Prof. Dr. Roland Pulch

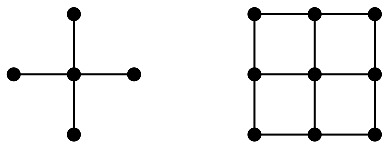
Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 3

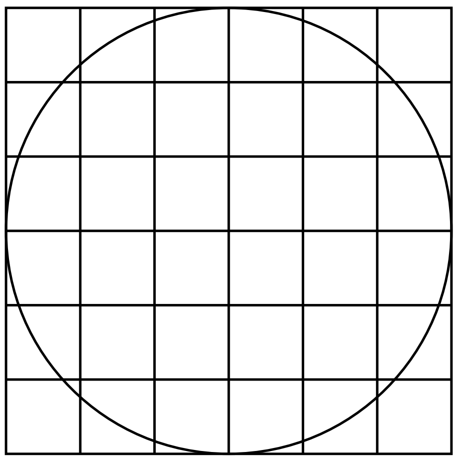
Aufgabe 6 : *Gitterpunkte.*

Der Fünf-Punkte-Stern und der Neun-Punkte-Stern auf einem Gitter mit konstanter Schrittweite zur Diskretisierung des Laplace-Operators in zwei Raumdimensionen besitzen die folgende Form:

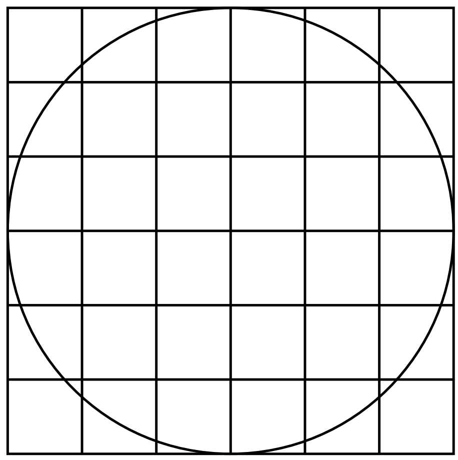


Nun sei Ω ein Kreis. Zeichnen Sie die Gitterpunkte in die folgenden Skizzen ein, in denen die Schemata jeweils angewendet werden können. Kennzeichnen Sie auch die Punkte, in denen der Shortley-Weller-Stern eingesetzt werden muss um die Randbedingungen einzubeziehen.

Fünf-Punkte-Stern

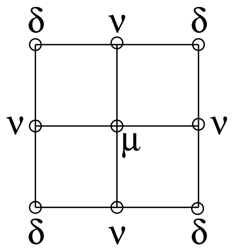


Neun-Punkte-Stern



Aufgabe 7 : *Neun-Punkte-Stern.*

Zur Diskretisierung des Laplace-Operators $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ in zwei Raumdimensionen untersuchen wir den Neun-Punkte-Stern mit gleicher Schrittweite h in jeder Richtung. Dazu sei u hinreichend oft stetig differenzierbar.



a) Zeigen Sie, dass ein konsistenter Neun-Punkte-Stern mit Ordnung $p = 2$ Koeffizienten der Form in der Abbildung links besitzt (d.h. manche Koeffizienten sind gleich). Welche Bedingungen müssen zusätzlich für die Konsistenz des Neun-Punkte-Sterns mit Ordnung $p = 2$ erfüllt sein?

b) Beweisen Sie, dass kein Neun-Punkte-Stern mit der Konsistenzordnung $p = 3$ existiert.

c) Finden Sie einen Neun-Punkte-Stern (mit $\delta \neq 0$) der Konsistenzordnung $p = 2$, für welchen das diskrete Maximum-Prinzip gilt.

Hausaufgabe 6 : *Finite-Differenzen-Verfahren bei gemischter Ableitung.*

Auf $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ sei folgendes Randwertproblem gegeben

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) + b\, u_{xy}(x,y) &= f(x,y) \quad \text{für } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad \text{für } (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Auf einem Gitter mit Schrittweite $h = \frac{1}{M+1}$ wird der Differentialoperator diskretisiert durch den Differenzenoperator

$$\begin{aligned} (L_h U)_{i,j} = \tfrac{1}{2h^2} &[4U_{i,j} - U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i+1,j+1}] \\ &+ b\, \tfrac{1}{4h^2} [U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}] \end{aligned}$$

für $i,j = 1,\dots,M$ mit den Gitterpunkten $x_i = ih$ und $y_j = jh$ für $i,j = 0,1,\dots,M,M+1$.

a) Beweisen Sie, dass die Differentialgleichung genau dann elliptisch ist, wenn $|b| < 2$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass der Differenzenoperator konsistent von Ordnung (mindestens) $p = 2$ ist.

c) Beweisen Sie: Sei $|b| < 2$. Aus der Bedingung

$$(L_h U)_{i,j} \leq 0 \quad \text{für alle } i,j = 1,\dots,M$$

folgt, dass das Maximum der Näherungen am Rand angenommen wird, d.h.

$$\max_{\Omega_h} U_{i,j} \leq \max_{\partial\Omega_h} U_{i,j}.$$

Hausaufgabe 7 : *Diskretes Maximum-Prinzip und M-Matrizen.*

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt

- *inversmonoton*, wenn für $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax \leq 0$ stets $x \leq 0$ folgt,
- *M-Matrix*, wenn A inversmonoton ist und $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ gilt.

a) Zeigen Sie: Ist A inversmonoton, dann ist A regulär.

b) Zeigen Sie: A ist genau dann inversmonoton, wenn die inverse Matrix keine negativen Einträge enthält, d.h. $A^{-1} \geq 0$.

c) Sei A_h die Matrix aus der Diskretisierung der Poisson-Gleichung mit dem Fünf-Punkte-Stern auf dem Einheitsquadrat mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Folgern Sie unter Verwendung des diskreten Maximum-Prinzips, dass A_h eine M-Matrix ist.

Abgabe der Hausaufgaben: 10.11.2023 in der Übung