Prof. Dr. Roland Pulch

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 : *Maximum-Prinzip für elliptische Operatoren.*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir betrachten den linearen Differentialoperator

$$L : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega), \qquad L(u) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$. Der Operator L heißt elliptisch, falls die symmetrische Matrix $A(x) := (a_{ij}(x))$ positiv definit für alle $x \in \Omega$ ist. Der Operator L heißt gleichmäßig elliptisch, falls eine Konstante $\alpha > 0$ existiert mit

$$\xi^\top A(x) \xi \geq \alpha \|\xi\|_2^2 \quad \text{für alle} \;\; \xi \in \mathbb{R}^n \;\; \text{und} \;\; x \in \Omega.$$

Im folgenden sei $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ vorausgesetzt.

a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften eines elliptischen Operators:

(i) Maximum-Prinzip: Wenn $Lu \leq 0$ in Ω, dann besitzt u ein Maximum auf $\partial\Omega$.

(ii) Minimum-Prinzip: Wenn $Lu \geq 0$ in Ω, dann besitzt u ein Minimum auf $\partial\Omega$.

(iii) Vergleich: Wenn $Lu \leq Lv$ in Ω und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$, dann folgt $u \leq v$ in Ω.

Hinweis: Um (i) zu zeigen kann eine Koordinatentransformation verwendet werden, welche die symmetrische Koeffizientenmatrix diagonalisiert.

b) Zeigen Sie für einen gleichmäßig elliptischen Operator die Abschätzung

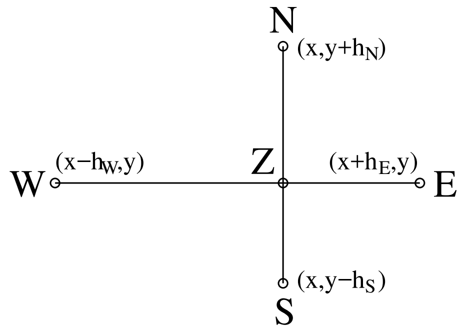
$$|u(x)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} |u(z)| + c \cdot \sup_{z \in \Omega} |Lu(z)| \qquad \text{für alle} \;\; x \in \Omega$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Begründen Sie, warum Elliptizität alleine nicht ausreicht.

c) Überlegen Sie sich ein Gebiet Ω und dazu einen elliptischen Differentialoperator, welcher nicht gleichmäßig elliptisch ist.

Aufgabe 5 : *Shortley-Weller-Stern.*

Zur Diskretisierung des Laplace-Operators $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ in zwei Raumdimensionen verwenden wir den Fünf-Punkte-Stern mit unterschiedlichen Schrittweiten:



Sei $u \in C^4(\overline{\Omega})$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Koeffizienten α_{Z}, α_{N}, α_{W}, α_{S}, α_{E}, so dass die Differenzenformel

$$\Delta_h u := \sum_{\ell = \mathrm{Z,N,W,S,E}} \alpha_\ell \, u(z_\ell)$$

die Bedingung $\Delta_h u = \Delta u|_Z + \mathcal{O}(h)$ mit $h := \max\{h_{\mathrm{N}}, h_{\mathrm{W}}, h_{\mathrm{S}}, h_{\mathrm{E}}\}$ erfüllt.

Untersuchen Sie danach die Approximationsgüte anhand der Restterme im Fall von uniformen Gittern:

(i) quadratisches Gitter: $h = h_{\mathrm{N}} = h_{\mathrm{W}} = h_{\mathrm{S}} = h_{\mathrm{E}}$,

(ii) rechteckiges Gitter: $h_1 = h_{\mathrm{N}} = h_{\mathrm{S}}$, $h_2 = h_{\mathrm{W}} = h_{\mathrm{E}}$.

