**Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald**

| Praktikum für Studierende der Physik<br>**Versuch M5 - Gekoppelte Pendel** | | |
|---|---|---|
| Name: | Mitarbeiter: | |
| Gruppennummer: | lfd. Nummer: | Datum: |

## 1. Aufgabenstellung

Untersuchen Sie das zeitliche Verhalten gekoppelter mathematischer Pendel.

### 1.1. Versuchsziel

Beschäftigen Sie sich mit folgenden Schwerpunkten des Versuches:

- Modell des Massepunktes
- Begriffe und Kenngrößen zur Beschreibung des Schwingungsvorgangs
- Bewegungsgleichung des Pendels und ihre Lösung
- gekoppelte Systeme, Fundamentalschwingungen, Schwebung

### 1.2. Messungen

1.2.1. Bestimmen Sie für acht Kopplungslängen $l$ $(0{,}2\,\mathrm{m} \le l \le 0{,}9\,\mathrm{m})$ die Schwingungsdauern $T_{geg}$ und $T_{gl}$ der Fundamentalschwingungen aus jeweils 50 Schwingungen.

1.2.2. Bestimmen Sie die Zeiten $T_I$ und $T_{II}$ für den Schwebungsfall bei den entsprechenden Kopplungslängen.

1.2.3. Lassen Sie für die Kopplungslängen $l_1 = 0{,}7\,m$ und $l_2 = 0{,}9\,\mathrm{m}$ die Zeitverläufe von zwei vollständigen Schwingungen (a) mit dem Schreiber und (b) unter Verwendung von VideoCom aufzeichnen. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

### 1.3. Auswertungen

1.3.1. Berechnen Sie mittels Gl.(10) aus den Messwerten für $T_{gl}$ und $T_{geg}$ die Zeiten $T_I$ und $T_{II}$. Stellen Sie in einer Tabelle die berechneten und die experimentell ermittelten Werte gegenüber.

1.3.2. Berechnen Sie den Kopplungsgrad $k$ für die verschiedenen Kopplungslängen $l$ mit der Gl.(12) einerseits aus den gemessenen Zeiten $T_{gl}$ und $T_{geg}$ und anderseits aus den Werten $T_I$ und $T_{II}$. Stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle dar.

1.3.3. Stellen Sie in einem Diagramm den Grafen $k(l^2)$ dar.

1.3.4. Zeichnen Sie ein $y = f(x)$ – Diagramm mit $y = \omega_{geg} - \omega_{gl}$ und $x = k$

1.3.5. Ermitteln Sie aus der Aufnahme mit VideoCom (unter Verwendung der Software) die Schwingungsfrequenz sowie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Pendelkörper.

### 1.4. Zusatzaufgabe

Folgende Parameter sind gegeben: $\omega_0 = 4 \cdot s^{-1}$ und $\omega_{geg} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} = 6 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Stellen Sie mit Gl.(7) $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ grafisch dar:Horizontal wird der Winkel ($\alpha \sim t$) abgetragen, dabei sollte einem Winkel von $\alpha = 10°$ (d.h. $\hat{\alpha} = 0{,}1746$) eine Strecke von 5mm entsprechen. Vertikal wird die Elongation abgetragen, wobei die Amplitude $\hat{\alpha} = 1$ gesetzt wird, was maßstäblich 50 mm entsprechen sollte.

## 2. Grundlagen

Wirken zwischen schwingungsfähigen Systemen Kräfte, die von der Auslenkung aus der Ruhelage abhängen, so nennt man sie gekoppelte Systeme. Schwingungen in gekoppelten Systemen spielen in der Technik eine wichtige Rolle (Mechanik, Elektrotechnik,...).
Ein besonders einfaches und instruktives Beispiel liefert die Untersuchung zweier "sympathischer" Pendel (Abb. 1).

