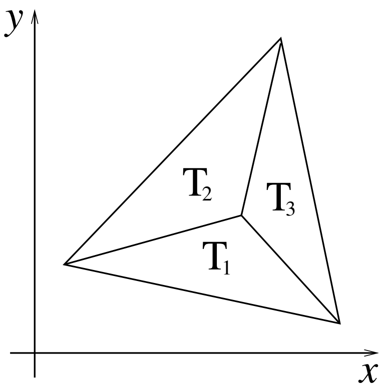
Prof. Dr. Roland Pulch

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 4

Aufgabe 8 : *Schwache Ableitung in zwei Dimensionen.*



Seien die Dreiecke T_1, T_2, T_3 in der Abbildung offen. Wir betrachten das offene zusammenhängende Dreieck $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, das von diesen Dreiecken gebildet wird, d.h. das Innere von $\overline{T}_1 \cup \overline{T}_2 \cup \overline{T}_3$. Sei $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f \in C^0(\overline{\Omega})$ (stetig auf $\overline{\Omega}$) und $f|_{\overline{T_i}} \in C^1(\overline{T_i})$ (glatt auf $\overline{T_i}$) für alle $i = 1, 2, 3$.
Beweisen Sie, dass die beiden partiellen Ableitungen $f_x = D^{(1,0)} f$ und $f_y = D^{(0,1)} f$ im schwachen Sinn auf Ω existieren.
Hinweis: Verwenden Sie die Greensche Formel.

Aufgabe 9 : *Skalarprodukt auf Sobolev-Raum.*

a) Sie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene zusammenhängende Menge. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m} : H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha v \rangle_{L^2}$$

mit dem Differentialoperator D^α ein Skalarprodukt (inneres Produkt) ist, d.h.

(i) $\langle u, u \rangle_{H^m} > 0$ für $u \neq 0$,

(ii) $\langle u, v \rangle_{H^m} = \langle v, u \rangle_{H^m}$ für alle $u, v \in H^m(\Omega)$,

(iii) $\langle u_1 + u_2, v \rangle_{H^m} = \langle u_1, v \rangle_{H^m} + \langle u_2, v \rangle_{H^m}$ für alle $u_1, u_2, v \in H^m(\Omega)$,
$\langle \lambda u, v \rangle_{H^m} = \lambda \langle u, v \rangle_{H^m}$ für alle $u, v \in H^m(\Omega)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dabei können die entsprechenden Eigenschaften des Skalarprodukts auf $L^2(\Omega)$ verwendet werden.

b) Beweisen Sie, dass der Raum $H^m(\Omega)$ ein Hilbert-Raum ist, d.h. die Vollständigkeit ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^m}$ noch nachzuweisen. Verwenden Sie hierzu (ohne Beweis), dass der Raum $L^2(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^2}$ vollständig ist.

Hausufgabe 8 : *Schwache Ableitungen.*

Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf dem jeweiligen Gebiet Ω auf (einmalige) schwache Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls alle existierenden schwachen Ableitungen (erster Ordnung).

a) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$

b) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

c) $f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} x_2 & \text{für } 0 < x_1 < 1 \text{ und } x_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in den Fällen

i) $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$,

ii) $\Omega = ((-1, 1) \times (-1, 1)) \backslash \{(0, x_2) : x_2 \geq 0\}$.

Hausaufgabe 9 : *Bilinearformen.*

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbert-Raum mit der induzierten Norm $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Betrachtet wird eine Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$.

a) Sei H ein endlichdimensionaler Hilbert-Raum. Beweisen Sie, dass jede positive, symmetrische Bilinearform a sowohl stetig als auch koerziv ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass in endlichdimensionalen Vektorräumen alle Normen äquivalent sind.

b) Wir betrachten den Hilbert-Raum $H = \ell^2$, d.h.

$$\ell^2 = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}, \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Wir definieren eine Bilinearform mittels

$$a(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} x_j y_j.$$

Beweisen Sie, dass diese Bilinearform symmetrisch, positiv und stetig ist. Zeigen Sie, dass die Bilinearform nicht koerziv ist.

Abgabe der Hausaufgaben: 24.11.2023