

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald / Institut für Physik
Physikalisches Grundpraktikum

Praktikum für Physiker		
Versuch E5 : Frequenzverhalten von RC-Gliedern		
Name:	Versuchsgruppe:	Datum:
Mitarbeiter der Versuchsgruppe:		lfd. Versuchs-Nr:

Aufgabe Untersuchen Sie das Frequenzverhalten eines Tief-, Hoch- und Bandpasses.

Physikalische Schwerpunkte des Versuches

- Ohmsche, kapazitive, induktive und komplexe Widerstände
- Eigenschaften der Widerstände im Wechselstromkreis
- Widerstands-Zeiger-Diagramm

Versuchsablauf

1. Messungen

- 1.1. Der Hochpass besteht aus dem ohmschen Widerstand $R = 10 \text{ k}\Omega$ und der Kapazität $C = 4,7 \text{ nF}$. Messen Sie das Frequenzverhalten im Intervall $200 \text{ Hz} \leq f \leq 50 \text{ kHz}$ mit dem Oszilloskop, wobei Sie die Frequenzen am Generator nach folgendem Schema einstellen: 2, 4, 7, 10, 20, 40, Erfassen Sie den Frequenzgang des Betrages der Übertragungsfunktion v und des Phasenwinkels φ tabellarisch.
- 1.2. Messen Sie nach dem gleichen Schema den Tiefpass, dessen Bauelemente die gleichen Werte besitzen, aus.
- 1.3. Messen Sie nach dem gleichen Schema den Bandpass aus.

2. Berechnungen und Auswertungen

- 2.1. Stellen Sie $\ln(v)$ in Abhängigkeit von $\ln(f)$ (doppelt-logarithmischer Maßstab) für alle drei Pässe dar. Zeichne Sie auf der Ordinate zusätzlich auch das relative Pegelmaß $v^* \text{ [dB]}$ ein.
- 2.2. Zeichnen Sie den Phasenwinkel φ als Funktion von $\ln(f)$ für die drei Pässe. Tragen Sie in die Darstellungen die Grenz- und Resonanzfrequenzen sowie die Frequenzbandbreite ein.
- 2.3. Vergleichen Sie die experimentell gefundenen Grenzfrequenzen des Hoch- und Tiefpasses und die Resonanzfrequenz des Bandpasses mit den berechneten Werten. Wie groß ist die Breite des Bandpasses?
- 2.4. Berechnen Sie für einen der Pässe nach der dazu angegebenen Formel die Frequenzgänge $v(f)$ und $\varphi(f)$. Vergleichen Sie diese Kurven mit den experimentellen Ergebnissen.

Grundlagen

Die Beschreibung der Verhältnisse im Wechselstromkreis ist durch Anwendung der Rechenmethoden mit komplexen Zahlen vorteilhaft. Im weiteren werden sinusförmige Zeitverläufe von Strom und Spannung vorausgesetzt. Ströme, Spannungen und Widerstände sind zwar reelle physikalische Größen, bei der theoretischen Beschreibung bedient man sich jedoch wegen der Rechenvorteile komplexer Größen, aus denen reelle Anteile abgetrennt werden können. Dabei hat die Exponentialdarstellung der komplexen Zahlen große Bedeutung:

$$\vec{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot \exp(j\varphi) \quad (1)$$

mit dem Betrag $Z = |\vec{Z}|$ und dem Argument bzw. Phasenwinkel φ .

Im Wechselstromkreis treten neben dem reellen Ohmschen Wirkwiderstand R zusätzlich ein induktiver Blindwiderstand und ein kapazitiver Blindwiderstand auf, die sich in komplexer Schreibweise als $j\omega L$ bzw. als $-j/\omega C$ schreiben lassen.

Die an einer idealen Induktivität (Spule) L zu beobachtende Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beträgt $+90^\circ$ (der Strom „hinkt“ nach), die an einer idealen Kapazität (Kondensator) C auftretende Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beträgt -90° (die Spannung „hinkt“ nach). Dies kommt bei der komplexen Behandlung durch Anbringen der imaginären Faktoren j bzw. $-j$ zum Ausdruck. Graphisch veranschaulicht man diese Verhältnisse in einem Zeigerdiagramm, auf dessen reeller Achse der Ohmsche Widerstand R , auf dessen positiver imaginärer Achse der induktive Widerstand ωL und auf dessen negativer imaginärer Achse der kapazitive Widerstand $1/\omega C$ aufgetragen werden.

Der Gesamtwiderstand im Wechselstromkreis heißt Impedanz \vec{Z} . Bei einer Reihenschaltung der drei Widerstände gilt:

$$\vec{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (2)$$

$$\text{mit } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (3a,b)$$

Besonders wichtige Beispiele für einfache komplexe Widerstände sind die aus Ohmschen Widerständen und Kondensatoren bestehenden Vierpole **Hochpass**, **Tiefpass** und **Bandpass**.