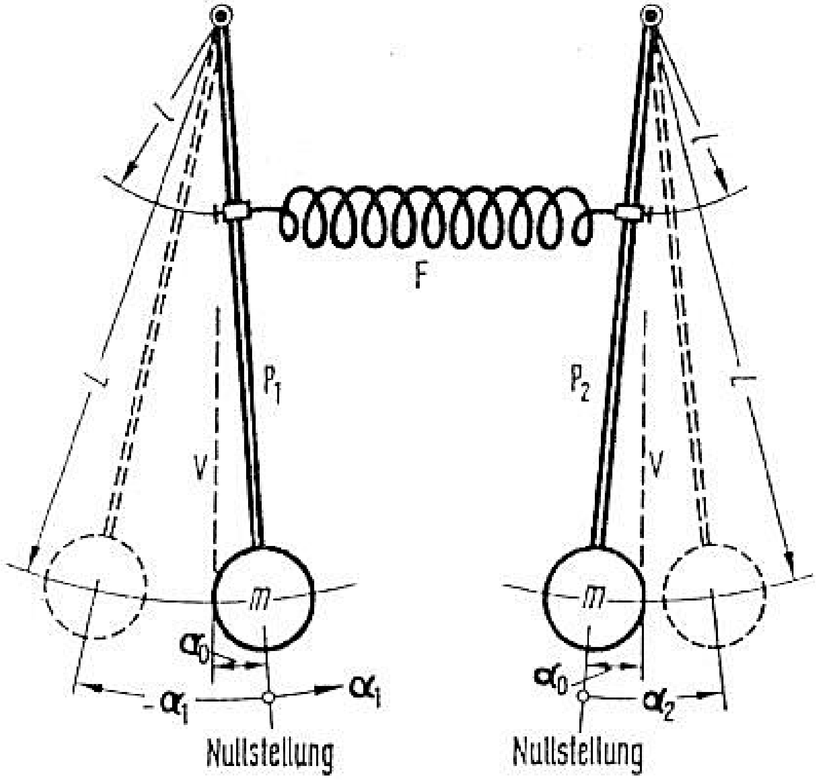


**Abb. 1** Skizze des gekoppelten Pendels

Zwei gleiche Schwerependel $P_1$ und $P_2$ (gleiche Masse $m$, gleiche Pendellänge $l$) sind über eine weiche Spiralfeder F lose gekoppelt. Die Anordnung entspricht dem Resonanzfall, da beide Pendel dieselbe Eigenfrequenz haben. Um die Bewegungsgleichungen der beiden Pendel sehr einfach formulieren zu können, setzen wir voraus, dass

- beide Pendel in der gleichen Ebene schwingen,
- die Schwingungsamplituden klein sind,
- Reibung und damit Dämpfung vernachlässigbar sind.

Wir vereinbaren, alle von der Ruhelage aus nach rechts auftretenden Winkel und die in dieser Richtung wirkenden Drehmomente positiv, diejenigen nach links dagegen negativ zu rechnen.
Gemäß der allgemeinen Bewegungsgleichung gilt:

$$M = J\ddot{\alpha} \qquad (1)$$

worin $M$ das angreifende Drehmoment, $J$ das Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse und $\ddot{\alpha}$ die momentane Winkelbeschleunigung bedeuten. In der Ruhelage zeigt das Pendel $P_1$ einen Ausschlag $\alpha_0$ gegen die Vertikale und Pendel $P_2$ einen Ausschlag $-\alpha_0$

Von diesen Nulllagen aus zählen wir die momentanen Ausschläge $\alpha_1$ und $\alpha_2$. In der Ruhelage heben sich die von der leicht gespannten Feder und die von der Schwerkraft herrührenden Drehmomente auf. In der Nulllage übt die Feder F mit der Federkonstanten $D_F$ auf $P_1$ ein Drehmoment $M_{F,0} = D_F x_o l$, die Schwerkraft übt das entgegengesetzt gleiche Drehmoment $M_{S,0} = - mg\, L\alpha_0$ auf $P_1$ aus. Bei einer Auslenkung der Pendel um die Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ wird durch das zusätzliche Auftreten weiterer Drehmomente der Gleichgewichtsfall gestört. Als resultierende Drehmomente ergeben sich für $P_1$

$$M_1 = D_F x_o l - m\, g\, L\, \alpha_0 - D_F\, l^2\, \alpha_1 - m\, g\, L\, \alpha_1 + D_F\, l^2\, \alpha_2 \tag{2}$$

und für Pendel $P_2$

$$M_2 = -D_F x_o l + m\, g\, L\, \alpha_0 - D_F\, l^2\, \alpha_2 - m\, g\, L\, \alpha_2 + D_F\, l^2\, \alpha_1 \tag{3}$$

