Prof. Dr. Roland Pulch

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 12

Aufgabe 27 : *Klassische Iterationsverfahren.*

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben ist der Startwert $x^0 = (-4, -3)^\top$.

a) Berechnen Sie ausgehend vom Startwert jeweils die ersten beiden Schritte des Jacobi-Verfahrens und des Gauß-Seidel-Verfahrens.

Skizzieren Sie die Näherungen x^0, x^1, x^2 in einem Koordinatensystem. Konstruieren Sie außerdem die beiden Geraden, die die Gleichungen des linearen Systems darstellen. Interpretieren Sie die Skizze.

b) Zeichnen Sie (ohne zu rechnen) die erste Iterierte des SOR-Verfahrens für jeweils $\omega = 0.8$ und $\omega = 1.2$. Was bewirkt der Relaxationsparameter?

Aufgabe 28 : *Verfahren der Konjugierten Gradienten.*

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Verfahren der konjugierten Gradienten zur iterativen Lösung des Gleichungssystems setzt zu Beginn $p_0 = r_0 = b - Ax^0$ und dann folgt in der Iteration für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\alpha_k = \frac{{r_k}^\top r_k}{{p_k}^\top A p_k}, \; x^{k+1} = x^k + \alpha_k p_k, \; r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k, \; \beta_k = \frac{{r_{k+1}}^\top r_{k+1}}{{r_k}^\top r_k}, \; p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k.$$

a) Führen Sie die ersten beiden Schritte des konjugierten Gradienten-Verfahrens zum Startwert $x^0 = (1, 1)^\top$ aus. Wie genau ist die Approximation x^2 ?

b) Zeigen Sie, dass die Richtungen p_0 und p_1 A-konjugiert sind, d.h. $p_0^\top A p_1 = 0$.

c) Wie viele Matrix-Vektor-Multiplikationen, Skalarprodukte, Skalar-Vektor-Multiplikationen und Vektor-Vektor-Additionen/Subtraktionen müssen während der ersten ℓ Iterationsschritte durchgeführt werden?

d) Skizzieren Sie die Iterationsschritte aus Teil (a) in einem Koordinatensystem zusammen mit den Höhenlinien der Funktion $f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x - x^\top b$, welche durch die Punkte x^0, x^1, x^2 verlaufen.

Hausaufgabe 29 : *Einzel- und Gesamtschrittverfahren.*

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

inklusive Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt $\det(A) = \alpha + 1$. Daher sei $\alpha \neq -1$.

a) Bestimmen Sie die Parametermenge für die das Gauß-Seidel-Verfahren konvergent ist.

b) Für welche Parametermenge ist das Jacobi-Verfahren konvergent?

Hinweis: $I - B^{-1}A = B^{-1}(B - A)$

Hausaufgabe 30 : *Symmetrisches Iterationsverfahren.*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und regulär, sowie $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ unsymmetrisch gegeben. Betrachten Sie für $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Iteration

$$\begin{aligned} x^{k+\frac{1}{2}} &= x^k - N(Ax^k - b), \\ x^{k+1} &= x^{k+\frac{1}{2}} - N^\top(Ax^{k+\frac{1}{2}} - b). \end{aligned} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass (1) einer Iteration für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$x^{k+1} = x^k - \hat{N}(Ax^k - b) \tag{2}$$

mit einer symmetrischen Matrix $\hat{N}$ entspricht, indem Sie $\hat{N}$ bestimmen.

b) Sei A zusätzlich positiv definit. Es gilt $A = D + L + L^\top$ mit Diagonalmatrix D und strikter unterer Dreiecksmatrix L. Geben Sie für die Wahl $N = (D+L)^{-1}$ die Matrix $\hat{N}$ für (2) an und vereinfachen Sie deren Darstellung. Weisen Sie nach, dass $\hat{N}$ positiv definit ist.

Hausaufgabe 31 : *Konvergenzgeschwindingkeit im CG-Verfahren bei Modellproblem.*

Die Diskretisierung der zweidimensionalen Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ auf dem Einheitsquadrat mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen führt auf ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrischer, positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{R}^{M^2\times M^2}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\lambda_{k,\ell} = 4\left[\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}kh\right) + \sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}\ell h\right)\right] \quad \text{für } \; k, \ell = 1, \ldots, M$$

mit $h = \frac{1}{M+1}$ (siehe Hausaufgabe 4).

a) Zeigen Sie, dass für die Konditionszahl von A bezüglich der Spektralnorm für hohes M ungefähr $\kappa_2(A) \approx \frac{4}{\pi^2 h^2}$ gilt. Verwenden Sie dazu übliche Approximationen der Sinusfunktion.

b) Bestimmen Sie für eine beliebig gegebene Konditionszahl $\kappa_2(A)$ ein kleinstmögliches k derart, dass mit k Iterationsschritten im CG-Verfahren für den Fehler $\|e_k\|_A \leq \varepsilon\|e_0\|_A$ in dieser Vektornorm mit einem vorgegebenem $0 < \varepsilon < 1$ garantiert werden kann.

c) Berechnen Sie die Schrittzahlen k aus Teil (b) mit den Konditionszahlen aus Teil (a) für die Genauigkeitsforderung $\varepsilon = 10^{-3}$ in den Fällen $M \in \{10, 100, 1000\}$.

Abgabe der Hausaufgaben: 2.2.2024