Ernst–Moritz–Arndt–Universität Greifswald
Institut für Physik

Versuch E01: Gleichstromkreis Physik, Studentenfassung(10000) vom 14. November 2019	
Gruppe/Versuchs–Nr.: /	Datum:
Name 1: Note Testat:	Name 2: Note Testat:
Note Protokoll:	Betreuer:

- **Versuchsziel**
  Erlangung von Grundkenntnissen zur Messung der elektrischen Größen Stromstärke, Spannung und Widerstand im Gleichstromkreis

- **Themen zur Vorbereitung**
  Elektrische Grundgrößen Ladung, Stromstärke und Spannung; Definition des Ampere; ohmsches Gesetz, Kalt– und Heißleiter; Innenwiderstand von Spannungsquellen; elektrischer Energieumsatz in Wärme (elektrische Leistung), Kennlinie von elektrischen Bauelementen (strom– vs. spannungsrichtige Messung),

- **Messaufgaben**
  1. Ermitteln Sie die Größen der vier Festwiderstände R_1, R_2 und R_3 auf der Grundplatine sowie des Leistungswiderstands mit dem Nennwert $150\,\Omega$. Messen Sie diese Widerstände zunächst direkt mit dem Ohmmeter (Multimeter in Betriebsart Ω). Zur indirekten Widerstandsbestimmung nach dem ohmschen Gesetz legen Sie die Spannung von $1\,\mathrm{V}$ an einen Widerstand an und messen gleichzeitig Strom und Spannung, zunächst stromrichtig nach dem Schaltplan in Abb. 9 (S. 12) und dann spannungsrichtig nach Abb. 10. (zu Messunsicherheiten und Ablesebeispielen des Multimeters s. Anhang S. 20).
  2. Messen Sie nach Abb. 12 (S. 14) für eine jede der beiden Batterien sowie für deren Reihenschaltung die Leerlaufspannung U_0 sowie die Spannung U_2 bei Belastung durch einen Widerstand mit dem Nennwert $R = 1\,\Omega$. (Für die Auswertung den präzisen R–Wert auf dem Widerstandskörper notieren.)
  3. Messen Sie die elektrische Kennlinie $I(U)$ einer Glühlampe im Spannungsbereich $U = 0\ldots2\,\mathrm{V}$. Beachten Sie die Hinweise im Abschnitt 3.2, S. 15.

- **Sicherheitshinweise**
  keine

- **Auswertung**
  1. Bestimmen Sie die Abweichungen aller Messwerte für die Größen Widerstand, Strom und Spannung entsprechend den Herstellerangaben zum Messgerät, S. 20.

     Korrigieren Sie für die strom– und spannungsrichtigen Messungen die Spannungs– bzw. Stromwerte nach Gleichung (19) bzw. (20). Ermitteln Sie dann die Widerstände aus den entsprechenden (korrigierten) Strom– und Spannungswerten nach dem ohmschen Gesetz (11).

     Geben Sie für alle ermittelten Widerstände die relative Messabweichung an.
  2. Berechnen Sie aus den Messwerten U_1 und U_2 folgende Größen:
     (a) Innenwiderstand R_i der Batterien nach Gl. (21), S. 14
     (b) Leistung P an R nach Gl. (23), S. 14

(c) Leistung P_i an R_i nach Gl. (24), S. 14

(d) maximal mögliche Leistung P_{max} an R Gl. (25), S. 14

3. Begründen Sie, weshalb die mit der spannungsrichtigen Messanordnung (Abb. 13, S. 15) gewonnenen Stromwerte I nicht korrigiert werden müssen.

   Stellen Sie die Kennlinien $I(U)$ sowie $R(P)$ graphisch dar. Führen Sie für den linearen Bereich des $R(P)$–Diagramms eine lineare Regression aus und ermitteln Sie den Temperaturkoeffizienten γ nach Gl.(29), S. 15.

