

<b>Versuch A11:</b> Moseleysches Gesetz		Physik, Studentenfassung vom 1. Dezember 2023	
Gruppe/Versuchs-Nr.:	/	Datum:	
Name 1:		Name 2:	
Note Testat:		Note Testat:	
Note Protokoll:		Betreuer:	

- **Versuchsziel**

Nachweis der Gültigkeit des Moseleyschen Gesetzes der Röntgenfluoreszenz.

- **Themen zur Vorbereitung**

Einordnung von Röntgenstrahlen (RS) im elektromagnetischen Spektrum; Erzeugung von RS, Bremsstrahlung, charakteristische RS; Röntgenfluoreszenz; Moseleysches Gesetz und seine Bedeutung für die Interpretation des Periodensystems der Elemente

- **Messaufgaben**

1. Kalibrieren Sie das Energiespektrum der Röntgenfluoreszenz unter Verwendung des Fe–Zn–Targets.
2. Messen Sie die Energie der  $K_{\alpha}$ –Strahlung von Metallproben der acht Elemente

Titan  $_{22}\text{Ti}$ , Eisen  $_{26}\text{Fe}$ , Nickel  $_{28}\text{Ni}$ , Kupfer  $_{29}\text{Cu}$   
Zink  $_{30}\text{Zn}$ , Zirkonium  $_{40}\text{Zr}$ , Molybdän  $_{42}\text{Mo}$ , Silber  $_{47}\text{Ag}$ .

3. Nehmen Sie das Röntgenfluoreszenzdiagramm eines 2€–Geldstückes auf.

- **Sicherheitshinweise**

Röntgenstrahlen haben eine ionisierende Wirkung. Dadurch können sie lebende Zellen schädigen. Im Abstand von 10 cm vom Röntgengerät beträgt die effektive Strahlendosisleistung etwa  $1\mu\text{Sv/h}$ . Diese Dosis ist etwa 4mal größer als die der natürlichen Grundstrahlung, jedoch nur etwa  $1/4$  von jener der kosmischen Strahlung in 11 km Höhe, welcher man bei einem Fernflug ausgesetzt ist. Eine Gesundheitsgefährdung ist wegen der Kürze der Praktikumsdauer ausgeschlossen (s. auch Abschn. 3).

- **Auswertung**

1. Bestätigen Sie das Moseleysche Gesetz (9). Tragen Sie dazu für die untersuchten acht Materialien die Kernladungszahl  $Z$  über  $\sqrt{E_{K_{\alpha}}}$  auf ( $E_{K_{\alpha}}$ : Energie der Röntgenfluoreszenz beim  $K_{\alpha}$ –Übergang).  
Ermitteln Sie aus dem Anstieg der Regressionsgeraden die Rydberg–Konstante.
2. Bestimmen Sie mittels der  $K_{\alpha}$ –Linien des 2€–Geldstücks seine Zusammensetzung.



# 1 Grundlagen

## 1.1 Röntgenfluoreszenz

Trifft ein energiereiches Photon auf ein Atom, so wird letzteres mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit angeregt oder sogar ionisiert, also ein Hüllelektron aus dem Kraftfeld des Atomkerns weit entfernt. Die dafür nötige Energie liefert das eintreffende Photon, es wird dabei absorbiert. Die nötige Photonenenergie ist umso größer, je dichter das Hüllelektron am Kern liegt. Zur Anregung innerer Elektronen braucht man deshalb Röntgenstrahlung.

Das entfernte Hüllelektron kann aus einer beliebigen Schale stammen, es hinterlässt dort eine Fehlstelle. In diese kann nun ein anderes Hüllelektron einer energetisch höheren Schale springen. Die dabei frei werdende Energie wird in Form eines Photons spontan emittiert. Man nennt diese sekundäre Strahlung *Fluoreszenz*. Die Energie eines Fluoreszenz-Photons entspricht der Differenz der Energieniveaus, zwischen denen das Hüllelektron springt. Diese ist von der Kernladungszahl des Atoms abhängig. Folglich kann man durch Vermessung der Photonenenergie das chemische Element bestimmen. Liegt die Energie der emittierten Photonen im Bereich der Röntgenstrahlung (s.u.), nennt man dies *Röntgenfluoreszenzspektroskopie* (RFS) oder auch *Röntgenfluoreszenzanalyse* (RFA). Im Versuch werden auf diese Weise verschiedene Metalle wie auch Legierungen analysiert. Generell ist die Methode aber nicht auf Metalle beschränkt.

## 1.2 Röntgenstrahlung

Bei der nach Wilhelm Conrad Röntgen (1845–1923) bezeichneten elektromagnetischen Strahlung liegt die Photonenenergie  $E$  etwa im Bereich<sup>1)</sup>

$$(1 \dots 120) \text{ keV} .$$

Die entsprechenden Vakuumwellenlängen erhält man aus

$$\lambda = h \cdot c / E$$

Darin sind

$$c \equiv 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

<sup>1)</sup>  $1 \text{ eV} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Ws}$

die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und

$$\begin{aligned} h &\equiv 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\ &\approx 4,135\,667\,68 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

das Plancksche Wirkungsquantum. Für Röntgenstrahlen erhält man somit den Wellenlängenbereich von etwa

$$(10 \dots 1000) \text{ pm} .$$

Am langwelligen Ende diesen Spektralbereichs geht Röntgen– in die Ultraviolett–Strahlung über, am kurzwelligen in die Gamma–Strahlung. Die Bereichsgrenzen für die einzelnen Strahlungsarten sind jedoch nicht präzise festgelegt.