Durch Umformung ergeben sich mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = m\, g\, L / J \quad und \quad \Omega^2 = D_F\, l^2 / J$$

die Bewegungsgleichungen der beiden Pendel:

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_0{}^2 \alpha_1 = -\Omega^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \tag{4a}$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \omega_0{}^2 \alpha_2 = -\Omega^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \tag{4b}$$

Für spezielle Anfangsbedingungen, die sich experimentell leicht realisieren lassen, nehmen die Lösungen $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ der beiden Differentialgleichungen (4a,b) einfache Gestalt an:

1. Beide Pendel werden aus der Ruhelage um den gleichen Winkel $\alpha_a$ ausgelenkt und aus dem Stillstand losgelassen, d.h.

   $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_a$ , $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = 0$ für $t = 0$

   Lösung:

   $$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha_a \cos \omega_0 t \tag{5}$$

   Diese gleichphasige Schwingung heißt die **erste Fundamentalschwingung** und ist von der Kopplung unabhängig.

2. Beide Pendel werden entgegengesetzt um gleiche Winkel ausgelenkt und aus dem Stillstand losgelassen, d.h.

   $\alpha_1 = - \alpha_2 = \alpha_a$ , $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = 0$ für $t = 0$

   Lösung:

   $$\alpha_1(t) = -\alpha_2(t) = \alpha_a \cos\sqrt{\omega_0{}^2 + 2\Omega^2}\, t \ ; \qquad \sqrt{\omega_0{}^2 + 2\Omega^2} = \omega_{geg} \tag{6}$$

   Durch den Einfluss von $\Omega$ auf $\omega_{geg}$ ist diese **zweite Fundamentalschwingung** stark von der Kopplung abhängig.

3. Nur ein Pendel wird ausgelenkt und aus dem Stillstand losgelassen, d.h. $\alpha_1 = \alpha_a$, $\alpha_2 = 0$ , $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = 0$ für $t = 0$

Lösung:

$$\alpha_1(t) = \alpha_a(t)\cos\frac{\sqrt{\omega_0{}^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2}t\cos\frac{\sqrt{\omega_0{}^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}t$$

und (7a,b)

$$\alpha_2(t) = \alpha_a(t)\sin\frac{\sqrt{\omega_0{}^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2}t\sin\frac{\sqrt{\omega_0{}^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}t$$

Diese Lösung nennt man **Schwebung.**

Bei loser Kopplung gilt näherungsweise

$$\frac{\sqrt{\omega_0{}^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} = \frac{\Omega^2}{2\omega_0} = \omega_I$$

(8a,b)

$$\frac{\sqrt{\omega_0{}^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} = \frac{\Omega^2}{2\omega_0} + \omega_0 = \omega_{II}$$

Diese Lösung beschreibt einen Schwebungsvorgang. Die Energie überträgt sich periodisch von einem Pendel zum anderen.

Die Kreisfrequenzen $\omega$ sind über die Schwingungsdauern $T$ experimentell leicht zu bestimmen:

$$\omega_{geg} = 2\pi/T_{geg}\,, \quad \omega_{gl} = 2\pi/T_{gl}\,, \quad \omega_I = \pi/T_I\,, \quad \omega_{II} = 2\pi/T_{II} \qquad (9)$$

**Beachte!** Unter Punkt 3 bedeutet $T_I$ die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendelkörpers, während $T_{II}$ seine eigentliche Schwingungsdauer bedeutet.

