

Versuch M14: Rohrströmung	
Physik, Studentenfassung(10000) vom 27. Oktober 2023	
Gruppe/Versuchs-Nr.: /	Datum:
Name 1:	Name 2:
Note Testat:	Note Testat:
Note Protokoll:	Betreuer:

- **Versuchsziel**

Untersuchung grundlegender Zusammenhänge bei der laminaren und turbulenten Rohrströmung eines inkompressiblen Fluids.

- **Themen zur Vorbereitung**

Dynamische und kinematische Viskosität eines Fluids, Aktivierungsenergie, Arrhenius-Gesetz; Turbulenz, Reynoldszahl, laminare Rohrströmung, Hagen-Poiseuillesches Gesetz, turbulente Rohrströmung

- **Messaufgaben**

1. Laminare Strömung — Viskosität:

Messen Sie bei Zimmertemperatur die Volumenstromstärke $J = \Delta V / \Delta t$ von Wasser durch das Rohr (den Schlauch) der Länge $L = 100$ cm, mit dem Radius $R = 1$ mm und einer Höhendifferenz von $h = 40$ cm.

2. Laminare Strömung — Parameterabhängigkeit

Bestimmen Sie bei Zimmertemperatur die Volumenstromstärke $J = \Delta V / \Delta t$ von Wasser in Abhängigkeit von den Parametern Schlauchlänge, Schlauchradius und Höhendifferenz entsprechend der nachfolgenden Tabelle. Nutzen Sie den Messwert aus Aufgabe 1.

L / cm	R / mm	h / cm
60; 100; 200	1,0	40
100	0,5; 1; 1,5	40
100	1,0	20; 40; 60

3. Turbulente Strömung

Vermessen Sie die Volumenstromstärke $J = \Delta V / \Delta t$ einer turbulenten Strömung. Wählen Sie geeignete Parameter.

Hinweise zur Durchführung:

1. Die vorgegebenen Werte für die Rohrlänge L und den Höhenunterschied h sind als Richtwerte zu verstehen, die im Experiment näherungsweise einzustellen sind.
2. Wählen Sie einheitlich das Fluidvolumen $\Delta V = 0,1$ Liter. Ausnahme ist die Verwendung des Schlauches mit $R = 0,5$ mm. Hier ist $\Delta V = 0,025$ Liter zu nutzen.
3. Die Messzeit Δt runden Sie auf ganzzahlige Sekunden.
4. Notieren Sie für alle Messreihen die Temperatur des Fluids (Wasser im oberen Becher).
5. Nutzen Sie zur Aufzeichnung der Messwerte und für die Auswertung die Tabelle auf S. 12.

- **Sicherheitshinweise**

- Glasthermometer:**

- Falls das Glasthermometer zerbricht, so sammeln Sie nicht die Scherben ein. Warnen Sie Ihre Umgebung und informieren Sie dann den Betreuer oder Praktikumsassistenten.

- Heißes Wasser:**

- Beim Hantieren mit heißem Wasser besteht Verbrühungsgefahr.

- **Auswertung**

- Zur Messaufgabe 1:**

- Berechnen Sie die kinematische Viskosität ν und die Reynoldszahl Re . Das Verhältnis der Reynoldszahl zur kritischen Reynoldszahl erlaubt es zu überprüfen ob die vermessene Strömung laminar ist. Bestimmen Sie zudem das Verhältnis der Reibungsarbeit zur kinetischen Energie, um abzuschätzen ob sich das parabelförmige Geschwindigkeitsprofil vollständig aufbauen konnte.

- Zur Messaufgabe 2:**

- Berechnen Sie die kinematische Viskosität ν und das Verhältnis der Reynoldszahl zur kritischen Reynoldszahl für die Ihnen zugewiesene Messreihe. Diskutieren Sie den Einfluss der Parameter L , R und h .

- Zur Messaufgabe 3:**

- Überprüfen Sie mittels des Verhältnisses der Reynoldszahl zur kritischen Reynoldszahl, ob es sich um eine turbulente Strömung handelt. Bestimmen Sie auch die kinematische Viskosität ν und vergleichen Sie den Wert mit jenem, den Sie in Aufgabe 1 ermittelt haben.

1 Grundlagen

1.1 Viskosität

Definition: Die *Viskosität* (auch *Zähigkeit*) ist eine Eigenschaft von Stoffen, welche fließen können, sogenannte *Fluide*. Bei ihnen kommt es unter der Einwirkung äußerer Kräfte zu gegenseitigen Verschiebung von Masse- bzw. Volumenelementen. Neben Gasen und Flüssigkeiten können dies auch feste Stoffe wie amorphes Glas sein. Je größer die Wechselwirkungskräfte zwischen den Masselementen sind, desto schwerer lassen sie sich gegeneinander verschieben, was sich in größeren Werten der Viskosität widerspiegelt. Man spricht hier von der *inneren Reibung*. Feste Stoffe haben eine extrem hohe Viskosität im Vergleich zu der von Flüssigkeiten und noch mehr zu der von Gasen. In dünnflüssigen Stoffen beruht die Viskosität auf einen Impulsaustausch zwischen benachbarten Masselementen.

Viskosimetrische Daten sind bei der Entwicklung und Optimierung diverser technischer Anlagen wichtig, wo immer Fluide strömen. So zum Beispiel beim Motoren- und Kraftwerksbau, insbesondere Pumptechniken, chemischen Anlagen wie Raffinerien, in der Medizintechnik u.v.a.m. Sie spielen auch eine Rolle beim Verständnis vieler Naturphänomene wie etwa der ober- und unterirdischen Wasserdynamik oder dem Blutkreislauf in Lebewesen (s. Anhang A.1, S. 11).