Röntgenstrahlen kann man mit einer speziellen Röhre erzeugen. Das ist ein evakuierter Glaskolben, in welchen zwei Elektroden (*Kathode* und *Anode*) eingelassen sind, Abb. 1. An diese wird eine elektrische Hochspannung  $U$  von bis zu etwa 120 kV gelegt. Die Kathode besteht aus einer Glühwendel. Sie wird elektrisch geheizt, so dass Elektronen thermisch emittiert werden. Die Wendel wird damit in eine Elektronenwolke gehüllt, wodurch sich zwischen Wendel und Wolke ein elektrisches Raumladungsfeld aufbaut, welches zunächst der weiteren Elektronenemission entgegenwirkt. Bei Anlegen einer positiven Anodenspannung  $U$ , der sog. *Beschleunigungsspannung*, werden jedoch Elektronen aus der Wolke zur Anode hin beschleunigt. Dies schwächt das Raumladungsfeld, so dass nun die Kathode weitere Elektronen emittieren kann. Die Stärke des Anodenstroms wird durch die

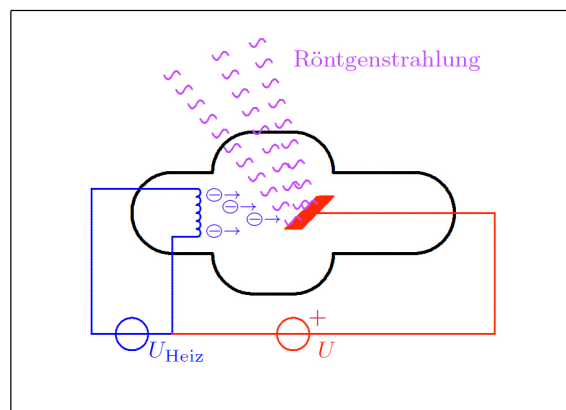


Abb. 1: Röntgenröhre (schematisch). Die Kathode (blau, z. B. Wolframdraht) wird durch Anlegen der Heizspannung  $U_{\text{Heiz}}$  auf die Temperatur von ca. 2000 K erwärmt. Die Heizspannung ist klein bez. der Anodenspannung  $U$ . Auf das Anodenmaterial (rot) treffen schnelle Elektronen. Die erzeugte Röntgenstrahlung setzt sich zusammen aus drei Anteilen: Bremsstrahlung, charakteristische Strahlung und Lilienfeldstrahlung.

Anodenspannung und ab einem gewissen Sättigungswert durch die Heizspannung bestimmt.

An der Anode treffen die Elektronen mit der kinetischen Energie  $eU$  auf das Anodenmaterial und werden abgebremst. Darin ist

$$e \equiv 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$$

der Betrag der elektrischen Ladung des Elektrons. Ein Teil dieser Energie wird über die sogenannte *Bremsstrahlung* abgegeben. Ihre energetische Verteilung ist kontinuierlich, mit einem ausgeprägten Maximum, das sich mit zunehmender Beschleunigungsspannung zu größeren Energien verschiebt.

Der Bremsstrahlung überlagert ist die sog. *charakteristische Strahlung*, das ist die Röntgenfluoreszenz des Anodenmaterials mit einer materialspezifischen diskreten Energieverteilung.<sup>2)</sup> Ein Photon der gesamten Röntgenstrahlung kann maximal die Energie  $eU$  haben.

Würde man das Anodenmaterial auswechseln, also verschiedene Röntgenröhren verwenden, könnte man verschiedene Anodenmaterialien an der charakteristische Strahlung erkennen. Einfacher ist es jedoch, mit ein und derselben Röhre zu arbeiten und die Röntgenstrahlung auf ein externes Target (Material) zu leiten, um dessen Fluoreszenz zu analysieren. Diese lassen sich einfach auswechseln, was in diesem Experiment praktiziert wird.

### 1.3 Strahlungsemission nach Bohr

Aufbauend auf dem Atommodell von Ernest Rutherford (1871–1937) veröffentlichte Niels Bohr (1885–1962) im Jahr 1913 sein Atommodell. Damit konnte er die charakteristischen Emissionsspektren chemischer Elemente deuten, insbesondere das von Wasserstoff. Sein Modell beruht auf folgenden Postulaten (Abb. 2):

#### 1. Postulat:

Das elektrisch neutrale Atom besteht aus einem positiv geladenen Kern und wird von einer der Kernladungszahl entsprechenden Anzahl von Elektronen umkreist. Der Umlauf eines

<sup>2)</sup>Darüber hinaus beobachtet man die sog. *Lilienfeldstrahlung*, welche beim Übergang von elektrisch geladenen Teilchen (hier Elektronen) durch die Grenzfläche zwischen Ausbreitungsmedien unterschiedlicher Dielektrizität entsteht.

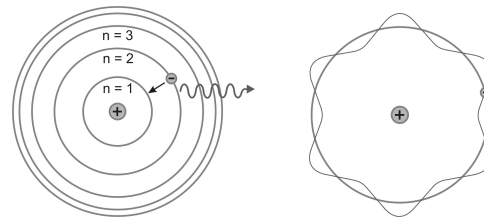


Abb. 2: Bohrsches Atommodell: Links: Emission eines Lichtquants (Photons) in Folge eines Elektronensprungs auf eine niederenergetische Umlaufbahn. Rechts: Positive Interferenz eines Elektrons mit sich selbst auf einer stationären Umlaufbahn (stationärer Zustand).

Elektrons erfolgt auf einer gewissen stationären (strahlungsfreien) Bahn. Diese ist dadurch charakterisiert, dass der Drehimpuls des Elektrons ein ganzzahliges Vielfache von  $h/2\pi$  ist.

#### 2. Postulat:

Wechseln Elektronen von einem energetisch höheren Zustand  $E_m$  in einen niederen Zustand  $E_n$ , so wird (elektromagnetische) Strahlung mit dem *Energiequantum*  $E_{mn} \equiv E_m - E_n$  emittiert.<sup>3)</sup> Nach Max Planck (1858–1947) ist diese Energie proportional zur Frequenz  $f_{mn}$  der Strahlung,

$$E_{mn} = h \cdot f_{mn} \quad (1)$$

Auf der Grundlage der Bohrschen Postulate können die möglichen Frequenzen in einem Emissionsspektrum

<sup>3)</sup>Bereits 1886 fand Wilhelm Hallwachs, dass elektromagnetische Strahlung Elektronen aus den Hüllen von Atomen eines Halbleiters oder Metalls herauslöst und somit das Atom ionisiert. Man nennt dies *äußerer photoelektrischer Effekt* (auch *Hallwachs-Effekt*).