   Bestimmen Sie den Gerätefaktor β nach Gl. (30), S. 15, und schließlich die Temperatur des Glühfadens (Wolfram) nach Gl. (31), S. 15, bei der Leistung $P = 25\,\mathrm{mW}$.

Aufgaben zur Vorbereitung

1. Um wie viel Prozent ändert sich ein elektrischer Widerstand aus Konstantan und einer aus Isaohm, wenn die Temperatur von 0 auf 70 °C erhöht wird? (s. Temperaturkoeffizienten der Materialien in Tab. 1, S. 7)

2. Ein elektrisches Heizgerät hat den Widerstand $R = 15\,\Omega$ und wird mit der Spannung U betrieben. Dabei wird elektrische Energie mit der Leistung P in Wärme umgesetzt. Erhöht man U um $\Delta U = 3\,\mathrm{V}$, so steigt P um $\Delta P = 88{,}5\,\mathrm{W}$. Wie hoch sind die urspünglichen Werte von U und P?

3. Die Klemmspannung einer Spannungsquelle wird von einem Voltmeter mit einem Innenwiderstand von $R_1 = 800\,\Omega$ zu $U_1 = 15\,\mathrm{V}$ bestimmt. Mit einem Voltmeter, das einen Innenwiderstand von $R_2 = 500\,\Omega$ hat, misst man $U_2 = 10\,\mathrm{V}$. Wie groß sind der Innenwiderstand R_i und die Leerlaufspannung U der Spannungsquelle?

1 Grundlagen

1.1 Elektrizitätslehre

Elektrische Ladung: Die *elektrische Ladung* ist eine Eigenschaft von vielen submikroskopischen Teilchen, aus denen die uns bekannte Materie aufgebaut ist. Die Ladungsträger können Elementarteilchen sein wie beispielsweise Elektronen, oder auch ionisierte Atome wie Natrium– und Chlorionen $^{22}_{11}\mathrm{Na}^{+}$ bzw. $^{34}_{17}\mathrm{Cl}^{-}$ in einer Kochsalzlösung. Es werden positive und negative Ladungen unterschieden. Überwiegt auf oder in einem makroskopischen Körper eine Ladungsart, so ist der Körper entsprechend positiv oder negativ geladen. Der Ladungsüberschuss einer Ladungsart wird *elektrische Ladung Q des Körpers* genannt. Ihr Betrag ist immer ein ganzzahliges Vielfaches einer kleinsten Ladung, der sogenannten Elementarladung

$$e \equiv 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad . \tag{1}$$

Die Maßeinheit ist das Coulomb, $[Q] = \mathrm{C}$. Es gilt also immer $Q = n \cdot e$, mit n ganzzahlig. [1] Ein Elektron hat die Ladung $Q = -e$, und das Ion $^{22}_{11}\mathrm{Na}^{+}$ hat die Ladung $Q = +e$. Hingegen hat eine Prise Kochsalz (NaCl) die Ladung $Q = 0$, da sich hier positive und negative Ladungen ausgleichen und damit die Gesamtladung aufheben. Die elektrische Ladung ist eine Erhaltungsgröße, für die eine Kontinuitätsgleichung gilt, Anhang A.1, S. 16.

Elektrischer Strom — das Ampere: Bewegen sich elektrische Ladungen im Raum, so spricht man von einem elektrischen Strom. Die *elektrische Stromstärke I* gibt an, welche elektrische Ladung Q in der Zeit t durch eine gewisse Fläche A strömt,

$$I \equiv \frac{Q}{t} \quad , \tag{2}$$

Mit der Einheit $[I] = \mathrm{C/\,s}$. Die *elektrische Stromdichte* auf einer Fläche A ist dann $j \equiv I/A$, mit der Einheit $[j] = [I]/\,\mathrm{m}^2$. Die Richtung, in der sich positive Ladungen bewegen, wird als positive Stromrichtung festgelegt.

