

Versuch A02: Spezifische Ladung des Elektrons	
Physik, Studentenfassung(10000) vom 21. März 2022	
Gruppe/Versuchs-Nr.: /	Datum:
Name 1:	Name 2:
Note Testat:	Note Testat:
Note Protokoll:	Betreuer:

- **Versuchsziel**

Bestimmung der massenspezifischen elektrischen Ladung e^* eines Elektrons sowie der Vertikalkomponente $B_{\text{Erde},z}$ des Erdmagnetfeldes;
Charakterisierung des künstlich erzeugten Magnetfelds im Experimentierraum als Voraussetzung für die Messungen von e^* und $B_{\text{Erde},z}$

- **Themen zur Vorbereitung**

Lorentz-Kraft; Biot-Savartsches Gesetz, Bahnkurve von bewegten Elektronen im Magnetfeld; Magnetfeld in der Umgebung von stromführenden Ring- und Helmholtzspulen, Erdmagnetfeld

- **Messaufgaben**

A: Messen Sie die Ablenkung s des Elektronenstrahls in einer Elektronenstrahlröhre in Abhängigkeit von der Stromstärke I in der Ringspule für Stromstärken im Bereich bis 10 A — dies dient der Bestimmung der spezifischen Ladung eines Elektrons.
Messen Sie s bei $I = 0$ auch für die um 180 Grad in Längsrichtung gedrehte Röhre — dies dient der Bestimmung der Stärke des Magnetfeldes der Umgebung.

Hinweise:

- (i) Führen Sie alle Messungen zumindest zweimal aus. Nutzen Sie zur Aufzeichnung die Tabelle im Anhang A.5. S. 26.
- (ii) Beachten Sie weitere Hinweise im Abschnitt 2.1.

B: Messen Sie die Werte des Kreisdurchmessers d der Elektronenbahnen im Fadenstrahlrohr. Aus diesen kann die spezifische Ladung eines Elektrons ermittelt werden.

Hinweise:

- (i) Wählen Sie für die Beschleunigungsspannung U die Werte ≈ 200 V und ≈ 250 V. Die Stromstärke I in der Helmholtz-Spule variieren Sie im Bereich bis zu 2 A, in geeignet kleinen Schritten.
- (ii) Nutzen Sie zur Aufzeichnung der Messwerte die Tabelle im Anhang A.6. S. 27.
- (iii) Beachten Sie auch die Hinweise im Abschnitt 2.2.

- **Sicherheitshinweise**

A: Die Ringspule darf nur kurzzeitig ($\lesssim 2$ min) bei Stromstärken $\gtrsim 5$ A betrieben werden, um ihre Überhitzung zu vermeiden.

B: Die maximale Heizspannung des Fadenstrahlrohrs beträgt 6,3V, die maximale Beschleunigungsspannung 300V. Höhere Spannungen können im Dauerbetrieb die Röhre zerstören. Die gehäuse-lose Fadenstrahlröhre darf während des Betriebs nicht berührt werden. In solchen Röhren (Glas- kolben) besteht Unterdruck weshalb sie bei stärkeren Erschütterungen implodieren würden.

• **Auswertung**

- A1:** Berechnen Sie aus den gemessenen Werten I_k , $k = 0,1,2, \dots$, der Stromstärke die zugehörigen Werte B_k der magnetischen Flussstärke nach (23). Bestimmen Sie die Empfindlichkeit E , Gl. (22) auf S. 10, durch lineare Regression der Werte B_k über s_k .
- A2:** Ermitteln Sie die spezifische elektrische Ladung e^* eines Elektrons nach Gl.(24). Schätzen Sie die Messabweichung von e^* . Berücksichtigen Sie dabei auch die radiale Variabilität der axialen magnetischen Feldstärke $H_z(z, x)$ im Bereich des Elektronenstrahls, welche besonders gut im Bild 18 auf S. 18 abgelesen werden kann.
- A3:** Bestimmen Sie nach (25) die Vertikalkomponente $B_{Erde,v}$ des Erdmagnetfeldes, mit Angabe der Messabweichung.
- B:** Ermitteln Sie aus den Messwerten vom Fadenstrahlrohr die spezifische Elektronenladung e^* nach Gl. (26) Schätzen Sie die Messabweichung von e^* . Berücksichtigen Sie dabei auch die radiale Variabilität der axialen magnetischen Feldstärke $H_{H,z}(z, x)$ im Bereich des Elektronenstrahls, welche besonders gut im Bild 22 auf S. 22 abgelesen werden kann.

• **Aufgaben zur Vorbereitung**

1. Welche Geschwindigkeit v hat ein Elektron beim Auftreffen auf den Schirm einer Elektronenstrahlröhre, wenn die Beschleunigungsspannung $U = 200 \text{ V}$ beträgt? Geben Sie v in Einheiten von m/s , km/h wie auch der Vakuumlichtgeschwindigkeit an.
2. Welche Zeit benötigt ein Elektron für einen Umlauf auf einem Kreis mit dem Radius $r = 7 \text{ cm}$ bei der Geschwindigkeit v der vorherigen Aufgabe.

1 Grundlagen

1.1 Lorentz-Kraft

Eine elektrische Punktladung Q bewege sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem Magnetfeld der Flussdichte \mathbf{B} . Dann wirkt auf sie die nach Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) benannte Kraft,

$$\mathbf{F}_L = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

Für ihren Betrag gilt,

$$F_L = Q v B \sin(\angle(\mathbf{v}, \mathbf{B})) .$$

Bei festen Werten für Q , v und B ist F_L am größten, wenn \mathbf{v} senkrecht zu \mathbf{B} steht, $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{B}) = 90^\circ$. Zeigen hingegen \mathbf{v} und \mathbf{B} in die gleiche Richtung, gilt also $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{B}) = 0$ oder $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{B}) = 180^\circ$, dann verschwindet F_L . Ein Elektron hat die elektrische Ladung $-e$, wobei

$$e \equiv 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \quad (2)$$

die *Elementarladung* bezeichnet.¹⁾ Für die Lorentz-Kraft folgt somit (Abb. 1),

$$\mathbf{F}_L = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (3)$$

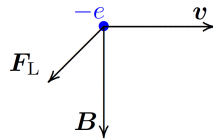


Abb. 1: Lorentz-Kraft \mathbf{F}_L , die auf ein Elektron der Ladung $-e$ wirkt, welches sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} im Magnetfeld der Flussdichte \mathbf{B} bewegt.

1.2 Bahnkurve eines Elektrons im Magnetfeld

Ein Elektron hat die Masse

$$m_e = 9,109\,383\,701\,5(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg} . \quad (4)$$

¹⁾ Die Elementarladung e ist eine der sieben Naturkonstanten, aus denen die sieben grundlegenden Maßeinheiten nach dem Internationalen Einheitensystem (SI) abgeleitet werden. Mit e und der Sekunde s wird die Einheit der elektrischen Stromstärke, das Ampere A , definiert,

$$1 \text{ A} \equiv e / (1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \cdot s) .$$

Die elektrische Ladungsmenge wird in der Einheit Coulomb $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}$ gemessen.

Es bewege sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} transversal zu einem Magnetfeld \mathbf{B} , $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{B}) = 90^\circ$. Die Energieverluste etwa durch Reibung im Medium oder Strahlungsemission seien vernachlässigt. Infolge der Lorentz-Kraft \mathbf{F}_L , Gl. (3), bewegt es sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . Dabei stehen \mathbf{F}_L und die entgegen gerichtete Zentrifugalkraft im Gleichgewicht, $\mathbf{F}_L = -\mathbf{F}_Z$. Für die Beträge dieser Kräfte gilt somit $evB = m_e v^2 / r$. Daraus folgt der Bahnradius

$$r = \frac{m_e v}{e B} . \quad (5)$$

Für die massenspezifische Ladung des Elektrons erhält man $-e^*$, mit

$$e^* \equiv \frac{e}{m_e} = \frac{v}{r B} . \quad (6)$$

Aus (2) und (4) folgt

$$e^* = 1,758\,820\,010\,76(53) \cdot 10^{11} \frac{\text{As}}{\text{kg}}$$

1.3 Energieaufnahme eines Elektrons im elektrischen Feld

In einem räumlich und zeitlich konstanten elektrischen Feld \mathbf{E} wirkt auf ein Elektron mit der Ladung $-e$ die Kraft $\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E}$. Wird das elektrische Feld erzeugt, indem man zwischen zwei Punkten (z. B. Kondensatorplatten) im Abstand a die elektrische Spannung U anlegt, so gilt $E = U/a$. Folglich gilt auch,

$$F_e = \frac{eU}{a} .$$

Durchläuft ein Elektron einen (beliebigen) Weg von einem Anfangs- zu einem Endpunkt, zwischen denen die elektrische Spannung U abfällt, und ist der Anfangspunkt gegenüber dem Endpunkt negativ geladen, so wird das Elektron positiv beschleunigt und hat im Endpunkt die kinetische Energie eU gewonnen. Startet das Elektron hierbei aus der Ruhelage und bewegt es sich reibungsfrei (keine Energieabgabe an die Umgebung), so gilt im Endpunkt $m_e v^2 / 2 = eU$ und folglich für die Endgeschwindigkeit,²⁾

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} . \quad (7)$$

²⁾ Im Experiment sind die Geschwindigkeiten v klein genug, so dass nicht-relativistisch gerechnet werden kann, s. Anhang S. 11.

Beträgt die elektrische Spannung $U = 1\text{V}$, so sagt man, das Elektron hat die Energie *1 Elektronenvolt* (1eV) aufgenommen. Es gilt also,

$$1\text{eV} \equiv e \cdot 1\text{V} = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\text{Ws} .$$

1.4 Magnetfeld eines Ringleiters

Eine Möglichkeit, bei gegebenem Strom die Feldstärke zu berechnen, haben Jean-Baptiste Biot (1774–1862) und Félix Savart (1791–1841) aufgezeigt. Nach ihnen erzeugt der elektrische Strom I durch ein infinitesimales Wegelement $d\mathbf{l}(\mathbf{w})$ an der Stelle \mathbf{w} im Aufpunkt \mathbf{x} die Feldstärke,

$$d\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi} d\mathbf{l}(\mathbf{w}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{w}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|^3} .$$

Weist beispielsweise der Strompfad $d\mathbf{l}(\mathbf{w})$ in Richtung des Abstandsvektors $\mathbf{x} - \mathbf{w}$, so gilt $d\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$, Ströme in Richtung des Aufpunktes tragen also nicht zum Magnetfeld bei. Liegt hingegen $d\mathbf{l}(\mathbf{w})$ senkrecht zu $\mathbf{x} - \mathbf{w}$, so steht auch $d\mathbf{H}(\mathbf{x})$ senkrecht zu einem jeden dieser Vektoren, und beträgt der Abstand $\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\| = R$, so erhält man

$$\|d\mathbf{H}(\mathbf{x})\| = \frac{I}{4\pi} \|d\mathbf{l}(\mathbf{w})\|/R^2 . \quad (8)$$

Der Stromweg (anschaulich: ein Draht) sei durch den parametrisierten Weg $\mathbf{w}(\gamma)$ mit dem Wegparameter γ , $\gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_1$ beschrieben. Dann erhält man die gesamte Feldstärke im Aufpunkt \mathbf{x} durch Integration über alle Punkte \mathbf{w} entlang des Strompfades,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} d\mathbf{l}(\mathbf{w}(\gamma)) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{w}(\gamma)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{w}(\gamma)\|^3} . \quad (9)$$

Ist der Strompfad ein Kreis mit dem Radius R , so erhält man unter Verwendung von Kreiskoordinaten in der Kreismitte als Aufpunkt $\|\mathbf{x} - \mathbf{w}(\gamma)\| = R$, und mit $\|d\mathbf{l}(\mathbf{w}(\gamma))\| = R \cdot d\gamma$ die Feldstärke,

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} R^{-1} d\gamma = \frac{I}{2R} . \quad (10)$$

Das Magnetfeld eines Ringleiters ist offenbar rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse, wenn diese festgelegt wird als senkrecht zur Kreisebene des Ringleiters und durch den Kreismittelpunkt verlaufend, Abb. 2. Mit der Einführung von Zylinderkoordinaten wird deshalb nur noch die Abhängigkeit der

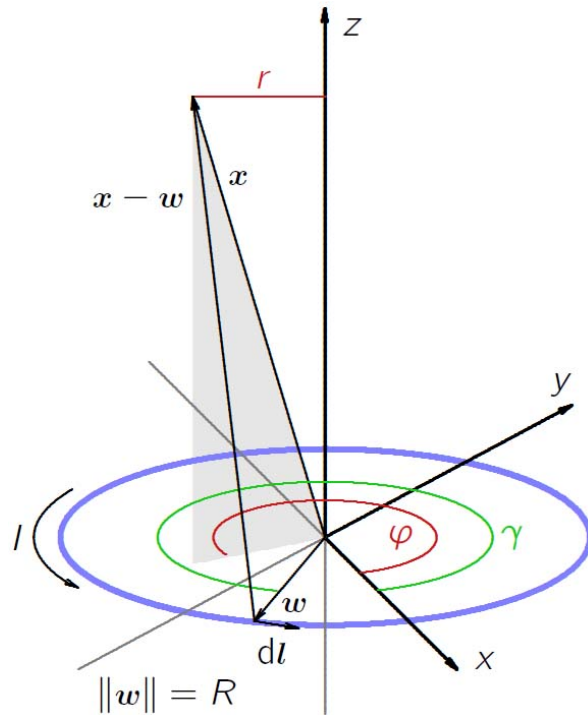


Abb. 2: Zylinderkoordinaten zur Berechnung der magnetischen Feldstärke um einen Ringleiter mit dem Radius R , im Aufpunkt $\mathbf{x} = (z, r, \varphi)$.

axialen und die radialen Komponente H_z bzw. H_r von den Koordinaten z und r betrachtet, die azimutale Komponente H_φ verschwindet. Somit gilt,

$$\mathbf{H}(z, r) = (H_z(z, r), H_r(z, r), 0) .$$

Die Komponenten $H_z(z, r)$ und $H_r(z, r)$ können nach (28) bzw. (29) berechnet werden, was eine längere Rechnung zeigt, wobei elliptische Integrale auftreten.