Albert Einstein deutete diesen Effekt im Jahre 1905, wobei er den Begriff *Lichtquant* einführte. Danach kann solch ein Quant nur als Ganzes erzeugt oder absorbiert werden. Zur Herauslösung eines Elektrons aus der Atomhülle muss das Lichtquant also eine Energie  $h \cdot f$  haben, die größer ist, als die für die Ionisierung nötige. Für diese Deutung erhielt er im Jahre 1921 den Physik-Nobelpreis. Diese Ehrung erfuhr Max Planck drei Jahre zuvor für die Entdeckung der Energiequanten bei der Deutung der Wärmestrahlung schwarzer Körper, welche schon im Jahre 1900 erfolgte.

Die Vorstellungen von Energiequanten fanden nur langsam breitere Anerkennung. Die Bezeichnung *Photon* für ein Lichtquant setzte sich vor allem mit den Arbeiten von Arthur Holly Compton (1892–1962) durch. Er erhielt 1927 den Nobelpreis für Physik für seine Untersuchungen zur Streuung von Photonen an Materie. Bei der sog. *Compton-Streuung* gibt ein Photon einen Teil seiner Energie an ein Atom ab, wodurch dieses ionisiert wird. Der Effekt wird vor allem bei energiereichen Photonen beobachtet (100 keV... 10 MeV,  $\gamma$ -Strahlung).

berechnet werden (s. Anhang A.1),

$$f_{mn} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \cdot Z^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) . \quad (2)$$

Die Formel gilt für Wasserstoff sowie für alle wasserstoffähnlichen Atome, das sind Atomkerne mit nur einem Hüllelektron, wie z. B. die Helium- und Lithiumionen  ${}^2\text{He}^+$  bzw.  ${}^3\text{Li}^{++}$ .

Neben den bereits eingeführten Größen  $e$  und  $h$  hängen die Emissionsfrequenzen ab von der Kernladungszahl  $Z$ , der Elektronen-Ruhemasse,

$$m_e = 9,109\,383\,701\,5(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg} ,$$

und der Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon_0 = 8,854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} .$$

## 1.4 Rydberg-Konstante

Auf experimentellem Weg fanden bereits in den 80er Jahren des 19. Jahrhunderts Johann Balmer (1825–1898) und Johannes Rydberg (1854–1919) die Beziehung

$$f_{mn} = c \cdot R_\infty \cdot Z^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) . \quad (3)$$

Ein Vergleich mit (2) liefert die *Rydberg-Konstante*

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8 c \epsilon_0^2 h^3} \quad (4)$$

Ihr Zahlenwert beträgt

$$R_\infty = 1,097\,373\,156\,816\,0(21) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} . \quad (5)$$

Das Produkt  $c \cdot R_\infty \approx 3,289 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  nennt man *Rydberg-Frequenz*.

Der Index „ $\infty$ “ weist darauf hin, dass hierbei der Atomkern als ruhend angenommen wird. Diese Näherung ist gerechtfertigt, da der Atomkern bedeutend schwerer ist, als ein Elektron. Je schwerer der Atomkern, desto besser gilt jedoch die Näherung. Würde man jedoch beim Wasserstoffatom auf diese Näherung verzichten, so müsste in (3)  $R_\infty$  durch

$$R_H = 0,999\,455\,8 \cdot R_\infty$$

ersetzt werden.

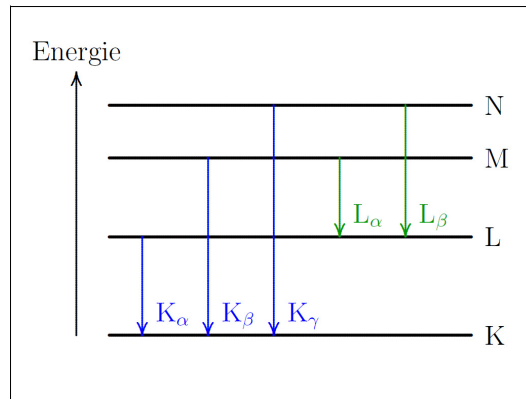


Abb. 3: Energieniveauschema und Termsymbole für Elektronenübergänge in der Atomhülle.

## 1.5 Bezeichnungen

In der Atomphysik verwendet man für die Hauptquantenzahlen (Energieniveaus)  $n = 1, 2, 3, \dots$  die Buchstaben K, L, M, ... Die Bezeichnung einiger energetischer Übergänge von Elektronen in der Atomhülle ist Abb. 3 zu entnehmen. Die Übergänge in ein festes Grundniveau  $n$  von höheren Niveaus  $m$  fasst man in einer *Serie* zusammen. Nach Charles Glover Barkla (1877–1944) nennt man sie K-, L-Serie usw.<sup>4)</sup>

## 1.6 Strahlungsemission bei Abschirmung des Kerns

Die Übergangsfrequenzen  $f_{mn}$  lassen sich für Wasserstoff nach (3) in sehr guter Näherung berechnen. Schwerere neutrale Atome haben jedoch mehrere Hüllelektronen. Dann schirmen kernnahe Elektronen die positive Ladung des Kerns teilweise ab, so dass kernferne Elektronen weniger stark angezogen werden. Damit ändern sich auch die Übergangsfrequenzen.

Seien zum Beispiel bei einem vergleichsweise schweren Atom wie Eisen  ${}^{26}\text{Fe}$  (Kernladungszahl  $Z = 26$ )

<sup>4)</sup> Barkla experimentierte mit sekundärer Röntgenstrahlung in den Jahren 1906–1911. Er fand, dass diese Strahlung bezüglich ihres Durchdringungsvermögens in zwei Klassen zerfällt, die er recht willkürlich mit K und L bezeichnete. Buchstaben des Alphabetes vor K und nach L wollte er für möglicherweise noch zu entdeckende Strahlung mit größerem bzw. geringerem Durchdringungsvermögen vorbehalten.

