Prof. Dr. Roland Pulch

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 8

Aufgabe 17 : *Fehlerverstärkung bei Leapfrog-Methode.*

Zur numerischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ wird ein Gitter $x_j = jh$, $t_n = nk$ mit Schrittweiten h und k in Ort bzw. Zeit eingeführt. Die Leapfrog-Methode besteht aus dem Finite-Differenzen-Schema

$$U_j^{n+1} = U_j^{n-1} + 2r(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - 4rU_j^n$$

mit $r = \frac{k}{h^2}$ um Näherungen $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$ zu erhalten.

Wir betrachten Anfangswerte $U_j^0 = 0$ für alle j, $U_0^1 = \varepsilon$ und $U_j^1 = 0$ für $j \neq 0$. Verwenden Sie diese Anfangswerte um die Ergebnisse U_j^n für $j = -3, \ldots, 3$ und $n = 2, 3, 4$ zu berechnen. Dabei sei $r = \frac{1}{2}$.

Wird der Anfangsfehler ε mit der Zeit verstärkt oder gedämpft? Was folgern Sie für die Stabilität des Verfahrens?

Hinweis: In dieser Aufgabe ist die folgende Tabelle zu vervollständigen.

	$j = -3$	$j = -2$	$j = -1$	$j = \pm 0$	$j = +1$	$j = +2$	$j = +3$
$n = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	0	0	0	ε	0	0	0
$n = 2$							
$n = 3$							
$n = 4$							

Aufgabe 18 : *Neumann-Stabilität der Crank-Nicolson-Methode.*

Zur Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ lautet das Crank-Nicolson-Verfahren

$$-rU_{j-1}^{n+1} + 2(1+r)U_j^{n+1} - rU_{j+1}^{n+1} = rU_{j-1}^n + 2(1-r)U_j^n + rU_{j+1}^n$$

mit $r = \frac{k}{h^2}$, wobei k und h die Schrittweiten in der Zeit bzw. im Ort sind. Zeigen Sie, dass dieses Finite-Differenzen-Verfahren stabil bezüglich des Konzepts nach von-Neumann für beliebiges $r > 0$ ist. *Hinweis*: $1 - \cos(\varphi) = 2\sin^2(\frac{\varphi}{2})$

Aufgabe 19 : *Linienmethode.*

Wir betrachten ein Anfangs-Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ mit Dirichlet-Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und Anfangswerten $u(x,0) = u_0(x)$. In der Linienmethode wird eine Diskretisierung im Ort durchgeführt basierend auf den Geraden (x_j, t) mit $x_j = jh$ für $j = 0, 1, \ldots, M$ und $h = \frac{1}{M}$. Sei $0 \leq t \leq T$. Es folgt ein Anfangswertproblem eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'(t) = \frac{1}{h^2}\, B\, y(t)$$

für $y : [0, T] \to \mathbb{R}^{M-1}$ mit der konstanten Tridiagonalmatrix $B \in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}$, wobei die Anfangswerte $y_j(0) = u_0(x_j)$ für $j = 1, \dots, M-1$ sind. Dabei stellt $y_j(t)$ eine Approximation von $u(x_j, t)$ dar.

a) Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Diffentialgleichungssystems an.
Hinweis: Die Eigenwerte der Matrix B sind $\lambda_\ell = -2\left(1 - \cos\left(\frac{\ell\pi}{M}\right)\right)$ für $\ell = 1, \dots, M-1$ zu den Eigenvektoren $v_\ell = (v_\ell(1), \dots, v_\ell(M-1))^\top$ mit $v_\ell(i) = \sin\left(\ell\pi\frac{i}{M}\right)$.

b) Seien die Anfangswerte $u_0(x) = \sin(\ell\pi x)$ für ein festes $\ell \in \{1, \dots, M-1\}$ gegeben. Als exakte Lösung folgt dann $u(x,t) = \mathrm{e}^{-(\ell\pi)^2 t}\sin(\ell\pi x)$. Bestimmen Sie den Fehler in der Linienmethode. Verwenden Sie dazu die Taylor-Reihen der trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion.

Hausaufgabe 18 : *Matrix-Stabilitätskonzept bei Crank-Nicolson-Verfahren.*

Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen im Ortsintervall $[0,1]$. Das Crank-Nicolson-Verfahren lautet

$$-rU_{j-1}^{n+1} + 2(1+r)U_j^{n+1} - rU_{j+1}^{n+1} = rU_{j-1}^n + 2(1-r)U_j^n + rU_{j+1}^n$$

mit der Konstanten $r = \frac{k}{h^2}$, wobei $k > 0$ und $h = \frac{1}{M}$ die Schrittweiten in der Zeit bzw. im Ort bezeichnen. Wir definieren $U^n = (U_1^n, U_2^n, \dots, U_{M-2}^n, U_{M-1}^n)^\top$.

a) Schreiben Sie dieses Finite-Differenzen-Verfahren in der Form $BU^{n+1} = AU^n$, d.h. geben Sie die quadratischen Matrizen A und B an. Es folgt $U^{n+1} = B^{-1}AU^n$.

b) Begründen Sie, dass die Matrix $C = B^{-1}A$ symmetrisch ist.
Hinweis: Zeigen und verwenden Sie $AB = BA$.

c) Beweisen Sie mit dem Kreisesatz von Gerschgorin, dass alle Eigenwerte μ der Matrix C die Bedingung $|\mu| \le 1$ für beliebiges $r > 0$ erfüllen.

d) Beweisen Sie die Abschätzung $\|U^n - V^n\|_2 \le \|U^0 - V^0\|_2$ für beliebiges $n > 0$ in der Euklidischen Norm, wobei U^n und V^n zwei Näherungen aus dem Verfahren bezeichnen.

Hausaufgabe 19 : *Verfahren nach DuFort-Frankel.*

Zu der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ lautet die Finite-Differenzen-Methode von DuFort-Frankel

$$\frac{1}{2k}\left[U_j^{n+1} - U_j^{n-1}\right] - \frac{1}{h^2}\left[U_{j+1}^n - U_j^{n-1} - U_j^{n+1} + U_{j-1}^n\right] = 0$$

mit Schrittweiten k und h in Zeit bzw. Ort. Es liegt ein explizites Zweischrittverfahren vor.

a) Zeigen Sie, dass diese Methode stabil nach dem von-Neumann Kriterium für alle Konstanten $r > 0$ mit $r = \frac{k}{h^2}$ ist.

b) Leiten Sie den lokalen Diskretisierungsfehler des Verfahrens her. Zeigen Sie, dass dieser Fehler gegen null geht falls $k \to 0$ und r konstant bleibt.
Hinweis: Taylor-Entwicklungen bis Restterme $\mathcal{O}(k^3), \mathcal{O}(h^4)$ reichen aus.

Abgabe der Hausaufgaben: 05.01.2024