Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald / Institut für Physik

Physikalisches Grundpraktikum

Praktikum für Physiker		
Versuch **M01**: Mathematisches Pendel		
Name:	Versuchsgruppe:	Datum:
Mitarbeiter der Versuchsgruppe:		lfd. Versuchs-Nr:

Aufgabe Untersuchen Sie die Gesetzmäßigkeiten am mathematischen Pendel.

Physikalische Schwerpunkte des Versuches

- Mechanische Schwingungen, Schwingungsgleichung
- Beschreibung aus kinematischer und dynamischer Sicht
- Einfluss der Amplitude auf die Frequenz

Versuchsablauf

1. Messungen

1.1. Messen Sie die Zeiten t_i für jeweils 50 Schwingungen bei Pendellängen l_i=10cm, 20cm, ... , 100cm. Jede Messung ist fünf Mal durchzuführen. Erfassen Sie die Werte tabellarisch.

1.2. Messen Sie bei der konstanten Pendellänge l=60cm die Zeiten t_α für jeweils 10 Schwingungen bei Anfangsamplituden von α_0=5° und α_k=10°, 20°, ... , 60°. Jede Messung ist fünf mal durchzuführen.

2. Berechnungen und Auswertungen

2.1. Berechnen Sie für die Messungen zu 1.1. die Mittelwerte der Schwingungsdauern $\overline{T_i}$. Zeichnen Sie das $\overline{T_i}$ (l_i)-Diagramm und das $\overline{T_i}^2$ (l_i)-Diagramm. Bestimmen Sie aus dem letztgenannten Diagramm die Fallbeschleunigung g. Berechnen Sie für jede Pendellänge l_i die Fallbeschleunigung g_i. Berechnen Sie das gewichtete Mittel der Fallbeschleunigung $\overline{g}$.

2.2. Berechnen Sie für alle Ausschläge die Mittelwerte der Schwingungsdauern $\overline{T_0}$ und $\overline{T_k}$. Berechnen Sie $x=\frac{\overline{T_k}}{\overline{T_0}}$ für alle Winkel (auch k=0). Zeichnen Sie ein Diagramm x-1=f(α²), α gemessen im Gradmaß. Zeichnen Sie zusätzlich in dieses Diagramm die Kurve ein, die dem Verlauf nach Gl. (9) entspricht. Zeichnen Sie ein Diagramm x-1=f($\hat{\alpha}^2$). Bestimmen Sie den Anstieg dieser Kurve und vergleichen Sie diesen Wert mit dem Entwicklungskoeffizienten aus Gl. (9).

Mathematisches Pendel

Ein mathematisches Pendel wird durch einen Massenpunkt der Massen realisiert, der an einem gewichtslosen Stab der Länge *l* aufgehängt ist. Das Fadenpendel stellt dafür eine brauchbare Näherung dar. Die auf den Massenpunkt wirkende Schwerkraft *G* lässt sich zweckmäßig in zwei Komponenten *F* und *K* zerlegen. *F* spannt den Faden oder Stab und ist somit durch dessen Festigkeit für die Bewegung des Pendels bedeutungslos. Bestimmend für die Bewegung des Pendels ist die vom Ausschlag abhängige, tangentiale Kraftkomponente *K* in Bahnrichtung. Reibungskräfte seien vernachlässigt.

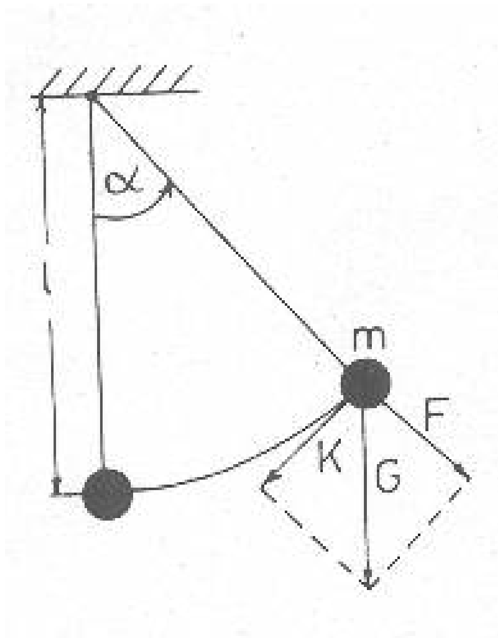

Abb.1 Komponentenzerlegung der Kraft *G* am Pendel

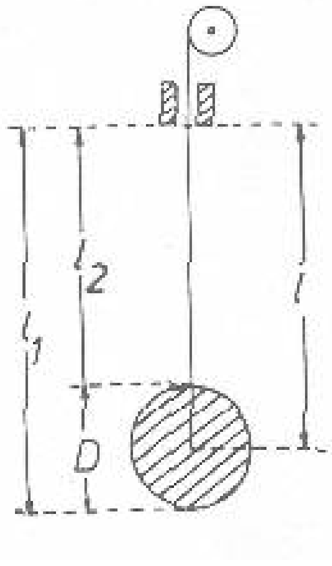

Abb.2 Zur Messung der Pendellänge *l*

Die tangential zur Bahnkurve gerichtete Komponente K beschleunigt den Massenpunkt stets in Richtung der Ruhelage. Bei einer Auslenkung um den Winkel α aus der Ruhelage gilt für das Fadenpendel gemäß dem Grundgesetz der Mechanik $M_r = J\ \ddot{\alpha}$ die Bewegungsgleichung in der Form:

$$- K\, l = m\, l^2\, \ddot{\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad - m\, g\, l \sin\alpha = m\, l^2\, \ddot{\alpha} \tag{1a}$$