Hausaufgabe 4 : *Eigenwerte des diskretisierten Laplace-Operators.*

Wir betrachten das Einheitsquadrat $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf $\partial\Omega$.

a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ die Eigenfunktionen

$$v^{(k,\ell)}(x,y) = \sin(\pi k x)\sin(\pi \ell y) \qquad \text{für } k,\ell \in \mathbb{N}$$

besitzt, d.h. es gilt $\Delta v^{(k,\ell)} = \lambda^{(k,\ell)} v^{(k,\ell)}$ mit den Eigenwerten $\lambda^{(k,\ell)} \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie dadurch auch eine Formel für die Eigenwerte.

b) Sei $A_h \in \mathbb{R}^{M^2 \times M^2}$ die Matrix, welche den diskreten Laplace-Operator $-\Delta_h$ zu Schrittweite $h = \frac{1}{M+1}$ beschreibt, d.h. diese Matrix enthält nur die Einträge $\frac{4}{h^2}, -\frac{1}{h^2}, 0$. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren von A_h gerade

$$v^{(k,\ell)} = \left(\sin(\pi k i h)\sin(\pi \ell j h)\right)_{ij} \in \mathbb{R}^{M^2} \qquad \text{für } k,\ell = 1,\ldots,M$$

sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte $\lambda^{(k,\ell)} \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Sie können die beiden trigonometrischen Beziehungen $\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi) = 2\sin(\theta)\cos(\varphi)$ und $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2(\frac{1}{2}\theta)$ verwenden.

c) Benutzen Sie die Eigenwerte $\lambda^{(k,\ell)}$ von A_h um die Stabilitätsbedingung

$$\left\|A_h^{-1}\right\|_2 \leq C \qquad \text{für alle } 0 < h < h_0$$

mit Konstanten $C, h_0 > 0$ zu beweisen. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_2$ die Spektralnorm, d.h. die von der Euklidischen Vektornorm erzeugte Matrixnorm.
Hinweis: Für eine symmetrische Matrix ist $\|\cdot\|_2$ gleich dem Spektralradius.

Hausaufgabe 5 : *Nummerierung in Finiter Differenzen Methode.*

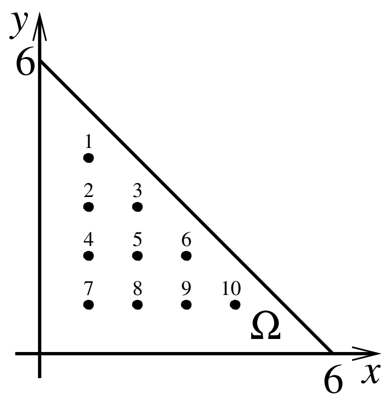
Wir betrachten die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy} &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

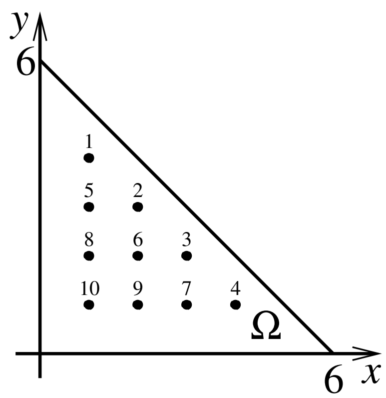
im Gebiet $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 6, x > 0, y > 0\}$. Wir konstruieren ein Gitter in diesem Gebiet mit der Schrittweite $h = 1$. Zur Nummerierung der Gitterpunkte und damit der Unbekannten untersuchen wir die beiden Möglichkeiten (a) und (b) in den Skizzen unten.

Verwenden Sie den Fünf-Punkte-Stern und stellen Sie die beiden linearen Gleichungssysteme zur Finiten Differenzen Methode auf. Geben Sie auch die Koeffizientenmatrizen an. Vergleichen Sie die Matrizen der Gleichungssysteme bezüglich der Position der Einträge ungleich null und der Bandbreite. Sind die Matrizen symmetrisch?

(a)



(b)



Abgabe der Hausaufgaben: 3.11.2023 in der Übung