In kartesischen Koordinaten gilt für die x -Komponente

$$H_x(z, \pm x) = \pm H_r(z, r) , \quad \text{mit } |x| = r .$$

Einige Feldlinien sind in Abb. 3 gezeichnet, zusammen mit dem Betrag der Feldstärke. Detailliertere Angaben zur Feldstärke finden sich in den Abbildungen 14, 15 und 16, S. 14 ff.

Die radiale Komponente verschwindet für $r = 0$, so dass dann

$$\mathbf{H}(z, 0) = (H_z(z, 0), 0, 0)$$

gilt. Für die axiale Komponente erhält man dann,

$$H_z(z, 0) = \frac{1}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot I . \quad (11)$$

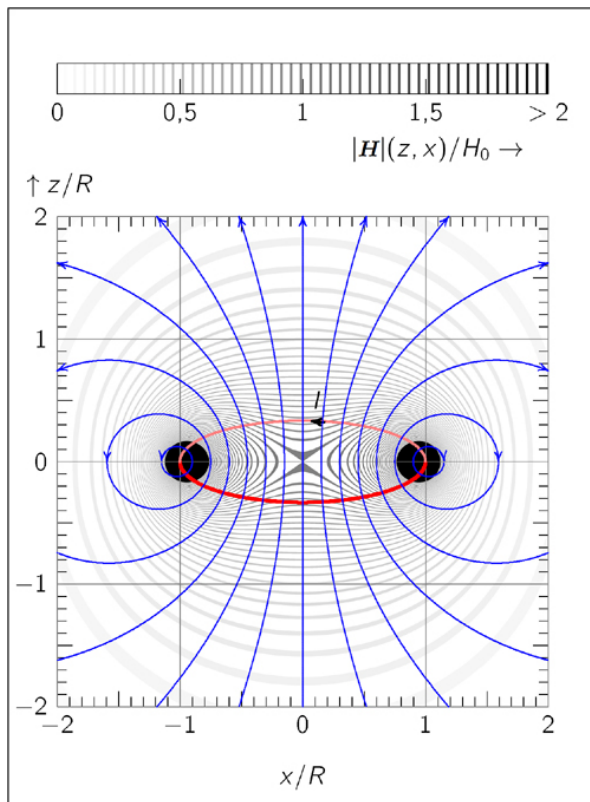


Abb. 3: Feldlinien der magnetischen Feldstärke um einen stromdurchflossenen Ringleiter (blau). Die Grauwerte kodieren den Betrag der Feldstärke, in der Einheit H_0 , Gl. (12).

In der Kreismitte des Ringleiters ($z = 0 = r$) geht dies über in,

$$H_z(0,0) = |\mathbf{H}(0,0)| = \frac{I}{2R} \equiv H_0 \quad (12)$$

was in Übereinstimmung mit (10) ist.

Hat der Ringleiter N Windungen, die eng beinander (idealisiert: aufeinander) liegen, so dass die Windungsbreite klein im Vergleich zum Radius R ist, so kann in den obigen Gleichungen näherungsweise I einfach durch $N \cdot I$ ersetzt werden.³⁾

Befindet sich der Leiter in einem Medium mit der relativen Permeabilität μ_r , so folgt für die magnetische Flussdichte

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad .$$

³⁾ In den Abbildungen 14, 15 und 16, S. 14 ff., wurde diese Näherung kleiner Windungsbreite jedoch nicht gemacht, sondern die tatsächliche Breite 25 mm des hier verwendeten Aufbaus berücksichtigt. Man addiert hierzu die Beiträge des Stroms I einer jeden der N Windungen, die zueinander um Vielfache des Drahtdurchmessers versetzt sind. Allerdings zeigt sich hier, dass im Rahmen der Zeichengenauigkeit die Unterschiede zur idealisierten Rechnung vernachlässigbar sind.

Die Permeabilität μ ist das Produkt aus der Permeabilität des Vakuums,⁴⁾

$$\mu_0 = 1,256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

und der relativen Permeabilität μ_r des Mediums. Für Luft gilt,

$$\mu_r \approx 1 + 0,4 \cdot 10^{-6} \approx 1 \quad .$$

Im Spulenzentrum erhält man,

$$B_z(0,0) \equiv B_0 = \mu H_0 \quad . \quad (13)$$

Der axiale Verlauf

$$\frac{H_z(z,r)}{H_0} = \frac{B_z(z,r)}{B_0}$$

ist in Abb. 4 dargestellt. Für $r = 0$ gilt,

$$\frac{H_z(z,0)}{H_0} = \frac{B_z(z,0)}{B_0} = \frac{1}{[1 + (z/R)^2]^{3/2}} \quad . \quad (14)$$

In der Leiterebene ($z = 0$) und Abstände $r > 0$ von der Symmetrieachse wächst $H_z(0,r)$ an, beispielsweise gilt $H_z(0,r)|_{r=R/2} \approx (5/4) \cdot H_z(0,0)$. Folglich nimmt der lokale Krümmungsradius der Elektronenbahn in der Spulenebene mit wachsender Entfernung von der Symmetrieachse zu.

⁴⁾ Es gilt $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$.

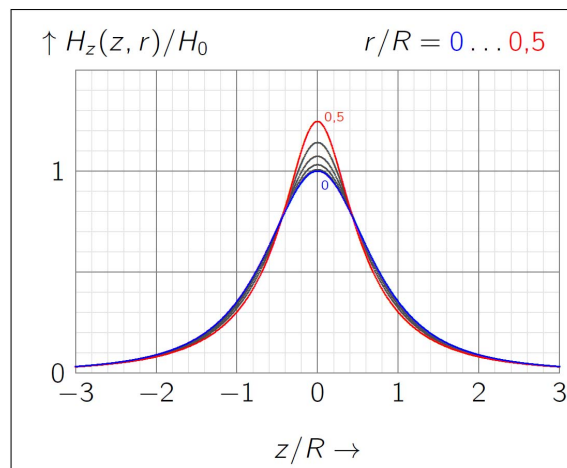


Abb. 4: Axialer Verlauf der Magnetfeldstärke H_z einer Ringspule in Abhängigkeit des Abstands z von der Spulenebene. Parameter ist der Abstand r zur Symmetrieachse. r/R variiert von 0 (blau) bis 0,5 (rot) in Schritten von 0,1. Für $r/R = 0 \dots 0,1$ fallen die Kurven im Rahmen der Zeichengenauigkeit zusammen.

Einen Überblick zum gesamten Verlauf der axialen und der radialen Komponente $H_z(z, r)$ bzw. $H_r(z, r)$ einer Ringspule gibt Abb. 5. Für $z = 0$ divergiert $H_z(z, r)$ bei Annäherung an den Ringleiter in der Leiterebene, also für $r/R \uparrow 1$ oder $r/R \downarrow 1$. Die radiale Komponente $H_r(z, r)$ verschwindet für $z = 0$, allerdings wird sie an der Stelle $r/R = 1$ für $z \downarrow 0$ und $z \uparrow 0$ sehr groß bzw. sehr klein.

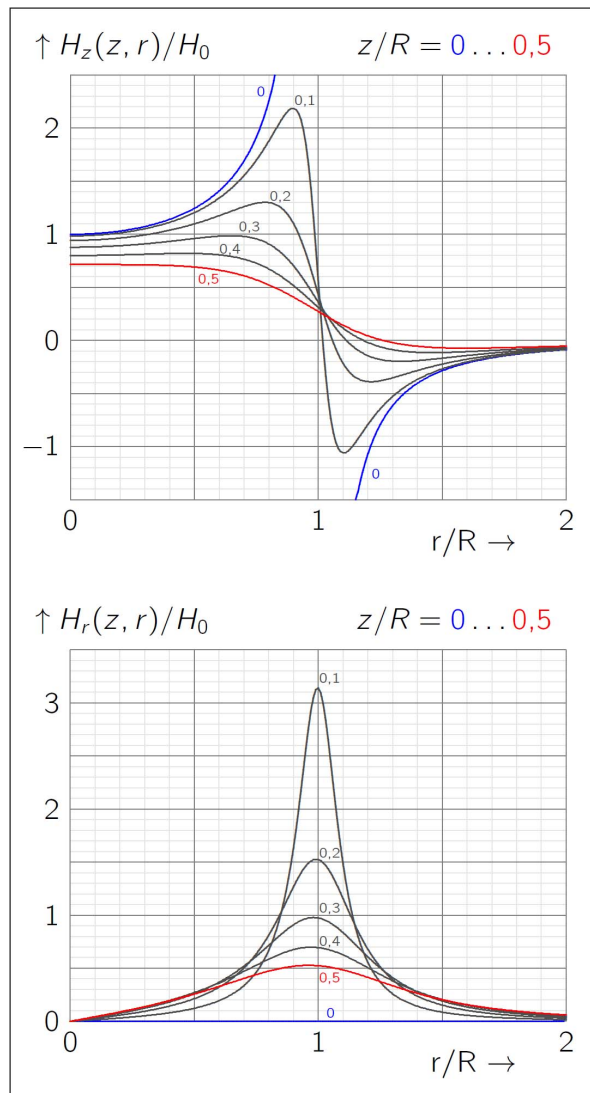


Abb. 5: Radialer Verlauf der z - und r -Komponente H_z bzw. H_r der Magnetfeldstärke im Umfeld einer stromdurchflossenen Ringspule mit dem Radius R , in Einheiten von H_0 , Gl. (12). Parameter ist der Abstand z/R von der Spulenebene. Für $z = 0$ (blaue Kurven) divergiert H_z an der Stelle $r = R$ und es gilt $H_r = 0$ für alle r .

1.5 Helmholtz–Spule

Mit der geschickten Anordnung von Systemen aus Ringspulen kann man sich der gewünschten Homogenität des Magnetfeldes im Experimentierraum besser annähern. Ein erster Schritt hierzu ist die Verwendung von nur zwei Ringspulen mit gleichem Radius R , deren Symmetrieachsen zusammenfallen und deren Spulenebenen den Abstand L haben. Der Richtungssinn der Ströme I in den beiden Spulen ist gleich. Ihre Beiträge zum gesamten magnetischen Fluss entlang der Symmetrieachse, mit dem Nullpunkt im Zentrum, ist unter Beachtung von (11)

$$H_{*,z}(z,0) = H_z\left(z - \frac{L}{2}, 0\right) + H_z\left(z + \frac{L}{2}, 0\right). \quad (15)$$

In der zentralen Position ($z = 0$) erhält man,

$$H_{*,z}(0,0) = \frac{R^2}{(R^2 + L^2/4)^{3/2}} I.$$

Den axialen Verlauf (15) zeigt Abb. 6 für verschiedene Spulenabstände L . Für $L = R$ ist diese Anordnung nach Hermann von Helmholtz (1821–1894) benannt. Im Zentrum einer Helmholtz–Spule erhält man für die axiale Komponente

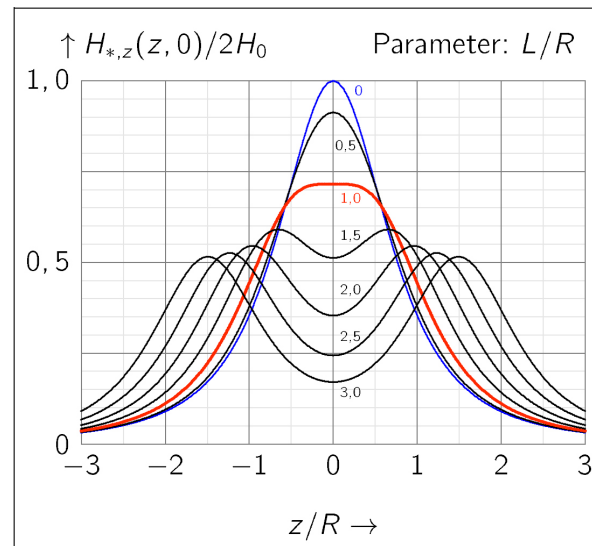


Abb. 6: Axialer Verlauf der Magnetfeldstärke (15) um eine Doppel–Ringspule entlang der Symmetrieachse (z -Achse in Abb. 7). Parameter ist das Verhältnis aus Spulenabstand L zum Spulenradius R . Der Fall $L = R$ (rot) entspricht der Helmholtz–Spule in Abb. 7.

