In der Vorlesung sollen vor allem die elementaren Fakten über C*-Algebren und von-Neumann-Algebren behandelt werden. Beide Klassen von Operatoralgebren sind grundlegend für die mathematische Beschreibung von Quantensystemen in der Physik.

Nachdem wir in einem allgemeinen ersten Teil Banach-Algebren und ihr Spektrum eingeführt haben, studieren wir die fundamentale Gelfand-Transformation, durch die eine *kommutative* Banach-Algebra als Algebra von Funktionen dargestellt wird. Dieses Resultat führt uns dann zu einer vollständigen Beschreibung der *kommutativen* C*-Algebren als Algebren stetiger Funktionen auf einem lokalkompakten topologischen Raum.

Als nächstes betrachten wir die in vielen Bereichen der Mathematik nützliche GNS-Konstruktion (benannt nach den Mathematikern Gelfand, Naimark und Segal) für *-Algebren mit Zuständen und verwenden die GNS-Konstruktion, um zu zeigen, dass jede „abstrakte“ C*-Algebra sich als normabgeschlossene Algebra beschränkter Operatoren auf einem Hilbert-Raum realisieren lässt. Dies ist ein zentrales Ergebnis der Vorlesung.

In einem dritten Teil untersuchen wir spezielle C*-Algebren, so genannte von-Neumann-Algebren (nach John von Neumann, einem der Begründer der mathematischen Quantentheorie und damit der Operatortheorie). Als Algebra von beschränkten Operatoren ist eine von-Neumann-Algebra abgeschlossen in der schwachen Operatortopologie. Wir zeigen u. a. den berühmten von-Neumannschen Doppelkommutatensatz (= Bikommutantensatz). Außerdem geben wir eine vollständige Beschreibung der *kommutativen* von-Neumann-Algebren.

Abstrakte C*-Algebren, Spektrum
Gelfand-Theorie der kommutativen Banach-Algebren

positive Elemente, approximierende Einheiten

Ideale, Polarzerlegung

Gelfand-Naimark-Segal-Konstruktion, Realisierung von C*-Algebren als Operatoralgebren

von Neumann-Algebren, schwache Operatortopologie, Doppelkommutantensatz

L^∞ -Funktionalkalkül