Zur Definition der Viskosität stellt man sich zwei planparallel angeordnete Wände im Abstand d vor, eine jede habe die Fläche A , Abb. 1. Unter der Wirkung einer Kraft \mathbf{F} werden sie gegeneinander verschoben. Der Richtungspfeil dieser Kraft liege in der Wandebene. Der Quotient \mathbf{F}_R/A wird *Schubspannung* genannt. Findet die Verschiebung bei konstanter relativer Wandgeschwindigkeit \mathbf{v}_w statt, so wird \mathbf{F} durch die Reibungskraft \mathbf{F}_R kompensiert, wobei sich beide Kräfte auf die gleiche Fläche A beziehen. Folglich gilt,

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_R .$$

Denkt man sich nun das Fluid in dünne planparallele Schichten der Dicke Δy zerlegt, so wirkt zwischen diesen die Reibungskraft \mathbf{F}_R . Sie ist proportional zur Fläche A wie auch zum Geschwindigkeitsgradient $\Delta v/\Delta y$. Die Proportionalitätskonstante η nennt man *dynamische Viskosität*. Ihre Einheit ist

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} .$$

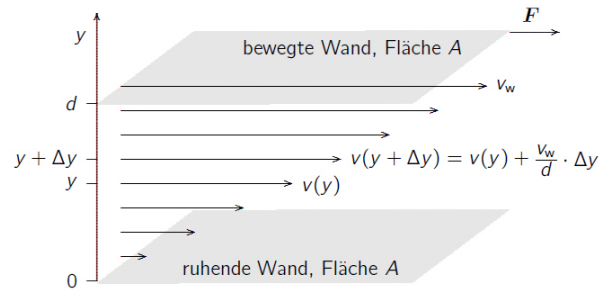


Abb. 1: Zur Definition der Viskosität: Ein Fluid zwischen zwei planparallel angeordneten Wänden, die sich unter Einwirkung der Kraft \mathbf{F} mit der Geschwindigkeit v_w gegeneinander bewegen.

Somit gilt im Grenzfall $\Delta y \rightarrow 0$ für den Betrag der Reibungskraft,

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \left| \frac{dv}{dy} \right| . \quad (1)$$

Die Fluidschichten, welche eine Wand berühren, haften an dieser, d.h., die unterste Schicht ruht an der unteren Wand und die oberste bewegt sich mit gleicher Geschwindigkeit v_w wie die obere Wand. Wächst die Geschwindigkeit v linear mit dem Abstand y von der ruhenden Wand, so gilt

$$v(y) = \frac{v_w}{d} \cdot y .$$

Dieser lineare Zusammenhang tritt bei gewissen Fluiden in guter Näherung auf, falls die Fluidschicht dünn genug ist, also bei hinreichend kleinem Wandabstand d . Man spricht dann von einer *newtonschen Flüssigkeit*. Bei dieser ist η nicht von der Geschwindigkeit abhängig. Dann folgen $dv/dy = v_w/d$ und für die Reibungskraft,

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{v_w}{d} .$$

Die obigen Betrachtungen gelten nur für eine hinreichend kleine Geschwindigkeit v_w , so dass alle Teilchen in einer Fluidschicht die gleiche Strömungsgeschwindigkeit $v(y)$ haben (abgesehen von der thermodynamischen Bewegung). Man nennt die Strömung dann *laminar*. Überschreitet v_w einen bestimmten kritischen Wert, so treten Verwirbelungen (Turbulenzen) auf, worauf weiter unten genauer eingegangen wird.

Beispiele: Die dynamische Viskosität der verschiedener Fluide weist eine große Variabilität auf. Einige Beispiele sind in Tab. 1 aufgeführt.

Die Viskosität von Blut hängt stark davon ab, wo es sich im Körper befindet. Beispielsweise werden die roten Blutkörperchen in engeren Gefäßen (Kapillaren) länglich verformt, was die Viskosität verringert und somit den Blutstrom erleichtert. In größeren Gefäßen wie den Schlagadern in Herznähe stapeln sich rote Blutkörperchen in größeren Aggregaten, was ebenso die Viskosität verringert. Hingegen hat (gelbliches) Blutplasma eine vergleichsweise große Viskosität, wie auch Wundsekrete.

Die Viskosität fester Stoffe wie amorphes Glas ist sehr groß, weshalb diese Begriffsbildung hier nur bedingt sinnvoll ist, sofern nicht die Temperatur hoch genug ist. So wird beispielsweise die Viskosität von Glas in der Nähe des Schmelzpunktes deutlich kleiner.

Tab. 1: Werte der dynamischen und kinematischen Viskosität η bzw. $\nu = \eta/\rho$ für verschiedene Stoffe (ρ : Massedichte).

Substanz	η in $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	ν in $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Wasser (0 °C)	1,7923	1,7926
(20 °C)	1,002	1,004
Quecksilber (20 °C)	1,55	
Ethanol (20 °C)	1,19	
Essigsäure (80%, 25 °C)	2,31	
Kaffeesahne(20 °C)	≈ 10	
Olivenöl (20 °C)	$\approx 10^2$	
Honig (20 °C)	$\approx 10^4$	
Motorenöl (25 °C)	$\approx 10^2$	
(150 °C)	≈ 3	
Blut (37 °C)		
allgemein	3.. 25	3.. 25
in großen Gefäßen	3.. 4	3.. 4
Glas (20 °C)	$10^{22} \dots 10^{24}$	
(Verarbeitungstemp.)	$10^6 \dots 10^{12}$	
Steinsalz (20 °C)	$10^{18} \dots 10^{21}$	

Temperaturabhängigkeit: Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser bei Normaldruck zeigt Abb. 2. In der flüssigen Phase ist sie nur schwach von Druck abhängig, wohingegen sie in der Dampfphase mit steigendem Druck stark anwächst. Dies ist verständlich, weil Dampf viel stärker kompressibel ist als eine Flüssigkeit. Die Erhöhung der Teilchendichte führt zu stärkeren Wechselwirkungen der Fluidteilchen und somit zu einer größeren inneren Reibung.

