<u>Aufgabe 3</u> ρ D. von H auf V.

ρ_x ist D. von H, da

$$y \mapsto x^{-1} y x$$

$$H \to x^{-1} H x = H$$

ein Homom. (sogar Isomorph.) von H nach H.

Also auch für $x \in G \setminus H$.

<u>(a)</u>: Seien $x, x' \in G \setminus H$. Dann $x' = x y$ für ein $y \in H$.

$$\rho(y) \in GL(V).$$

$\rho_x, \rho_{x'}$ D.en von H auf V.

Für $z \in H$:

$$\begin{aligned}
\rho_x(z)\,\rho(y) &= \rho(x^{-1} z x)\,\rho(y) \\
&= \rho(x^{-1} z x y) \\
&= \rho(y\, y^{-1} x^{-1} z x y) \\
&= \rho(y)\,\rho((xy)^{-1} z (xy)) \\
&= \rho(y)\,\rho((x')^{-1} z x') \\
&= \rho(y)\,\rho_{x'}(z)
\end{aligned}$$

$\} \quad \rho(y) \in \mathrm{Hom}_H(\rho_x, \rho_{x'})$

$\Rightarrow \quad \rho_x \cong \rho_{x'}$.

<u>(b)</u>: Sei nun $\rho = \pi \restriction H$ für eine D. π von G (auf V).

<u>Bh.</u> $\rho \cong \rho_x$

<u>Bew.</u> $y \in H$: $\rho_x(y) = \rho(x^{-1} y x)$

$= \pi(x)^{-1} \rho(y) \pi(x)$

$\Rightarrow \pi(x) \rho_x(y) = \rho(y) \pi(x)$

$\Rightarrow \pi(x) \in \mathrm{Hom}_H(\rho_x, \rho)$.

<u>(c)</u>: π irred. D. von G

$\} \quad \underset{\overset{\shortparallel}{2|H|}}{|G|} = \sum_{x \in H} |\chi(x)|^2 + \sum_{x \notin H} |\chi(x)|^2$

$\sum_{x \in H} |\chi(x)|^2 = |H| \underbrace{\frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} |\chi(x)|^2}_{=: m \in \mathbb{N}}$

$m=1$ oder $m=2$ sind die beiden Möglichkeiten

Haben schon gesehen:

$\pi \restriction H$ irred. $\Leftrightarrow$ $m=1$

$\Leftrightarrow$ $\chi(x) \neq 0$ für ein $x \in G \setminus H$

Blatt 11 Aufg 2

$\underline{m=1}$ ✓

$\underline{m=2}$ $\Leftrightarrow$ $\chi(x)=0$ $\forall x \in G \setminus H$

Für den Charakter $\tilde{\chi}$ von $\varrho = \pi \restriction H$

gilt dann

$$\langle \tilde{\chi}, \tilde{\chi} \rangle = \frac{1}{|H|} \sum |\tilde{\chi}(x)|^2 = 2$$

Da die D. ϱ in H zerfällt

$$V = V_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus V^{\oplus n_\ell}$$

$$\tilde{\chi} = n_1 \chi_1 + \cdots + n_\ell \chi_\ell$$

$$\langle \tilde{\chi}, \tilde{\chi} \rangle = n_1^2 + \cdots + n_\ell^2 = 2$$

folgt $\ell = 2$, $n_1 = n_\ell = 1$,

$$\varrho \cong \sigma_1 \oplus \sigma_2$$

mit $\underline{\text{irred.}}$ D.en σ_1, σ_2 von H. ; $\underline{\sigma_1 \not\cong \sigma_2}$.

Fehlt noch:

Beh. $\sigma_1 \cong (\sigma_2)_x$

Bew. Wir haben nach (b): $\varrho \cong \varrho_x$, d.h.

