - \frac{r}{K}N(t)^2$

   Hinweis: Was können Sie für $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$ aussagen, wenn $N(t) = 0$ wäre?

Besprechung der Aufgaben: am 16.1.2025