Themen für Bachelor- und Masterarbeiten

Lehrstuhl „Algebra und funktionalanalytische Anwendungen“
Januar 2020

Die unten genannten Themen stellen nur eine Auswahl dar. Interessenten können, z. B. durch Arbeiten, Seminare oder Vorlesungen unserer Arbeitsgruppe, zu eigenen Themenvorschlägen angeregt werden.

Die folgenden Gebiete dienen der fachlichen Einordnung der Themen. Die entsprechenden Vorlesungen sind nicht zwingend Voraussetzung.

A: Algebra
F: Funktionalanalysis, Theorie der Operatoralgebren
W: Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Klassische und nichtkommutative Prozesse mit unabhängigen, stationären Zuwächsen
W, F
Es geht um die Realisierung klassischer gruppenwertiger Lévy-Prozesse als Operatorprozesse. Aufgabe der Arbeit ist, den Spezialfall von Lévy-Prozessen auf der unitären Gruppe zu untersuchen und aufzuzeigen, wie deren Verallgemeinerung zu nichtkommutativen unitären Prozesse realisiert werden kann; siehe [SchV14].

2. Vollständig positive Abbildungen und deren Dilatationen
F
Quantendynamische Halbgruppen beschreiben die Zeitentwicklung physikalischer Quantensysteme. Die Generatoren solcher 1-Parameter-Halbgruppen werden durch die Formel von Lindblad charakterisiert. In der Arbeit sollen zunächst die Form des Lindblad-Generators und dann die „Erweiterung“ (Dilatation) der Halbgruppen, z. B. mit Hilfe quantenstochastischer Differentialgleichungen, dargestellt werden; siehe [Par92, Mey95].

3. Die Gelfand-Naimark-Segal-Konstruktion
F
Die GNS-Konstruktion ordnet jedem „Zustand“ auf einer involutiven Algebra eine Darstellung dieser Algebra auf einem Vektorraum mit Skalarprodukt zusammen mit einem zyklischen Vektor zu. Aufgabe der Arbeit ist, eine Übersicht über die Bedeutung dieser

Konstruktion in der Mathematik, evtl. unter besonderer Berücksichtigung der Rolle in der Quantenstochastik, zu geben; siehe z. B. [Ger14].

4. Symmetrische Fockräume
A, F, W
Die Bedeutung des Fockraums und seine unterschiedlichen Erscheinungsformen (z. B. als direkte Summe symmetrischer Tensorprodukte, als „Punktprozess-Raum“ oder als L^2-Raum der Brownschen Bewegung) sollen erläutert werden; siehe z. B. [Par92, Mey95] oder [Gui72] sowie [Lachs14].

5. Schoenberg-Korrespondenz für bi-freie Unabhängigkeit
A, F, W
Die bi-freie Unabhängigkeit wird von D. Voiculescu in der Arbeit [Voi14] definiert und ist eine Verallgemeinerung von „freeness“, einem nicht-kommutativen Unabhängigkeitsbegriff, der bereits in den 1980er Jahren, ebenfalls von Voiculescu, eingeführt wurde. Zu diesem Unabhängigkeistbegriff kann man Quanten-Lévy-Prozesse über „dualen Gruppen“ betrachten. Die Prozesse sind durch ihren Generator, ein bedingt positives lineares Funktional auf der zugrunde liegenden dualen Gruppe, bis auf quantenstochastische Äquivalenz bestimmt. In der Arbeit soll die allgemeine Korrespondenz zwischen solchen Generatoren und Faltungshalbgruppen bewiesen werden. Der Spezialfall additiver Quanten-Lévy-Prozesse wurde zum Teil in der Masterarbeit [Schr] behandelt. Die Methoden orientieren sich an [Schr] und an der Arbeit [SchV14]. Die „Schoenberg-Korrespondenz“ liefert z. B. Realisierungen von bi-freien Lévy-Prozessen als Operatorprozesse auf einem vollem Fock-Raum.