$\exists\ T \in \mathrm{Hom}_H(\varrho, \varrho_x)$ bijektiv mit

$(*)\quad \varrho_x(h) = T^{-1}\ \varrho(h)\, T \quad \forall h \in H$

(dabei heißt T das im $*$ ob).

$\Rightarrow \quad T\ \underbrace{\varrho(x h x^{-1})}_{= \pi(x)\ \varrho(h)\, \pi(x)^{-1}} = \varrho(h)\, T$

$\Rightarrow \quad T\pi(x)\ \varrho(h)\ \pi(x)^{-1} T^{-1} = \varrho(h) \quad \forall h$

Also $T\pi(x) \in \mathrm{Hom}_H(\varrho, \varrho)$

Nun ist $\varrho \cong \sigma_1 \oplus \sigma_2$

(mit D.räumen W_1, W_2 für σ_1, σ_2).

Wir haben

$(**)\quad P_2\ T\pi(x)\ Q_1 \in \mathrm{Hom}_H(\sigma_1, \sigma_2)$

(P_2: Projektion auf W_2, Q_1: Einbettung von W_1)
$P_2: W_1 \oplus W_2 \to W_2$ $\quad Q_1: W_1 \hookrightarrow W_1 \oplus W_2$

Da $\sigma_1 \not\cong \sigma_2$ nach dem Lemma im Lokal (c):

$$I_2 \circ T\pi(x) \circ Q_1 = 0$$

Angenommen σ_1 u. σ_2 wären beide selbst-konjugiert, d. h. $\sigma_1 \cong (\sigma_1)_x$ und $\sigma_2 \cong (\sigma_2)_x$ für $x \in G \setminus H$. Dann gibt es Bijektionen $T_1 \in \mathrm{Hom}_H(\sigma_1, (\sigma_1)_x)$, $T_2 \in \mathrm{Hom}_H(\sigma_2, (\sigma_2)_x)$.

Dann gilt $(*)$ mit $T = T_1 \oplus T_2$:

$$\rho_x \cong (\sigma_1)_x \oplus (\sigma_2)_x \overset{T_1 \oplus T_2}{\cong} \sigma_1 \oplus \sigma_2 \cong \rho$$

und also auch $(**)$ mit $T = T_1 \oplus T_2$.

Außerdem: $I_2 (T_1 \oplus T_2) = T_1 I_2$

und mit $(***)$

$$\underbrace{I_2 \, (T_1 \oplus T_2)}_{= T_1 \, I_2} \, \pi(x) \, Q_1 = 0$$

folgt, da T_1 eine Bijektion ist:

$$I_2 \, \pi(x) \, Q_1 = 0$$

was bedeutet, daß $\pi(x)$ W_1 invariant läßt.

Dieses Argument geht für jedes $x \in G$,
so dass $\rho(s_1) : \pi$ lässt W_1 invariant und
ein Widerspruch zur Irreduzibilität von π.

Es ist selbstkonjugiert:

$$\rho_x \cong (\sigma_1)_x \oplus (\sigma_2)_x$$

$$\cong \sigma_1 \oplus \sigma_2$$

Da σ_1, σ_2 nicht beide s.k. sein können
(s.o.) muss $(\sigma_1)_x \cong \sigma_2$ (und $(\sigma_2)_x \cong \sigma_1$)
gelten!

Aufgabe 4

Betrachte die reg. D.

$$\pi_G : G \to GL(\mathbb{C}G)$$

von G und die reg. D.

$$\pi_H : H \to GL(\mathbb{C}H)$$

sowie die Restriktion $\pi_G \restriction H$

$$\pi_G | H : H \to GL(\mathbb{C}G)$$

der reg. D. von G auf H.

Dann ist π_H eine Teil.D. von $\pi_G | H$, nämlich die Einschränkung auf den inv. UR

$$\mathbb{C}H \subset \mathbb{C}G$$

$\mathbb{C}H$ von $\mathbb{C}G$. Betrachte die Zerlegung

$$\mathbb{C}G = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$$

von $\mathbb{C}G$ in irred. UR $V_1, \dots, V_l$. Die Einschränkungen

$$\pi_G | H \text{ auf } V_i ,$$

$i = 1, \dots, l$, sind Einschränkungen der irred.