Folgende Zusammenhänge lassen sich ableiten, die auch experimentell leicht überprüfbar sind:

$$T_I = \frac{T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \qquad \text{und} \qquad T_{II} = \frac{2T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}} \qquad (10)$$

Für eine feste Koppellänge $l$ (Entfernung Drehachse - Angriffspunkt der Feder) definiert man den **Kopplungsgrad** ***k*** der beiden Pendel:

$$k = \frac{\Omega^2}{\omega_0{}^2 + \Omega^2} = \begin{cases} 0 \text{ ohne Kopplung} - \Omega^2 \to 0 \\ 1 \text{ starre Kopplung} - \Omega^2 \to \infty \end{cases} \qquad (11)$$

Der Kopplungsgrad $k$ lässt sich durch die Kreisfrequenzen $\omega_{gl}$ und $\omega_{geg}$ bzw. $\omega_I$ und $\omega_{II}$ oder durch die Zeiten $T_{gl}$ und $T_{geg}$ bzw. $T_I$ und $T_{II}$ ausdrücken und somit experimentell bestimmen:

$$k = \frac{\omega^2{}_{geg} - \omega^2{}_{gl}}{\omega^2{}_{geg} + \omega^2{}_{gl}} = \frac{T^2{}_{gl} - T^2{}_{geg}}{T^2{}_{gl} + T^2{}_{geg}} \qquad (12a)$$

oder

$$k = \frac{2\omega_I\omega_{II}}{\omega_I{}^2 + \omega_{II}{}^2} = \frac{4T_IT_{II}}{4T_I{}^2 + T_{II}{}^2} \qquad (12b)$$

## 3. Experiment

### 3.1. Geräte

- Zweikanal-Kompensationsbandschreiber SE 120
- Doppelnetzgerät PS280
- 2 Pendel
- Lineal
- CCD - Kamera
- Stoppuhr

### 3.2. Versuchsanordnung

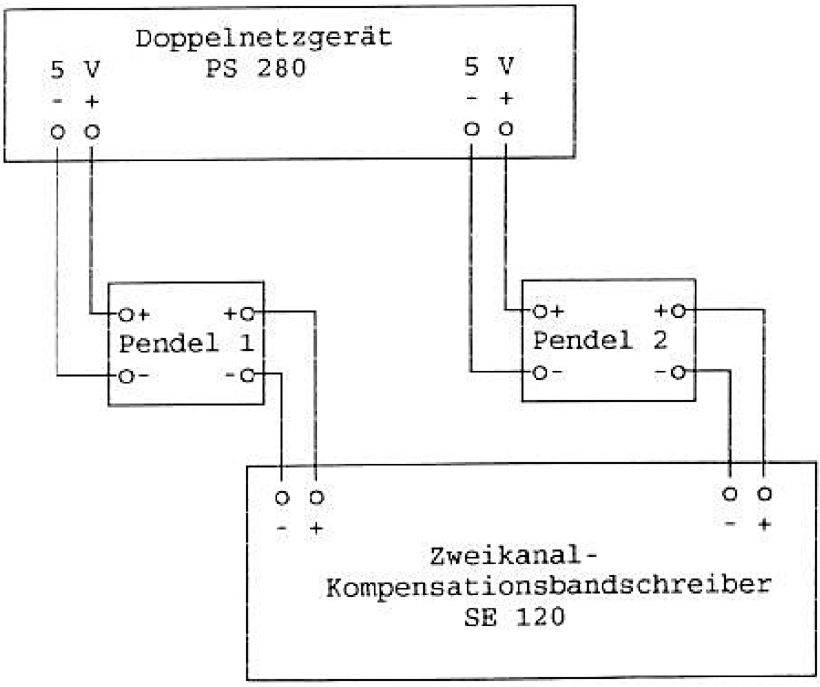


**Abb. 2** Versuchsaufbau beim Versuch "Gekoppelte Pendel“ zur Registrierung der Schwebung mittels eines Zweikanal-Kompensationsbandschreibers.

Der Versuchsaufbau besteht aus zwei Pendeln, die mit Schreiberanschlüssen versehen sind und eine Aufzeichnung der Zeitverläufe beider Schwingungen gestatten. Zu diesem Zweck müssen die an den Drehachsen montierten Potentiometer mit Gleichspannungen versorgt werden. Den Buchsenpaaren (rot/blau) werden zwei voneinander unabhängige Gleichspannungen von je 5 V aus einem Doppelnetzgerät zugeführt. Der Schreiberanschluss geschieht über die gelben Buchsenpaare. Nähere Angaben sind der PHYWE - Bedienungsanleitung "Pendel mit Schreiberanschluss" zu entnehmen.
Der Y1/Y2/t-Kompensationsbandschreiber ist ein empfindliches Registriergerät und ist sehr sorgfältig zu behandeln. Folgende Parameterwerte werden empfohlen:

Empfindlichkeit: 1 V/cm
Papiervorschub: 12 cm/min
Pendelausschläge: max. 10 cm

Beide Nullpunkte sind geeignet einzustellen, damit sich die Registrierkurven nicht überschneiden.