6. Momente und Kumulanten für nichtkommutative Unabhängigkeiten
A, F, W
In [ManSch] wird eine Theorie entwickelt, die universellen Produkten, d. h. Tensorprodukten in der Kategorie $\mathrm{AlgP}_{d,m}$ der algebraischen Wahrscheinlichkeitsräume, eine Familie von „Kumulantenfunktionen“ und „Kumulanten-Lie-Algebren“ zuordnet. Dabei sind die Parameter d und m natürliche Zahlen. Kumulanten und die Beziehung zwischen Momenten von Verteilungen und deren Kumulanten spielen auch in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie eine bedeutende Rolle. Die Kumulanten der Arbeit [ManSch] schließen praktisch alle bekannten nicht-kommutativen Unabhängigkeitsbegriffe ein, z. B. beinhaltet $d = 1$, $m = 2$ den Fall der bi-freien Unabhängigkeit (vgl. Thema 6). Die Hauptaufgabe liegt bei diesem Bachelor/Master-Thema darin, den Fall $m > 1$, der in [ManSch] nur relativ knapp behandelt wird, genauer und ausführlicher darzustellen.

7. Bi-monotone Grenzwertsätze
A, F, W
Auf Voiculescu's Entdeckung der bi-freien Unabhängigkeit, ein Unabhängigkeitsbegriff für Paare von nicht-kommutativen Zufallsgrößen, folgte die Suche nach weiteren Beispielen von „Bi-Unabhängigkeiten". Ein solches ist die bi-monotone Unabhängigkeit, für die auch ein zentraler Grenzwertsatz gezeigt werden kann [Ger17]. Die Grenzverteilung wird dabei mit Hilfe bi-monotoner Paarpartitionen beschrieben. Ziel der Bachelor/Master-Arbeit wäre es, den zentralen Grenzwertsatz der bi-monotonen Unabhängigkeit ausführlich darzustellen und weitere stochastische Grenzwertsätze, insbesondere Poissons Gesetz der kleinen Zahlen, auf die bi-monotone Unabhängigkeit zu übertragen.

8. Beispiele für „braided" Brownsche Bewegungen
A, W
Es werden Brownsche Bewegungen auf braided („gezopften") involutiven Bialgebren untersucht. Die betrachteten Bialgebren sind durch eine sogenannte R-Matrix gegeben. Durch Anwendung des Symmetrisierungsprinzips kann eine braided Bialgebra in eine gewöhnliche Bialgebra verwandelt und die Brownsche Bewegung mit Hilfe einer allgemeinen Theorie als Lösung einer quantenstochastischen Differentialgleichung auf einem Bose-Fockraum realisiert werden; siehe [Malc17]. In der Arbeit soll dieses Verfahren für konkrete R-Matrizen (auch mit Hilfe von Computeralgebra-Programmen) durchgerechnet werden, was zu Ansätzen für eine Klassifikation der zugehörigen braided Brownschen Bewegungen führen könnte.

Literatur
[**App06**] D. Applebaum: Lévy Processes in Euclidean Spaces and Groups. In: Quantum Independent Increment Processes I (eds. M. Schürmann, U. Franz). Lect. Notes Math. vol. 1865, Springer 2006
[**CFK12**] F. Cipriani, U. Franz, A. Kula: Symmetries of Lévy processes, their Marcov semigroups and potential theory on compact groups. Preprint arXiv:1210.6768
[**Ger14**] M. Gerhold: On Several Problems in the Theory of Comonoidal Systems and Subproduct Systems. Dissertation Greifswald 2014
[**Ger17**] M. Gerhold: Bimonotone Brownian motion. Preprint arXiv:1708.03510
[**Gui72**] A. Guichardet: Symmetric Spaces and Related Topics. Lect. Notes Math., vol. 261, Springer 1972
[**ManSch**] S. Manzel, M. Schürmann: Non-commutative stochastic indepenence and cumulants. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 20 (2017) [38 pages]. Preprint

arXiv:1601.06779
[**Mey95**] P.-A. Meyer: Quantum Probability for Probabilists, Lect. Notes Math., vol. 1538, Springer 1995
[**Par92**] K.R. Parthasarathy: An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Birkhäuser 1992
[**SchV14**] M. Schürmann, S. Voß: Schoenberg correspondence on dual groups. Commun. Math. Phys. 328 (2014), 849-865
[**Voi14**] D. Voiculescu: Free probability for pairs of faces I. Commun. Math. Phys. 332 (2014), 955-980
[**Lachs14**] S. Lachs: A New Family of Universal Products and Aspects of a Non-Positive Quantum Probability Theory. Dissertation Greifswald 2015
[**Schr**] T. Schramm: Bi-freie additive Quanten-Lévy-Prozesse. Masterarbeit, Greifswald 2017
[**Malc17**] M. Malczak: Realisierung von „braided“ Quanten-Lévy-Prozessen. Masterarbeit, Greifswald 2017