Teil D. Π_G auf ϑ_i. Wir können die Aufg. 3 (c) auf

$$\pi = \Pi_G \restriction \vartheta_i$$

und

$$\sigma = (\Pi_G \restriction \vartheta_i) \mid H$$

anwenden, um zu erhalten

entweder
- σ irred.

oder
- $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ mit irred. nicht äquiv. D. en σ_1, σ_2 von H

Insgesamt bekommen wir eine Zerlegung der Darstellung $\Pi_G \mid H$ auf $\mathbb{C}G$ in irred. Darstellungen von H.

Die reg. D. von H ist ein Teil-D. dieser D.

Wir wissen dann, dass für diese T.D gilt

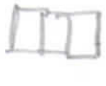
$$\Pi_H = (\Pi_G \mid H) \restriction \mathbb{C}H$$

von $\Pi_G \mid H$ gelten muss

$$\pi_H \cong K_1 \oplus \dots \oplus K_r \quad (*)$$

wobei $K_1, \dots, K_r$ irred. Bestandteile der Zerlegung von $\pi_G | H$.
Jede irred. D.g. von H tritt aber in der Zerlegung $(*)$ auf, so dass die Zerlegung von $\pi_G | H$ (gemäß Aufg. 3) alle (ÄK) irred. D.en von H liefert.

<u>Aufgabe 1</u> Wir müssen die irred. D.en von S_3 betrachten, die zu Rahmen von S_3 mit höchstens $n=2$ Zeilen gehören:

 triviale D. P_1

 Standard-D. P_2

} zugehörig. idempot. Element

Die Zerlegung von $V^{\otimes 3}$ $(V = \mathbb{C}^2)$ ist dann durch

$$V^{\otimes 3} = (P_1 V^{\otimes 3})^{\oplus n_1} \oplus (P_2 V^{\otimes 3})^{\oplus n_2}$$

gegeben, wobei

$$n_1 = \dim \ (\mathbb{C} S_3)_{p_1} = 1$$

$$n_2 = \dim \ (\mathbb{C} S_3)_{p_2} = 2$$

Setze $\quad m_1 := \dim (p_1 V^{\otimes 3})$

$\quad m_2 := \dim (p_2 V^{\otimes 3})$

$$\Rightarrow 8 = n_1 m_1 + n_2 m_2 = m_1 + 2 m_2$$

Es ist $\quad p_1 V^{\otimes 3} = V^{\otimes_s 3}$

und allgemein gilt (Beweis?):

$$\dim V^{\otimes_s k} = \binom{n+k-1}{k}$$

($n = \dim V$). Also hier ($n=2$, $k=3$)

$$\dim V^{\otimes_s 3} = 4$$

Also mit $m_1 = 4$:

$$8 = 4 + 2 m_2 \Rightarrow m_2 = 2$$

Genauere Untersuchung von $p_2 V^{\otimes 3}$:

Rahmen $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$

Tableau T dazu $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$

$V(T) = \{(12), id\}$; $H(T) = \{(13), id\}$

$$\hat{P}_2 = a(T)\, b(T) = (-(13) + id)((12) + id)$$

$$= -(132) - (12) + (13) + id$$

$$0 = \hat{P}_2(T)\, e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 = \hat{P}_2(T)\, e_2 \otimes e_2 \otimes e_2$$

$$= \hat{P}_2(T)(e_1 \otimes e_1 \otimes e_2) = \hat{P}_2(e_2 \otimes e_2 \otimes e_1)$$

$$= \hat{P}_2(T)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_1) = \hat{P}_2(T)(e_1 \otimes e_2 \otimes 1)$$

$$\hat{P}_2(T)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2) = \underbrace{e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_2}_{=a}$$

$\neq 0$

$$\hat{P}_2(T)(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1) = \underbrace{e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1}_{=b}$$

$\neq 0$

<u>Also</u> $P_2 V^{\otimes 3} = \underline{\text{Lin}}\{a, b\}$ ...