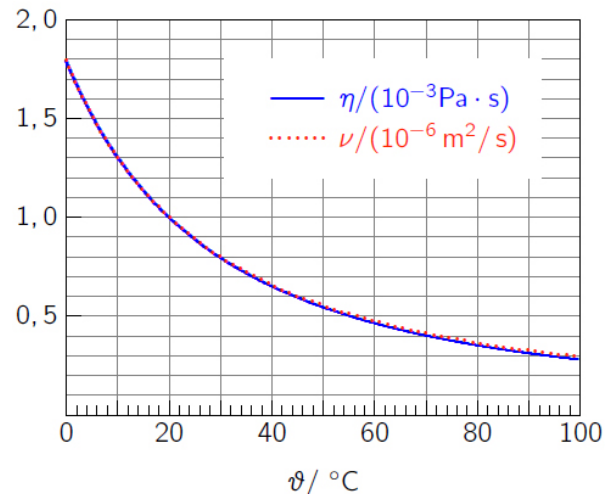


Abb. 2: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser beim Druck 1bar. In den gewählten Maßeinheiten sind die entsprechenden Maßzahlen der dynamischen und kinematischen Viskosität η bzw. $\nu = \eta/\rho$ nahezu gleich, weil die Massedichte ρ im dargestellten Temperaturbereich nahezu konstant den Wert $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ hat.

Bei Gasen steigt die Viskosität in der Regel mit der Temperatur, hingegen fällt sie für Flüssigkeiten, wie in Abb. 3 dargestellt. Benachbarte Molekülschichten in einer Flüssigkeitsströmung sind durch Kohäsionskräfte gewissermaßen ineinander verzahnt, was durch energetische Potentialwälle beschrieben wird. Damit die Schichten aneinander vorbeigleiten können, müssen die Moleküle ihren Ort wechseln, wozu eine gewisse *Aktivierungsenergie (Platzwechselenergie)* nötig ist. Dabei gilt näherungsweise ein nach Svante

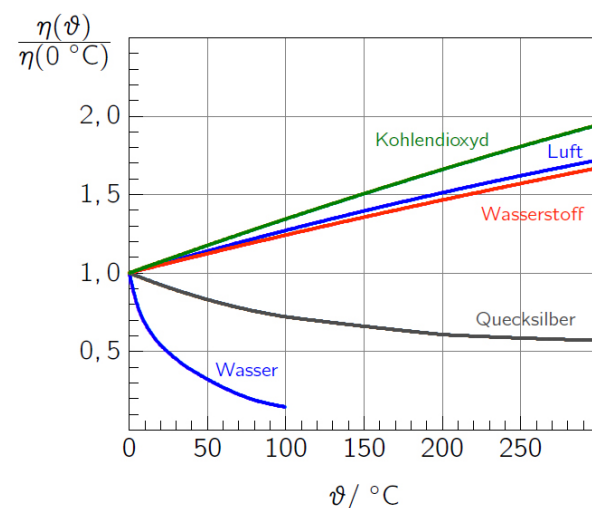


Abb. 3: Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität verschiedener Stoffe bei Normaldruck.

Arrhenius (1859–1927)¹⁾ benanntes Gesetz,

$$\eta(T) = \eta_{\infty} \cdot \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right) \quad (2)$$

Darin ist $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/K die Boltzmannkonstante. Für wachsende Werte der (absoluten) Temperatur T nähert sich die Viskosität der Konstante η_{∞} , welche vom Stoff abhängt und im Allgemeinen recht klein gegenüber der Viskosität bei Zimmertemperatur ist. Im Temperaturbereich (15...80) °C gelten für Wasser die Näherungen,

$$\begin{aligned} \eta_{\infty} &\approx 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s} , \\ E_a/k &\approx 1840 \text{ K} . \end{aligned} \quad (3)$$

1.2 Turbulenz

Stromfaden: Den Weg eines Fluidteilchens nennt man *Stromfaden*. Bei laminaren Strömungen bewegen sich alle Fluidteilchen auf bestimmten glatten Flächen (Lamellen) mit gleicher Geschwindigkeit, ohne diese Flächen zu verlassen. Benachbarte Stromfäden sind hier parallel.

Wenn sich die Geschwindigkeit pro Längeneinheit und senkrecht zu den Flächennormalen stark genug ändert, können Fluidteilchen zwischen den ursprünglichen Lamellen wechseln und somit ihre Geschwindigkeit ändern. Die Strömung ist dann nicht länger laminar sondern turbulent. Hier kommt es zu Verwirbelungen (*Turbulenz*) im Fluid. Das Geschwindigkeitsfeld von turbulenten Strömungen ist mathematisch schwierig zu beschreiben. Anfangs eng benachbarte Fluidteilchen können sich hier im zeitlichen Mittel exponentiell schnell voneinander entfernen. Die Stromfäden sind in der Regel kompliziert verwickelt. Schon bei kleinsten Änderungen der Anfangslage eines Fluidteilchens bewegt es sich in der Regel schon nach kurzer Zeit entlang eines deutlich anderen Stromfadens mit veränderlichen Geschwindigkeiten — die Bewegung ist instabil und wird *chaotisch* genannt.²⁾

Reynoldszahl: Zur Charakterisierung der Strömung eines Fluids der Massedichte ρ und der Viskosität η

¹⁾Nobelpreis für Chemie im Jahre 1903 für Arbeiten zur Reaktionskinetik.