Mit dem Potentiometerdrehknopf **var** kann die Amplitude der aufgezeichneten Schwingung optimal angepasst werden.
Der PEN-Hebel gestattet, die Schreiberfedern bei Nichtgebrauch vom Papier abzuheben. Dies ist unbedingt erforderlich, damit keine Registriertinte ausläuft! Im unbenutzten Zustand müssen beide Schreiberfedern mit Kappen verschlossen werden, um Eintrocknung zu vermeiden. Beachten Sie auch die Schaltskizze!

### 3.3. Untersuchung des gekoppelten Pendels mit VideoCom

VideoCom eignet sich gut zur Aufnahme und Auswertung eindimensionaler Bewegungen. Das System besteht aus einer einzeiligen CCD-Kamera (Charge-Coupled Device). Auf einer CCD-Zeile mit 2048 Pixel können mehrere Körper abgebildet und damit ihre Positionen bestimmt werden. Jeder Pixel ist 14 µm breit und 200 µm hoch. Damit kann ein 50-mm-Objektiv für Kleinbildkameras verwendet werden. Mit dem Objektiv hat man die Möglichkeit, Blende und Entfernung manuell einzustellen. Die VideoCom und der bewegte Körper haben etwa einen Abstand von 2 m. Dadurch kann die Position des Mittelpunkts des bewegten Körpers mit 0,25 mm aufgelöst werden. Die Genauigkeit der Positionsbestimmung hängt aber von mehreren Faktoren wie eine kurze Belichtungszeit, hoher Kontrast und der Linearität der CCD-Zeile ab.
Die Kamera hat eine Belichtungszeit von 1/800 s. Diese kurze Zeit ist notwendig, damit die Bewegung nicht unscharf wird. Wenn sich ein Körper bewegt, dann ist die Unschärfe an dessen Rändern etwa gleich groß. Der Fehler des Körpermittelpunktes ist damit kleiner.
Der hohe Kontrast wird benötigt, um den bewegten Körper deutlich vom Hintergrund abbilden zu können. Deshalb wird der Körper mit retroreflektierender Folie beklebt. Retroreflektierend bedeutet, dass der Lichtstrahl in seine Ausgangsrichtung reflektiert wird.
Die Folie wird von hellen LEDs angeblitzt. Diese Leuchtdioden befinden sich direkt vor dem Objektiv. Durch automatisches Einstellen der Leuchtdauer der Leuchtdioden zwischen 1/4000 s und 1/800 s wird eine automatische Lichtmengenregelung erreicht, dieses ist nötig, da man bei Sättigung der CCD-Zeile ein unbrauchbares Ergebnis erhält. Bei zu geringer Lichtmenge ist der Reflex nicht mehr richtig zu erkennen.
Die Kamera kann während der Messung maximal 80 mal in der Sekunde die einzelnen Positionen überprüfen und die Daten über ein USB-Kabel an einen Computer senden. Der Computer ist damit noch während der Messung in der Lage die Bewegungen der Körper zu visualisieren. Nach einer Messung können die Daten dann ausgewertet werden.


