Prof. Dr. Roland Pulch

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 10

Aufgabe 23 : *Stabilität bei Diskretisierung vierter Ordnung.*

In Aufgabe 16 wurde gezeigt, dass die Differenzenformel

$$u''(x_j) = \tfrac{1}{12h^2}\big[-u(x_{j-2}) + 16u(x_{j-1}) - 30u(x_j) + 16u(x_{j+1}) - u(x_{j+2})\big] + \mathcal{O}(h^4)$$

mit Schrittweite $h > 0$ konsistent mit Ordnung 4 ist. Die Stabilitätsanalyse nach von-Neumann führt dann auf einen Ausdruck

$$A = \tfrac{1}{12h^2}\left[-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(-2h)} + 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(-h)} - 30 + 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda h} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda 2h}\right]$$

mit Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}$ und $A \le 0$ für beliebiges λ gilt.
Hinweis: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Aufgabe 24 : *Charakteristiken bei hyperbolischer Dgl. zweiter Ordnung.*

Gegeben sei die hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0 \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen auf der Geraden $\mathcal{K}$

$$u = 0, \quad u_x = x \quad \text{auf} \quad \mathcal{K}:\ x - 2y = 0. \tag{2}$$

- **a)** Bestimmen Sie die beiden Charakteristikenfamilien $\mathcal{K}_\alpha$, $\mathcal{K}_\beta$ zu dieser Differentialgleichung. Skizzieren Sie die Charakteristiken zusammen mit der Anfangskurve $\mathcal{K}$.
- **b)** Transformieren Sie Gleichung (1) über $\xi = \xi(x, y)$ und $\eta = \eta(x, y)$ in die Form $w_{\xi\eta} = 0$. Geben Sie dazu die Formeln der Koordinatentransformation an.
- **c)** Transformieren Sie ebenfalls die Anfangswerte (2). Bestimmen Sie folglich die Lösung von $w_{\xi\eta} = 0$ unter diesen Bedingungen.
- **d)** Bestimmen Sie mit den Ergebnissen aus Teil (c) die Lösung $u(x, y)$ von (1) zu Anfangswerten (2) durch Rücktransformation. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis.

Hausaufgabe 23 : *Anisotrope Wellengleichungen.*

Wir untersuchen die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (\star)$$

mit der Lösung $u : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \to \mathbb{R}$ und den reellen Konstanten $c_x, c_y, c_z > 0$.

a) Verwenden Sie eine lineare Transformation in den Ortskoordinaten um die Gleichung $(\star)$ in die standardisierte Wellengleichung $\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} + \tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}}$ zu überführen.

b) Wir betrachten die Finite-Differenzen-Methode mit dem symmetrischen Differenzenquotienten zweiter Ordnung für jede partielle Ableitung. Zum Lösen der Gleichung $\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} + \tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}}$ sei ein Gitter mit Schrittweite k in der Zeit und $\tilde{h}$ in jeder Ortskoordinate gegeben. Transformieren Sie das Gitter um die Schrittweiten h_x, h_y, h_z für die Gleichungen $(\star)$ zu erhalten. Welche Bedingung an die Zeitschrittweiten (in Abhängigkeit von c_x, c_y, c_z) ist hinreichend um das Stabilitätskriterium nach von-Neumann zu erfüllen?
Hinweis: Die Tabelle auf S. 104 im Skript kann verwendet werden.

Hausaufgabe 24 : *Charakteristiken bei ortsabhängiger Wellengeschwindigkeit.*

Gegeben sei die Wellengleichung $u_{tt} = c(x)^2 u_{xx}$ mit ortsabhängiger Geschwindigkeit $c(x) > 0$. Es gelte $c(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die beiden Scharen von charakteristischen Kurven zu dieser hyperbolischen Gleichung. Skizzieren Sie die Charakteristiken jeweils im Definitionsbereich (x, t) für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

Hausaufgabe 25 : *Charakteristiken bei parabolischer Dgl.*

Betrachtet wird die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\mathrm{e}^y\, u_{xx} + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+y)}\, u_{xy} + \mathrm{e}^x\, u_{yy} = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Dgl. parabolisch für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist.

b) Leiten Sie die alleinige Charakteristikenschar dieser Dgl. her. Geben Sie eine Formel für die charakteristische Kurve durch einen festen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ an.

Abgabe der Hausaufgaben: 19.1.2024