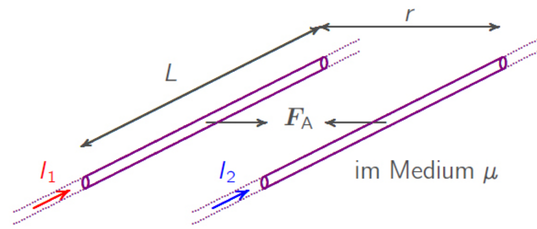

Abb. 1: Zwischen (unendlich lang gedachten) stromdurchflossenen Parallelleitern im Abstand r wirkt im Medium mit der Permeabilität μ auf einem Längenabschnitt L die Kraft (3). Die Leiter ziehen sich an, wenn die Ströme den gleichen Richtungssinn haben, bei entgegengesetztem Richtungssinn erfolgt Abstoßung.

Als Einheit der Stromstärke verwendet man das *Ampere*, $[I] = \mathrm{A} \equiv \mathrm{C/\,s}$.[2] Fließt durch einen elektrischen Leiter (z.B. dünner Metalldraht) ein elektrischer Strom I_1, so baut sich um diesen Leiter ein konzentrisches Magnetfeld auf. Der Leiter sei lang und gerade. Im Abstand r sei ein zweiter Leiter, parallel zum ersten, durchflossen mit der Stromstärke I_2, Abb. 1. Dann wirkt zwischen den Leitern auf einem Abschnitt der Länge L eine Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{A}$, für deren Betrag die Proportionalität $F_\mathrm{A} \sim I_1 I_2 \cdot (L/r)$ gilt. Mit der Proportionalitätskonstanten $\mu/(2\pi)$ folgt,

$$F_\mathrm{A} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot I_1 I_2 \cdot \frac{L}{r} \quad . \tag{3}$$

Die Größe μ heißt *magnetische Permeabilität* (auch: *magnetische Leitfähigkeit*). Sie ist eine Eigenschaft des Mediums, in welchem sich die Stromleiter befinden. Im Vakuum setzt man $\mu = \mu_0$ und für allgemeine Medien $\mu = \mu_\mathrm{r} \cdot \mu_0$, mit der *relativen Permeabilität* $\mu_\mathrm{r} = \mu/\mu_0$. Man unterscheidet diamagnetische ($0 \leq \mu_\mathrm{r} < 1$), paramagnetische ($\mu_\mathrm{r} > 1$) und ferromagnetische ($\mu_\mathrm{r} \gg 1$) Stoffe.

Bei der Stromstärke $I_1 = I_2 = 1\,\mathrm{A}$ und den Abmaßen

[1] Seit dem 20. Mai 2019 ist ein neues Internationales Einheitensystem (SI) in Deutschland wie auch den anderen (über 100) SI–Ländern gesetztlich gültig. Danach werden die Maßeinheiten physikalischer Größen auf 7 Naturkonstanten zurückgeführt, wozu die Elementarladung gehört. Sie stellt die Verbindung zwischen den physikalischen Größen der Mechanik zu denen der Elektrik her. Dies wurde früher durch die Definition der Einheit Ampere A für die elektrische Stromstärke I erreicht, welche auf eine gewisse Kraftmessung zurückgeführt wurde. Die Elementarladung wurde damals als eine Messgröße angesehen, mit der Einheit $1\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$. Beim Übergang zum neuen SI hat man sich bei der Festlegung der Konstanten an den letzten „besten“ Messwerten die Naturkonstanten nach dem alten SI orientiert. Damit hat man erreicht, dass zum Beipiel Messgeräte für die elektrische Stromstärke, welche Angaben in der alten Einheit Ampere machen, problemlos weiterverwendet werden können.

[2] Das Ampere war bis zum 20. Mai 2019 eine Basiseinheit im internationalen Einheitensystems (SI–Einheit). Zur Definition des Ampere bezog man sich auf die Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen elektrischen Leitern.