Für die Entdeckung der charakteristischen Röntgenstrahlung der Elemente erhielt er 1917 den Physik-Nobelpreis. Er entdeckte auch die Polarisation von Röntgenstrahlung, was wesentlich zu ihrer Interpretation als elektromagnetische Welle beitrug.

alle unteren Schalen mit Elektronen besetzt, bis auf die K-Schale, wo ein Elektron fehlt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass ein Elektron der L-Schale unter Emission eines sogenannten  $K_\alpha$ -Photons in die K-Schale springt, also dichter an den Atomkern heran. Die K-Schale besitzt aber schon ein Elektron, welches die positive elektrische Ladung um etwa eine Elementarladung abschirmt. Für den  $K_\alpha$ -Übergang setzt man deshalb in (3) an Stelle von  $Z$  die *effektive Kernladungszahl*  $Z_{\text{eff}} = Z - 1 = 25$ .

Allgemein setzt man für die Übergangsfrequenzen bei Abschirmung anstelle von (3),

$$f_{mn}^* = c_0 \cdot R \cdot Z_{\text{eff}}^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) . \quad (6)$$

Die effektive Kernladungszahl ist davon abhängig, zwischen welchen Energieniveaus  $m$  und  $n$  ein Elektron springt und wie die kernnahen Niveaus besetzt sind. Sind alle Niveaus besetzt, bis auf das  $n$ -te, so macht man den Ansatz

$$Z_{\text{eff}}(m, n) = Z - \sigma_{mn} , \quad (7)$$

mit der Abschirmkonstanten  $\sigma_{mn} \geq 0$ . Noch allgemeiner ist  $Z_{\text{eff}}$  von der gesamten Verteilung der Hülfelektronen abhängig.<sup>5)</sup>

## 1.7 Moseleysches Gesetz

Für den  $K_\alpha$ -Übergang (Übergang von der L- zur K-Schale) setzt man in (7)  $\sigma_{2,1} = 1$ . Unter allen K-Übergängen hat dieser die höchste Wahrscheinlichkeit. Die zugehörige Photonenenergie

$$E_{K_\alpha} \equiv h \cdot f_{2,1}^*$$

ist dann nach (6) und (7) für  $Z > 1$  durch

$$E_{K_\alpha}(Z) = \frac{3}{4} h c R \cdot (Z - 1)^2 \quad (8)$$

gegeben. Diese Energie ist nur noch von der Kernladungszahl  $Z$  abhängig. Dies ermöglicht die Identifizierung chemischer Elemente durch Messung der

<sup>5)</sup>Im Sommerfeldschen Atommodell wird eine Aufspaltung der Energieniveaus u.a. infolge der Abschirmung beschrieben: Ohne Abschirmung wären alle Elektronen einer Hauptschale energetisch gleich. Man nennt dies *Entartung*. Die Elektronen einer Hauptschale haben jedoch unterschiedliche Drehimpulsquantenzahlen, weshalb sie unterschiedlichen Abschirmungen unterliegen. Dies wiederum bedingt unterschiedliche Energiezustände und hebt somit die Entartung auf. Im Emissionsspektrum sieht man demzufolge eine Aufspaltung von Spektrallinien.

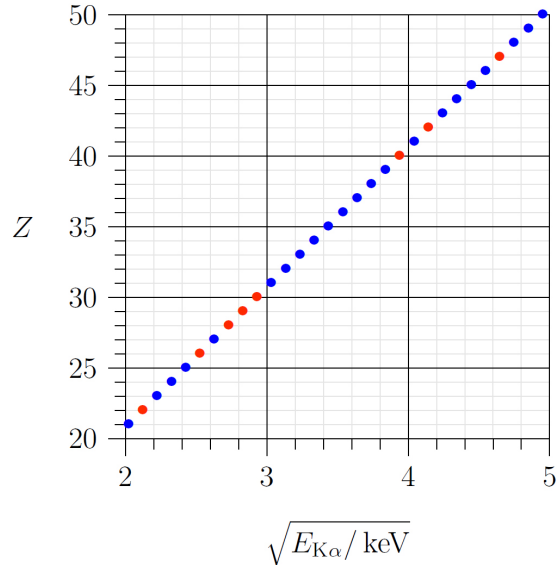


Abb. 4: Die Kernladungszahl  $Z$  der Atome wächst linear mit der Wurzel der Photonenenergie  $E_{K_\alpha}$  beim  $K_\alpha$ -Übergang, Moseleysches Gesetz (9). Rot markiert sind die im Experiment verwendeten Targetmaterialien.

Energie  $E_{K_\alpha}$  der  $K_\alpha$ -Fluoreszenz-Photonen. Einige  $E_{K_\alpha}$ -Werte und die zugehörigen Frequenzen wie auch Wellenlängen verschiedener Elemente finden sich im Anhang A.2.

Gleichung (8) kann wie folgt umgestellt werden,

$$Z = 1 + \frac{2}{\sqrt{3 h c R}} \cdot \sqrt{E_{K_\alpha}} \quad (9)$$

Somit wächst die effektive Kernladungszahl  $Z - 1$  linear mit der Wurzel der  $K_\alpha$ -Photonenenergie  $E_{K_\alpha}$ , Abb. 4. Der Anstieg beträgt,

$$\frac{2}{\sqrt{3 h c R}} = \frac{7,820848..}{\sqrt{10^{-16} \text{Ws}}} = \frac{9,899403..}{\sqrt{\text{keV}}}$$

Aufbauend auf die Arbeiten von Barkla wurde der lineare Zusammenhang (9) erstmals von Henry Moseley (1887–1915) in den Jahren 1913/14 (experimentell) entdeckt. Damit wurde das Konzept der Ordnungszahl  $Z$  im Periodensystem der chemischen Elemente physikalisch fundiert. Zuvor hatte man  $Z$  nur als Rangzahl des Atomgewichts eines chemischen Elementes unter allen bis dahin bekannten Elementen angesehen. Würde ein neues Element mit einem Atomgewicht zwischen zwei bereits bekannten gefunden, hätte man nach der althergebrachten Auffassung die Ordnungszahlen der bereits bekannten schwereren Elemente um eins erhöhen müssen. Mit seinen spektro-

skopischen Untersuchungen gab Moseley diesen Ordnungszahlen eine tiefer gehende physikalische Bedeutung als Kernladungszahl  $Z$ . Insbesondere fand er im Periodensystem der Elemente für  $Z \leq 79$  drei Lücken bei  $Z = 43, 61$  und  $75$ , die durch die später entdeckten Elemente Technetium  $^{43}\text{Tc}$ , Promethium  $^{61}\text{Pm}$  bzw. Rhenium  $^{75}\text{Re}$  gefüllt wurden.