²⁾Turbulenzen sind in diversen strömungstechnischen Anlagen von großer Bedeutung. Einige Beispiele finden sich im Anhang A.1, S. 11.

hinsichtlich ihres laminaren oder turbulenten Verhaltens hat *Osborne Reynolds* (1842–1912) eine nach ihm benannte dimensionslose Kennzahl eingeführt,

$$\text{Re} \equiv \frac{v l}{\nu} \quad (4)$$

Darin sind v und l eine charakteristische Strömungsgeschwindigkeit bzw. Länge, welche für jede Strömungsart gesondert festzulegen sind. Die Größe ν nennt man *kinematische Viskosität*. Man erhält sie, indem man die dynamische Viskosität η auf die Massedichte ρ bezieht,

$$\nu \equiv \frac{\eta}{\rho} , \quad [\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} .$$

Die physikalische Bedeutung der Reynoldszahl (4) erschließt sich, wenn man sie umschreibt. Mit der Erweiterung $v l^2$ folgt,

$$\text{Re} = \frac{v l \rho}{\eta} = \frac{v^2 l^3 \rho}{\eta v l^2} .$$

Bezeichnet $m = \rho l^3$ die Fluidmasse im charakteristischen Volumen l^3 , und ist $A = l^2$ die charakteristische Fläche für die innere Reibung, so folgt weiter,

$$\text{Re} = \frac{m v^2}{\eta A (v/l) \cdot l} = \frac{2W_{\text{kin}}}{W_{\text{R}}} . \quad (5)$$

Darin bezeichnen $W_{\text{kin}} = m v^2 / 2$ die kinetische Energie des charakteristischen Masselements m und $W_{\text{R}} \equiv F_{\text{R}} \cdot l$ die Reibungsarbeit der Kraft $F_{\text{R}} = \eta A (v/l)$ entlang der charakteristischen Länge l . In diesem Sinne ist die Reynoldszahl ein Maß für das Verhältnis aus der Bewegungsenergie der trägen Masse m und der Reibungsarbeit.

Für eine bestimmte Strömungssituation, die zum einen vom Fluid und zum anderen von der Geometrie (Strömungsführung und Körperform) abhängig ist, kann nun ein kritischer Wert Re_c ermittelt werden, dessen Überschreitung zu Turbulenzen führen kann. Folglich muß man bei Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit $\text{Re}_c \cdot \nu/l$ damit rechnen, dass eine zunächst laminare Strömung instabil wird und turbulente Verwirbelungen eintreten.

2 Rohrströmung inkompressibler Fluide

2.1 Reynoldszahl

Zur Definition der Reynoldszahl (4) setzt man bei der Rohrströmung als charakteristische Länge l den doppelten Rohrradius $2R$ und als Fluidgeschwindigkeit v die mittlere Geschwindigkeit ein (10):

$$\text{Re} \equiv \frac{2R\bar{v}}{\nu} = \frac{2J}{\pi R\nu} \quad (6)$$

Dies geht über in Gl. (5) mit den folgenden Entsprechungen für die charakteristischen Größen:

$$\begin{aligned} \text{Länge: } l &\hat{=} 2R \\ \text{Fläche: } A &\hat{=} (2R)^2 \\ \text{Geschwindigkeit: } v &\hat{=} \bar{v} \\ \text{Masse: } m &\hat{=} \rho(2R)^3 \end{aligned}$$

Für die kritische Reynoldszahl einer Rohrströmung findet man experimentell den Wert,

$$\text{Re}_c = 2040 \pm 10 \quad (7)$$

Würde man in einem Experiment mit einer laminaren Strömung starten und sukzessive den Wert von Re erhöhen, so muss man für $\text{Re} \gtrsim \text{Re}_c$ mit dem Umschlag in eine turbulente Strömung rechnen. Man kann den Umschlagspunkt jedoch nur näherungsweise vorhersagen.

2.2 Laminarer Fall

Geschwindigkeitsprofil: Ein starrwandiges gerades Rohr (Schlauch, Kapillare) habe die Länge L und eine kreisförmige innere Querschnittsfläche, mit dem Innenradius R , Abb. 4. Durch das Rohr ströme ein inkompressibles Fluid mit der dynamischen Viskosität η . Der Fluid-Transport wird durch die Druckdifferenz p zwischen den Rohrenden angetrieben. Man spricht dann von einer *Rohrströmung*. Für hinreichend kleine Werte p bildet sich eine laminare Strömung aus. Das radiale Geschwindigkeitsprofil $v(r)$ eines newtonschen Fluids erhält man wie folgt: Der Betrag der Reibungskraft (1) zwischen zwei benachbarten Fluidschichten auf einer konzentrischen Zylinderoberfläche

$A(r) = 2\pi rL$ an der Stelle r ist,

$$F_R(r) = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dr} = \eta \cdot 2\pi rL \cdot \frac{dv}{dr} .$$

Ist das Geschwindigkeitsprofil zeitlich konstant, so besteht für einen jeden Abstand r von der Rohrachse ein Kräftegleichgewicht zwischen der Reibungskraft $F_R(r)$, die an der gesamten Zylinderoberfläche A angreift, und der Druckkraft $p \cdot \pi r^2$, die auf der Zylinderdeckfläche πr^2 einwirkt. Folglich gilt für jeden Radius $r = 0 \dots R$,

$$-\eta \cdot 2\pi rL \cdot \frac{dv}{dr} = \pi r^2 \cdot p .$$

Dies ist eine Differentialgleichung für das Geschwindigkeitsprofil $v(r)$. Nach Umstellung lautet sie,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p}{2\eta L} \cdot r .$$

Die allgemeine Lösung ist,

$$v(r) = -\frac{p}{4\eta L} \cdot r^2 + C .$$

Die Integrationskonstante C ergibt sich aus der Randbedingung $v(R) = 0$ zu,

$$C = \frac{p}{4\eta L} \cdot R^2 .$$

Somit lautet das gesuchte radiale Geschwindigkeitsprofil der laminaren Rohrströmung,

$$v(r) = \frac{p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (8)$$

Die an der Rohrwand ruhende Fluidschicht hält die bewegte Wassersäule (Fluidzylinder mit Radius R und Länge L) mit der Kraft $F_R(R)$ zurück. Die maximale Geschwindigkeit stellt sich auf der Rohrachse ein,

$$v_{\max} = v(r = 0) = \frac{pR^2}{4\eta L} .$$

Das Profil (8) stellt sich jedoch erst nach einer gewissen Anlaufstrecke ein, die mit L_A (s. Gl.(18), S. 8) nach unten abgeschätzt werden kann.