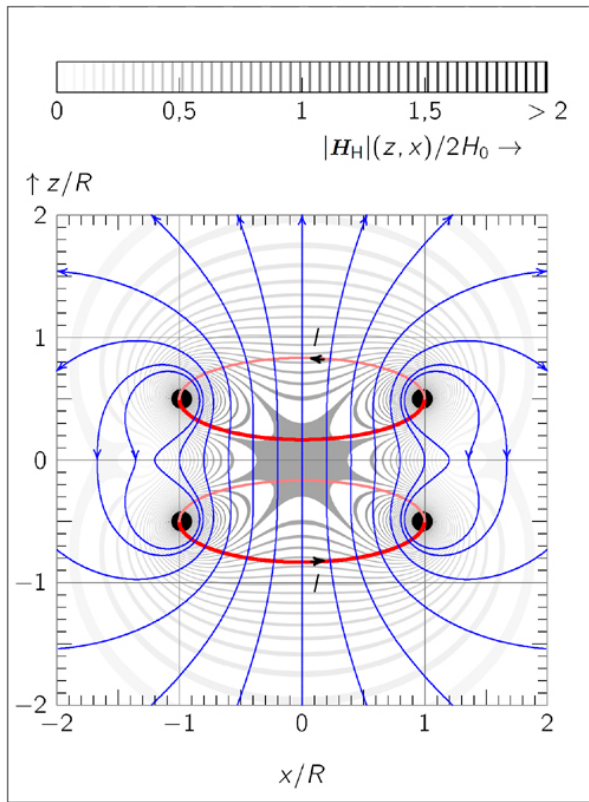


Abb. 7: Feldlinien der magnetischen Feldstärke um eine stromdurchflossene Helmholtz-Spule (blau). Die Grauwerte kodieren den Betrag der Feldstärke, in der Einheit $2H_0$, Gl. (12).

$$\begin{aligned} H_{H,z}(0,0) &= H_z\left(-\frac{R}{2}, 0\right) + H_z\left(\frac{R}{2}, 0\right) \\ &= \frac{8}{\sqrt{125}R} \cdot I. \end{aligned} \quad (16)$$

In der Umgebung des Zentrums ist $H_{H,z}(z,0)$ nur gering veränderlich, Im Bereich $-R/4 < z < R/4$ ändert sich die Feldstärke um weniger als 0,5%, und für $-R/2 < z < R/2$ um weniger als 5,6%. Weil obendrein der Experimentierraum in Zentrumsnähe frei zugänglich ist, werden Helmholtz-Spulen insbesondere für Demonstrationszwecke häufig genutzt.

Der Betrag des Feldes und einige Feldlinien einer Helmholtz-Spule zeigt Abb. 7. Die Abbildung verdeutlicht, dass das Feld auch in radialer Richtung nur schwach veränderlich ist, solange die Abstände von der Symmetriesche nicht zu groß sind. Die gesamte Variabilität der axialen magnetischen Feldstärke $H_{H,z}$ kann dem Bild 22, S. 22, entnommen werden.

Einen Überblick zum Verlauf der axialen und der radialen Komponente $H_{H,z}$ bzw. $H_{H,r}$ einer Helmholtz-Spule gibt Abb. 8. Für $z/R = 0,5$ divergiert $H_{H,z}(z, r)$ bei Annäherung an den oberen Ringleiter in der Ebene dieses Ringleiters, also für $r/R \uparrow 1$ oder $r/R \downarrow 1$. Die radiale Komponente $H_{H,r}(z, r)$ wird für $z/R = 0,5$ allein durch den Strom im unteren Ringleiter erzeugt. Analoges gilt für den unteren Ringleiter bei $z/R = -0,5$ (nicht gezeichnet).

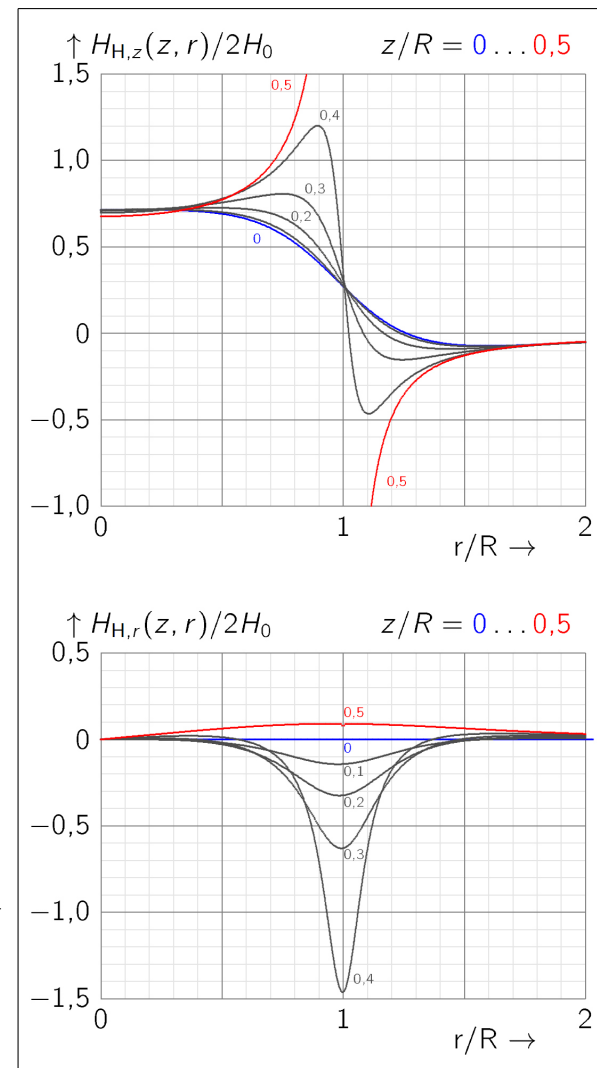


Abb. 8: Radialer Verlauf der z - und r -Komponente (oben bzw. unten) der Magnetfeldstärke im Umfeld einer stromdurchflossenen Helmholtz-Spule mit dem Radius R , in Einheiten von $2H_0$, Gl. (12). Parameter ist der Abstand z vom Mittelpunkt (s. Abb. 7). Für $z/R = \pm 0,5$ (rote Kurve) divergiert $H_{H,z}$ in Leiternähe.

2 Versuchsaufbauten

2.1 Aufbau A

Den Versuchsaufbau A zeigt Abb. 9. Die Elektronenstrahlen werden in der Röhre eines Oszilloskopes erzeugt, dessen magnetische Abschirmung ausgebaut wurde, so dass das durch den Spulenstrom erzeugte äußere Feld nahezu ungeschwächt eindringen kann. Der Elektronenstrahl liegt zentral in der Spulenebene. Die aufgebrachte Markierung des Mittelpunktes (großes Kreuz) und ein Lineal dienen der Zentrierung im Spulenmittelpunkt. Die Anlage ist durch folgende Größen charakterisiert:

Beschleunigungsspannung	$U = 6,95 \text{ kV}$
Strahlweg	$b = 139(1) \text{ mm}$
Spulenradius	$R = 310(5) \text{ mm}$
Windungszahl	$N = 25$
Spulenstromstärke	$I = 0 \dots 10 \text{ A}$

Es empfiehlt sich, die Ablenkung s in äquidistanten Schritten von 1 mm zu erhöhen und die zugehörigen Werte der Stromstärke zu notieren. Dies gewährleistet eine zügige Aufnahme der Messwerte, was vor allem bei größeren Stromstärken ($\gtrsim 5 \text{ A}$) zur Vermeidung von Überhitzung wichtig ist.

Nutzen Sie zur Aufzeichnung die Tabelle im Anhang A.5. S. 26. Zur besseren Vergleichbarkeit stellen Sie die Verschiebung für $I_0 = 0$ auf $s_0 = -10 \text{ mm}$ ein.

2.2 Aufbau B

Den Versuchsaufbau B zeigt Abb. 10. Das Fadenstrahlrohr hat kein Gehäuse. Die Magnetfelder werden durch Ströme in einer Helmholtz-Spule erzeugt, die auf einen Grundkörper gewickelt sind. Die Anlage ist durch folgende Größen charakterisiert:

Beschleunigungsspannung	$U = 0 \dots 500 \text{ V}$
Heizspannung	$4,5 \dots 7,5 \text{ V}$
Spulenradius	$R = 0,155 \text{ m}$
Windungszahl je Spule	$N = 130$
Spulenabstand	$L = 0,15 \text{ m}$
Spulenstromstärke	$I = 0 \dots 2 \text{ A}$

Mit einer größeren Heizspannung erhöht sich die Elektronendichte im Strahl und somit auch die Strahlhelikkeit. Im Versuch sollte der mittlere Wert $\approx 6 \text{ V}$ verwendet werden.

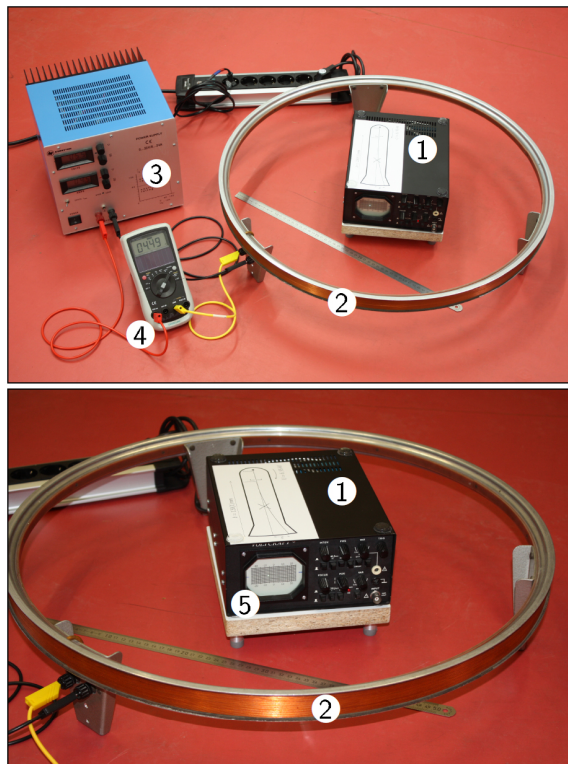


Abb. 9: Versuchsaufbau A: (1) Elektronenstrahlröhre, (2) Ringspule, (3) Stromquelle, (4) Amperemeter, (5) Bildschirm der Elektronenstrahlröhre mit Millimeterskala.

Zur Messung des Durchmessers der Elektronenbahn dienen zwei Schieber auf dem Steg der vorderen Helmholtz-Spule. Um den Parallaxenfehler (Schrägsichtfehler) zu minimieren, befindet sich auf dem Steg an der hinteren Helmholtz-Spule ein Spiegel. Zur Einstellung der Schieber bringt man zunächst den rechten Bereich des Elektronenstrahls mit seinem Spiegelbild zur Deckung und führt anschließend den rechten Schieber in diese Flucht. Analog positioniert man den linken Schieber in Flucht mit der Austrittsöffnung des Elektronenstrahls aus der Lochanode und dem entsprechenden Spiegelbild. Darüber hinaus ist zu beachten, dass der Bahnradius beim Umlauf der Elektronen geringfügig abnimmt, was zu einer systematischen Unterschätzung des Bahndurchmessers, der nach der beschriebenen Methodik gemessen wird, führt und geeignet zu korrigieren ist.

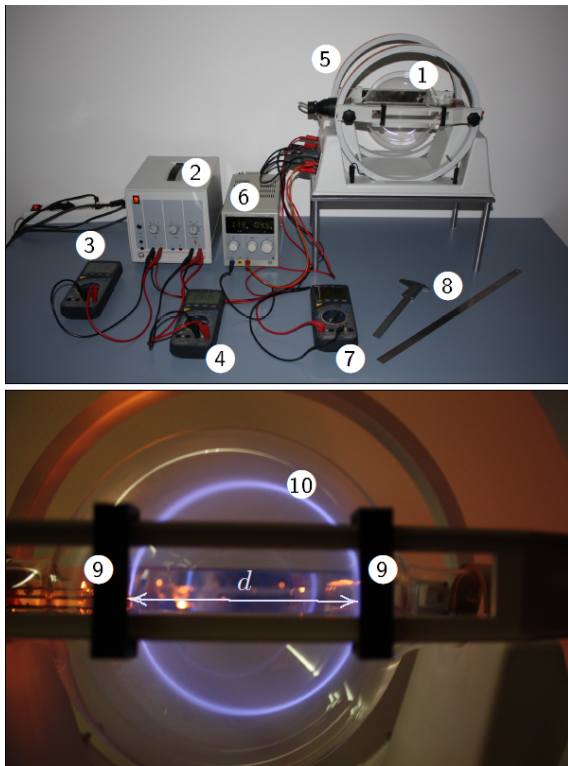


Abb. 10: Versuchsaufbau B: (1) Fadenstrahlröhre (FSR), (2) Strom- und Spannungsversorgung für die FSR, (3) Voltmeter für die Heizspannung der FSR, (4) Voltmeter für die Beschleunigungsspannung U der FSR, (5) Helmholtz-Spulenpaar, (6) Stromversorgung für das Helmholtz-Spulenpaar, (7) Amperemeter für die Stromstärke im Helmholtz-Spulenpaar, (8) Messschieber und Stahllineal, (9) Steg mit Schieber, (10) Elektronenbahn.

3 Messprinzip

3.1 Spezifische Ladung aus Bahnradius

Elektronen werden in einem elektrischen Feld auf einer Wegstrecke, über welcher die elektrische Spannung U abfällt, auf die durch (7) gegebene Geschwindigkeit v beschleunigt. Danach werden sie in ein zu v senkrecht stehendes homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte B geleitet. Hier erfahren sie durch die Lorentz-Kraft (1) eine Ablenkung. Sie bewegen sich dann mit konstanter Bahngeschwindigkeit v auf einer Kreisbahn, dessen Radius mit (5) gegeben ist. Ersetzt man in (6) die Bahngeschwindigkeit nach (7), so folgt

$$e^* = \frac{2U}{r^2 B^2} \quad (17)$$

Kennt man die Beschleunigungsspannung U und die magnetische Flussdichte B , so kann man aus der Vermessung des Bahnradius r die spezifische Ladung e^* berechnen. Dieses Prinzip verfolgt man mit den beiden folgenden Messanordnungen. Die Aufbauten unterscheiden sich allerdings geringfügig hinsichtlich der Erzeugung des Magnetfeldes. Darüber hinaus wird der Bahndurchmesser $d \equiv 2r$ in der Anordnung B direkt gemessen, mit der Anordnung A hingegen indirekt.

3.2 Messanordnung A: Elektronenstrahlröhre in Ringspule

Ablenkung des Elektronenstrahls: Elektronen werden in einer Elektronenstrahlröhre mit der Beschleunigungsspannung U auf die Geschwindigkeit v gebracht, Abb. 11. Danach durchlaufen sie in der Röhre die Wegstrecke b bis zum Bildschirm. Bewegen sie sich darüber hinaus in der Ebene eines Ringleiters mit dem Radius R , der die Stromstärke I führt, werden sie durch die Lorentzkraft (3) abgelenkt und auf eine Kreisbahn mit dem Radius r gezwungen. Dabei gilt die Beziehung (17).