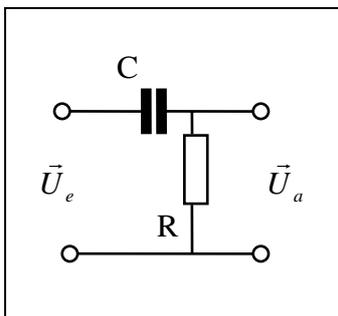


Abb. 1 Hochpass

Ein **Hochpass** überträgt hohe Frequenzen ohne Verluste. Zu tiefen Frequenzen hin beobachtet man zunehmende Dämpfung und eine Phasenverschiebung. Die komplexe Übertragungsfunktion lautet gemäß der Spannungsteilerregel:

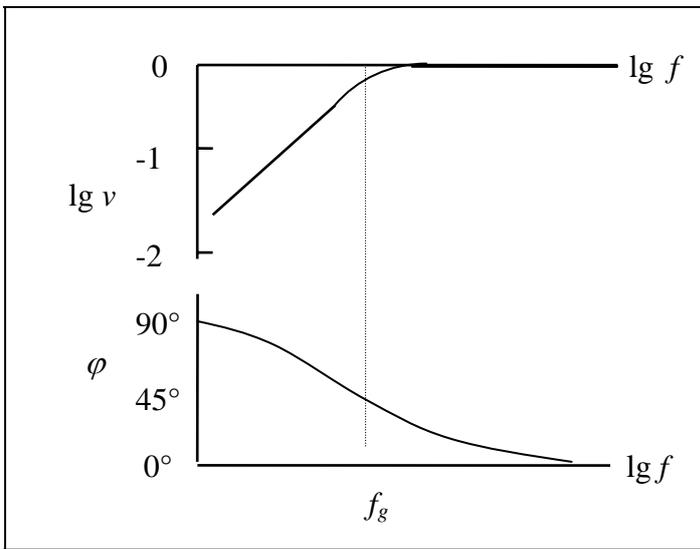
$$\frac{\vec{U}_a}{\vec{U}_e} = \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j\arctan\frac{1}{\omega RC}} \quad (4)$$

Daraus folgt für den Betrag v der Übertragungsfunktion und den Phasenwinkel φ zwischen \vec{U}_a und \vec{U}_e :

$$v = \frac{|\vec{U}_a|}{|\vec{U}_e|} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \varphi = \arctan\frac{1}{\omega RC} \quad (5a,b)$$

Die Frequenz f_g , bei der $\varphi = 45^\circ$ bzw. $v = 1/\sqrt{2} = 0,707$ beträgt, heißt **Grenzfrequenz**,

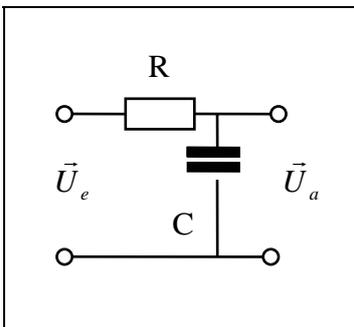
es gilt :
$$\omega_g = 2\pi f_g = \frac{1}{RC} \quad (6)$$



Für Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz f_g geht $v \rightarrow 1$. Für kleine Frequenzen $f \ll f_g$ gilt $v = 2\pi fRC$. Der Abfall von v bei kleinen Frequenzen wird in der Elektronik durch das relative Pegelmaß $v^* = 20 \lg v$ beschrieben. Die dimensionslose Größe v^* gibt man in Dezi-Bel an. Bei der Grenzfrequenz f_g beträgt z.B. der Abfall -3dB . Die Abnahme je Größenordnung beträgt -20dB . Der Hochpass findet häufig Anwendung bei Verstärkereingängen.

Abb. 2 Hochpass, Frequenzgänge von v und φ

Der **Tiefpass** überträgt niedere Frequenzen ungedämpft, während in Richtung hoher Frequenzen zunehmend Dämpfung und Phasenverschiebung beobachtet werden. Die komplexe Übertragungsfunktion lautet gemäß der Spannungsteilerregel:

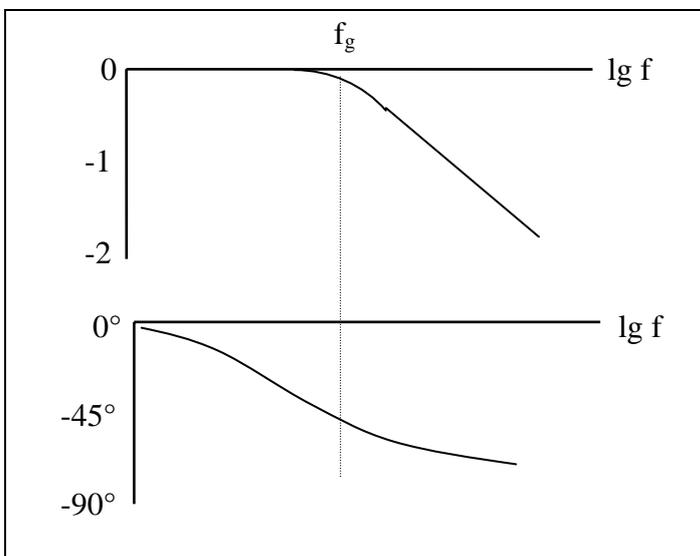


$$\frac{\bar{U}_a}{\bar{U}_e} = \frac{-j \frac{1}{\omega C}}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} e^{j \arctan(-\omega RC)} \quad (7)$$