Druckabfall — Hagen-Poiseuillesches Gesetz:

Gotthilf Hagen (1797–1884) und Jean Poiseuille (1797–1869, sprich: poa:'zœj) haben wie folgt das Fluidvolumen berechnet, welches pro Zeiteinheit den Rohrquerschnitt passiert: Alle Fluidteilchen auf konzentrischen Zylinderoberflächen (Abb. 4, Draufsicht

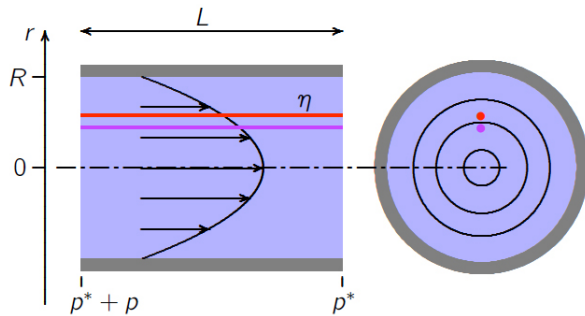


Abb. 4: Laminare Rohrströmung: Ein Rohr mit starren Wänden (Länge L , Innenradius R) ist mit einem Fluid (blau) der dynamischen Viskosität η gefüllt. Fällt über dem Rohr ein nicht zu großer Druck p ab, so bildet das strömende Fluid ein stationäres parabolisches Geschwindigkeitsprofil über dem Rohrquerschnitt aus, das durch Gl. (8) beschrieben wird. Die Fluidteilchen bewegen sich auf achsenparallelen Bahnen, also ohne Querbewegung. Würde man beispielsweise an zwei Punkten auf der Eintrittsfläche in das Rohr die Fluidteilchen einfärben (rechts, rot und violett), so würde man zwei Stromfäden erhalten, die jeweils parallel zur Rohrachse verlaufen (links) und sich demzufolge nicht vermischen. Die laminare Strömung wird deshalb auch *Parallelströmung* genannt.

rechts) haben die gleiche Geschwindigkeit $v(r)$. Die infinitesimale Querschnittsfläche der entsprechenden Zylinderoberfläche beträgt, unter Verwendung von Polarkoordinaten,

$$dA = 2\pi r \, dr \quad .$$

In der Zeit dt strömt durch diese Fläche das Volumen dV und es gilt,

$$\frac{dV}{dt} = v(r) \cdot dA = v(r) \cdot 2\pi r \, dr \quad .$$

Die Integration über alle Zylinderoberflächen von $r = 0$ bis R liefert dann das Volumen ΔV , das in der Zeitspanne Δt durch den Rohrquerschnitt strömt. Somit folgt unter Verwendung von (8) für die Volumenstromstärke $J \equiv \Delta V / \Delta t$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r \, dr \\ &= \frac{\pi p}{2\eta L} \cdot \int_0^R r (R^2 - r^2) \, dr \\ &= \frac{\pi p}{2\eta L} \cdot \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich das Hagen–Poiseuillesche Gesetz,

$$\boxed{p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \cdot J} \quad (9)$$

Mittelt man die Fluidgeschwindigkeit (8) über die Querschnittsfläche $A = \pi R^2$ des Rohres, so erhält man die mittlere Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{J}{\pi R^2} = \frac{p R^2}{8\eta L} = \frac{v_{\max}}{2} \quad . \quad (10)$$

Sie wird in Gl. (6) zur Berechnung der Reynoldszahl einer Rohrströmung verwendet.

Der Faktor

$$G \equiv \frac{\pi R^4}{8\eta L} \quad , \quad [G] = \frac{\text{m}^3}{\text{Pa} \cdot \text{s}} \quad , \quad (11)$$

in (9) kann in Analogie zur Elektrodynamik als Strömungsleitwert und somit G^{-1} als Strömungswiderstand angesehen werden. Der Leitwert wächst mit der 4-ten Potenz des Rohrradius R . Folglich würde er auf 1/16 des ursprünglichen Wertes fallen, wenn sich der Durchmesser nur halbiert.³⁾

Reynoldszahl und Maximaldruck: Laminare Strömungen erwartet man für hinreichend kleine Werte der Reynoldszahl ($\text{Re} < \text{Re}_c$). Ersetzt man in (6) die Volumenstromstärke J entsprechend dem Hagen–Poiseuilleschen Gesetz (9), so erhält man für die Reynoldszahl einer laminaren Rohrströmung,

$$\text{Re} = \frac{2J}{\pi R \nu} = \frac{R^3 p}{4\eta \nu L} \quad . \quad (12)$$

Die Bedingung für Laminarität lautet dann,

$$\boxed{p < p_{\max, \text{Re}} \equiv 4\nu\eta \cdot \frac{L}{R^3} \cdot \text{Re}_c} \quad (13)$$

Besteht das Fluid beispielsweise aus Wasser, so erhält man unter Normalbedingungen (Druck ≈ 1 bar, Temperatur ≈ 20 °C),

$$p_{\max, \text{Re}} = 8,20(5) \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{L}{R^3} \quad .$$