## 1.8 Anregungsenergie

Beim  $K_\alpha$ -Übergang wird ein Floreszenzphoton der Energie  $E_{K\alpha}$  emittiert, Gl. (8). Um diesen Übergang durch Bestrahlung mit einem Photon anzuregen, muss seine Energie  $E_{\text{Ph}}$  jedoch zumindest die Ionisierungsenergie  $E_{\infty,1}$  (Anregungsgrenze) betragen, mit welcher ein Elektron der  $K$ -Schale aus der Atomhülle entfernt wird. Es gilt also

$$E_{K\alpha} < E_{\infty,1} \leq E_{\text{Ph}} .$$

Die Photonenenergie muss also deutlich größer als  $E_{K\alpha}$  sein. Die Erklärung hierfür ist, dass die Elektronen von schwereren Elementen in Kernnähe nur voll besetzte Energieschalen vorfinden. Nach dem von Wolfgang Pauli (1900–1958) formulierten Prinzip können sich Fermionen (Teilchen mit halbzahligen Spin, wie z. B. Elektronen) in einem quantenmechanischen System nicht in allen Quantenzahlen gleichen.<sup>6)</sup> Deshalb können vollbesetzte Energieniveaus keine weiteren Elektronen aufnehmen. Das innere Elektron muss quasi gänzlich aus der Atomhülle herausgelöst werden, um auf der  $K$ -Schale seinen Platz freizugeben, auf welchen dann ein anderes Hüllenelektron unter Emission eines Floreszenzphotons fallen kann. Dies ist vorzugsweise ein Elektron der energetisch nächst höheren  $L$ -Schale. Praktisch bedeutet dies, dass für die Spannung  $U$  an der Röntgenröhre

$$U > E_{\infty,1}/e$$

gelten muss, so dass die Elektronen an der Anode der Röntgenröhre mit ihrer Bremsstrahlung Photonen mit hinreichend großer Energie erzeugen. Die Differenz der Wellenzahlen,

$$\frac{E_{\infty,1}}{hc} - \frac{E_{K\alpha}}{hc} ,$$

<sup>6)</sup>Quantenzahlen gibt es für verschiedenen Größen wie die Energie und den Drehimpuls sowie magnetische Quantenzahlen des Drehimpulses. Pauli erhielt im Jahre 1945 den Nobelpreis für Physik für das nach ihm benannte Ausschlussprinzip, das für die Deutung der Struktur der Materie grundlegend ist.

nennt man *Stokesschen Sprung*. Für die  $K_\beta$ -Linie ist dieser Sprung kleiner als für die  $K_\alpha$ -Linie und für die  $K_\gamma$ -Linie ist er fast verschwindend klein.<sup>7)</sup>

## 2 Versuchsapparatur

### 2.1 Röntgengerät

Die Versuchsapparatur zeigt Abb. 5. Vom Bedientableau aus kann die Röntgenröhre eingeschaltet sowie ihre Beschleunigungsspannung  $U$  und Stromstärke  $I$  eingestellt werden,

$$\begin{aligned} U &= 0 \dots 35 \text{ kV} , \\ I &= 0 \dots 1 \text{ mA} . \end{aligned}$$

Darüber hinaus lassen sich im Experimentierraum die Stellungen vom Targethalter sowie des Detektors in Schritten von  $1/10$  Grad einstellen.

### 2.2 Energie-Detektor

Der Detektor besteht aus einer sogenannten *pin-Diode* (engl. für *positive intrinsic negative diode*). Dies ist eine Halbleiter-Diode auf der Basis von Silizium. Die Diode besteht wie eine übliche Halbleiterdiode aus einer  $p$ -, und  $n$ -dotierten Schicht, allerdings ist hier zwischen beiden eine undotierte eigenleitende Schicht eingelagert, die sogenannte *intrinsische* Schicht (kurz:  $i$ -Schicht), Abb.6. Wird die  $pin$ -Diode in Sperrrichtung betrieben ( $n$ -Schicht elektrisch positiv gegenüber der  $p$ -Schicht), dann bildet sich in der Mitte eine größere Raumladungszone aus als bei einer gewöhnlichen  $pn$ -Diode. Die  $pin$ -Diode kann als Plattenkondensator aufgefasst werden, mit der Raumladungszone um die  $i$ -Schicht als Dielektrikum. Treten energiereiche Röntgen-Photonen in diese Zone ein, so bewirken sie die Bildung von Elektronen-Loch-Paaren und somit einen elektrischen Strompuls, dessen Stärke mit der Photonenenergie wächst. Wird die Diode mit einem ohmschen Vorwiderstand betrieben, so zeigt sich über diesem mit jedem Strompuls ein dazu proportionaler Spannungspuls. Auch aus dessen Höhe kann nach geeigneter Kalibrierung die Photonenenergie bestimmt werden. Zur Rauschminderung wird die  $pin$ -Diode mit einem Peltier-Element gekühlt.

<sup>7)</sup>Arnold Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, 1. Band, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1951, S. 245 f.

