Prof. Dr. Roland Pulch

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 6

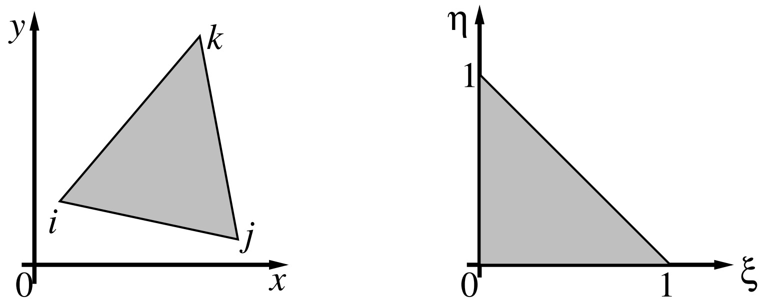
Aufgabe 12 : *Elementsteifigkeitsmatrix.*

Sei eine zulässige Triangulation $\mathcal{T}_h = \{T_1, \ldots, T_Q\}$ des Gebiets Ω gegeben. Wir betrachten stückweise lineare Basisfunktionen $\phi_1, \ldots, \phi_N$ in jedem Dreieck. Benötigt werden daher die Einträge

$$a^q_{\mu\nu} = \int_{T_q} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x}\frac{\partial \phi_\nu}{\partial x} + \frac{\partial \phi_\mu}{\partial y}\frac{\partial \phi_\nu}{\partial y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\star)$$

in den Elementsteifigkeitsmatrizen A^q_h für $q = 1, \ldots, Q$ um die Steifigkeitsmatrix A_h zu berechnen.

Dazu transformieren wir die Dreiecke T_q von den (x, y)-Koordinaten auf ein Referenzdreieck $\hat{T}$ mit (ξ, η)-Koordinaten, wobei $(x_i, y_i) \to (0, 0)$, $(x_j, y_j) \to (1, 0)$, $(x_k, y_k) \to (0, 1)$.



Geben Sie die Transformationsformel von (ξ, η) nach (x, y) an. Berechnen Sie $D = \det(J)$ mir der Jacobi-Matrix J zur Transformation von (ξ, η) nach (x, y). Zeigen Sie, dass $D = 2|T_q|$ gilt, wobei $|T_q|$ die Fläche des Dreiecks bezeichnet.

Transformieren Sie das Integral $(\star)$ von T_q auf $\hat{T}$. Berechnen Sie das transformierte Integral explizit. Leiten Sie damit die Formel der kondensierten Matrix her, d.h.

$$\tilde{A}^q_h = \frac{1}{4|T_q|} E_q E_q^\top \quad \text{mit} \quad E_q = \begin{pmatrix} y_j - y_k & x_k - x_j \\ y_k - y_i & x_i - x_k \\ y_i - y_j & x_j - x_i \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende die Abkürzungen $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, etc.

Aufgabe 13 : *Quadratische Finite Elemente.*

Sei ein polygonales Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und dazu eine zulässige Triangulation $\mathcal{T}_h$ gegeben. Betrachtet wird die Funktionenmenge

$$S_h = \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_2 \text{ für jedes } T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

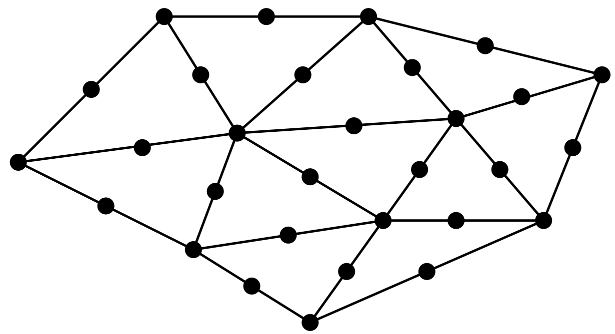
($\mathcal{P}_k$: Polynome bis Grad k). Randbedingungen werden nicht betrachtet.

a) Im Referenzdreieck $\hat{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ seien $z_1, \ldots, z_6$ die drei Eckpunkte und die drei Kantenmitten. Bestimmen Sie die Formeln der Basisfunktionen $\psi_j : \hat{T} \to \mathbb{R}$ mit $\psi_j \in \mathcal{P}_2$ und der Eigenschaft

$$\psi_j(z_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \qquad \text{für } i, j = 1, \ldots, 6.$$

b) Überlegen Sie sich für eine beliebige zulässige Triangulation, dass die Dimension des Raums S_h der Summe aus der Anzahl der verschiedenen Eckpunkte und der Anzahl der verschiedenen Kantenmitten entspricht.

c) Wie kann man zum Raum S_h eine Basis konstruieren, deren Funktionen möglichst kleinen Träger in Ω besitzen?



Hausaufgabe 13 : *Finite Elemente in einer Raumdimension.*

Es sei das Randwertproblem einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben durch

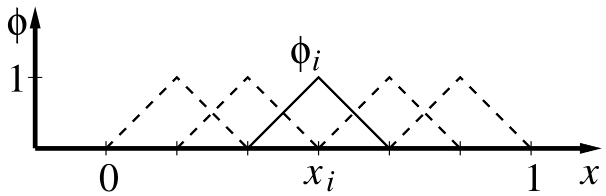
$$-y''(x) + a_0 y = f(x), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

mit einer Konstanten $a_0 \geq 0$ und einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Wir führen ein Gitter ein mit den Punkten $x_i = ih$ für $i = 0, 1, \ldots, M+1$ und der Schrittweite $h = \frac{1}{M+1}$. Stückweise lineare Basisfunktionen $\phi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ werden definiert durch die Bedingungen

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

für $i, j = 1, \ldots, M$ und $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$.



a) Stellen Sie die Bilinearform a und die lineare Abbildung ℓ der schwachen Formulierung zu diesem Randwertproblem auf.

b) Berechnen Sie die Einträge $a(\phi_i, \phi_j)$ in der Matrix aus dem Ritz-Galerkin-Verfahren. Welche Struktur besitzt die Matrix? Welche Matrix entsteht im Spezialfall $a_0 = 0$?

c) Verwenden Sie die Trapezregel mit den Knoten x_i um die Einträge $\langle \ell, \phi_i \rangle$ in der rechten Seite aus dem Ritz-Galerkin-Verfahren näherungsweise zu erhalten.

Hausaufgabe 14 : *Sobolev-Norm auf partitioniertem Raum.*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet und $\mathcal{T}_h = \{T_1, \ldots, T_Q\}$ eine zulässige Triangulation. Wir betrachten den Funktionenraum

$$V = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : v|_T \in H^m(T) \text{ für jedes } T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

mit einer ganzen Zahl $m \geq 1$. Wir definieren die Abbildung

$$\|v\|_{m,h} = \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|^2_{H^m(T)}} \qquad \text{für } v \in V.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Abbildung $\|\cdot\|_{m,h}$ ist eine Norm auf V.

b) Der normierte Raum $(V, \|\cdot\|_{m,h})$ ist vollständig.

c) Es gilt $\|v\|_{H^m(\Omega)} = \|v\|_{m,h}$ für $v \in H^m(\Omega)$.

Abgabe der Hausaufgaben: 08.12.2023