Prof. Dr. Roland Pulch

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 : *Typisierung von part. Dgln.*

Bestimmen Sie zu den folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sowohl den Typ bezüglich der Linearität als auch den Typ elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch.

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
in Abhängigkeit der Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\left(1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
Diese Gleichung beschreibt eine Minimalfläche.

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - x^2 - y^2) \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^2$
in Abhängigkeit von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Teilgebiete.

Aufgabe 2 : *Wellengleichung.*

Gegeben sei die eindimensionale Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit Konstante $c > 0$.

a) Überprüfen Sie, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) \, \mathrm{d}s\right)$$

mit $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ eine Lösung der Wellengleichung mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = cu_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

b) Finden Sie Forderungen an jeweils die Anfangsvorgaben u_0 und u_1, welche beschränkte Lösungen u in den Gebieten $(x,t) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ bzw. $(x,t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T)$ mit festem $T > 0$ garantieren.

Aufgabe 3 : *Wärmeleitungsgleichung.*

Gegeben sei die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit Lösung $u : [0, \pi] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und die homogenen Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad \text{für alle } \ t \geq 0$$

sowie Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } \ x \in [0, \pi]$$

mit stetig differenzierbaren Anfangswerten $u_0 : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, die ebenfalls die Randbedingungen erfüllen.

a) Verifizieren Sie, dass die Funktionen

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-k^2 t} \left(a \cos(kx) + b \sin(kx)\right)$$

für beliebige Konstanten $a, b, k \in \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung ohne zusätzliche Bedingungen erfüllen.

b) Bestimmen Sie die Teilmenge der Funktionen aus Teil (a), welche die Randbedingungen erfüllen.

c) Nutzen Sie das System von Lösungen aus Teil (b) um eine Lösung zu konstruieren, die sowohl die Randbedingungen als auch die Anfangsbedingungen erfüllt unter der Voraussetzung, dass die Anfangswerte die Form

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(kx)$$

mit Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_K \in \mathbb{R}$ besitzen.

Hausaufgabe 1 : *Typisierung von part. Dgln. II.*

Bestimmen Sie den Typ (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch) bei folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

a) $(x+y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{x+y}$
in Abhängigkeit von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) stationäre Euler-Gleichung für Strömung
$\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
in Abhängigkeit der konstanten Geschwindigkeit $v > 0$ und der Schallgeschwindigkeit $c > 0$.

c) Burgers-Gleichung
$\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
in Abhängigkeit der Konstanten $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

d) Minimalflächengleichung in n Dimensionen
$\left(1 + \|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$

Hausaufgabe 2 : *Laplace-Gleichung.*

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist.

b) Beweisen Sie, dass mit einer Lösung $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

und einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auch $v(x) = u(Ax)$ die Laplace-Gleichung erfüllt.

Hausaufgabe 3 : *Wellengleichung und Energie.*

Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Geschwindigkeit $c = 1$). Es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems $u(x, 0) = u_0(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ mit $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Zudem sollen u_0 und u_1 einen kompakten Träger besitzen. Die potentielle Energie und die kinetische Energie werden definiert durch

$$E_\mathrm{p}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2 \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad E_\mathrm{k}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

a) Beweisen Sie die Energieerhaltung

$$E_\mathrm{p}(t) + E_\mathrm{k}(t) = \text{konstant}$$

für alle $t \geq 0$, indem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k}) = 0$ gezeigt wird.

b) Begründen Sie, dass es ein (hinreichend hohes) $T > 0$ gibt, so dass $E_\mathrm{p}(t) = E_\mathrm{k}(t)$ für alle $t \geq T$ gilt. *Hinweis*: Lösungsformel nach d'Alembert.

Abgabe der Hausaufgaben: 27.10.2023 in der Übung