Prof. Dr. Roland Pulch

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 7

Aufgabe 14 : *Lösungsformel für Wärmeleitungsgleichung.*

Wir betrachten zur Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ das (reine) Anfangswertproblem $u(x,0) = u_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die vorgegebene Funktion $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei messbar und beschränkt. Die zugehörige Lösung lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) \; \mathrm{d}y$$

für $t > 0$.

Zeigen Sie, dass die Funktion u aus der obigen Formel eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Verwenden Sie dabei die Annahme, dass die partiellen Ableitungen und die Integration vertauscht werden können.

Aufgabe 15 : *Klassisches explizites Verfahren für Wärmeleitungsgleichung.*

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$. Es sei ein Gitter $x_j = jh$, $t_n = nk$ mit Schrittweiten h im Ort und k in der Zeit gegeben. Die Näherungen lauten $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$. Das klassische explizite Verfahren besitzt die Differenzenformel

$$U_j^{n+1} = rU_{j-1}^n + (1-2r)U_j^n + rU_{j+1}^n$$

mit $r = \frac{k}{h^2}$. Wir nehmen an, dass r konstant bleibt im Grenzübergang $k, h \to 0$. Zeigen Sie durch Taylor-Entwicklung der exakten Lösung u, dass dieses Finite-Differenzen-Verfahren eine höhere Konsistenzordnung für $r = \frac{1}{6}$ im Vergleich zu $r \neq \frac{1}{6}$ besitzt.

Aufgabe 16 : *Konsistenz für Diskretisierung vierter Ordnung.*

Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $u \in C^6$. Ein Gitter $x_j = jh$ mit Schrittweite $h > 0$ wird verwendet. Zeigen Sie mittels Taylor-Entwicklung, dass

$$u''(x_j) = \tfrac{1}{12h^2} \left[-u(x_{j-2}) + 16u(x_{j-1}) - 30u(x_j) + 16u(x_{j+1}) - u(x_{j+2}) \right] + \mathcal{O}(h^4)$$

gilt. Somit ist die Differenzenformel konsistent mit Ordnung 4.

Hausaufgabe 15 : *Lokaler Fehler des Crank-Nicolson-Verfahrens.*

Für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ ist das Crank-Nicolson-Verfahren äquivalent zu der Formel

$$\frac{1}{k}\Big[U_j^{n+1} - U_j^n\Big] = \frac{1}{2h^2}\Big[U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n\Big] + \frac{1}{2h^2}\Big[U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}\Big]$$

mit Zeitschrittweite $k > 0$ und Ortsschrittweite $h > 0$.

Leiten Sie durch Taylor-Entwicklungen mit Resttermen eine exakte Formel für den lokalen Diskretisierungsfehler dieses Finite Differenzen Verfahrens her. Dabei wird eine exakte Lösung u hinreichend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt.
Hinweis: Entwickeln Sie um den Punkt $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) = (x_j, t_n + \frac{k}{2})$.

Hausaufgabe 16 : *Klassisches implizites Verfahren mit Neumann-Randbedingungen.*

Zur Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ mit $t \in [0, T]$ und $x \in [0, 1]$ lauten die von-Neumann-Randbedingungen $u_x(0, t) = \alpha(t)$ und $u_x(1, t) = \beta(t)$ mit vorgegebenen Funktionen α, β. Auf einem uniformen Gitter $x_j = jh$, $t_n = nk$ mit $h = \frac{1}{M}$, $k = \frac{T}{N}$ lautet das klassische implizite Verfahren

$$-rU_{j-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_j^{n+1} - rU_{j+1}^{n+1} = U_j^n$$

für $j = 1, \ldots, M - 1$ mit $r = \frac{k}{h^2}$. Diskretisieren Sie die Randbedingungen mit Differenzenquotienten erster Ordnung. Spezifizieren Sie das entstehende lineare Gleichungssystem für die Unbekannten $U_1^{n+1}, \ldots, U_{M-1}^{n+1}$ in Matrix-Vektor-Form. Begründen Sie, dass die Matrix regulär ist.

Hausaufgabe 17 : *Normabschätzung bei Wärmeleitungsgleichung.*

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ auf einem Streifen $D = [a, b] \times (0, \infty)$ mit $a < b$. Dabei seien homogene Dirichlet-Randbedingungen bei $x = a$ und $x = b$ vorgegeben.

a) Beweisen Sie, dass eine Lösung $u \in C^2(\overline{D})$ die Ungleichung

$$\int_a^b u(x, t_2)^2 \, \mathrm{d}x \le \int_a^b u(x, t_1)^2 \, \mathrm{d}x$$

für alle $t_2 \ge t_1 \ge 0$ erfüllt.
Hinweis: Betrachten Sie die Zeitableitung des Integrals über $u(x, t)^2$.

b) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$ Lösungen zu den Anfangswerten $u_1(x, 0)$ und $u_2(x, 0)$ bei $t = 0$. Folgern Sie aus der Ungleichung in Teil (a) eine Abschätzung der Differenz $u_1 - u_2$ bei $t_2 > 0$ im Vergleich zu $t_1 = 0$ in der Norm $L^2([a, b])$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Abgabe der Hausaufgaben: 15.12.2023