**Abb. 3:** CCD-Kamera.

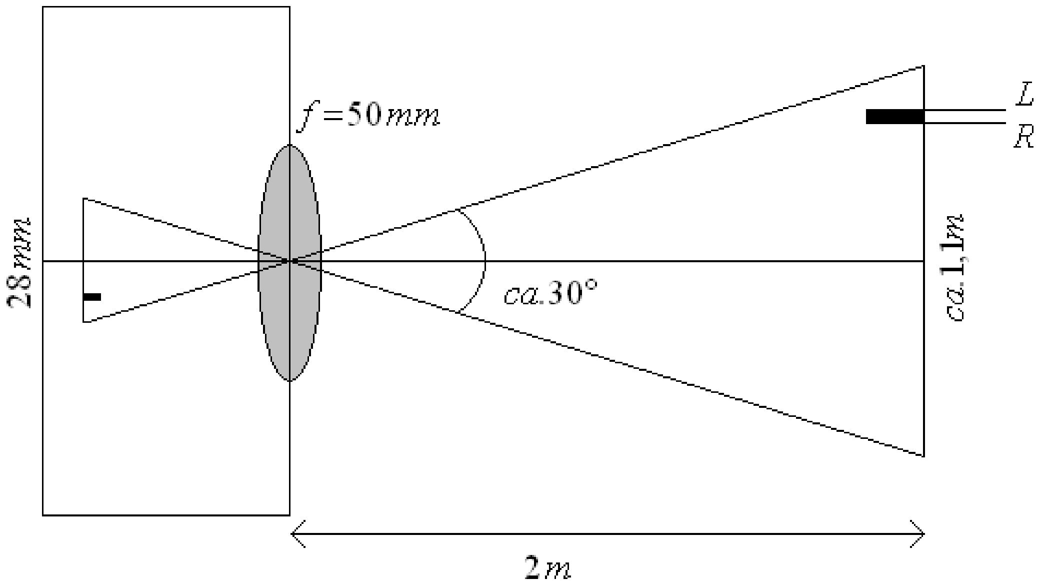


**Abb. 4**: Schema des Versuchaufbaus von oben**.**

**(**Die Brennweite des Objektivs beträgt 50 mm und der Abstand der Kamera zum bewegten Körper beträgt ca. 2 m. Damit kann die Kamera einen Bereich von ca 1,1 m abdecken**.)**

### 3.3.1. Durchführung

Der Versuch gekoppeltes Pendel mit VideoCom wird fast genauso ausgeführt wie mit dem mechanischen Schreiber. Der Unterschied besteht darin, dass die Kamera (Abb. 3) gemäß der Abb. 4 aufgestellt werden muss. Es ist dabei darauf zu achten, dass die Kamera mittig zu den beiden Pendeln aufgestellt ist und die Hauptebene der Linse parallel zur Schwingungsebene der gekoppelten Pendel ist. Die Kamera befindet sich auf der Höhe der retroreflektierenden Folie, die an den Pendelkörpern angebracht ist.

### 3.3.3. Benutzung der Software

Die Software wird unter *Start/Programme/VideoCom/VideoCom Bewegungen* aufgerufen. Über den Reiter *Intensitätstest* wird die Kamera ausgerichtet und justiert. Da an den zunächst ruhenden Pendeln retroreflektierende Folie angebracht ist, sollten auf dem Bildschirm zwei Maxima deutlich zu erkennen sein! Falls das nicht der Fall ist, muss die Kamera solange eingestellt werden, bis diese zwei Peaks deutlich zu erkennen sind. Für eine einwandfreie Funktion sollten die Maxima möglichst gleich groß und mindestens fünfmal größer als der Untergrund sein. Damit ist auch gleichzeitig gewährleistet, dass die Kamera mittig zu den beiden Pendelkörpern aufgestellt ist. Störende Lichtquellen sollten vermieden werden. Die Maxima können auch durch die Blende an der Kamera angepasst werden.
Jetzt muss nur noch der Abstand der beiden Pendel angegeben werden. Man ruft durch Drücken der Taste *F5* oder durch Drücken auf das Werkzeugsymbol die Kalibrierung auf. Man wählt jetzt den Reiter *Wegkalibrierung* aus. Hier wir der Abstand der beiden Pendel angegeben. *1. Position:* 0 und *2. Position:* Abstand der Pendel. Danach klickt man auf *Pixel aus Anzeige ablesen* und *Kalibrierung verwenden* an. Alle anderen Parameter bleiben unberührt. Mit *OK* werden die Einstellungen bestätigt.
Nun kann das Experiment gestartet werden. Mit der Taste *F9* oder durch Klicken der Stoppuhr wird die Messung gestartet und auch wieder beendet.

