Grundlagen der Längenmessung und Messfehlerbehandlung

Zufällige und systematische Messfehler

Jedes Messergebnis wird verfälscht durch Unvollkommenheiten des Messobjektes, der Maßverkörperungen, der Messgeräte und Messverfahren, ferner durch Einflüsse aus der Umwelt und seitens des Experimentators sowie durch zeitliche Veränderungen bei allen diesen Fehlerquellen. Man unterscheidet bei Messfehlern prinzipiell zwei Arten von Beiträgen zur Messunsicherheit:

- die zufälligen oder statistischen Fehler
- die systematischen Fehler.

Die zufälligen Fehler resultieren häufig aus mangelnder Qualität bei der Durchführung der Messungen (Geschick des Experimentators, Schätzungsvermögen, ...) und können durch Erhöhung der Zahl der Messungen unter Wiederholbedingungen verringert werden.
Die systematischen Fehler werden bestimmt durch die Wahl des Messverfahrens, die Benutzung von Näherungsformeln und die Vernachlässigung von Einflussgrößen bei der Auswertung sowie durch die Genauigkeit der Messapparatur (Eichfehler, Nullpunktsverschiebung, ...). Sie können auch bei Wiederholung der Messung mit denselben Messgeräten und Benutzung desselben Messverfahrens ***nicht*** verringert werden. Ihre Behandlung ist häufig schwierig, erfordert Erfahrung und läuft oft auf die Abschätzung eines systematischen Größtfehlers hinaus.
Ein zufälliger Fehler lässt sich aus den Messwerten einer Messreihe bestimmen. Die mathematischen Grundlagen zur Behandlung der zufälligen Fehler schuf der Mathematiker C.F.Gauß (***Gaußsche Fehlerrechnung***). Er leitete aus einem Extremalprinzip (Prinzip der kleinsten Quadratsumme) handhabbare Ausdrücke für die Berechnung

- des Best-, Mittel- oder Erwartungswertes $\bar{x}$ einer Messgröße x,
- der Standardabweichung σ_X und
- der Vertrauensgrenze $\sigma_{\bar{X}}$ her.

Aus den bewährten Erfahrungstatsachen, dass bei rein statistischer Streuung der Messwerte kleinere Messfehler wahrscheinlicher sind als größere, dass gleich große positive und negative Abweichungen vom Mittelwert mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, ergibt sich für die Verteilung der zufälligen Fehler um den Mittelwert bei sehr großer Zahl von Messwerten die sogenannte Gaußsche Fehlerverteilungskurve, die wegen ihrer charakteristischen Form auch Glockenkurve genannt wird. Diese Häufigkeitsverteilung enthält die beiden Parameter $\bar{x}$ und σ_X und hat die Gestalt (s. Abb. 1):

$$H(x,\bar{x},\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1}$$

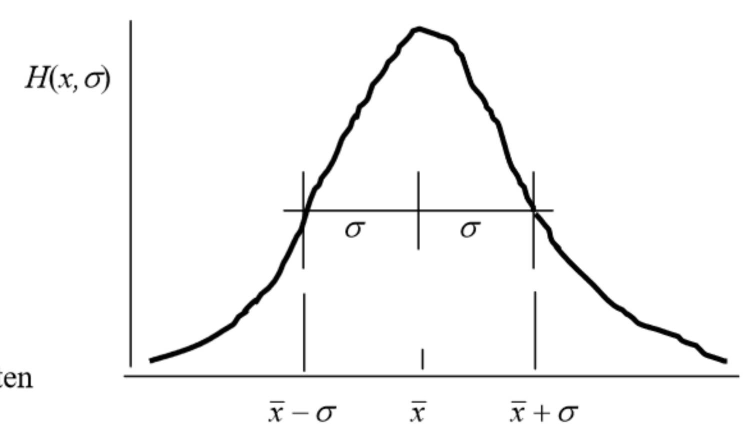

Abb. 1 Prinzipieller Verlauf der Häufigkeitsverteilung $H(x,\sigma)$ der zufälligen Fehler um den Mittelwert $\bar{x}$ bei einer sehr großen Anzahl von Messwerten

Das bestimmte Integral $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx$ heißt Gaußsches Fehlerintegral.

Es charakterisiert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert x zwischen den Werten $x = a$ und $x = b$ liegt.

Je nach Stärke der Streuung der Messwerte verläuft die Verteilungskurve $H(x, \sigma)$ steiler oder flacher, so dass der Abstand ihrer beiden Wendepunkte, die bei den Abszissenwerten $\bar{x}-\sigma$ und $\bar{x}+\sigma$ liegen, als Maß für die Streuung bzw. als Maß für die zufälligen Fehler genutzt werden kann. Den halben Abstand zwischen den Wendepunkten der Fehlerverteilungskurve, also den Streuparameter σ, nennt man ***Standardabweichung***.