Wird bei einem gegebenen Geometriefaktor L/R^3 der Druck p so lange erhöht, bis die Strömung turbulent

³⁾ Dies hat erhebliche Konsequenzen beispielsweise für den menschlichen Blutkreislauf: Eine Verengung eines Blutgefäßes auf den halben Durchmesser müsste durch einen 16-fachen Druck ausgeglichen werden, damit durch das Gefäß pro Zeiteinheit die ursprüngliche Blutmenge fließt. Dies würde den Herzmuskel erheblich stärker belasten. Zu bemerken ist hier aber, dass das Blut keine homogene Flüssigkeit darstellt und somit das Hagen–Poiseuillesche Gesetz nur näherungsweise anwendbar ist, zumal bei sehr engen Gefäßen (Kapillaren). Hinzu kommt, dass ein gesundes Blutgefäß keine starren Wände hat, was die Strömungsverhältnisse ebenso komplizierter macht.

wird ($p > p_{\max}$), so ist das Hagen–Poiseuillesche Gesetz nicht länger anwendbar. Die Volumenstromstärke J verringert sich dann abrupt und der Strömungswiderstand wächst. Die Wegstrecke, welche ein Volumenement des Fluids bei der Rohrpassage zurücklegt, ist dann nicht mehr durch die Rohrlänge L gegeben. Durch die Wirbel ist dieser Weg nun in der Regel deutlich größer, was höhere Reibungsverluste bedingt. Für das Experiment folgt daraus, dass die Viskosität bei einer turbulenten Strömung nicht aus der Messung der Größen J und p sowie der geometrischen Größen L und R nach dem Hagen–Poiseuilleschen Gesetz bestimmt werden kann.

Reibungsarbeit und Maximaldruck: Bei der Ableitung des Hagen–Poiseuilleschen Gesetzes wurde vom parabolischen Geschwindigkeitsprofil (8) ausgegangen. Damit sich dieses Profil vollständig ausbilden kann, muss eine hinreichend große Rohrlänge gegeben sein.

Mit der gesamten Fluidmasse im Rohr, $m = \pi R^2 L \rho$, und der mittleren Geschwindigkeit (10) gilt,

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot \bar{v}^2 = \frac{m}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \bar{v}^2 .$$

Unter Beachtung von (10) erhält man,

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{\pi R^2 L \rho}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{J}{\pi R^2} \right)^2 \\ &= \frac{2L\rho J^2}{3\pi R^2} . \end{aligned} \quad (14)$$

Durch den Druck $p = F_R / \pi R^2$ wird am gesamten Fluidvolumen, das sich im Rohr der Länge L befindet, die Arbeit

$$W_{\text{reib}} = F_R \cdot L = \pi R^2 \cdot p \cdot L \quad (15)$$

verrichtet. Mit dem Strömungsleitwert (11) gilt,

$$\frac{W_{\text{reib}}}{\Delta t} = G \cdot p^2 = J \cdot p = \frac{\Delta V \cdot p}{\Delta t} .$$

Dies ist die Reibungsleistung, also die Reibungsarbeit, welche am Fluid im Innenvolumen $\Delta V = \pi R^2 L$ des Rohres während der Durchstömungszeit Δt geleistet wird. Die Energiemenge W_{reib} erwärmt die Fluidmasse im Rohr. Nur wenn

$$W_{\text{reib}} > E_{\text{kin}} \quad (16)$$

gilt, ist die geleistete Arbeit groß genug, damit sich das volle Geschwindigkeitsprofil (8) einstellen kann,

welches der kinetischen Energie E_{kin} entspricht. Setzt man hier die Werte gemäß (14) und (15) ein, so geht die Bedingung (16) über in,

$$\frac{W_{\text{reib}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{3\rho}{2\rho} \left(\frac{\pi R^2}{J} \right)^2 = \frac{24L}{\text{Re} \cdot R} > 1 . \quad (17)$$

Dies ist für eine hinreichend große Rohrlänge erfüllt,

$$L > L_A \equiv \frac{R}{24} \cdot \text{Re} \quad (18)$$

Erst nach der sogenannten *Anlaufstrecke* L_A kann sich das Geschwindigkeitsprofil (8) aufbauen. Am Einlauf ist das Geschwindigkeitsprofil zunächst nahezu konstant.

3 Versuchsdurchführung

3.1 Geräte und Vorgehensweise

Den Versuchsaufbau zeigt Abb. 5. Es stehen fünf Schläuche (Rohre) zur Verfügung:

Schlauchlänge L / mm	Radius R / mm
≈ 600	1
≈ 1000	1
≈ 2000	1
≈ 1000	0,5
≈ 1000	1,5

Die konkreten Schlauchlängen sind auszumessen.



Abb. 5: Geräte zur Versuchsdurchführung: Stativ mit oberen und unteren Messbecher, diverse Schläuche, Ansaugspritze, Stoppuhr und Stahllineal.

Das Wasser befindet sich in zwei Bechern. Der höher gelegene Becher ist auf einer höhenverstellbaren Halterung an einem Stativ platziert.

Zu Beginn einer Messung wird der obere Becher mit einer hinreichend großen Menge Leitungswasser gefüllt und der verwendete Schlauch in den Schlauchhalter eingefädelt. Zum Ansaugen des Wassers steht eine Spritze (Zylinder mit Kolben) zur Verfügung. Nach dem Ansaugen wird der nun schon Wasser leitende Schlauch in den Schlauchhalter des unteren Bechers eingefädelt. Während der gesamten Messzeit müssen die Schlauchenden möglichst zentrisch im Wasservolumen der entsprechenden Becher eingetaucht bleiben.

Die Zeitmessung beginnt, wenn der obere Wasserpegel eine zu wählende Marke auf der Messskale am oberen Becher passiert oder bei einem selbstgewählten Gewicht des unteren Messbechers auf der ebenso bereitgestellten Waage. Sie endet, wenn $\Delta V = 100$ ml Wasser abgeflossen sind.