$L = R = 1\,\mathrm{m}$ wirkt nach (3) die Kraft

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\mathrm{A}^2 \equiv 2 \cdot 10^{-7}\mathrm{N} \quad .$$

Für die Vakkum–Feldkonstante folgt,

$$\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/\,A}^2 \quad .$$

Die Einheit der Kraft ist das Newton, $[F] = \mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, welche bereits aus der Mechanik bekannt ist. Somit ist die Verbindung zwischen der Mechanik (mit den Grundgrößen Masse in kg, Länge in m und Zeit in s) und der Elektrik hergestellt.

Die elektrische Ladung Q, welche in der Zeit t durch den Leiter fließt, ist nach (2) gegeben durch $Q = I \cdot t$. Folglich gilt dann für die Einheit der Ladungsmenge,

$$[Q] \equiv 1C = 1\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{s} \quad .$$

Mit der Elementarladung (1) erhält man dann,[3]

$$1\,\mathrm{A} \equiv \frac{10^{19}}{1{,}602\,176\,634}\,\frac{e}{\mathrm{s}} \approx 6{,}2415 \cdot 10^{18}\,\frac{e}{\mathrm{s}} \quad .$$

Die Sekunde s als Einheit der Zeit ist im SI definiert durch die Frequenz $\Delta\nu$ des Hyperfeinstrukturübergangs des Grundzustands vom Zäsium–Isotop $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$,

$$\mathrm{s} \equiv 9\,192\,631\,770\,\Delta\nu^{-1} \quad .$$

Somit gilt auch

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{A} &\equiv \frac{10^{10}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 9{,}192\,631\,770}\,e \cdot \Delta\nu \\ &\approx 6{,}789\,687 \cdot 10^{8}\,e \cdot \Delta\nu \quad . \end{aligned}$$

Coulomb–Kraft: Zwischen zwei elektrisch geladenen Körpern wirkt die sogenannte *Coulomb–Kraft* $\boldsymbol{F}_\mathrm{C}$. Sind die beiden Ladungen Q_1 und Q_2 jeweils auf einen kleinen Raum konzentriert (näherungsweise Punktladungen) und ist der Körperabstand r groß gegenüber den Körperabmessungen, so gilt für den Betrag der Coulomb–Kraft,

$$F_\mathrm{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad . \qquad (4)$$

Gleichnamige Ladungen (gleiches Vorzeichen) stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen sich an, Abb. 2. Die Richtung der Kraft ist entlang der Verbindungslinie durch die Körpermittelpunkte. Die sogenannte *Permittivität* ε (auch: *elektrische Feldkonstante* oder *Dielektrizitätskonstante*) kennzeichnet das als räumlich homogen angenommenen Medium zwischen den Körpern. Im Vakuum wird $\varepsilon = \varepsilon_0$ gesetzt. Für die Vakuumlichtgeschwindigkeit gilt

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad . \qquad (5)$$

Diese wird heutzutage festgelegt auf den Wert

$$c_0 \equiv 299\,792\,458\,\mathrm{m/\,s} \quad .$$

Da μ_0 ebenfalls exakt festgelegt ist, erhält man nach (5) auch für ε_0 einen exakten Wert,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \\ &= \frac{10^7}{4\pi \cdot (299\,792\,458)^2}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2} \\ &\approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2} \quad . \end{aligned}$$

Befindet sich zwischen den Körpern ein stoffliches Medium, so wird

$$\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \varepsilon_0$$

geschrieben, mit der relativen Permittivität $\varepsilon_\mathrm{r} = \varepsilon/\varepsilon_0$. Sie beschreibt die Durchlässigkeit des Stoffes für elektrische Felder im Vergleich zu der im Vakuum. Für viele Materiezustände (gasförmig, flüssig, fest) gilt $\varepsilon_\mathrm{r} > 1$. Ausnahmen bilden ionisierte Gase (Plasmen), sie schwächen elektrische Felder ab, $\varepsilon_\mathrm{r} < 1$. Die relative Permittivität ergibt sich aus den Verschiebungen elektrischer Ladungen innerhalb des Materials unter der Einwirkung äußerer elektrischer Felder. Sie ändert sich im Allgemeinen mit der Feldstärke und der Temperatur. Darüber hinaus hat die Geschwindigkeit der Änderung der Felder einen Einfluss auf ε_r.