Einen mehr oder weniger guten Näherungswert für die Standardabweichung σ_X, aus dem sich weiterhin auch die Vertrauensgrenze $\sigma_{\bar{X}}$ des Mittelwertes $\bar{x}$ berechnet, erhält man nach folgender Vorgehensweise:

1. Aus den vorliegenden Messwerten x_i einer Messreihe wird der ***arithmetische Mittelwert*** $\bar{x}$ errechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad (\, n \text{ - Anzahl der Messwerte}\,) \tag{2}$$

2. Es werden die Abweichungen der einzelnen Messwerte x_i vom Mittelwert $\bar{x}$, die sog. scheinbaren Fehler $(x_i - \bar{x})$, bestimmt. Die Summe dieser Abweichungen muss stets Null ergeben und ist deshalb für eine rechnerische Weiterverarbeitung nicht geeignet.

3. Aus diesem Grund werden die Quadrate dieser Abweichungen $(x_i - \bar{x})^2$ gebildet und auf summiert. Aus dieser Quadratsumme errechnet sich die Standardabweichung σ_X, die die Streuung der einzelnen Messwerte um den Mittelwert $\bar{x}$ charakterisiert:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{3}$$

4. Aus der Standardabweichung σ_X erhält man auf einfache Weise die ***Vertrauensgrenze*** $\sigma_{\bar{X}}$ für den Mittelwert $\bar{x}$,

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad , \tag{4}$$

mit deren Hilfe man bei vereinbartem ***Vertrauensniveau*** (statistische Sicherheit) einen ***Vertrauensbereich des Mittelwertes*** angeben kann.

Zwecks Erreichung eines hohen Vertrauenssniveaus, mit dem der gesuchte ***wahre Wert*** der zu messenden Größe innerhalb der anzugebenden Vertrauensgrenzen des berechneten Mittelwertes liegt, können die Vertrauensgrenzen erweitert werden. Aus dem Fehlerintegral ergeben sich bei genügend großer Zahl ($n > 50$) von Messwerten folgende Vertrauensniveaus:

68 %	für den Vertrauensbereich	$\bar{x} - \sigma_{\bar{X}}$	...	$\bar{x} + \sigma_{\bar{X}}$
95 %	" " "	$\bar{x} - 2\sigma_{\bar{X}}$	...	$\bar{x} + 2\sigma_{\bar{X}}$
99.7 %	" " "	$\bar{x} - 3\sigma_{\bar{X}}$	...	$\bar{x} + 3\sigma_{\bar{X}}$

Bei wenigen Messwerten (z.B. $n = 5$) verschlechtert sich die Situation drastisch. Dann erhält man das Vertrauensniveau 95 % nur im erweiterten Vertrauensbereich $\bar{x} - 3\sigma_{\bar{X}}$ ... $\bar{x} + 3\sigma_{\bar{X}}$.

Wir vereinbaren für die Ergebnisangabe ein Vertrauensniveau (statistische Sicherheit) von 95%. Dann gilt bei genügend vielen Messwerten ($n > 50$) für die Angabe des Vertrauensbereiches:

$$\bar{x} - 2\sigma_{\bar{X}} \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma_{\bar{X}} \tag{5}$$

Praktischer Hinweis: Es ist sinnvoll, bei der Durchführung der Fehlerrechnung die anfallenden Messwerte in die erste Spalte einer Tabelle einzutragen. Eine zweite Spalte sieht man für die Differenzen $x_i - x$ vor und eine dritte Spalte für die Werte $(x_i - x)^2$.

5. Angabe des Ergebnisses in Form einer Größengleichung:

	$x = \bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{X}}$	(Ergebnis mit absoluter Fehlerangabe)
oder	$x = \bar{x}(1 \pm 2\sigma_{\bar{X}} / \bar{x})$	(Ergebnis mit relativer Fehlerangabe)
oder	$x = \bar{x}, \pm 100 \cdot 2\sigma_{\bar{X}} / \bar{x}\ \%$	(Erg. mit prozentualer Fehlerangabe.)

Fehlerfortpflanzung

Lässt sich eine physikalische Größe nur ***mittelbar*** durch Messung mehrerer, voneinander unabhängiger, direkt messbarer Größen bestimmen, so ist zur Berechnung des zufälligen Messfehlers das ***Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz*** anzuwenden. Hierfür sind bereitzustellen:

- die Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ der direkt gemessenen Größen $x, y, z, \ldots$
- deren Vertrauensgrenzenzen $s_{\bar{X}}, s_{\bar{Y}}, s_{\bar{Z}}, \ldots$
- die Beziehung $w = f(x, y, z, \ldots)$, die die Größen x, y, z, ... mit der zu bestimmenden Größe w verknüpft.