Zu Beginn und Ende der Messzeit ist der jeweilige Höhenunterschied $h(0)$ und $h(\Delta t)$ zwischen der oberen und unteren Wasseroberfläche zu messen. Dazu dient ein 1-Meter-Stahllineal.

Die Temperatur des Wassers im oberen Becher ist mit einem Flüssigkeitsthermometer zu ermitteln. Zur Erwärmung des Wassers steht ein elektrischer Wasserkocher zur Verfügung (nicht gezeigt im Bild).

3.2 Druck

Im Experiment fließt das Wasser im Gravitationsfeld der Erde, mit der Erdbeschleunigung

$$g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (19)$$

aus einem oberen Reservoir in ein unteres, Abb. 6. Die Druckdifferenz p zwischen den Schlauchenden ergibt sich wie folgt aus der Höhendifferenz h der Reservoirs:

Das obere Schlauchende ragt in die Flüssigkeit, wodurch sich der Druck am Schlauchende um den Tiefendruck gegenüber dem Luftdruck erhöht. In gleichem Maße steigt jedoch der Druck im Inneren des Schlauches vom Schlauchanfang bis zur Höhe h_0 . Folglich stellt sich im Inneren des Schlauches auf der Höhe h_0 der äußere Luftdruck ein.

Im absteigenden Abschnitt zwischen den Höhen h_o und h_u befindet sich eine Wassersäule, deren Hangabtriebskraft die Strömung antreibt.

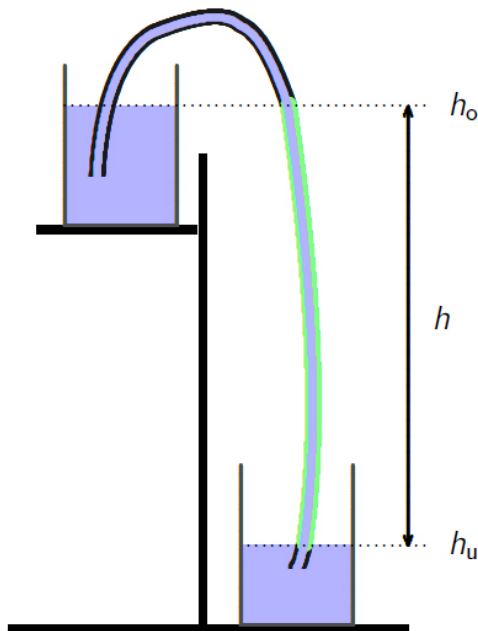


Abb. 6: Versuchsaufbau, schematisch (s. Text).

Dabei ist die Krümmung des Schlauchs irrelevant, es zählt allein der Höhenunterschied h . Ist er beispielsweise zwischen den Höhenmarken h_u und h_o stärker gewunden, so vergrößert sich seine Länge und somit auch das enthaltene Fluidgewicht. In gleichem Maße nimmt jedoch auch die Hangabtriebskraft ab, weil sich die Neigungswinkel entsprechend ändern. Dies erklärt auch, dass sich die Hangabtriebskräfte im auf- und absteigenden Bereich des Schlauches oberhalb der Marke h_o kompensieren, nahezu unabhängig davon, wie der Schlauch geführt wird. Somit wird letztlich die Fluidströmung durch den Druckunterschied

$$p = \rho \cdot h \cdot g \quad (20)$$

angetrieben. Setzt man dies in (9) ein, so lässt sich das Hagen–Poiseuillesche Gesetz unter Beachtung von $\nu = \eta/\rho$ wie folgt umschreiben,

$$J = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi g}{8} \cdot \frac{R^4 h}{\nu L} \quad (21)$$

bzw. zu

$$\nu = \frac{\pi g}{8} \cdot \frac{R^4 \cdot h \cdot \Delta t}{L \cdot \Delta V} \quad (22)$$

Zudem ergibt sich das Verhältnis (17) aus Reibungsarbeit und kinetischer Energie bei laminarer Strömung unter Beachtung von (20) zu,

$$\frac{W_{\text{reib}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{3gh}{2} \left(\frac{\pi R^2 \cdot \Delta t}{\Delta V} \right)^2 \quad (23)$$

3.3 Mittlere Höhe

Während der Messdauer $t = 0 \dots \Delta t$ verringert sich der Höhenunterschied $h_{o,u}(t) = h_o(t) - h_u(t)$ der Fluidoberflächen des unteren und oberen Bechers. Die obere Höhe $h_o(t)$ fällt, die untere Höhe $h_u(t)$ steigt (Abb. 6, oben). In (20) und (21) sowie den folgenden Gleichungen ist für h die mittlere Höhe während der Messzeit Δt zu verwenden,

$$h = \frac{h_{o,u}(0) + h_{o,u}(\Delta t)}{2} \quad (24)$$

Dies ist gerechtfertigt, weil nach (21) die Volumenstromstärke J nur linear von h abhängt. Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass die Querschnittsfläche eines jeden der beiden Becher im relevanten Höhenbereich konstant ist. Diese beiden Querschnittsflächen müssen aber nicht gleich groß sein.

A Anhang

A.1 Turbulenzen in Technik und Natur

Flugzeug: Die Flügel eines Flugzeugs werden im normalen Flugbetrieb von der Luft (nahezu) laminar umströmt. Oberhalb der Flügel ist dann der Weg der Luftteilchen länger als unterhalb, wodurch hier ein größerer Druck als oberhalb wirkt. Dies führt zu einer Auftriebskraft, welche das Gewicht des Flugzeugs kompensiert und somit das Fliegen ermöglicht.