Elektrisches Feld, Potential, Spannung: Im Allgemeinen sind die Kraftwirkungen zwischen elektrisch geladenen, räumlich ausgedehnten Körpern komplizierter, als im Coulombschen Gesetz beschrieben. Zur Beschreibung der allgemeinen Situation wird das *elektrische Feld* eingeführt. Dazu stellt man sich am Ort $\boldsymbol{x}$ eine kleine positive Ladung Q vor, eine sogenannte *Probeladung*. Ihre Ladung sei so klein, dass sie den ursprünglichen Feldverlauf nicht merklich verändert. Wirkt auf sie die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, so ordnet man diesem Ort die *elektrische Feldstärke*

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})}{Q} \qquad (6)$$

[3] Der Begriff der elektrischen Stromstärke wurde weit vor der Entdeckung elektrisch geladener Elementarteilchen eingeführt. Dies erklärt den recht willkürlich erscheinenden Faktor $\mathrm{A\,s}/e$.

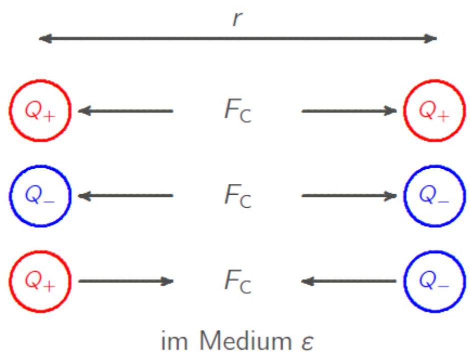

Abb. 2: Zwischen zwei elektrischen Punktladungen im Medium mit der Permittivität ε wirkt die Kraft (4), wenn sie den Abstand r haben. Ladungen mit gleichen Vorzeichen stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an.

zu, mit der Einheit $[\boldsymbol{E}] = \mathrm{N/C}$. Folgt man im Raum, ausgehend von einem beliebigen Punkt $\boldsymbol{x}$, immer ein kleines Wegstück der lokalen Richtung von $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, so schreitet man auf einer *Feldlinie* voran. Feldlinien zwischen zwei unterschiedlich geladenen Körpern sind von der positiven zur negativen Ladung gerichtet, was aus der Verwendung einer positiven Ladung Q in der Defintion (6) des elektrischen Feldvektors folgt.

Verschiebt man eine positive Punktladung zwischen zwei Orten $\boldsymbol{x}_2$ und $\boldsymbol{x}_1$, entgegen den Feldlinien, so muss Arbeit verrichtet werden. Dabei zeigt es sich, dass diese Arbeit nur vom Anfangs– und Endpunkt abhängt, nicht aber dem Wegverlauf zwischen diesen Punkten. Der Weg kann im Allgemeinen auch Feldlinien kreuzen. [4)] Man spricht hier von einem *Potentialfeld*, weil es dann eine (skalare) Funktion $\varphi(\boldsymbol{x})$ gibt, aus der man das elektrische Feld an der Stelle $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ nach einer einfachen Vorschrift berechnen kann,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) \equiv \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{x}) \quad . \qquad (7)$$