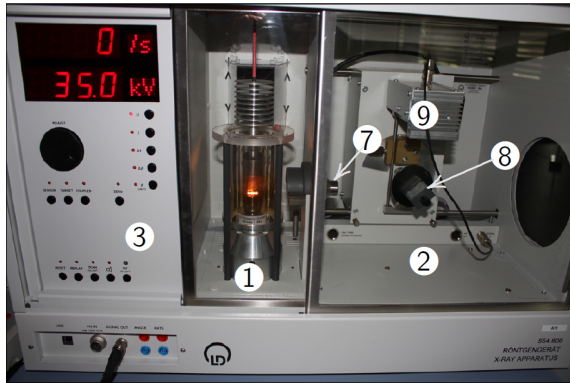
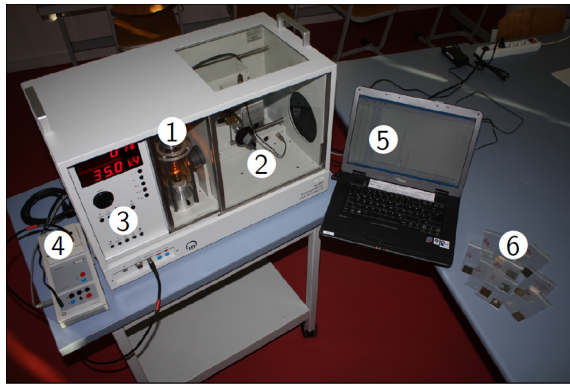


Abb. 5: Versuchsanordnung:  
 (1) Röntgenröhre,  
 (2) Experimentierraum,  
 (3) Bedientableau,  
 (4) Signalverarbeitungsmodul CASSY,  
 (5) Rechner mit Software CASSY-Lab,  
 (6) Metallproben,  
 (7) Kollimator,  
 (8) Targethalter (drehbar),  
 (9) PIN-Detektor mit Kühlkörper (drehbar, aktive Kühlung).



Abb. 6: Schema einer pin-Diode.

Die Impulshöhen werden mit einem Analog-Digital-Wandler vermessen. Schließlich wird ein Histogramm zu den Impulshöhen unter Verwendung eines Computersystems erstellt.<sup>8)</sup> Mittels einer bekannten  $K_{\alpha}$ -Energie lässt sich die Impulshöhe kalibrieren. Die Soft-

<sup>8)</sup>Hier wird das System „Sensor-CASSY“ mit einer Viel-Kanal-Impulshöhen-Analysator-Box (VKA-Box) vom Hersteller LEYBOLD verwendet.



Abb. 7: Bedientableau des Röntengerätes: (1) Auswahltaster für Beschleunigungsspannung, (2) Auswahltaster für Stromstärke, (3) Auswahltaster für Winkel Detektor, (4) Auswahltaster für Winkel Targettisch, (5) Einstellrad, (6) Ein/Aus-Taster für Hochspannung  $U$  der Röntgenröhre.

ware lässt die Kalibrierung auch aus zwei Werten der  $K_{\alpha}$ -Energie zu.

### 2.3 Einstellungen am Röntengerät

Am Bedientableau des Röntengerätes sind folgende Einstellung vorzunehmen, Abb.7:

#### Röntgenröhre:

Beschleunigungsspannung  $U$  35 kV  
 Stromstärke  $I$  1 mA

#### Target und Sensor:

Winkel Targettisch 45°  
 Winkel Sensor (PIN-Detektor) 90°



## 2.4 Software

Zur Auswertung der Messdaten dieses Versuchs wird die Software „Cassy Lab 2“ verwendet, welche Sie über den Desktop des bereitgestellten Rechners öffnen können. Die nötigen Einstellungen und Kalibrierung der Software sind nachfolgend beschrieben.

### 1. Auswahl des Vielkanalanalysators (VKA)

Nach dem Öffnen der Software wählen Sie im angezeigten Dialogfeld die obere linke Box und damit den Vielkanalanalysator als Dateneingang aus und schließen dieses Fenster (Abb. 8).

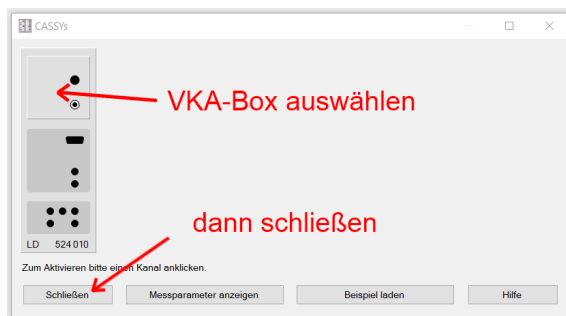


Abb. 8: Auswahl des Vielkanalanalysators.

### 2. Einstellung der Messparameter

Nach der Auswahl des Dateneingangs sind am rechten Bildrand die Standardeinstellungen der Messparameter auszuwählen (Abb. 9).

Diese beinhalten:

- die Messung über 512 Kanäle
- die Verstärkung negativer Pulse (Häkchen setzen)
- den Verstärkungsfaktor -3,5 (die negative Pulshöhe und der Faktor sind aneinander gekoppelt)
- die Messdauer von 150 s

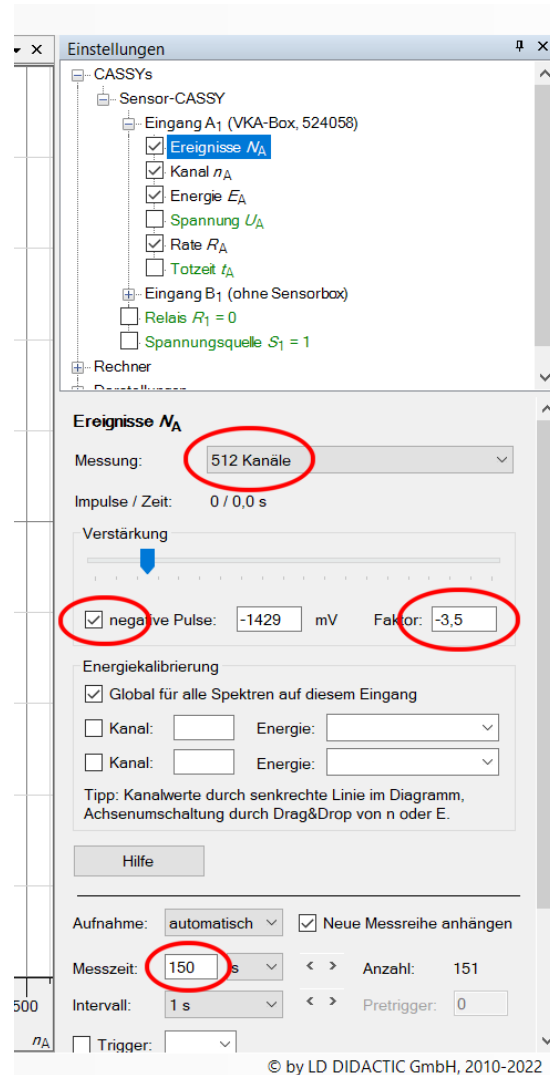


Abb. 9: Einstellung der Messparameter.