Nimmt man weiterhin an, dass die Flugbahn der Elektronen dicht bei der Symmetrieachse der Ringspule

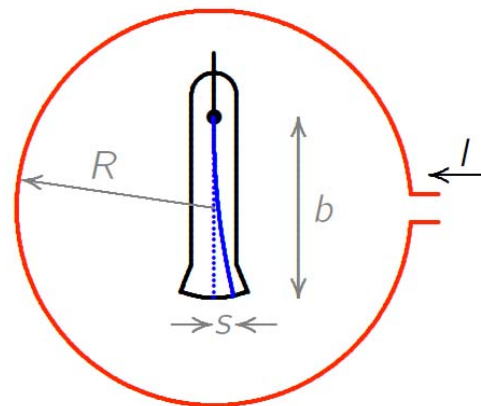


Abb. 11: Schematische Anordnung zur Messung der spezifischen elektrischen Ladung von Elektronen nach dem Messprinzip A. Elektronen bewegen sich für Stromstärken $I > 0$ auf einem Kreisbogen (ausgezogene blaue Linie) mit dem Kreisradius r (nicht eingezeichnet). Für $I = 0$ würde $r = \infty$ gelten, die Flugbahn in der Röhre wäre also gerade (gepunktete blaue Linie). Aus der Ablenkung s kann r nach (19) berechnet werden, sofern $b \ll r$ gilt, was hier der Fall ist.

liegt, so kann man für B näherungsweise den Wert (13) im Spulenzentrum verwenden. Man erhält dann,

$$e^* \approx \frac{2U \cdot 4R^2}{r^2 \cdot (\mu_0 NI)^2} \quad (18)$$

Die Ablenkung s kann auf dem Bildschirm der Röhre gemessen werden. Kennt man auch den Laufweg b so folgt der Bahnradius aus

$$r \approx \frac{b^2}{2s} \quad (19)$$

(s. Anhang S. 11). Geht man hiermit in (18) ein, folgt schließlich,

$$e^* \approx 32U \cdot \left(\frac{Rs}{\mu_0 NI \cdot b^2} \right)^2 \quad (20)$$

Magnetometer: Man kann die Messanordnung als Magnetometer verwenden. Dazu ersetzt man in (20) unter Beachtung von (12,13) den Term $\mu_0 NI/R$ durch $2B$. Nach B aufgelöst folgt die Magnetometer-Gleichung

$$B(I) = \frac{2}{b^2} \sqrt{\frac{2U}{e^*}} \cdot s(I) \quad (21)$$

Die Empfindlichkeit

$$E \equiv \frac{dB}{ds} = \frac{1}{b^2} \sqrt{\frac{8U}{e^*}} \quad (22)$$

charakterisiert die Anlage als Magnetometer. Aus der Ablenkung s kann man nun die magnetische Flussdichte im Spulenzentrum mittels

$$B_z = E \cdot s$$

berechnen, wobei B_z die Komponente vertikal zur Spulenebene in dessen Zentrum ist.

Empfindlichkeit: Die Empfindlichkeit E kann man nach (22) berechnen. Kennt man die dazu nötigen Parameter wie etwa die Länge b nicht genau, so kann man E auch experimentell wie folgt erhalten:

Man bestimmt

$$B_k = \frac{\mu_0 NI_k}{2R} \quad (23)$$

für verschiedene Ablenkungen s_k , $k = 0,1,2, \dots$ und misst die zugehörigen Stromstärken I_k , $k = 0,1,2, \dots$

Der Anstieg der Regressionsgeraden $B = E \cdot s$ zu den Wertepaaren (s_k, B_k) liefert dann die Empfindlichkeit E der Apparatur, vorzugsweise in der Einheit $\mu\text{T}/\text{mm}$.

Spezifische Ladung: Gleichung (22) kann nach der spezifischen Ladung umgestellt werden,

$$e^* = \frac{8U}{E^2 b^4} \quad (24)$$

Somit erhält man aus der Empfindlichkeit E sowie den bekannten Parametern U und b die spezifische Ladung.

Erdmagnetfeld: Das gesamte Magnetfeld B_{ges} ist die Überlagerung des Erdmagnetfeldes B_{Erde} mit dem durch den Spulenstrom I erzeugten Feld $B(I)$. Hinzu kommen sonstige äußere Magnetfelder, etwa durch magnetisierte Tischgestelle, die hier dem Term B_{Erde} hinzugerechnet werden. weshalb hier treffender vom Umgebungsfeld zu sprechen ist. Liegt die Spulenebene horizontal und die Bahn der Elektronen in der Spulenebene, so wird $B_z(I)$ mit der Vertikalkomponente $B_{\text{Erde},z}$ des Umgebungsfeldes überlagert,

$$B_{\text{ges},z} = B_{\text{Erde},z} + B_z(I) \quad .$$

Sei nun $I = 0$, dann bewirkt allein das Umgebungsfeld $B_{\text{Erde},z}$ den messbaren Wert der Auslenkung $\sigma_1 \equiv s^* + s_{\text{Erde}}$, wobei s^* die nicht direkt messbaren Nullauslenkung bezeichnet, also die Ablenkung bei $B_{\text{ges},z} = 0$. Würde man nun den Richtungssinn von $B_{\text{Erde},z}$ umkehren, dann würde die messbare Auslenkung $\sigma_2 \equiv s^* - s_{\text{Erde}}$ betragen. Da dies nicht möglich ist, kann alternativ die Elektronenstrahlröhre um 180° um ihre Längsachse gedreht werden. Aus der Differenz dieser beiden (messbaren) Auslenkungen $\sigma_{1,2}$ erhält man schließlich mittels der Empfindlichkeit E die gesuchte Feldstärke,

$$B_{\text{Erde},z} = E \cdot \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = E \cdot s_{\text{Erde}} \quad (25)$$

3.3 Messanordnung B: Fadenstrahlrohr in Helmholtz–Spule

In einem Fadenstrahlrohr erzeugt man einen Elektronenstrahl, der senkrecht auf ein Magnetfeld trifft, das durch ein Helmholtz–Spulenpaar erzeugt wird. Es gilt folglich für die spezifische Ladung die Beziehung (17). Setzt man für die magnetische Flussdichte B den Wert (16) aus dem Zentrum des Spulenpaares ein, so folgt

$$e^* = 250 U \cdot \left(\frac{R}{8\mu_0 NI \cdot r} \right)^2 \quad (26)$$

A Anhang

A.1 Messanordnung A: Bahnradius und Ablenkung

Die Elektronen bewegen sich senkrecht zur axialen Komponente H_z des Magnetfelds der Ringspule auf einer Kreisbahn vom Radius r von der Lochanode bis zum Bildschirm, die den Abstand b haben, Abb. 12. Die Ablenkung s kann auf dem Bildschirm gemessen werden, b sei ebenso bekannt. Dann gilt nach dem Satz von Pythagoras, $(r - s)^2 + b^2 = r^2$, was den Bahnradius

$$r = \frac{b^2 + s^2}{2s}$$

ergibt. Für $s \ll b$ gilt kann man wie folgt runden,

$$r = \frac{b^2}{2s} .$$

A.2 Elektronengeschwindigkeit — relativistische Rechnung

Durchläuft ein anfangs ruhendes Elektron (Elementarladung $-e \approx -1,6 \cdot 10^{-19}$ As) eine Wegstrecke von einer negativen zu einer positiven Elektrode, zwischen denen die elektrische Spannung U anliegt, so wird es beschleunigt und hat am Ende der Wegstrecke die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = eU . \quad (27)$$

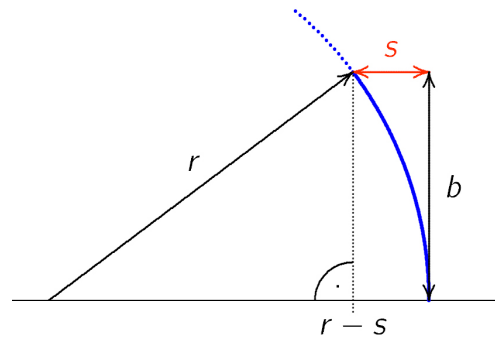


Abb. 12: Zusammenhang zwischen dem Kreisradius r , der Kreisbahn eines Elektrons (blau) und der Ablenkung s .

Für große Spannungen wird das Elektron recht schnell, so dass sich die Endgeschwindigkeit v_r der Vakuum–Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3,00 \cdot 10^8$ m/s annähert. Dabei wächst nach der speziellen Relativitätstheorie die Masse auf den Wert

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}}$$

an, worin $m_0 \approx 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg die Ruhemasse des Elektrons bezeichnet. Für die Ruheenergie gilt

$$E_0 = m_0 c^2 \approx 82 \cdot 10^{-15} \text{Ws} \approx 510 \text{keV} .$$

Die relativistische Gesamtenergie ist durch

$$m_r c^2 = E_0 + E_{\text{kin}}$$

gegeben. Daraus folgt

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= m_r c^2 - E_0 \\ &= E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}} - 1 \right) . \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (27) folgt die Geschwindigkeit,

$$v_r = c \cdot \sqrt{1 - (1 + \alpha)^{-2}} , \quad \text{mit } \alpha \equiv eU/E_0 .$$

Beispielsweise erhält man für die Beschleunigungsspannung $U = 1$ kV den Wert $\alpha \approx 0,002$ und somit $v_r \approx 0,063 \cdot c$. Halb so schnell wie das Licht ($v_r/c = 1/2$) wird das Elektron wenn $\alpha = 2/\sqrt{3} - 1 \approx 0,15$ gilt, was bei der Beschleunigungsspannung $U \approx 76$ kV erreicht wird. Ist die Beschleunigungsspannung hinreichend klein, so kann man nicht–relativistisch rechnen. Der Ansatz $E_{\text{kin}} = eU = m_0 v^2/2$ liefert dann

$$v = c \cdot \sqrt{2\alpha} .$$

Das Verhältnis der relativistischen zur nicht-relativistischen⁵⁾ erhält man, gerechneten Geschwindigkeit ist somit,

$$\frac{v_r}{v} = \frac{\sqrt{1 + \alpha/2}}{1 + \alpha}$$

Allgemein gilt $v_r \leq v$. Für $U < 1 \text{ kV}$ unterscheiden sich beide Geschwindigkeiten kaum, hier gilt $v_r/v > 0,998$.

A.3 Magnetfeld einer Ringspule

Zur Berechnung des Magnetfeldes einer Ringspule wird das Spulenzentrum als Koordinatenursprung gewählt, mit der Spulenebene in der x - y -Ebene liegend, und es werden statt kartesischer Zylinderkoordinaten (r, φ, z) verwendet, Abb. 2. Man setzt also für den beliebigen Aufpunkt (Ort, an welchem das Feld zu berechnen ist)

$$\mathbf{x} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

Der Weg entlang des Ringleiters wird wie folgt parametrisiert,

$$\mathbf{w}(\gamma) = (R \cos \gamma, R \sin \gamma, 0)$$

mit dem Bahnparameter $\gamma = 0 \dots 2\pi$. Damit gilt für das Wegelement,

$$d\mathbf{l}(\mathbf{w}(\gamma)) = \mathbf{l}' \cdot d\gamma$$

mit

$$\mathbf{l}' \equiv (-R \sin \gamma, R \cos \gamma, 0)$$

Es hat den Betrag $\|d\mathbf{l}(\mathbf{w}(\gamma))\| = R \cdot d\gamma$. Geht man hiermit in Gl. (9) ein, folgt

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{w}(\gamma)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{w}(\gamma)\|^3} d\gamma$$

Es gelten,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{w}(\gamma)\|^2 = r^2 + R^2 + z^2 - 2rR \cos(\gamma - \varphi)$$

und

$$\mathbf{l}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{w}) = R \cdot (z \cos \gamma, z \sin \gamma, R - r \cos(\gamma - \varphi))$$

Wegen der Rotationssymmetrie ist die radiale Komponente $H_r = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$ von $\mathbf{H} \equiv (H_x, H_y, H_z)$ gleich der kartesischen Komponenten H_x für $\varphi = 0$.

$$H_z(z, r) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \dots \dots \left(\frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} \cdot E(k) + F(k) \right)$$

$$H_r(z, r) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \cdot \frac{z}{r} \dots \dots \left(\frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} \cdot E(k) - F(k) \right)$$

Darin sind

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} d\gamma$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma$$

die vollständigen elliptischen Integrale erster bzw. zweiter Gattung in der Legendreschen Normalform, an der Stelle (mit dem Modul)

$$k \equiv \sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2 + z^2}}$$

Auf der Symmetrieachse gilt $r = 0$ und somit $k = 0$. Wegen $F(0) = E(0) = \pi/2$ folgt in Übereinstimmung mit (11) und (12)

$$H_z(z, 0) = \frac{1}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot I$$

bzw.

$$H_z(0, 0) = \frac{I}{2R} = H_0$$

Mit den auf R normierten Längen

$$\rho \equiv r/R, \quad \zeta \equiv z/R$$

erhält man

⁵⁾ Ausführliche Darstellungen finden sich in:
K. F. Müller, *Berechnung der Induktivität von Spulen.*, Archiv für Elektrotechnik. XVII. Band, 1926, S. 336–353.
K. Foelsch, *Magnetfeld und Induktivität einer zylindrischen Spule.* Archiv für Elektrotechnik. XXX. Band, 3. Heft, 1936, S. 139–157, Gln. (11,12).

$$\frac{H_z(\zeta, \rho)}{H_0} = \frac{k}{2\pi\rho^{1/2}} \cdots \quad (28)$$

$$\cdots \left(\frac{1 - \rho^2 - \zeta^2}{(1 - \rho)^2 + \zeta^2} \cdot E(k) + F(k) \right)$$

und

$$\frac{H_r(\zeta, \rho)}{H_0} = \frac{k\zeta}{2\pi\rho^{3/2}} \cdots \quad (29)$$

$$\cdots \left(\frac{1 + \rho^2 + \zeta^2}{(1 - \rho)^2 + \zeta^2} \cdot E(k) - F(k) \right)$$

mit

$$k \equiv \sqrt{\frac{4\rho}{(1 + \rho)^2 + \zeta^2}} \quad (30)$$

Für alle $\rho \geq 0$ und ζ beliebig variiert der Parameter k im Einheitsintervall $[0,1]$. Für $\rho = 0$ oder $\zeta = 0$ gilt $k = 0$. Darüber hinaus gilt $k = 1$ genau dann wenn $\rho = 1$ und $\zeta = 0$, Abb. 13.