### 3.3.4. Auswertung mit VideoCom

<u>Aufnahme der gekoppelten Schwingung</u>
Hier braucht man nur noch die Messung starten und wieder stoppen. Anschließend kann man sich das Messergebnis $s(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ über die jeweiligen Reiter *Weg*, *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* darstellen lassen. Die aufgenommenen Daten und Grafen können gespeichert werden, indem man in den jeweiligen Grafen mit der rechten Maustaste klickt und die Option *Tabelle kopieren* und *Diagramm kopieren/Bitmap* wählen. Anschließend können die zwischengespeicherten Daten in ein Textdokument kopiert werden. Soll die Messung wiederholt werden, so kann man die vorherigen Daten löschen, indem man *F4* drückt.

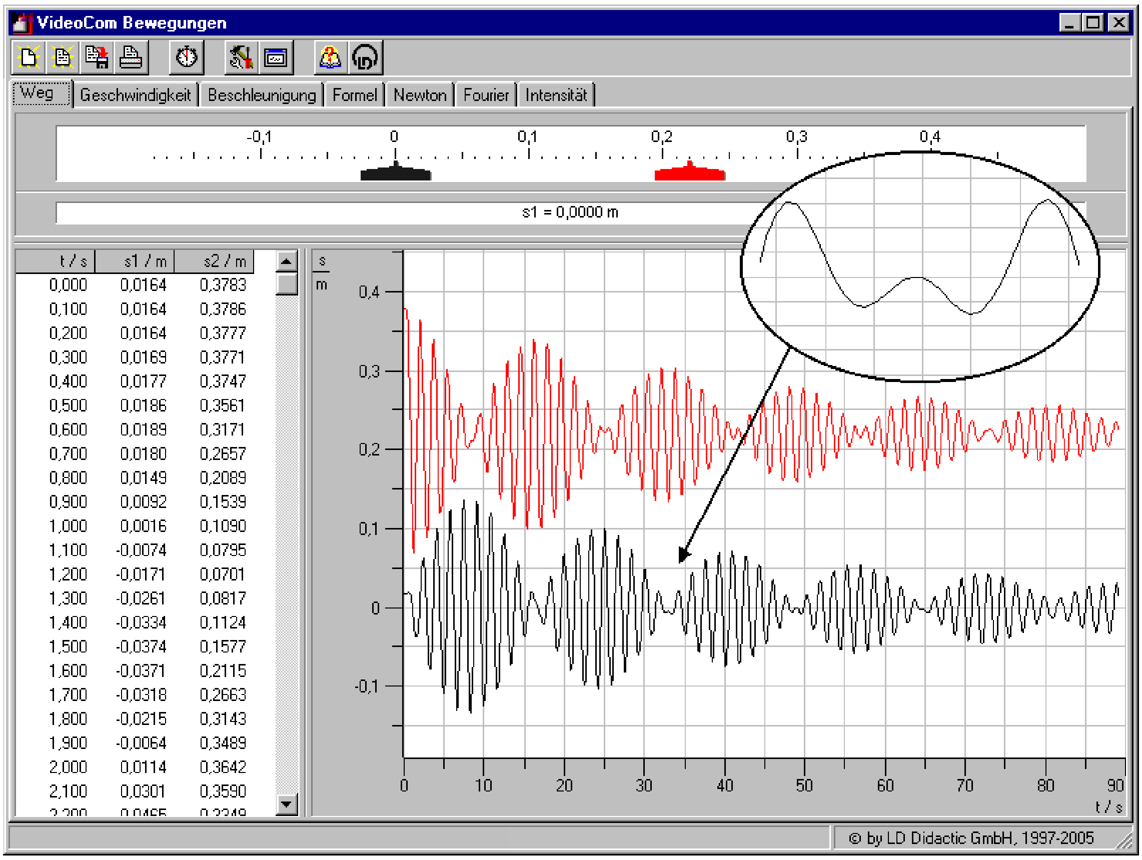


**Abb.5:** Darstellung einer gekoppelten Schwingung.

<u>Bestimmung der Schwingungsfrequenz</u>