Für die Vertrauensgrenze $\sigma_{\bar{w}}$ des Mittelwertes $\bar{w}$ gilt dann:

$$\sigma_{\bar{w}} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \sigma_{\bar{Y}}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \sigma_{\bar{Z}}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \ldots} \tag{6}$$

Um das geforderte Vertrauensniveau zu garantieren, ist das Ergebnis auch hier in der Form:

$$w = \bar{w} \pm 2\sigma_{\bar{w}} \tag{7}$$

anzugeben.

Größtfehler

Die systematischen Fehler werden durch die beschriebene Methode der Fehlerrechnung nicht erfasst und erfordern eine zusätzliche Untersuchung.

Es ist üblich, für den systematischen Fehler eine obere Grenze Δx_{syst} abzuschätzen. Daher rührt auch der Name ***Größtfehler***. Dieser ist gleich der Summe der maximalen Fehler aus

- dem angegebenen oder geschätzten Fehler der Messinstrumente,
- dem abgeschätzten Fehler des (unvollkommenen) Messverfahrens,
- den abgeschätzten Einflüssen seitens des Beobachters und aus der Umgebung,
- den Ungenauigkeiten infolge Anwendung von Näherungsformeln bei der Versuchsauswertung.

Für die Fehler der Messgeräte und Maßverkörperungen liegen Standardtabellenwerte im Praktikum am Platz der Ausgabe aus.

Da die gesamte ***Messunsicherheit*** Δx des Mittelwertes zufällige u n d systematische Fehler enthält, erscheint das Endergebnis in der Form:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm (\Delta x_{xyst} + \Delta x_{zuf}) = \bar{x} \pm (\Delta_{syst} + 2\sigma_{\bar{X}}) \quad . \tag{8}$$

Hieraus wird noch einmal deutlich, dass allein durch die Erhöhung der Anzahl der Messungen die Messunsicherheit bestenfalls nur bis auf den systematischen Fehler reduziert werden kann !

Bei Berücksichtigung sowohl zufälliger wie auch systematischer Fehler kann für den Fall einer mittelbar zu messenden Größe eine Messunsicherheit durch Berechnung des Größtfehler gemäß folgendem Ausdruck angegeben werden:

$$w = f(x, y, z, ...) \qquad \Delta w = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right| + ... \quad . \tag{9}$$

Messinstrumente

Der Messschieber

Der Messschieber ist ein Feinmessgerät und dient meist der Bestimmung der Dicke von Körpern oder des Durchmessers von Stäben oder Bohrungen. Er besteht aus einer Messschiene, die den Maßstab M trägt. Auf ihr gleitet der Schieber mit der Noniusskala (Abb. 2)

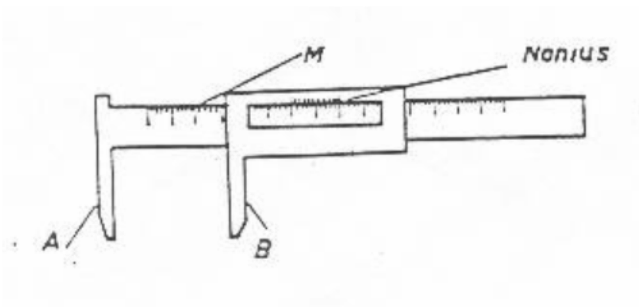

Abb. 2 Schematische Darstellung Des Messschiebers

Messschiene und Schieber haben je einen Messschnabel A bzw. B, zwischen die das Messobjekt einzuspannen ist. Bestimmte Ausführungen haben zwei weitere Messschnäbel mit Schneiden zur Bestimmung von Innendurchmessern. Die Noniusskala dient der Ablesung der zu messenden Länge auf Zehntelmillimeter. Sie ist eine Hilfsskala, die der Millimeterteilung auf der Messschiene gegenübersteht. Bei ihr sind 9mm in zehn gleiche Intervalle von je 0,9mm Breite geteilt.

Beim Ablesen ermittelt man zuerst die Zahl der ganzen Millimeter, die vor dem Nonius-Nullstrich liegen. Sodann sucht man den Teilstrich der Noniusskala, der mit einem Strich der Hauptskala zur Deckung kommt. Dieser Teilstrich kennzeichnet die Anzahl der Zehntel-Millimeter, die der ersten Ablesung hinzuzufügen sind.

Nullpunkt und Beschaffenheit der Messflächen an den Schnäbeln prüft man, indem man diese ganz zusammenschiebt und den Messschieber gegen das Licht hält. Die Messflächen müssen sich gleichmäßig berühren und die Nullstriche von Haupt- und Noniusskala müssen übereinstimmen.

Um die Messgenauigkeit des Messschiebers zu erhalten, ist dieser sorgsam zu behandeln!