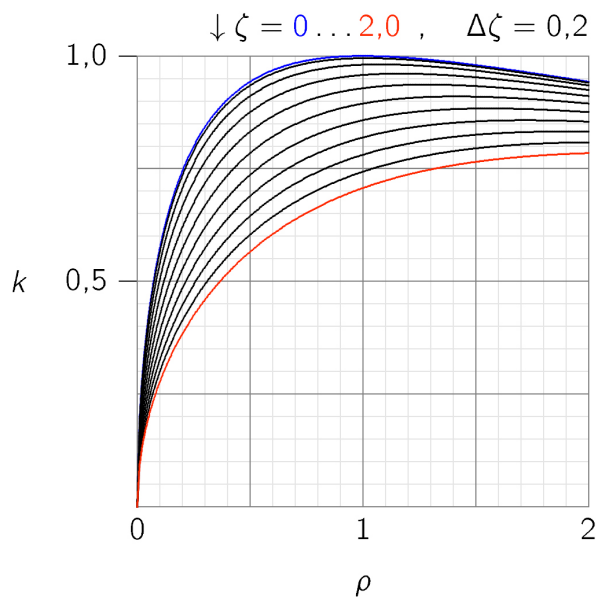


Abb. 13: Abhängigkeit des Moduls $k(\rho)$ nach Gl. (30). Parameter ist der Abstand ζ von der Leiterebene.

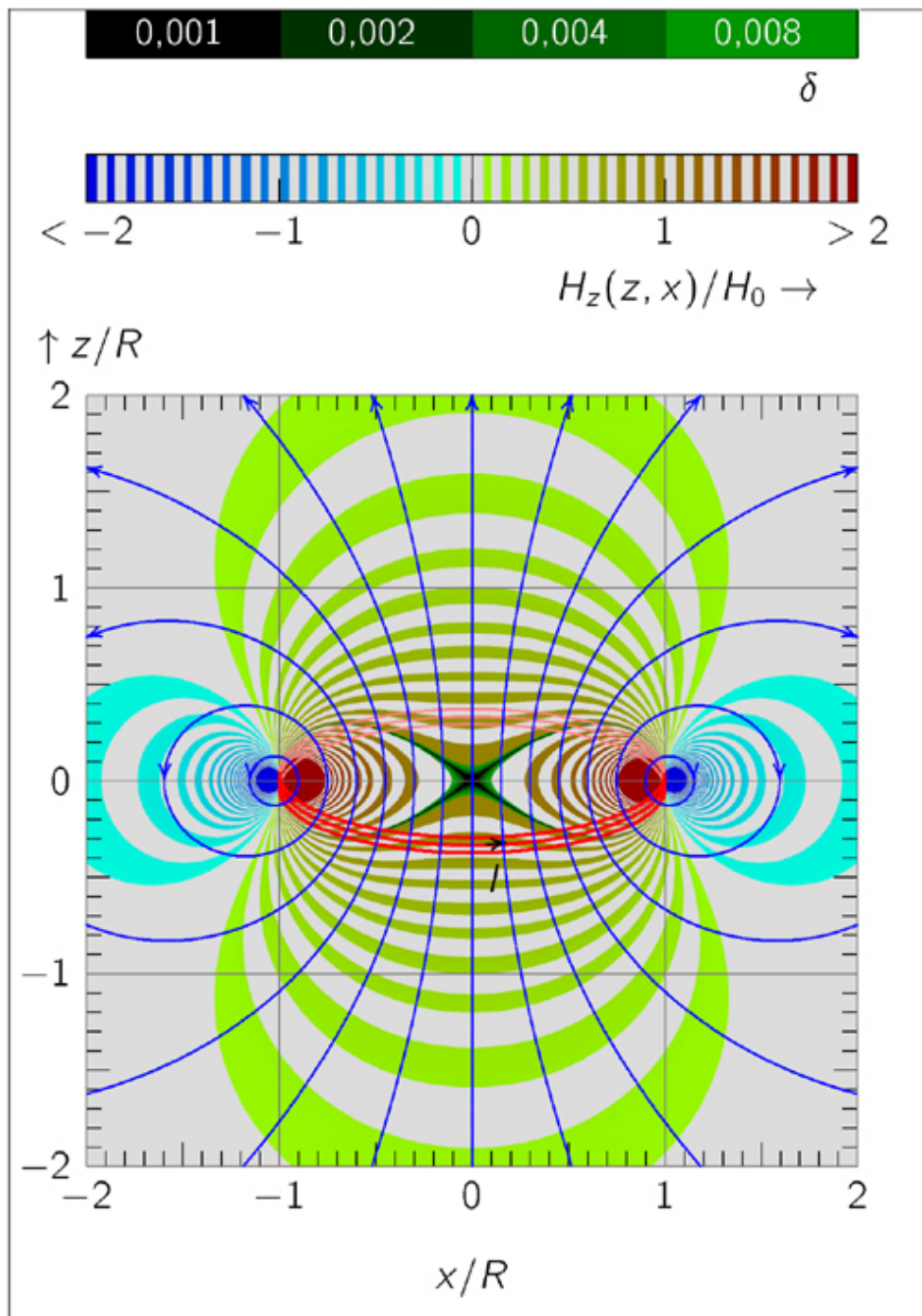


Abb. 14: Farbkodierte Stärke der z-Komponente H_z des Magnetfelds um eine Ringspule in Abhängigkeit des Abstands $r = |x|$ von der Symmetrieachse und des Abstands $|z|$ von der Leiterebene. Für $z \approx \pm 0,47$ und $|x| \lesssim 0,3R$ ändert sich H_z nur geringförmig. In Grüntönen (obere Legende) sind die Orte (x, z) gekennzeichnet, an denen $|H_z(x, z) - H_z(0, 0)|/H_0 < \delta$ gilt. Gezeigt sind auch einige Feldlinien (blau).

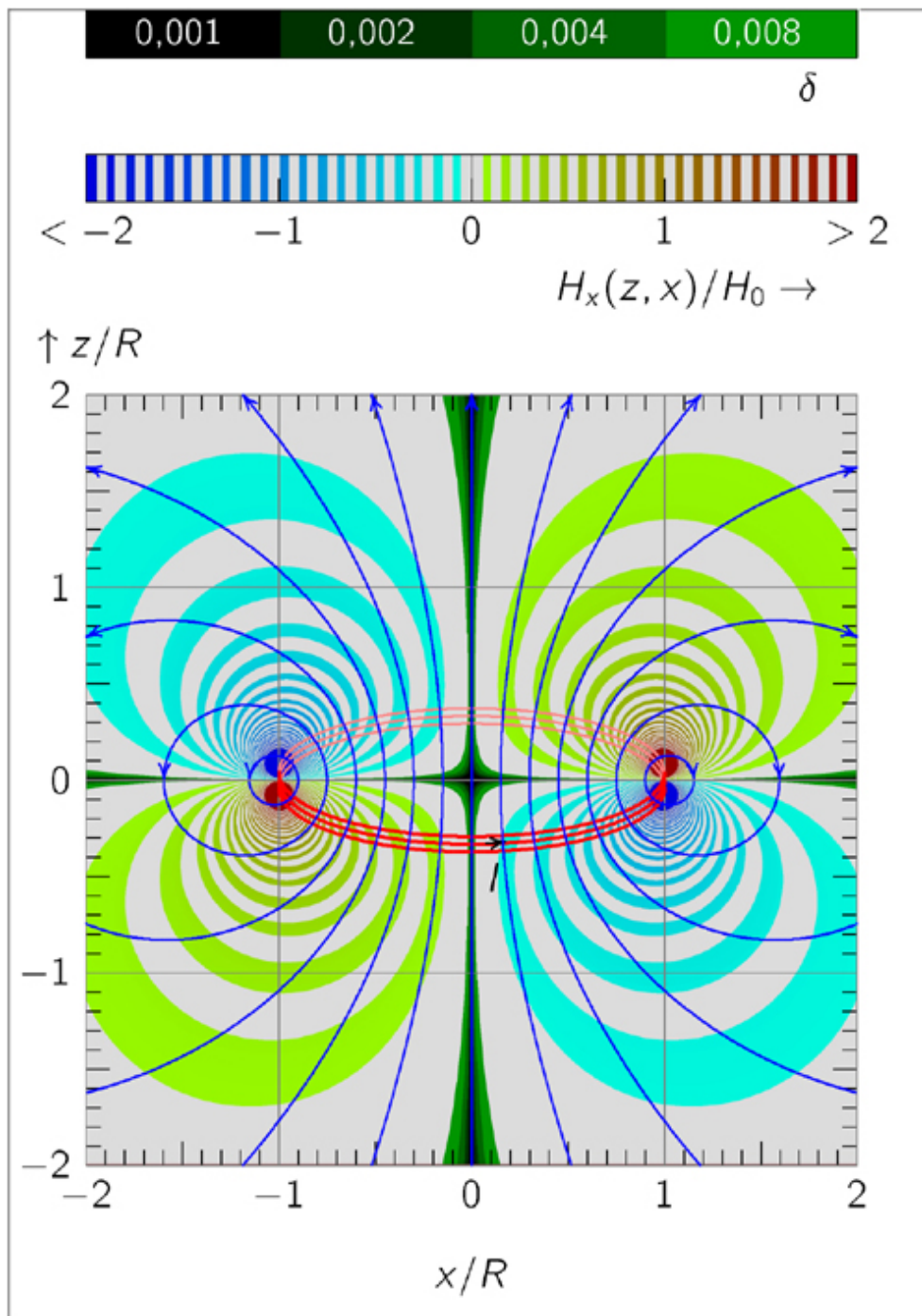


Abb. 15: Farbkodierte Stärke der x -Komponente des Magnetfelds um eine Ringspule in Abhängigkeit des Abstands $|x| = r$ von der Symmetrieachse und des Abstands $|z|$ von der Leiterebene. In Grüntönen (obere Legende) sind die Orte (x, z) gekennzeichnet, an denen $|H_x(x, z)|/H_0 < \delta$ gilt (beachte: $H_x(0,0) = 0$). Gezeigt sind auch einige Feldlinien (blau).

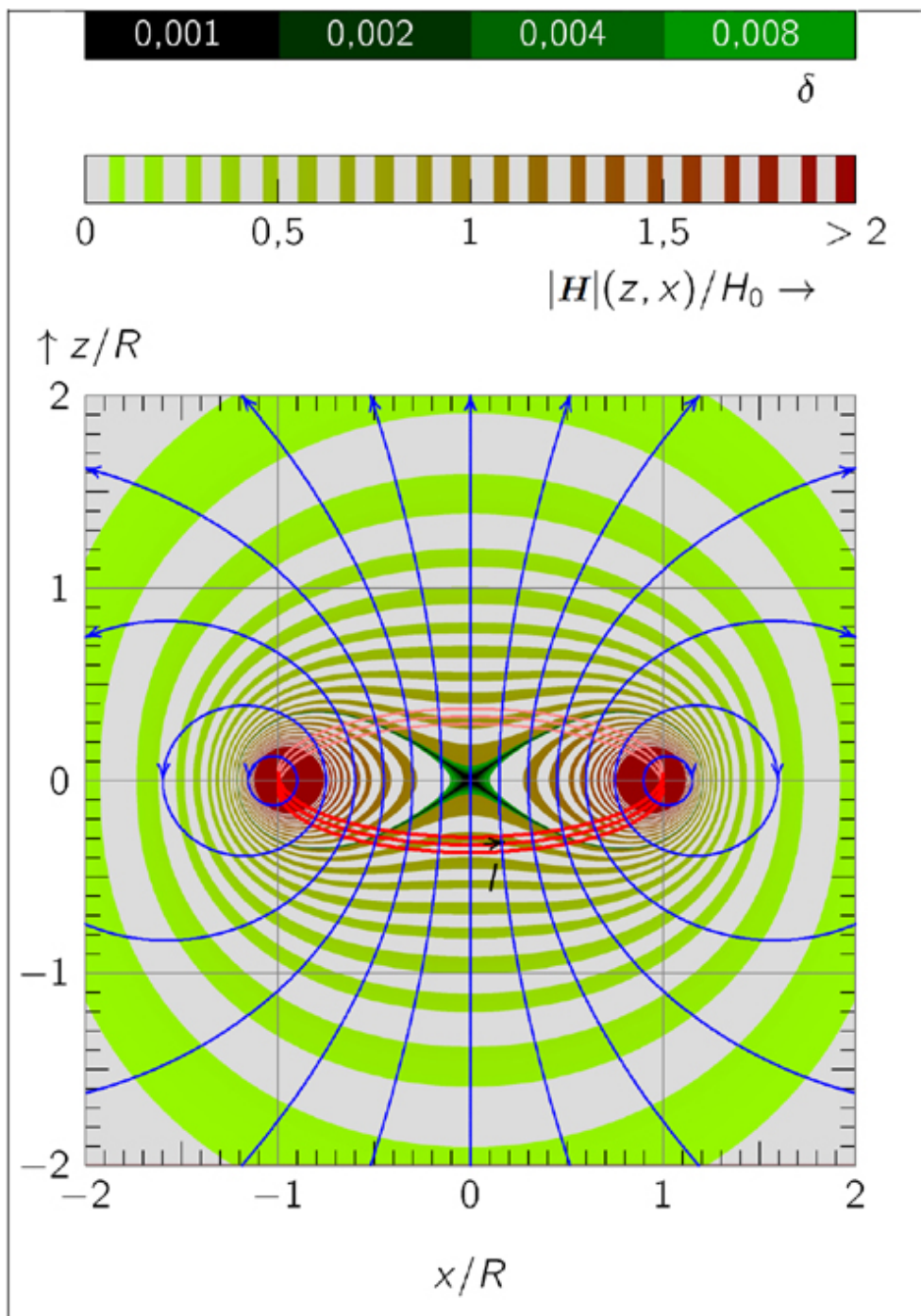


Abb. 16: Farbkodierte Stärke des Betrags $|\mathbf{H}|$ des Magnetfelds um eine Ringspule in Abhängigkeit des Abstands $|x| = r$ von der Symmetrieachse und des Abstands $|z|$ von der Leiterebene. In Grüntönen (obere Legende) sind die Orte (x, z) gekennzeichnet, an denen $|1 - |\mathbf{H}(x, z)/|\mathbf{H}(0,0)| < \delta$ gilt. Gezeigt sind auch einige Feldlinien (blau).