Mit dieser Vorschrift überführt man die skalare Größe φ in einen vektorielle Größe $\boldsymbol{E}$, an einem beliebigen Ort $\boldsymbol{x}$. Man sagt dann, die Feldstärke ist der Gradient des Potentialfeldes. Das Potential ist bis auf eine willkürlich wählbare additive Konstante bestimmt. Häufig setzt man sie so, dass $\varphi(+\infty) = 0$ gilt. Praktisch wichtig sind allein Potentialdifferenzen, die man *elektrische Spannung* nennt,

$$U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \equiv \varphi(\boldsymbol{x}_1) - \varphi(\boldsymbol{x}_2) \quad .$$

Die willkürlich gewählte Konstante des Potentialfeldes hebt sich bei der Subtraktion von Potentialwerten auf. Damit ist die Potentialdifferenz (elektrische Spannung) zwischen zwei Punkten wohl definiert.

Aus (7) folgt die Einheit des elektrischen Potentials, das sogenannte *Volt*,

$$[\varphi] = [U] \equiv \mathrm{V} = [E] \cdot [x] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{m} \quad .$$

Ersetzt man hier die Einheit C durch A s, so folgt,

$$\mathrm{V\,A\,s} = \mathrm{N\,m} \quad .$$

Folglich ist das Produkt

$$P \equiv U \cdot I \qquad (8)$$

eine Leistung (Energie pro Zeiteinheit), mit der Einheit Watt,

$$[P] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{W} \quad .$$

Mit dem Potentialfeld φ bzw. der elektrischen Spannung U kann man oftmals bedeutend einfacher rechnen als mit dem Vektorfeld $\boldsymbol{E}$. Dies trifft insbesondere für elektrische Schaltungen zu, bei denen sich elektrische Ladungen nur innerhalb von Kabeln und anderen elektrischen Bauelementen bewegen, die sich ihrerseits in einer elektrisch isolierenden Umgebung (Luft, Kunststoffe wie Leiterplatten u.ä.) befinden. Man legt dann in solchen Schaltungen einen Bezugspunkt fest und nennt ihn *Massepunkt* (kurz: *Masse*). Die Spannung an einem beliebigen anderen Punkt der Schaltung versteht sich dann als Potentialdifferenz zum Massepunkt, es sei denn, man sagt explizit, zwischen welchen zwei Punkten die Spannung zu verstehen ist.

Elektrischer Widerstand und ohmsches Gesetz: Befinden sich in einem Medium frei bewegliche elektrische Ladungen, so können sie sich unter der Kraftwirkung in einem elektrischen Feld über weite Strecken gerichtet bewegen. Dies trifft bespielsweise für einige Elektronen in einem festen Metall zu, die als

[4)] Dies ist analog dazu, dass man eine Masse im Gravitationsfeld der Erde, mit der Erdbeschleunigung g, anhebt. Dies kann auf dem kürzesten Weg, senkrecht nach oben, oder auch schräg erfolgen. Die zugeführte potentielle Energie hängt nur vom Höhenunterschied h zwischen der Anfangs– und Endlage ab. Dabei wird die Höhe als Abstand vom Erdmittelpunkt gemessen, unter der Annahme, dass die Masseverteilung kugelsymmetrisch ist. Dem Produkt $h \cdot g$ entspricht hier die elektrische Spannung U, und der Masse m in der Mechanik entspricht die elektrische Ladung Q. Somit haben die Produkte $m \cdot gh$ wie auch $Q \cdot U$ die Bedeutung einer (potentiellen) Energie.

sogenannte Leitungselektronen für die Stabilität des Kristallverbands der Atome nicht benötigt werden. Frei bewegliche Ladungsträger gibt es auch in Elektrolyten (fest oder flüssig) wie auch in gelösten Stoffen, etwa einer Kochsalzlösung. Im Allgemeinen wechselwirken die bewegten Ladungen mit ihrer Umgebung. Beispielsweise stoßen die Ladungsträger mit den Gitterbausteinen in einem Kristall oder den Atomen bzw. Molekülen in einer Lösung zusammen, was sie immer wieder abbremst. Makroskopisch kann man dies oftmals mit hinreichender Genauigkeit beschreiben, indem man die Stromdichte $\boldsymbol{j}$, $[j] = \mathrm{A}/\mathrm{m}^2$, proportional zur Feldstärke $\boldsymbol{E}$ setzt,

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \ . \tag{9}$$

Die Proportionalitätskonstante σ, $[\sigma] = \mathrm{A}/(\mathrm{V\,m})$, beschreibt dann die *elektrische Leitfähigkeit* des Materials. Gleichung (9) ist das sogenannte *ohmsche Gesetz* in allgemeiner Form.

