Prof. Dr. Roland Pulch

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 11

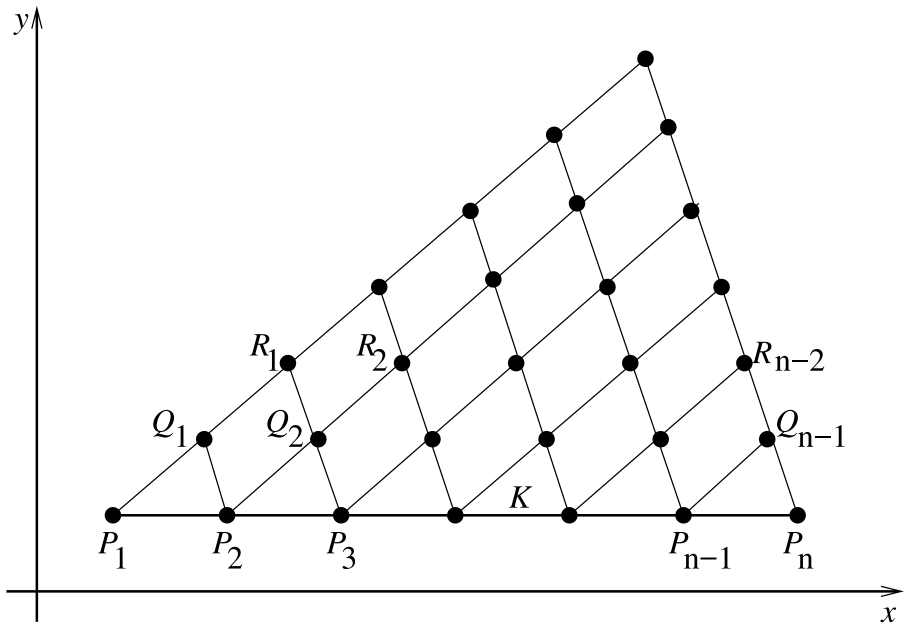
Aufgabe 25 : *Zwei-Schritt-Charakteristikenverfahren.*

Gegeben sei die semilineare hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

mit konstanten Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ und $A \neq 0, C \neq 0$. Anfangswerte für u, u_x, u_y liegen in den äquidistanten Punkten $P_1, \ldots, P_n$ auf einer Kurve $\mathcal{K} := \{(x, y) : y = \text{const.}\}$ vor. Wir nehmen an, dass die Punkte $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ in der nachfolgenden Schicht bereits berechnet wurden zusammen mit den Werten u, u_x, u_y in diesen Punkten.

Konstruieren Sie ein explizites Zwei-Schritt-Verfahren auf Basis der Charakteristiken zur Berechnung der Punkte $R_1, \ldots, R_{n-2}$ in der nächsten Schicht und der Werte u, u_x, u_y in diesen Punkten, wobei alle verwendeten Approximationen konsistent von zweiter Ordnung sind.



Aufgabe 26 : *Richardson-Verfahren.*

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ und $\det(A) \neq 0$. Das stationäre Iterationsschema

$$x^{k+1} = x^k - \omega(Ax^k - b), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

mit einem festen Parameter $\omega > 0$ heißt *Richardson-Verfahren.*

a) Geben Sie die Formel für die Matrix $B(\omega)$ aus der Zerlegung

$$B(\omega)x^{k+1} + (A - B(\omega))x^k = b$$

an, welche das Richardson-Verfahren liefert.

b) Die Matrix A sei symmetrisch und positiv definit mit den zugehörigen Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Bestimmen Sie den Spektralradius $\rho(I - B(\omega)^{-1}A)$ in Abhängigkeit von den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und dem Parameter ω.

c) Die Matrix A sei wieder symmetrisch und positiv definit. Skizzieren Sie den Spektralradius der Iterationsmatrix in Abhängigkeit vom Parameter ω. Bestimmen Sie die Menge der $\omega > 0$ für die das Richardson-Verfahren konvergiert.

d) Bestimmen Sie zur positiv definiten, symmetrischen Matrix A einen optimalen Parameter ω_{opt}, so dass $\rho(I - B(\omega)^{-1}A)$ minimal wird. Stellen Sie $\rho(I - B(\omega_{\text{opt}})^{-1}A)$ bezüglich der Konditionszahl $\kappa_2(A)$ zur Spektralnorm $\|\cdot\|_2$ dar.