Aufgabe 2

(a) $\hat{P}_1 = \sum_{\sigma \in S_k} \sigma$

$\hat{P}_2 = \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma$

$\hat{P}_1 V^{\otimes k} = V^{\otimes_s k}$

$\hat{P}_2 V^{\otimes k} = V^{\wedge k}$

$\dim V^{\otimes_s k} = \binom{n+k-1}{k}$

(Bew.?)

$\dim V^{\wedge k} = \binom{n}{k}$

(b) Beide kommen einmal vor, da die Dimensionen der trivialen und der alternierenden D. von S_k jeweils 1.

(c) $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n}{k}$

$\Leftrightarrow (n+k-1) \cdot (n+1) n = n(n-1) \ldots (n-k+1)$

$\Leftarrow$) $\underline{k = 1}$

Dann: $V = V^{\otimes_s k} = V^{\wedge k}$.

(d) Die Frage ist also, wann

$$\pi_1 V^{\otimes k} + \pi_2 V^{\otimes k} = V^{\otimes k},$$

d. h. für welche n, k.

Es gilt

$$V^{\otimes k} = (\pi_{r_1} V^{\otimes k})^{\oplus n_{r_1}} \oplus \dots \oplus (\pi_{r_t} V^{\otimes k})^{\oplus n_{r_t}}$$

[wobei $\pi_{r_1}, \dots, \pi_{r_t}$ die jenigen Rahmen, die $\leq n$ Zeilen haben

und $n_i = \dim$ of π_i]

$$= (\pi_1 V^{\otimes k})^{\oplus n_1} \oplus \dots \oplus (\pi_\ell V^{\otimes k})^{\oplus n_\ell}$$

(wobei $\pi_1, \dots, \pi_\ell$ alle Rahmen in S_k, d.h. manche $\pi_i V^{\otimes k} = \{0\}$)

p_1 : triv. , p_2 : alt.

$n_1 = n_2 = 1$

$$V^{\otimes k} = (p_1 V^{\otimes k}) \oplus (p_2 V^{\otimes k}) \quad (*)$$

$\Leftrightarrow$ Es gibt keine Rahmen in $\mathcal{S}_k$ mit $\leq n$ außer evtl. □…□ und □ ⋮ □

$\underline{k=1}$ □ ist einz. Rahmen

$V^{\otimes k} = V = V^{\otimes, k}$

$\underline{(*) \text{ gilt}}$

$\underline{n=1}$ $\underline{k \geq 2}$ $\quad \mathbb{C}^{\otimes k} = \mathbb{C}^{\otimes, k} = p_1 V$

$\underline{(*) \text{ gilt}}$

$\underline{n \geq 2, k=2}$ □□ u. $\begin{smallmatrix}□\\□\end{smallmatrix}$ einzige Rahmen,

(beide haben ≤ 2 Zeilen)

$\underline{(*) \text{ gilt}}$

$n \geq 2$, $k \geq 3$

$\overbrace{\begin{array}{l}\square\square\cdots\square\\ \square\end{array}}^{k-1}$ ist Rahmen

mit ≤ 2 Zeilen und wegen $k \geq 3$

ist dieser Rahmen $\neq$ $\begin{array}{c}\square\\ \vdots\\ \square\end{array}$

$P_3 V^{\otimes k}$ $\quad (P_3 = P_3(T)$ mit $R(T) = \begin{array}{l}\square\square\cdots\square\\ \square\end{array})$

fehlt = die bei $(P_1 V^{\otimes k}) \oplus (P_2 V^{\otimes k})$

und (*) kann nicht gelten.