Prof. Dr. Roland Pulch

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 13

Aufgabe 29 : *Vorkonditionierung mit Neumann-Reihe.*

Sei $A = I - T$ mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer symmetrischen Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, für welche $\|T\|_2 < 1$ mit der Spektralnorm gilt. Die inverse Matrix besitzt daher eine Darstellung als Neumann-Reihe

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i = I + T + T^2 + T^3 + \cdots .$$

Eine Approximation der inversen Matrix ist

$$\widehat{A} = \sum_{i=0}^{m} T^i$$

mit einer (kleinen) Zahl $m \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix A positiv definit ist.

b) Zeigen Sie, dass $\widehat{A}$ symmetrisch und positiv definit ist.

c) Wählen Sie zur Vorkonditionierung im CG-Verfahren eine Matrix B unter Verwendung von $\widehat{A}$. Wie werden lineare Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix B dann mit möglichst wenig Rechenaufwand gelöst? Welcher Aufwand entsteht?

Aufgabe 30 : *GMRES-Verfahren.*

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer beliebigen regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Das GMRES-Verfahren liefert zu vorgegebenem Startwert x^0 eine Folge von Näherungen x^k, die nach spätestens n Schritten die exakte Lösung ergibt.

a) Beweisen Sie, dass die Norm eines Residuums des äquivalenten Gleichungssystems $QAx = Qb$ mit orthogonaler Matrix Q identisch der Norm des ursprünglichen Residuums zu $Ax = b$ ist.

b) Begründen Sie, dass das GMRES-Verfahren angewendet auf das äquivalente Gleichungssystem $QAx = Qb$ auch bei orthogonaler Matrix Q im allgemeinen nicht die gleiche Folge x^k zum Gleichungssystem $Ax = b$ liefert.

c) Betrachten Sie das äquivalente Gleichungssystem $A'x' = b'$ mit $A' = QAQ^\top$, $b' = Qb$, $x' = Qx$ und einer orthogonalen Matrix Q. Sei $r_0 = b - Ax^0$ und $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Orthonormalbasis des Krylov-Raums $\mathcal{K}_k(r_0, A)$. Beweisen Sie, dass dann die Vektoren $v_j' = Qv_j$ eine Orthonormalbasis des Raums $\mathcal{K}_k(r_0', A')$ mit $r_0' = Qb - QAx^0$ bilden.

d) Zeigen Sie, dass das GMRES-Verfahren für das lineare Gleichungssystem $A'x' = b'$ aus Teil (c) die Folge von Näherungen $x^{k'} = Qx^k$ liefert, falls $x^{0'} = Qx^0$ gilt.