Für den Betrag v und den Phasenwinkel φ gelten demzufolge:

$$v = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}, \quad \varphi = -\arctan \omega RC < 0 \quad (8a,b)$$

Abb. 3 Tiefpass

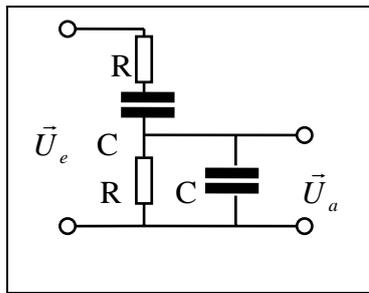


Die Grenzfrequenz f_g liegt wiederum bei $\omega_g = 2\pi f_g = 1/RC$.

Für Frequenzen $f \ll f_g$ geht $v \rightarrow 1$, d.h. alle niedrigen Frequenzen werden ungedämpft übertragen. Oberhalb der Grenzfrequenz tritt starke Dämpfung gemäß $v = 1/\omega RC$ auf. Für den Phasenwinkel gilt $\varphi \rightarrow -90^\circ$.

Der Tiefpass findet in Verstärker- und Gleichrichterschaltungen zur Unterdrückung des unerwünschten Netzbrummens Anwendung.

Abb. 4 Tiefpass, Frequenzgänge von v und φ



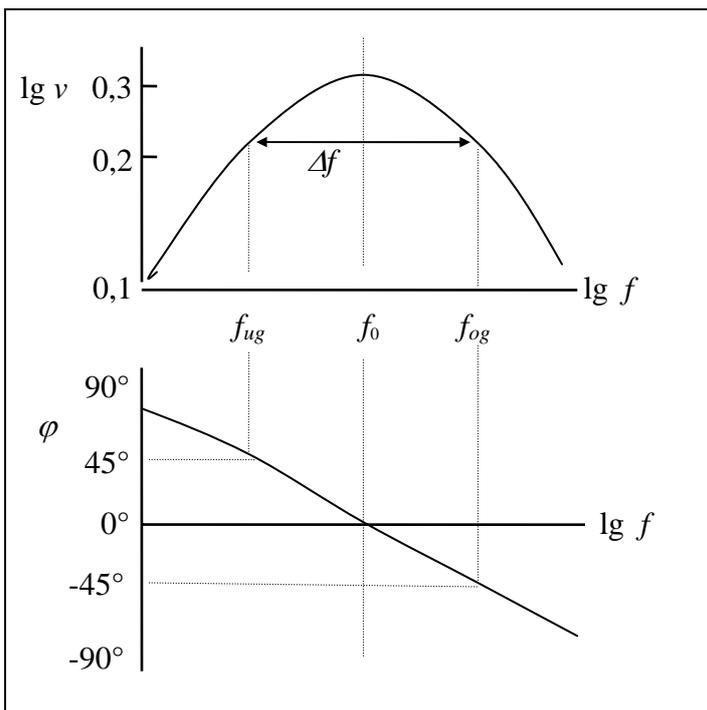
Der **Bandpass** bildet eine Kombination aus Hoch- und Tiefpass. Er lässt bevorzugt ein gewisses Frequenzband der Breite Δf hindurch und besitzt somit Filtereigenschaften. Bei der Resonanzfrequenz des Bandpasses $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 1 / (2\pi R C)$ erreicht die Durchlässigkeit zwar ein Maximum, aber der maximale Wert des Betrages der Übertragungsfunktion beträgt nur $\nu = 1/3$. An der Resonanzstelle ist $\varphi = 0$. Für die Übertragungsfunktion gilt (s. Abb. 5, 6):

Abb. 5 Bandpass

$$\frac{\vec{U}_a}{\vec{U}_e} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}}{\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{(1 + j\omega RC)^2 + j\omega RC} = \frac{1}{3 + j\frac{\omega^2 R^2 C^2 - 1}{3\omega RC}} \quad (9)$$

Für den Betrag ν und den Phasenwinkel φ gelten in diesem Fall :

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{\omega^2 R^2 C^2}}}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{3\omega RC}\right) \quad (10a, b)$$



Neben der Resonanzfrequenz f_0 gibt es für den Bandpass als charakteristische Größen eine untere und obere Grenzfrequenz f_{ug} und f_{og} , deren Differenz die Bandbreite Δf festlegt. Die Stellen dieser Grenzfrequenzen sind dadurch festgelegt, dass dort infolge Dämpfung der Abfall des Betrages der Übertragungsfunktion wiederum -3dB bzw. das $0,707$ -fache des Maximalwertes beträgt oder dass eine Phasenverschiebung von $+45^\circ$ bzw. -45° beobachtet wird.

Abb. 6 Bandpass,
Frequenzgänge von ν und φ