Durch den Überdruck unter dem Flügel strömt unmittelbar jenseits der Flügelspitzen Luft von unten nach oben in den Unterdruckbereich, wobei Luftwirbel entstehen, die dem Flugzeug Energie entziehen. Damit erhöht sich der Strömungswiderstand und somit letztlich der Kerosinverbrauch. Zur Unterdrückung bzw. Minderung dieser unerwünschten Turbulenzen werden heutzutage sogenannte *Winglets* (einseitig nach oben) oder auch *Sharklets* (zweiseitig nach oben und unten) an den Flügelspitzen angebracht, wodurch den Treibstoffverbrauch um 3 bis 5% sinkt.

Windpark: Ähnliche Probleme wie bei Flugzeugen bestehen auch in Windparks zur Stromerzeugung. Stehen die Windräder allzu eng, können bei ungünstigen Windrichtungen die in Luv stehenden Räder Wirbelschleppen in Richtung der Lee-Räder verursachen, was hier Strömungsabrisse und damit schlechtere Wirkungsgrade bedingt. Darüber hinaus würden turbulente Luftströmungen die Räder in erratische Schwingungen versetzen und somit die Flügel und Getriebe mechanisch stärker belasten, was die Anlagen schneller verschleißt lässt. Winglets finden sich zunehmend auch an Rotorblättern von Windkraftanlagen, was Wirbelschleppen abschwächt und Rotorblätter schont.

Kraftwerke: In großtechnischen Rohrsystemen sind die Strömungen oftmals turbulent. Beispielsweise tragen sie in Wasserkraftwerken zu Verringerung des Wirkungsgrads bei. Hier erreicht die Reynoldszahl Werte von $> 10^6$.

Tiere: Auch im Tierreich finden sich viele Beispiele für strömungsphysikalisch optimierte Formgebungen. So finden sich beispielsweise bei großen Raub-

vögeln an den Flügelen den Federn, die den Winglets bei Flugzeugen entsprechen. Eulen haben ein sehr weiches feingliedriges Federkleid, wodurch Turbulenzen und somit Fluggeräusche stark gemindert werden. Die Körperform von Pinguinen, vom Schnabel über den Kopf und Rumpf, sorgt für sehr geringe Stömungswiderstände im Wasser, indem insbesondere große Wirbelstrukturen in den unvermeidbaren Wirbelschleppen unterdrückt werden.

Blutstrom im Menschen: Die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} des Blutstroms in der Aorta (große Körperschlagader, Radius $R \approx 1,25 \text{ cm}$) hat während der Kontraktion des Herzmuskels (Systole) den Wert $\bar{v} \approx 1,2 \text{ m/s}$. Mit der kinematischen Viskosität $\nu \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ folgt nach (6) die Reynoldszahl ,

$$\text{Re} \approx 10^4 > \text{Re}_c .$$

Sie übersteigt die kritische Reynoldszahl $\text{Re}_c = 2040$ nahezu um das 5-fache, die Strömung ist also turbulent. Die Strömung wird hier durch die Viskosität des Blutes und die Rauigkeit der inneren Gefäßwand bestimmt. Kommt es durch Blutgerinnsel (Thromben) zu lokalen Einengungen des Gefäßes, so steigt die Reynoldszahl in diesem Abschnitt stark an, was das Herz stärker belastet. Elastische Gefäßwände würden sich weiten und damit den Strömungswiderstand verringern, was allerdings bei Verkalkungen (Atherosklerose) nur noch eingeschränkt möglich ist. Mit blutverdünnenden Medikamenten kann die Viskosität des Blutes gesenkt werden, was bei sonst gleichbleibenden Bedingungen eine ausreichende Blutversorgung des Körpers befördert.

In kleineren Blutgefäßen (Kapillaren) erhält man für $\nu \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $R = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ und $\bar{v} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ die Reynoldszahl

$$\text{Re} \approx 12 \cdot 10^{-4} \ll \text{Re}_c .$$

Folglich ist die Strömung hier laminar. Sie wird deshalb wesentlich durch die Viskosität des Blutes bestimmt, die Rauigkeit der inneren Kapillarwand hat hier kaum einen Einfluss.

Ist der Durchmesser eines Blutgefäßes noch kleiner, und zwar in der Größenordnung von Blutzellen, dann gelten wiederum andere Gesetzmäßigkeiten für die Volumenstromstärke. Nun reihen sich die Blutzellen wie in eine Kette. Dies führt effektiv zu deutlich größeren Werten der Volumenstromstärke, als sie nach den oben genannten Gesetzen berechnet würden.

A.2 Messergebnisse

<p>L: Rohrlänge h: mittlere Höhe ΔV: Volumen ν: kinematische Viskosität $Re_c = 2040$: kritische Reynoldszahl</p>		<p>R: Rohrradius T: Temperatur Δt: Zeit Re: Reynoldszahl $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: Erdbeschleunigung</p>
--	--	---

$$\nu = \frac{\pi g}{8} \cdot \frac{R^4 \cdot h \cdot \Delta t}{L \cdot \Delta V} \qquad Re = \frac{2 \cdot \Delta V}{\pi \cdot R \cdot \nu_{Lit} \cdot \Delta t} \qquad \frac{\nu_{Lit}(T)}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 1,87 \cdot 10^{-9} \cdot \exp\left(\frac{1840 \text{ K}}{T}\right)$$

$$\frac{W_{reib}}{E_{kin}} = \frac{3gh}{2} \cdot \left(\frac{\pi R^2 \cdot \Delta t}{\Delta V}\right)^2$$

#	L m	R mm	h m	T K	ΔV 10 ⁻⁶ m ³	Δt s	ν 10 ⁻⁶ m ² /s	Re Re _c	W _{reib} E _{kin}
Messaufgabe 1									
1									
2									
3									
Messaufgabe 2									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
Messaufgabe 3									
10									
11									
12									