Ein ausgewählter Kurvenbereich des $s(t)$-Diagramms lässt sich zur Bestimmung der Schwingungsfrequenz mit einer Fourieranalyse untersuchen. Dabei klickt man mit der rechten Maustaste in den Grafen und wählt *FFT* berechnen aus. Anschließend markiert man mit der linken Maustaste den Bereich, für den die Fouriertransformation gelten soll. Anschließend wählt man den Reiter Fourier aus. Das Ergebnis wird in einem A(f)-Diagramm angezeigt. Das Maximum der Amplitude wird dabei jeweils auf 100 % normiert. Die Fourier-Transformation der gekoppelten Schwingung zeigt deutlich die beiden angeregten Fundamentalschwingungen.

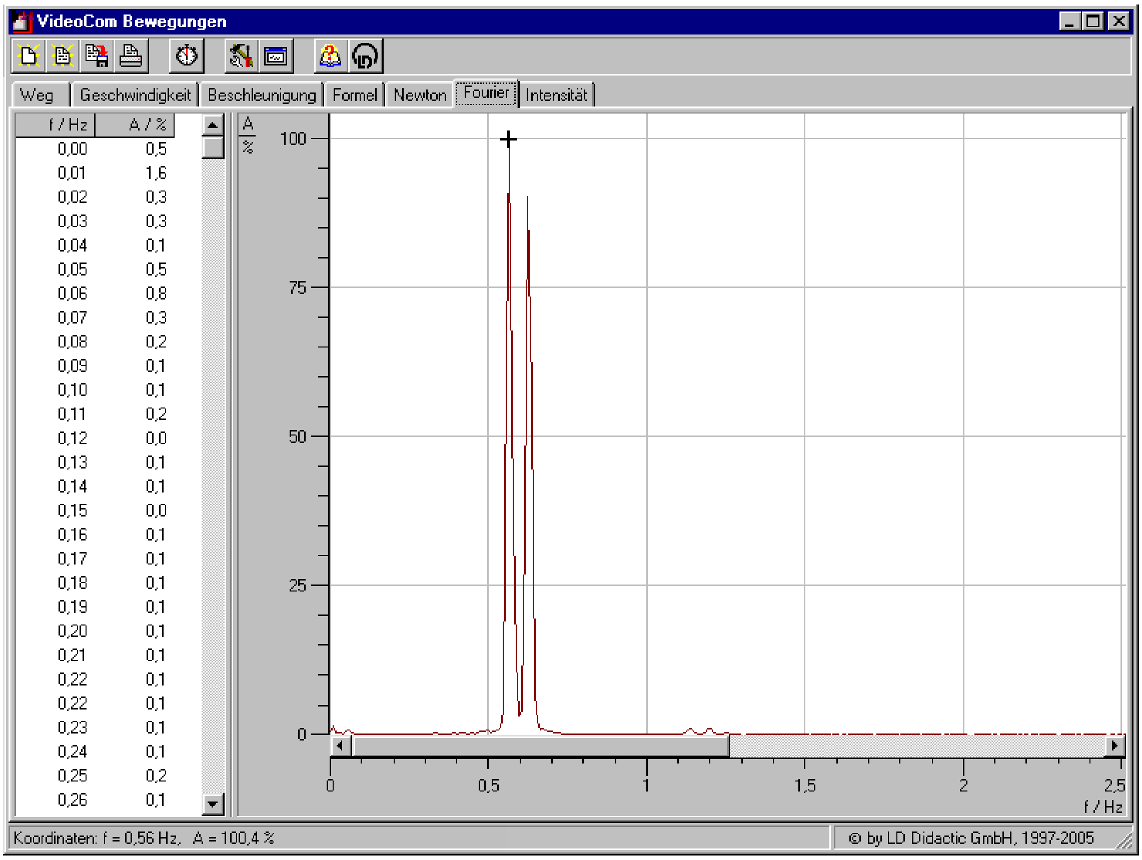


**Abb. 6:** Die Schwingungsfrequenz wurde durch eine Fourieranalyse bestimmt.

### Bildnachweis

Bedienungsanleitung zu VideoCom, LD Didactic GmbH, D-50354 Hürth