### 3. Kalibrierung der Energieskala

Der Detektor des Messgeräts bestimmt die Energie einfallender Röntgenphotonen und sortiert sie entsprechend in einen der 512 Kanäle der horizontalen Achse ein. Es kann also ein Energiespektrum gemessen werden: Photonenergie auf der horizontalen Achse, Anzahl der mit dieser Energie gezählten Photonen auf der vertikalen Achse. Für eine genaue Bestimmung der den Kanälen zugeordneten Energien muss eine Kalibrierung mit zwei bekannten Paaren aus Kanalnummer und Energie durchgeführt werden.

Zur Kalibrierung der Energieskala über die  $K_{\alpha}$ -Energien des Eisen-Zink-Targets, starten Sie das Röntgenge-

rät mit den in Abschnitt 2.3 aufgeführten Parametern und anschließend die Messung in Cassy Lab 2 mit der Taste F9 oder dem „Stoppuhr“ Symbol am oberen Rand. Jede neue Messung taucht als Reiter am oberen Rand auf („ $N_A\#X$ “).

Im Verlauf der Messung sind im Spektrum mehrere Peaks zu erkennen. Ein Peak ist eine „Spitze“ die im Spektrum liegt und in diesem Fall dem energetischen Übergang einer Atomsorte des Targets zugeordnet werden kann. Nach Abschluss der Messung nutzen Sie einen Rechtsklick in das Spektrum und wählen Sie den Menüpunkt „Peakschwerpunkt berechnen“. Wählen Sie anschließend den gewünschten Peak aus, indem Sie mit gedrückter linker Maustaste über den Peak ziehen. Der ausgewählte Bereich sollte etwa die oberen zwei Drittel des Peaks umfassen um systematische Abweichungen zu minimieren (Abb. 10). Das Hereinzoomen in das Spektrum erleichtert die Auswahl des Peakbereiches (Rechtsklick in das Spektrum ermöglicht die Auswahl „Zoom“).

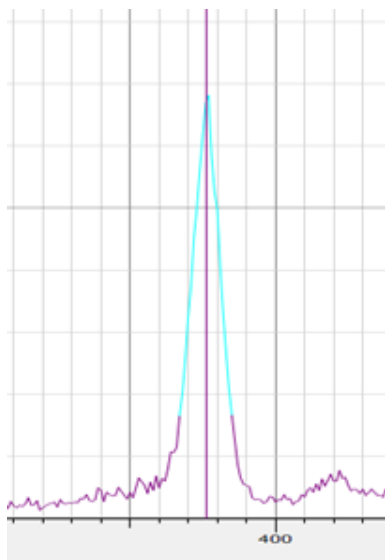


Abb. 10: Auswahl des Peakbereiches für eine Peak-schwerpunktsberechnung.

Der Peak-schwerpunkt wird Ihnen am unteren linken Bildrand angezeigt. Tragen Sie diesen Wert (inklusive Nachkommazahl) in den Abschnitt Energiekalibrierung der Messparameter am rechten Bildrand ein. Falls dieser Abschnitt nicht angezeigt wird, klicken Sie auf „Ereignisse  $N_A$ “ im oberen rechten Teil. Wiederholen Sie die Peak-schwerpunkts-bestimmung für den zweiten Peak.

Zuletzt wählen Sie die passenden Energien aus der vorgegebenen Liste aus (Abb. 11):

$K_{\alpha}$ -Linie von Eisen: 6,40 keV

$K_{\alpha}$ -Linie von Zink: 8,64 keV

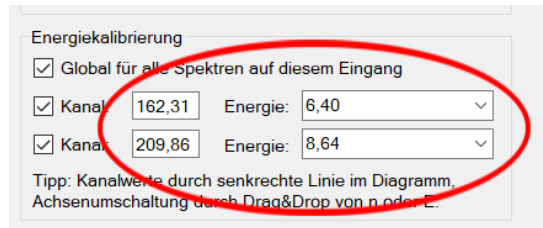


Abb. 11: Kalibrierung der Energieskala.

#### 4. Änderung der Achsenbelegung

Die horizontale Achse ist nun von Kanalnummern auf Photonenenergien kalibriert worden. Um die Energie als Achsenbeschriftung anzuzeigen, klicken Sie mit der rechten Maustaste erneut im Spektrum und wählen „Achsenbelegung ändern“ aus, um sich die Messwerte als Funktion der Energie anzeigen zu lassen (Abb. 12).

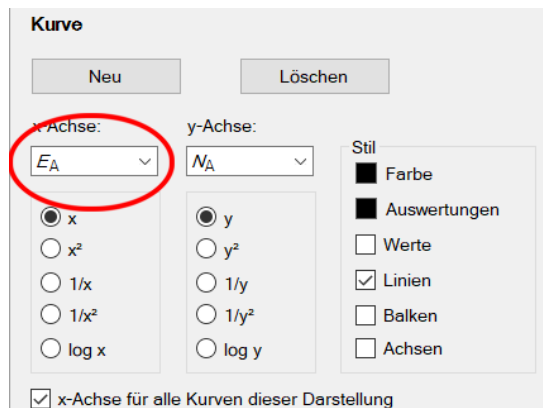


Abb. 12: Änderung der Achsenbelegung.

#### 5. Messdaten

Mit dem nun kalibrierten Spektrum werden erneute Peak-schwerpunkte in der unteren linken Ecke als Energiewerte zusammen mit der Standardabweichung des Peaks ausgegeben. Zusätzlich können die Daten des Spektrums gespeichert werden. Nutzen Sie dazu „Datei → Speichern unter“ oder im Reiter „Tabelle → Tabelle kopieren“ und Einfügen in z.B. Notepad++.