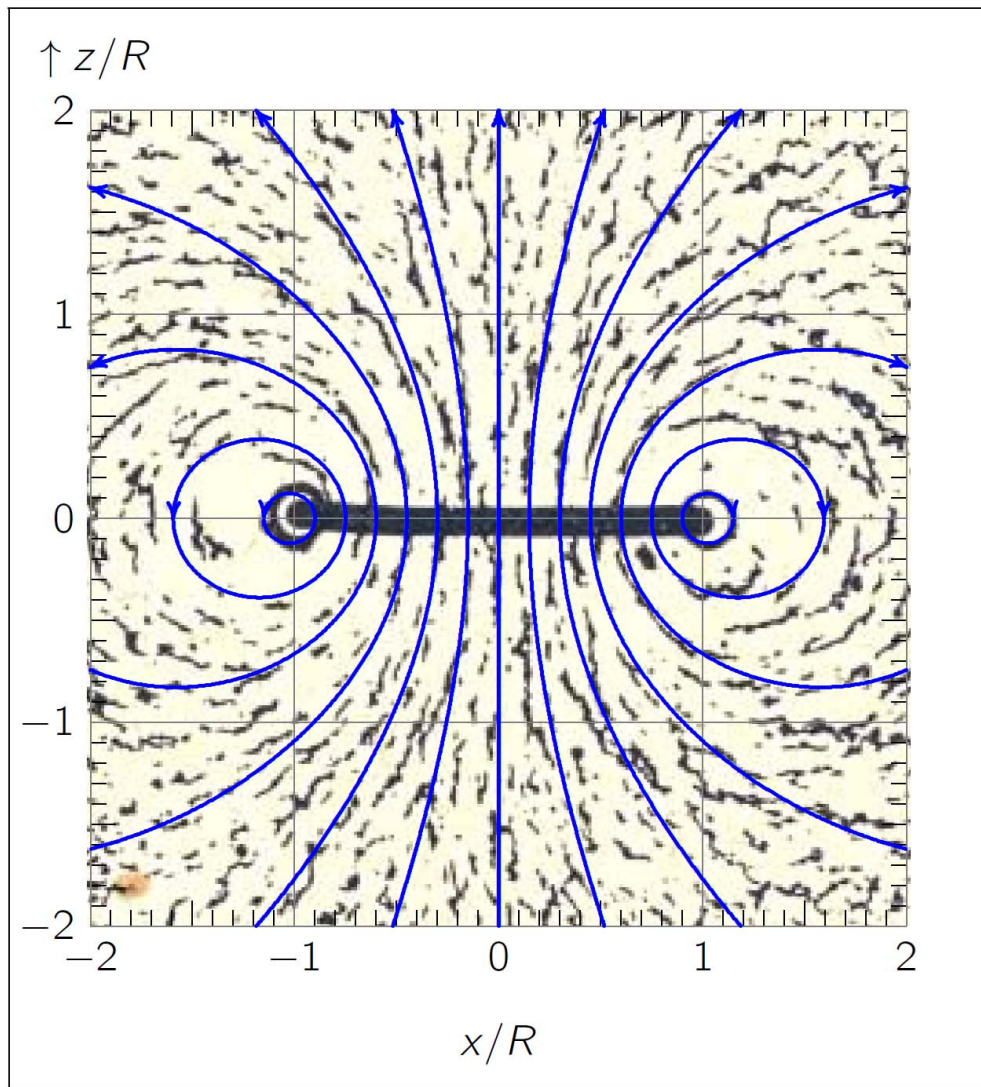


Abb. 17: Experimentelle Veranschaulichung der magnetischen Feldlinien eines Ringleiters durch Eisenfeilspäne (nach: R.W.Pohl, *Einführung in die Elektrizitätslehre*, Springer-Verlag 1949, S.65) und deren nach (28,29) berechneter Verlauf (blau).

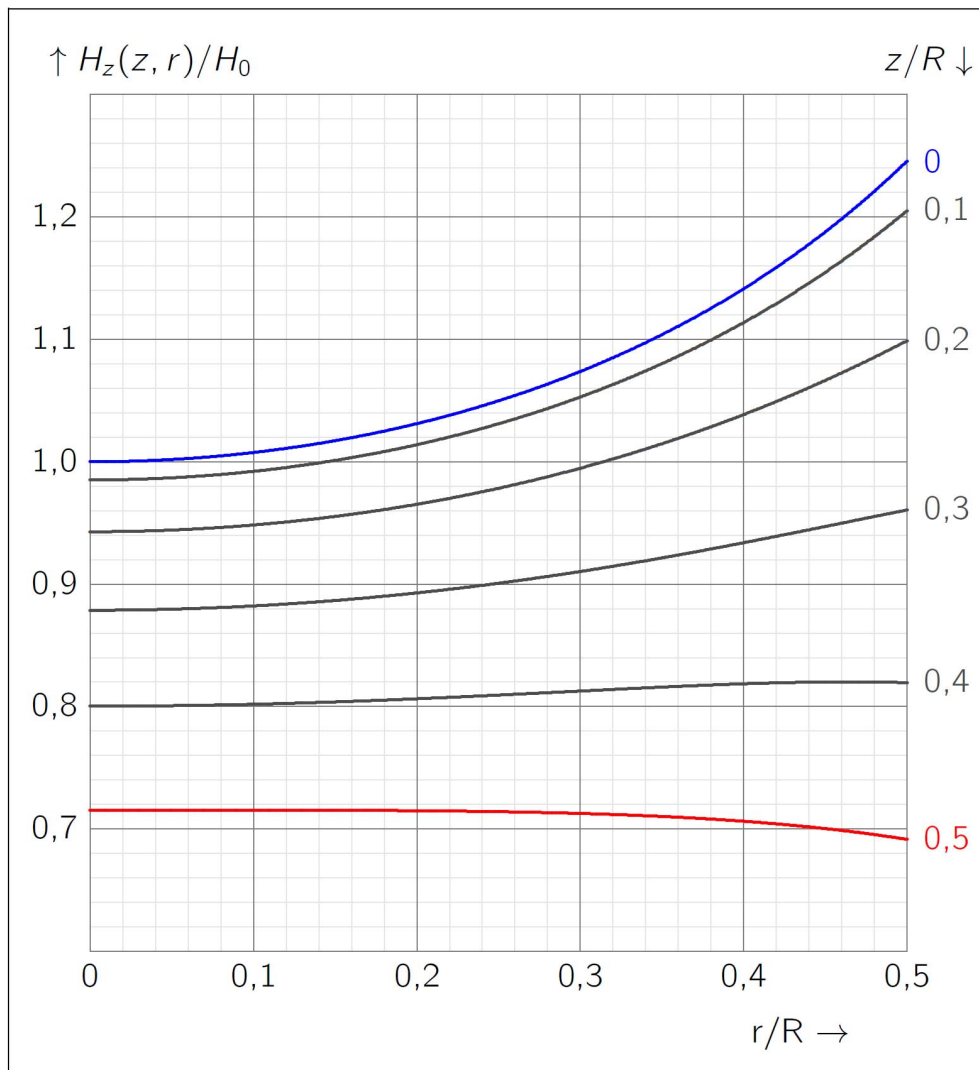


Abb. 18: Vergrößerter Ausschnitt der Abb. 5, S.6.

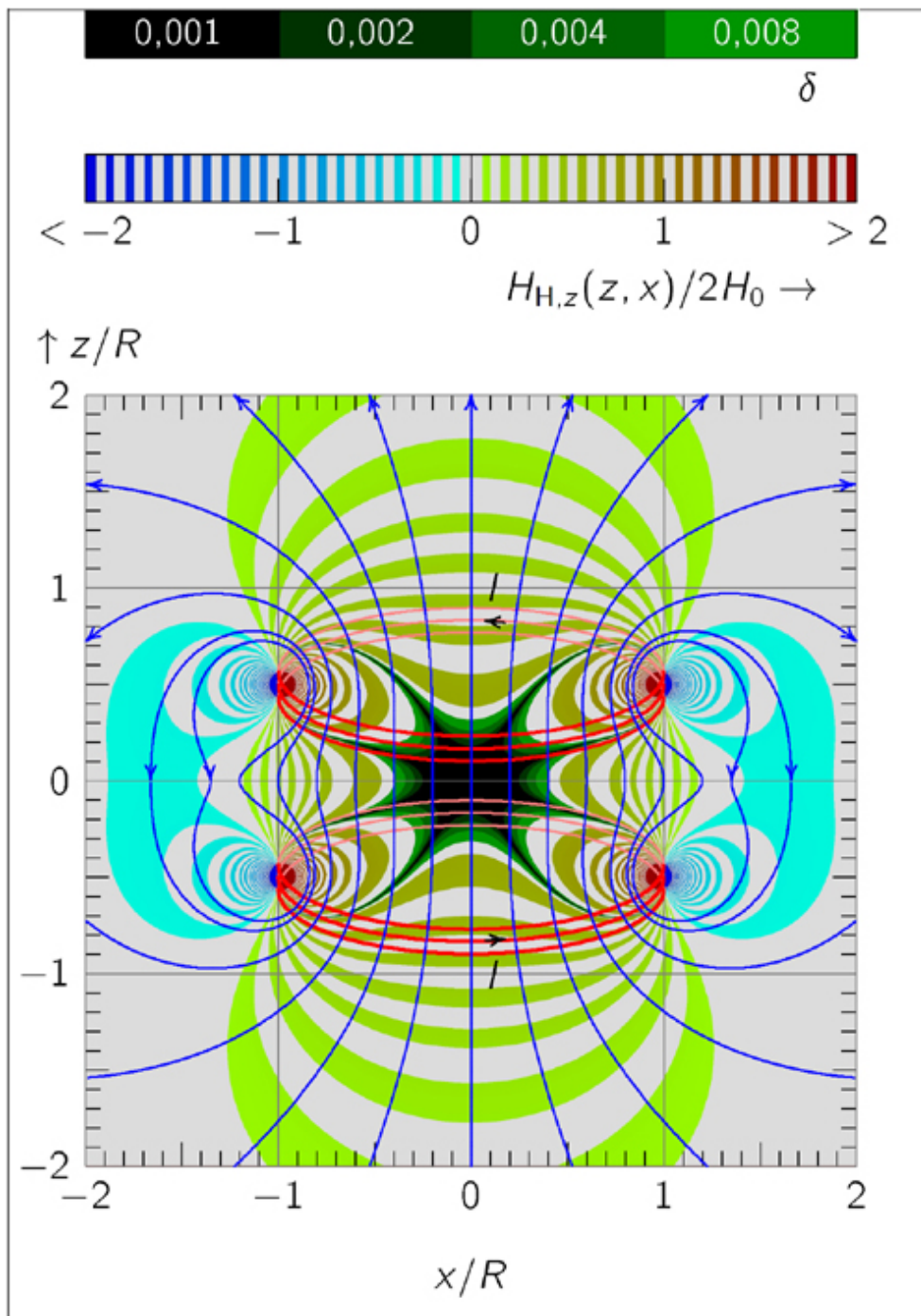


Abb. 19: Farbkodierte Stärke der z -Komponente H_z des Magnetfelds um eine Helmholtz-Spule in Abhängigkeit des Abstands $r = |x|$ von der Symmetrieachse und des Abstands $|z|$ von der Leiterebene. In Grüntönen (obere Legende) sind die Orte (x, z) gekennzeichnet, an denen $|H_{H,z}(x, z) - H_{H,z}(0,0)|/2H_0 < \delta$ gilt. Gezeigt sind auch einige Feldlinien (blau).