Hausaufgabe 26 : *Charakteristikenverfahren.*

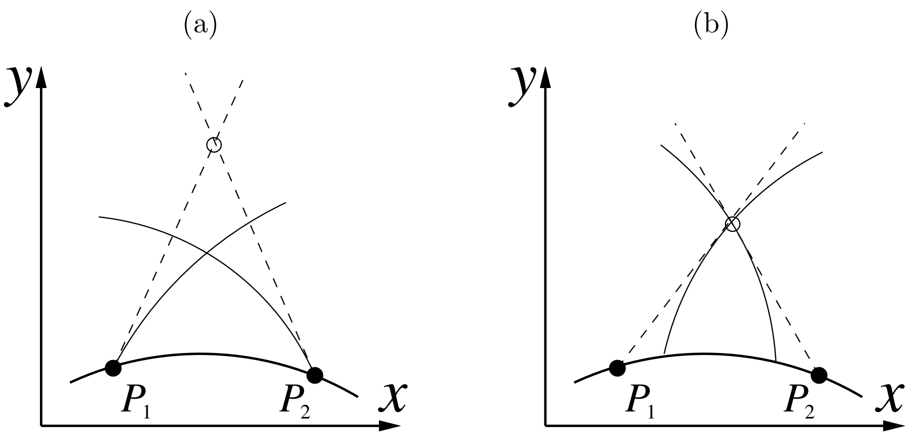
Gegeben sei eine semilineare hyperbolische partielle Differentialgleichung

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y).$$

Somit existieren zwei Scharen $\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta$ aus charakteristischen Kurven. Auf einer nicht-charakteristischen Kurve liegen Anfangswerte für u, u_x, u_y vor. Zu zwei Punkten P_1, P_2 auf der Anfangskurve soll der Schnittpunkt der Charakteristik aus $\mathcal{K}_\alpha$ durch P_1 und der Charakteristik aus $\mathcal{K}_\beta$ durch P_2 approximiert werden.

a) Geben Sie die Gleichungen der zwei Tangenten zu den beiden charakteristischen Kurven in P_1 und P_2 an. Berechnen Sie eine Formel für den Schnittpunkt der Tangenten.

b) Als Approximation wird nun der Schnittpunkt zweier charakteristischer Kurven definiert, zu dem die beiden Tangenten in diesem Schnittpunkt dann durch die Punkte P_1 bzw. P_2 verlaufen. Formulieren Sie ein nichtlineares Gleichungssystem für die Koordinaten dieses Schnittpunkts.



Hausaufgabe 27 : *Fixpunktiteration.*

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguläre Matrizen und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Dadurch ist

$$\Phi(x) = (I - B^{-1}A)x + B^{-1}b$$

die Iterationsfunktion eines stationären Verfahrens. Sei $\|\cdot\|_\mathrm{M}$ eine Matrixnorm, die konsistent zu einer Vektornorm $\|\cdot\|_\mathrm{V}$ ist.

a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\mathrm{V} \leq \|I - B^{-1}A\|_\mathrm{M}\|x - y\|_\mathrm{V} \qquad (\star)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

b) Beweisen Sie mit der Ungleichung $(\star)$: Ist $\|I - B^{-1}A\|_\mathrm{M} < 1$, dann folgt für die Folge der Näherungen $(x^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zur Iteration $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ und $\hat{x} = A^{-1}b$ die Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - \hat{x}\|_\mathrm{V} = 0.$$

Hausaufgabe 28 : *Page-Rank.*

Gegeben sei eine Menge aus Internetseiten $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Zu diesen Seiten sind reellwertige Gewichte $R_1, \ldots, R_n > 0$ gesucht. Es sei

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } P_j \text{ einen Link auf } P_i \text{ hat,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $L_j > 0$ die Anzahl aller Links von der Seite P_j auf andere Seiten in $\mathcal{P}$. Es gilt $S_{ii} = 0$ für alle i. Eine Modellierung durch einen Dämpfungsparameter d mit $0 < d < 1$ (z.B. $d = 0.85$) führt auf das lineare Gleichungssystem

$$R_i = d\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{S_{ij}}{L_j} R_j\Big) + (1 - d)\,\frac{1}{n} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Für Details zu dieser Modellierung siehe z.B.: M. Wolff, P. Hauck, W. Küchlin: Mathematik für Informatik und Bioinformatik. Springer, 2004. (Kapitel 13.3)

a) Beweisen Sie, dass die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssystems für die Unbekannten $R_1, \ldots, R_n$ das starke Spaltensummenkriterium erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass für die Spaltensummennorm der Iterationsmatrix aus dem Jacobi-Verfahren gilt $\|I - D^{-1}A\|_1 = d$. Was folgt für die Konvergenz des Verfahrens?

Abgabe der Hausaufgaben: 26.1.2024