### 3 Strahlenbelastung

Das Einschalten der Röntgenröhre ist zur Sicherheit nur bei geschlossenen Bleiglas-Fenstern möglich. Das Fenster schirmt die ionisierende Röntgen-Strahlung stark ab. Im Außenabstand von 10 cm vom Röntgen-gerät beträgt die effektive Strahlendosisleistung etwa  $1\mu\text{Sv/h}$ . Im typischen Abstand von 1 m beträgt sie jedoch nur noch etwa  $0,1\mu\text{Sv/h}$ . Die Messungen dauern insgesamt etwa 30 min, so dass die Gesamtdosis etwa  $0,05\mu\text{Sv}$  beträgt. Dies ist etwa  $1/4000$  oder  $0,25\text{‰}$  der natürlichen jährlichen Strahlungsbelastung und damit physiologisch unbedenklich.

## A Anhang

### A.1 Spektralerien

Ein Elektron mit der Elementarladung  $-e$  und ein Atomkern der Ladung  $Ze$ , ziehen sich im Abstand  $r$  mit der Coulombschen Kraft  $F_C = Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$  an. Es herrscht Gleichgewicht, wenn das Elektron gerade mit einer solchen Geschwindigkeit  $v$  um den Kern kreist, dass  $F_C$  durch die Zentrifugalkraft  $F_Z = m_e v^2/r$  aufgehoben wird. Es muss also gelten

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} . \quad (10)$$

Soweit ist dies eine vollkommen klassische Denkweise.

Im quantenmechanischen Bild kann nach Louis de Broglie (1892–1987) ein Elektron mit dem Impuls  $m_e v$  auch als Materiewelle der Wellenlänge  $\lambda_e = h/(m_e v)$  aufgefasst werden. Geht man davon aus, dass das Elektron entlang der Umlaufbahn positiv mit sich selbst interferiert, so muss der Umfang  $2\pi r$  der Kreisbahn gerade ein ganzzahliges Vielfache der Wellenlänge sein,<sup>9)</sup>

$$2\pi r = n \cdot \lambda_e = \frac{nh}{m_e v} \quad \text{und folglich} \quad v = \frac{nh}{2\pi r m_e} .$$

Ersetzt man hiermit  $v$  auf der rechten Seite von (10), und stellt nach  $r$  um, so folgt

$$r_n(Z) = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi Z m_e e^2} \cdot n^2 , \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Darin nennt man  $n$  die *Hauptquantenzahl*. Es sind also nicht beliebige Bahnradien möglich.<sup>10)</sup>

Im Coulomb-Feld hat das Elektron im Abstand  $r_n$  die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n} .$$

(Für  $r_n \rightarrow \infty$  wird  $E_{\text{pot}} = 0$  gesetzt.) Für die kinetische Energie findet man unter Beachtung von (10)

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_e}{2} v^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{E_{\text{pot}}}{2} .$$

<sup>9)</sup> Hierin besteht die Quantisierung.

<sup>10)</sup> Den kleinst möglichen Radius erhält man für  $Z = 1$  (Wasserstoffatom) und  $n = 1$  (unterste Schale),

$$r_1(1) = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \approx 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} .$$

Dies ist der sog. *Bohrsche Wasserstoffradius*, der in der Atomphysik als Längeneinheit genutzt wird.

Für die gesamte Energie folgt

$$E_n = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{E_{\text{pot}}}{2} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n}.$$

Ersetzt man hierin  $r_n$  gemäß Gl. (11), erhält man schließlich die diskreten Energieniveaus,

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot Z^2 \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Für die Differenz zweier Energieniveaus  $E_n$  und  $E_m$ ,  $m > n$ , erhält man

$$E_m - E_n = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot Z^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Die Frequenz der emittierten Strahlung beim Übergang vom Energieniveau  $E_m$  auf das Niveau  $E_n$  ist dann

$$f_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

Bei der obigen Betrachtung wurde angenommen, dass der Atomkern ruht. Tatsächlich bewegt er sich jedoch um den gemeinsamen Schwerpunkt von Kern und Hüllelektronen. Man kann dies berücksichtigen, indem in den Formeln  $m_e$  durch die reduzierte Masse

$$m_e^* = \frac{m_e m_k}{m_e + m_k} = \frac{m_e}{1 + m_e/m_k}$$

ersetzt wird. Für Wasserstoff, das leichteste Element, ist die Korrektur vergleichsweise groß,  $m_e^* \approx 0,9995m_e$ . Für deutlich schwerere Elemente kann diese Korrektur jedoch oftmals vernachlässigt werden.

## A.2 $K_\alpha$ -Linien

$K_\alpha$ -Energie  $E_{K\alpha}$ , berechnet nach (8), zugehörige Frequenz  $f_{K\alpha} = E_{K\alpha}/h$  und Wellenlänge  $\lambda_{K\alpha} = c/f_{K\alpha}$ .

	Z	$\frac{E_{K\alpha}}{10^3 \text{ eV}}$	$\frac{f_{K\alpha}}{10^{18} \text{ Hz}}$	$\frac{\lambda_{K\alpha}}{10^{-12} \text{ m}}$
	21	4,08	0,987	303,8
Ti	22	4,50	1,088	275,5
	23	4,94	1,194	251,0
	24	5,40	1,305	229,7
	25	5,88	1,421	210,9
Fe	26	6,38	1,542	194,4
	27	6,90	1,668	179,7
Ni	28	7,44	1,799	166,7
Cu	29	8,00	1,934	155,0
Zn	30	8,58	2,075	144,5
	31	9,18	2,221	135,0
	32	9,81	2,371	126,4
	33	10,45	2,527	118,7
	34	11,11	2,687	111,6
	35	11,80	2,852	105,1
	36	12,50	3,023	99,2
	37	13,22	3,198	93,8
	38	13,97	3,378	88,8
	39	14,73	3,563	84,1
Zr	40	15,52	3,753	79,9
	41	16,33	3,948	75,9
Mo	42	17,15	4,148	72,3
	43	18,00	4,352	68,9
	44	18,87	4,562	65,7
	45	19,76	4,777	62,8
Ag	46	20,66	4,996	60,0
	47	21,59	5,221	57,4
	48	22,54	5,450	55,0
	49	23,51	5,685	52,7
	50	24,50	5,924	50,6