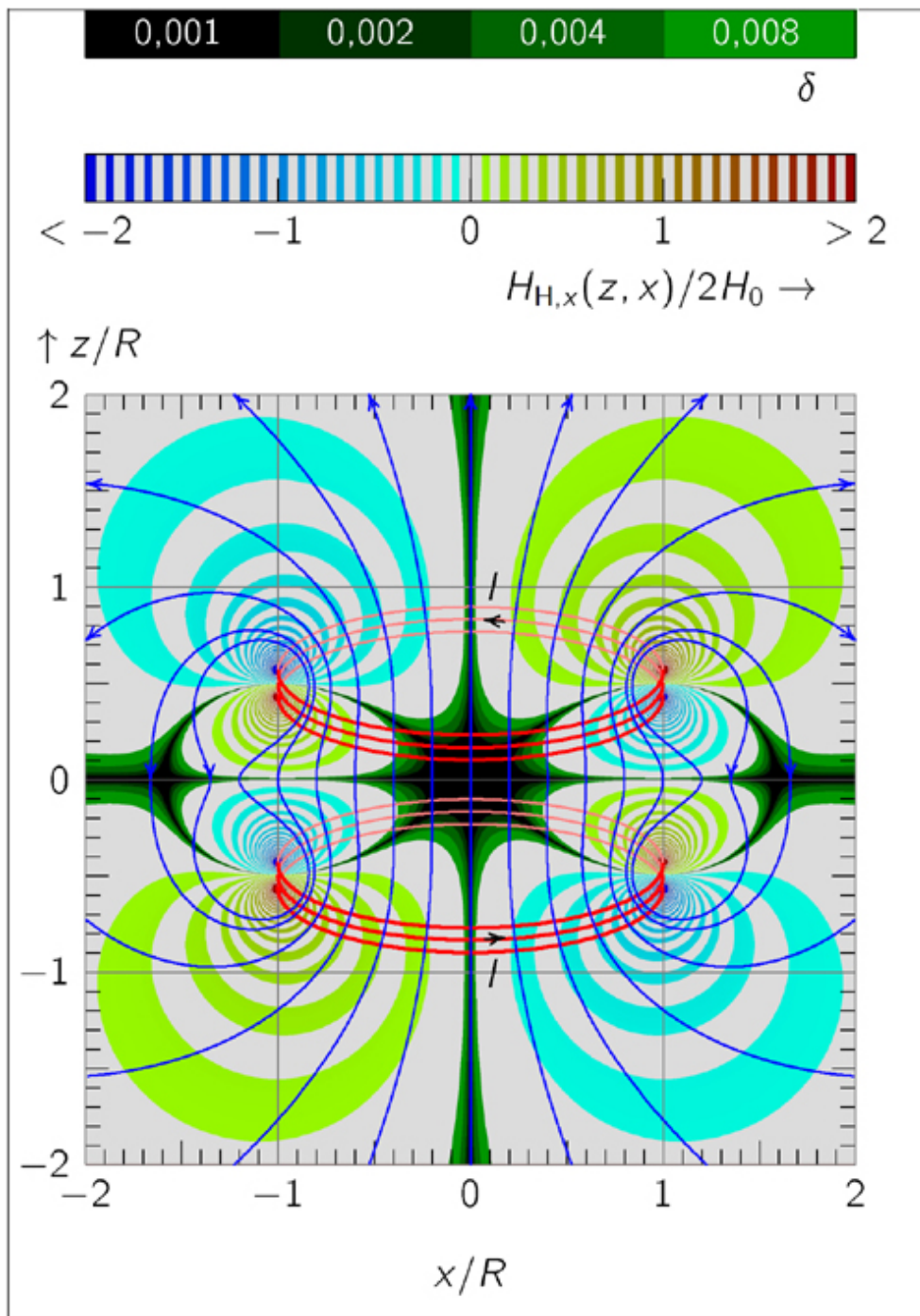


Abb. 20: Farbodierte Stärke der x -Komponente des Magnetfelds um eine Helmholtz-Spule in Abhängigkeit des Abstands $|x| = r$ von der Symmetrieachse und des Abstands $|z|$ von der Leiterebene. In Grüntönen (obere Legende) sind die Orte (x, z) gekennzeichnet, an denen $|H_{H,x}(x, z)|/2H_0 < \delta$ gilt (beachte: $H_{H,x}(0,0) = 0$). Gezeigt sind auch einige Feldlinien (blau).

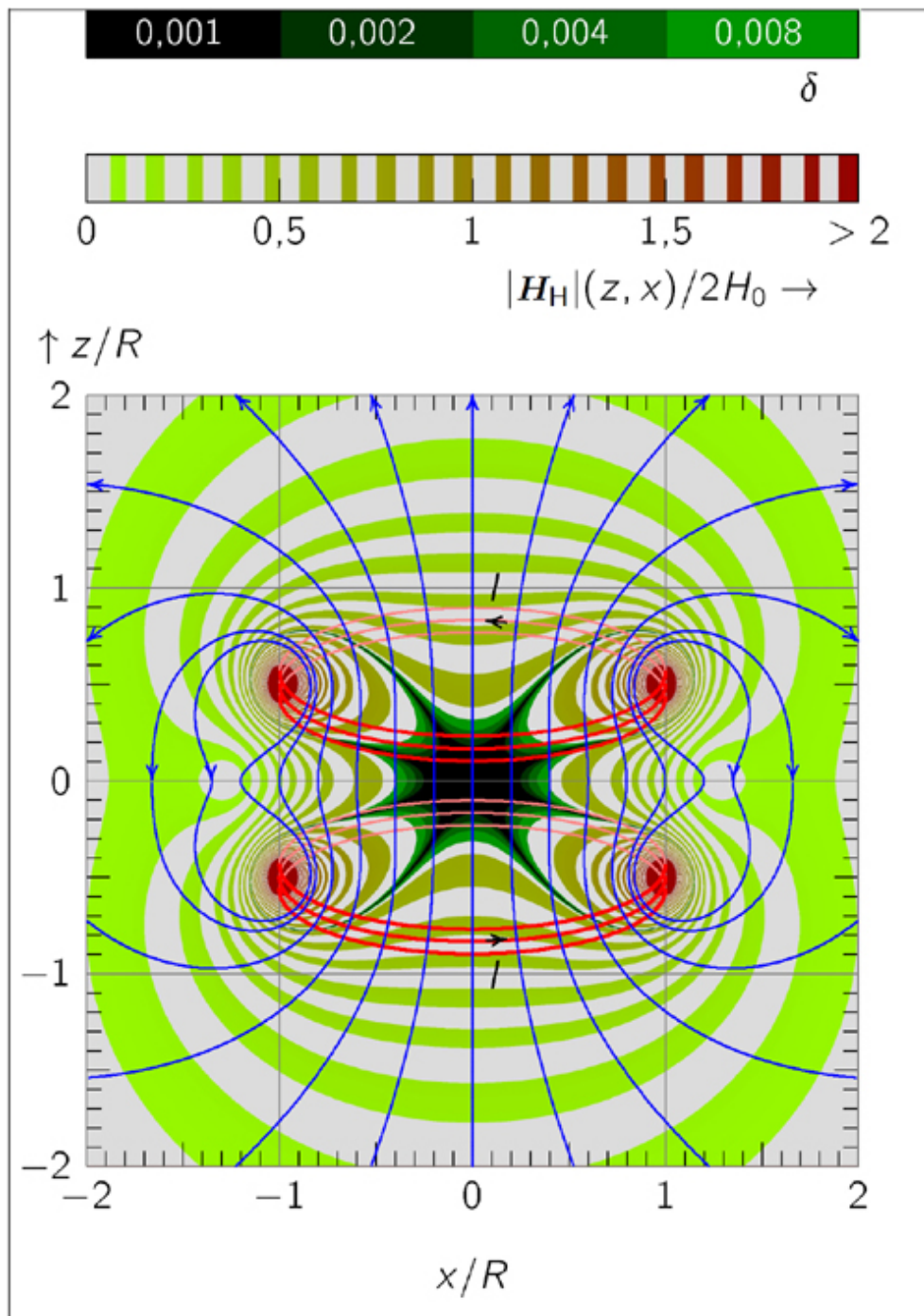


Abb. 21: Farbkodierte Stärke des Betrags $|\mathbf{H}|$ des Magnetfelds um eine Helmholtz-Spule in Abhängigkeit des Abstands $|x| = r$ von der Symmetrieachse und des Abstands $|z|$ von der Leiterebene. In Grüntönen (obere Legende) sind die Orte (x, z) gekennzeichnet, an denen $|1 - |\mathbf{H}_H|(x, z)|/|\mathbf{H}_H|(0,0)| < \delta$ gilt. Gezeigt sind auch einige Feldlinien (blau).

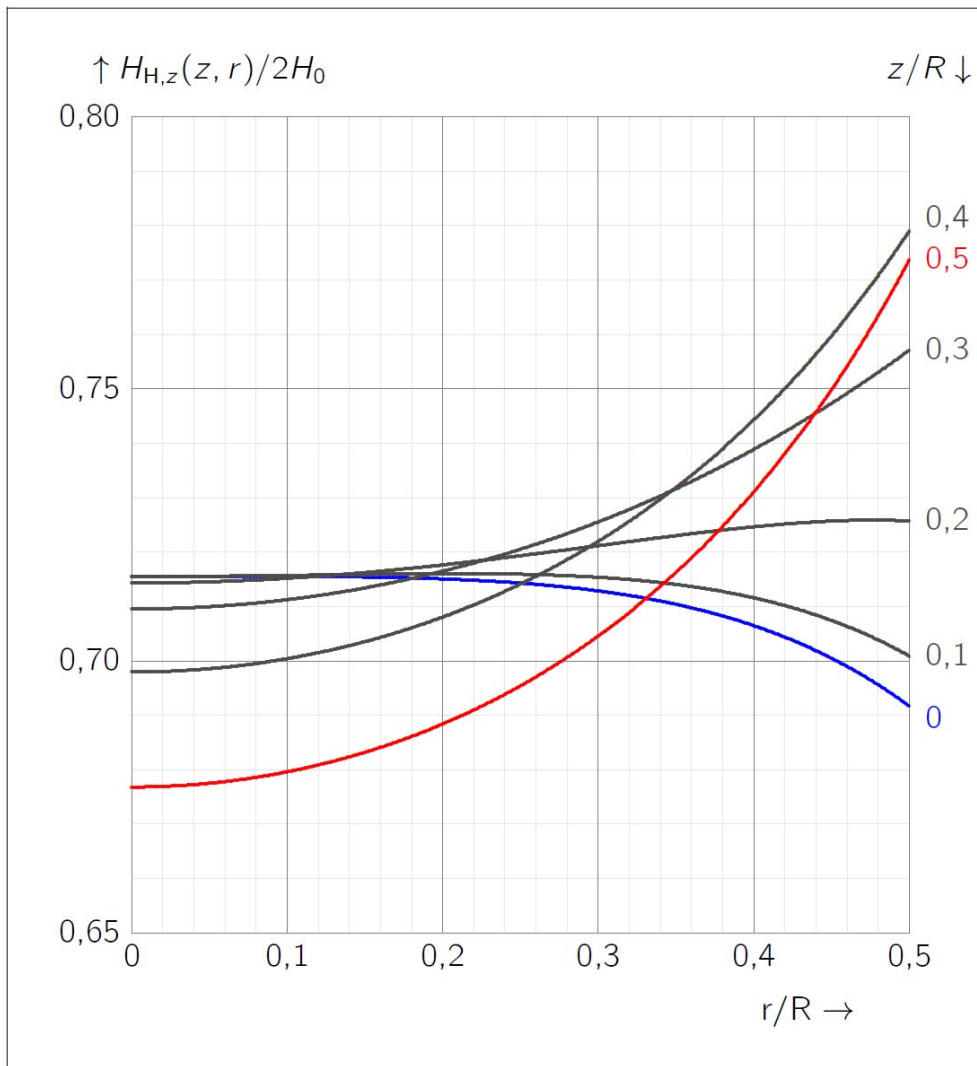


Abb. 22: Vergrößerter Ausschnitt der Abb. 8, S.7.

A.4 Erdmagnetfeld

Das Erdmagnetfeld lässt sich recht gut durch einen magnetischen Dipol (Stabmagnet) modellieren. Die Abweichungen von solch einem Modell liegen derzeit bei etwa 10%, sie werden größer, wenn die Stärke des Erdfeldes abnimmt, weshalb dann besser Multipolmodelle verwendet werden. Schon Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855) erkannte, dass der Ursprung des Feldes im Erdinneren liegt. Heute führt man die Entstehung des Erdmagnetfeldes auf große elektrische Ströme zurück, die zusammen mit großen Masseströmen im äußeren Erdkern (in den Tiefen (2900 . . . 5100) km) auftreten. Diese heißen Schmelzen haben vermutlich eine ähnlich niedrige Viskosität wie Wasser. Sie steigen infolge der geringeren Dichte auf und kühlen sich am Rand zum kälteren zähflüssigen unteren Erdmantel (660 . . . 2900) km ab, um dann infolge der erhöhten Massedichte wieder in den Bereich des äußeren Erdkerns „abzutauchen“. Somit bilden sich große Konvektionszellen, die infolge der Erdrotation schraubenförmig parallel zur Drehachse verlaufen. Energetisch angetrieben wird dies durch Kernspaltprozesse im Erdkern. Mit der Schmelze werden frei bewegliche elektrische Ladungsträger bewegt. Im Magnetfeld, welches durch die Verhältnisse in der Umgebung erzeugt wird, werden sie durch die Lorentz-Kraft abgelenkt. Sie stellen einen Strom dar, der seinerseits einen Beitrag zum Erdmagnetfeld liefert. Man spricht hier vom *Geodynamo*.

Die magnetischen Pole sind nicht ortsfest, wie überhaupt das gesamte Magnetfeld einer Veränderung unterliegt. Aus paläomagnetischen Untersuchungen von Gesteinsformationen weiß man, dass im Laufe der Erdgeschichte wiederholt auch Umpolungen auftraten, in Zeitabständen von 10^5 . . . 10^7 Jahren. Es gibt aber auch vergleichsweise schnelle Änderungen. So wurden z. B. Verschiebungen der magnetischen Pole um ca. 30 km/a gemessen, Abb. 23.