Für kleine Ausschläge (α < 5°) vereinfacht sich die Bewegungsgleichung durch Linearisierung infolge der Näherung $sin\ \alpha = \alpha$ zu:

$$\ddot{\alpha} + (g/l)\, \alpha = 0 \tag{1b}$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung ergibt eine harmonische Schwingung

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) = \alpha_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \tag{2}$$

mit folgender Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3}$$

Hieraus lässt sich die Schwerebeschleunigung *g* ermitteln:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l \tag{4}$$

T und l lassen sich experimentell leicht ermitteln. Bei Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung des Pendelkörpers und der Masse des Fadens erhält man in besserer Näherung für g den Ausdruck:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l \left\{ 1 + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{R}{l}\right)^2 + \left(\frac{\rho_L}{\rho_K}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{m_F}{m_K}\right) \right\} \tag{5}$$

R Radius der Kugel, m_K Masse der Kugel, ρ_K Dichte der Kugel,
l Pendellänge, m_F Masse des Fadens, ρ_L Dichte der Luft.

Als Pendellänge gilt der Abstand Drehpunkt-Kugelmittelpunkt. Man misst die Pendellänge l gemäß Abb. 2 mit Lineal und Messschieber.

$$l = (l_1 + l_2) / 2 \text{ oder } l = l_2 + D / 2 \tag{6}$$

Wir bestimmen die Schwingungsdauer T, indem wir bei jeder eingestellten Pendellänge l_i = 20, 30,...,100 cm jeweils fünfmal die Zeit t für 50 volle Schwingungen messen und daraus T berechnen:

$$t = (t_1 + \ldots + t_5) / 5 \quad \Rightarrow \quad T = t / 50 \tag{7}$$

Mit der Zeitmessung beginne man in einem Umkehrpunkt der Pendelbewegung. Man berechne g_i nach Gleichung (4) für jede Pendellänge l_i. Da die Messunsicherheit bei großen Pendellängen kleiner ist als bei kurzen Pendellängen, errechne man das gewichtete Mittel:

$$\overline{g} = (l_1 g_1 + \ldots + l_n g_n) / (l_1 + \ldots + l_n) \tag{8}$$

Geometrisch überprüft man die Gültigkeit von Gleichung (3), indem man T^2 über l aufträgt. Theoretisch muss eine Gerade herauskommen, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht und die den Anstieg $(4\pi^2)/g$ hat. Auf diese Weise kann g auch graphisch bestimmt werden.

Literatur: Grimsehl, Lehrbuch der Physik, Bd. 1,
Ilberg, Physikalisches Praktikum, Kap. Pendel,
Walcher, Praktikum der Physik

Ergänzung für Physiker:

Für zunehmende Ausschlagswinkel α ($\alpha > 5°$) ist die Linearisierung der Bewegungsgleichung (1a) nicht mehr zulässig. Leider ist sie dann nicht mehr geschlossen integrierbar. Für die Schwingungsdauer *T* bei beliebigen Ausschlägen ergibt sich ein komplizierter Reihenausdruck. In erster Näherung erhält man für die Schwingungsdauer *T* den experimentell zu überprüfenden Ausdruck:

$$T = T_0\left(1+\frac{1}{16}\hat{\alpha}_0^2\right) \text{ bzw. } \frac{T}{T_0} = 1+\frac{1}{16}\hat{\alpha}_0^2 \qquad (9)$$

Dabei ist der Ausschlagswinkel im Bogenmaß $\hat{\alpha}_0$ einzusetzen: $\hat{\alpha}_0 = \frac{\pi}{180}\alpha_0° = 0{,}01745\,\alpha_0°$

T_0 ist die Schwingungsdauer für kleine Ausschläge gemäß Gl. (3). Die Überprüfung der Gl. (9) erfordert experimentelles Geschick, da *T* recht genau bestimmt werden muss, aber andererseits wegen der unvermeidbaren Dämpfung der Schwingungen besonders bei großen Ausschlägen kaum mehr als 5 aufeinanderfolgende Schwingungen zur Bestimmung von *T* herangezogen werden können. Für jeden Ausschlag (5°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°) sind deshalb die Messungen mehrmals zu wiederholen!
Für die graphische Darstellung ist zweckmäßig das Verhältnis T / T_0 über $\alpha_0°$ bzw. $(\alpha_0°)^2$ aufzutragen.