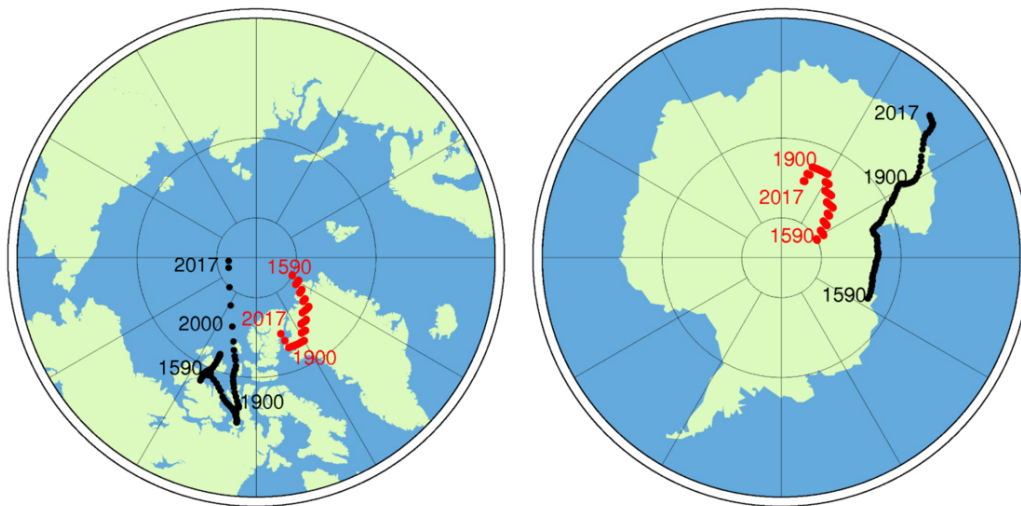


Abb. 23: Pol-Verschiebung des Erdmagnetfeldes (WIKIPEDIA, 18.11.2014)

Derzeitig ist in den mittleren und hohen Breitengraden die Vertikalkomponente, d.i. die radial zum Erdmittelpunkt gerichtete Komponente, stärker als in Nähe des Äquators. Auf der Nordhalbkugel weist sie nach unten. Folglich liegt der magnetische Südpol zur Zeit auf der Nordhalbkugel.⁶⁾ Die magnetische Dipolachse ist um etwa $11,4^\circ$ gegenüber der Rotationsachse der Erde geneigt. Den Neigungswinkel der magnetischen Feldlinien an einem bestimmten Punkt der Erdoberfläche gegenüber der Horizontalen nennt man *Inklination*, β . Unter diesem Winkel treten die Feldlinien in die Erdoberfläche ein. Eine Kompassnadel richtet sich nach ihnen aus, sofern dies die Aufhängung der Nadel zulässt. In Deutschland gilt $\beta = 62^\circ$. . . 70° (Stand 2010). An den magnetischen Polen gilt $\beta = 90^\circ$ und am magnetischen Äquator $\beta = 0$. Mit dem gesamten Erdmagnetfeld ist auch die Inklination zeitlich veränderlich. Diese Änderung beträgt jedoch weniger als $0,3^\circ/a$.

⁶⁾ Bei einem Stabmagneten treten die magnetischen Feldlinien am Südpol in den Stab ein und am Nordpol aus.

Die mittlere magnetische Flussdichte auf der Erdoberfläche hat den Betrag von etwa $\bar{B} \approx 50 \mu\text{T}$, Abb. 24.

Die Vertikalkomponente in Deutschland liegt im Bereich bei ca. $45 \mu\text{T}$. Die örtliche Variation des Betrags der magnetischen Flussdichte zeigt Abb. 25 (oben).

Die Winkelabweichung zwischen der horizontalen Komponente des Erdmagnetfeldes und dem Richtungspfeil von einem bestimmten Ort hin zum geographischen Nordpol nennt man *Deklination*. Sie ist beispielsweise in Seekarten verzeichnet und wird zur Korrektur der ortsabhängigen Missweisung eines Kompass verwendet (Abb. 25, unten).

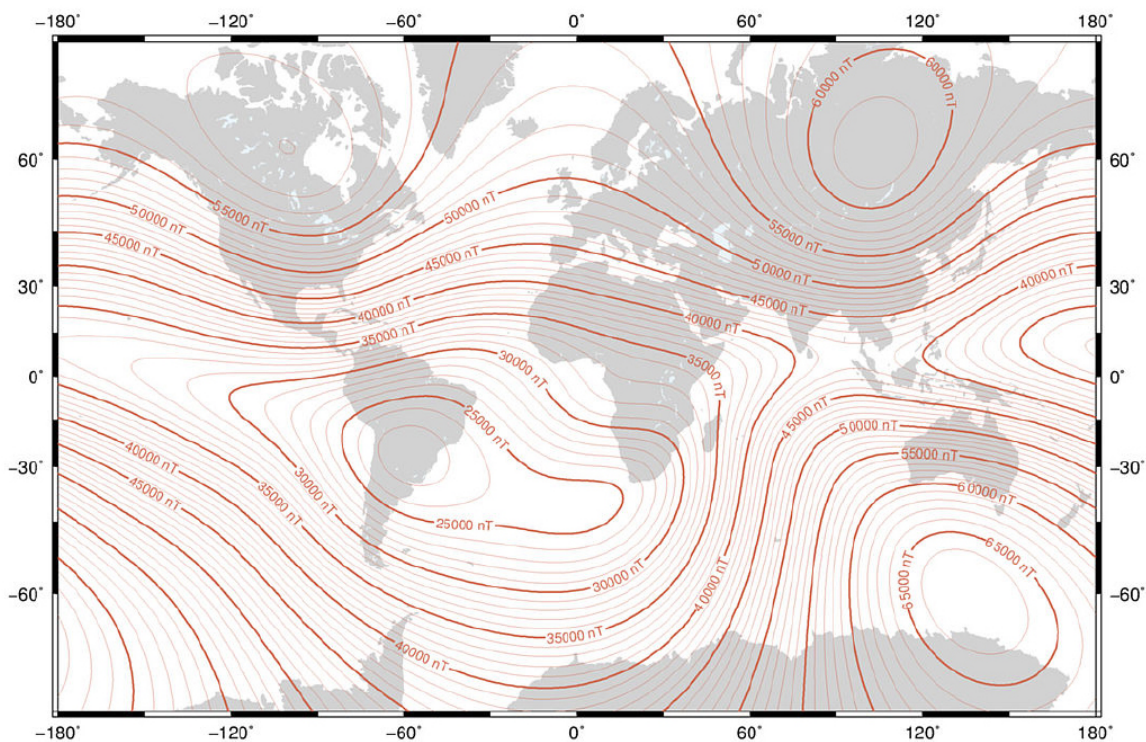


Abb. 24: Betrag des Erdmagnetfeldes. (WIKIPEDIA, 18.11.2014)

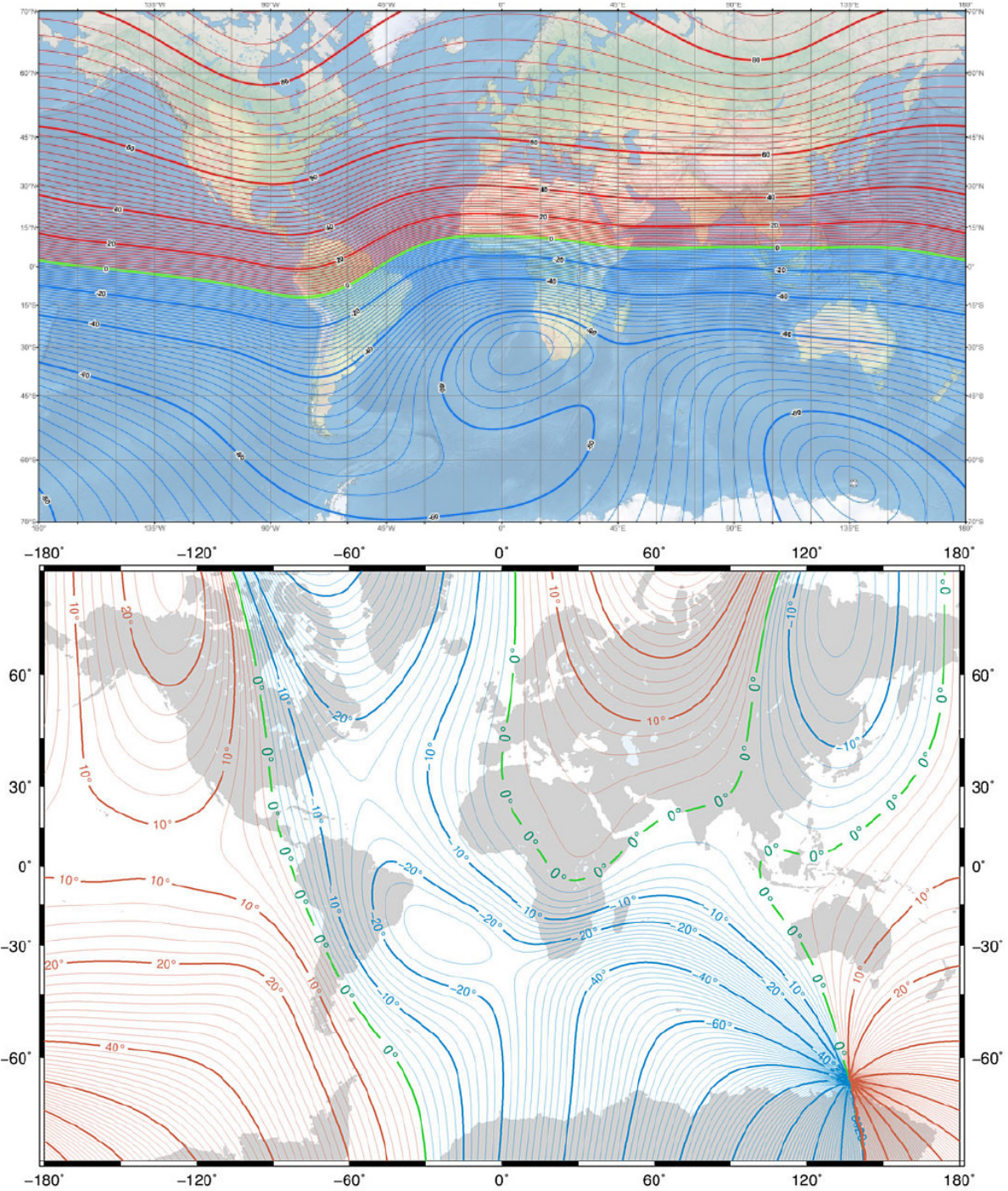


Abb. 25: Inklination (oben) und Deklination (unten) des Erdmagnetfeldes. (WIKIPEDIA, 18.11.2014)

A.5 Messanordnung A: Elektronenstrahlröhre in Ringspule

k	s_k / mm	I_k / A			\bar{I}_k / A	$B_k / \mu\text{T}$
0	-10	0	0	0	0	0
1	-9					
2	-8					
3	-7					
4	-6					
5	-5					
6	-4					
7	-3					
8	-2					
9	-1					
10	0					
11	1					
12	2					
13	3					
14	4					
15	5					
16	6					
17	7					
18	8					
19	9					
20	10					

Beschleunigungsspannung

$$U = 6,95 \text{ kV}$$

Strahlweg

$$b = 139(1) \text{ mm}$$

Spulenradius

$$R = 310(5) \text{ mm}$$

0,5 · Strahlweg / Spulenradius

$$b/2R \lesssim \dots$$

Windungszahl

$$N = 25$$

 Spulenstromstärke bei Ablenkung s_k

$$I_k$$

axiale magn. Flussdichte im Spulenzentrum

$$B_k = \mu_0 N I_k / 2R$$

maximale rel. Abweichung der Flussdichte entlang des Strahlweges

A.6 Messanordnung B: Fadenstrahlröhre — Tabellen

U/V =					U/V =				
k	$\frac{I_k}{A}$	$\frac{d_k}{mm}$	$\frac{e_k^*}{10^{11} \text{ As/kg}}$	$\frac{\Delta e_k^*}{10^{11} \text{ As/kg}}$	k	$\frac{I_k}{A}$	$\frac{d_k}{mm}$	$\frac{e_k^*}{10^{11} \text{ As/kg}}$	$\frac{\Delta e_k^*}{10^{11} \text{ As/kg}}$
1					12				
2					13				
3					14				
4					15				
5					16				
6					17				
7					18				
8					19				
9					20				
10					21				
11					22				

Permeabilität Vakuum: $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$

Spulenradius: $R = 155 \text{ mm}$

Anzahl Windungen je Spule: $N = 130$

Radius Elektronenbahn: r

Durchmesser Elektronenbahn: $d = 2r$

Größtabweichung Spulenradius: $\Delta R / \text{mm} =$

Größtabweichung Beschleunigungsspannung: $\Delta U / V =$

Größtabweichung Stromstärke: $\Delta I / A =$

Größtabweichung Bahndurchmesser: $\Delta d / \text{mm} =$

Spezifische Ladung Elektron: $e^* \equiv \frac{e}{m_e} = 250 U \cdot \left(\frac{R}{4\mu_0 N I \cdot d} \right)^2$

Größtabweichung: $e^* = e^*(U, R, I, d)$

$$\Delta e^* = |e^*(U, R, I, d) - e^*(U + \Delta U, R + \Delta R, I - \Delta I, d - \Delta d)|$$

Mittelwert spez. Ladung $\bar{e}^* = K^{-1} \sum_{k=1}^K e_k^* = \dots \cdot 10^{11} \frac{\text{As}}{\text{kg}}$

Vertrauensbereich (95%) $s_{\bar{e}^*} = k_{p,K} \cdot \sqrt{[K(K-1)]^{-1} \sum_{k=1}^K (e_k^* - \bar{e}^*)^2} = \dots \cdot 10^{11} \frac{\text{As}}{\text{kg}}$

Erweiterungsfaktor $k_{p,K} = \dots$

$e^* = \dots \quad (\dots) \cdot 10^{11} \frac{\text{As}}{\text{kg}} \quad (\gtrsim 95\%)$
--