Hat man es mit einem homogenen elektrischen Leitermaterial mit einer klar umrissenen Form zu tun, etwa einem Metalldraht (Zylinder) der Länge L und der Querschnittsfläche A, so kann man das ohmsche Gesetz in einer vereinfachten Form verwenden. Fällt über dem Zylinder (zwischen den Drahtenden) die Spannung $U = E \cdot L$ ab, so folgt für die Stromstärke $I = j \cdot A$. Damit geht (9) über in,

$$I = \frac{\sigma A}{L} \cdot U \ . \tag{10}$$

Den Vorfaktor $\sigma A/L$ nennt man dann Leitwert G des Zylinders. Sein Kehrwert ist der *elektrische Widerstand*,

$$R \equiv G^{-1} = \frac{L}{\sigma A} \ ,$$

mit der Einheit *Ohm*,

$$[R] \equiv \Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \ .$$

Der Leitwert wird in *Siemens* gemessen,

$$[G] \equiv S = \Omega^{-1} \ .$$

Der *spezifische elektrische Widerstand* des Materials ist dann,

$$\rho = \sigma^{-1} \ .$$

Misst man zwischen zwei Punkten in oder auf einem Körper (in einer elektrisch nicht leitenden Umgebung) die Spannung U und fließt dabei über den einen Punkt der Strom I in den Körper hinein und am anderen Punkt mit derselben Stromstärke heraus, dann definiert man den Quotienten

$$\boxed{R = \frac{U}{I}} \tag{11}$$

als *elektrischer Widerstand* zwischen diesen Punkten. Dies ist das *ohmsche Gesetz* im engeren Sinne, wie man es u.a. zur Beschreibung elektrischer Schaltungen verwendet. Danach kann man immer eine der drei Größen R, U und I berechnen, wenn man die anderen beiden kennt. Fließt beispielsweise über einen bekannten Widerstand R der ebenso bekannte Strom I, so errechnet sich der Potentialabfall über dem Widerstand nach $U = R \cdot I$.

Temperaturabhängigkeit des Widerstands:
In einem reinen Metall hängt der spezifische Widerstand ρ von der Temperatur T ab, was vor allem durch Stöße der Elektronen mit den schwingenden Atomen im Kristallgitter verursacht wird. Bei erhöhter Temperatur wird der Widerstand größer. In einem geeignet begrenzten Temperaturbereich in der Nähe einer Referenztemperatur T_0 kann die Temperaturabhängigkeit durch eine lineare Funktion genähert werden,

$$\boxed{\rho(T) = \rho_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]} \tag{12}$$

Darin gilt $\rho_0 \equiv \rho(T_0)$, mit der Referenztemperatur T_0. Die Größe α bezeichnet den Temperaturkoeffizient, in der Einheit $[\alpha] = \mathrm{K}^{-1}$, In Tab. 1 sind die Werte für ρ und α einiger Stoffe angegeben.

Die Grenzen der Widerstandswerte zur Einteilung in elektrische Leiter, Halb– und Nichtleiter sind nicht einheitlich festgelegt. Eine besonders geringe Temperaturabhängigkeit hat die Metalllegierung *Konstantan* (55 % Kupfer, 44 % Nickel, 1 % Mangan). Eine noch geringere Temperaturabhängigkeit des Widerstands zeigt der Stoff *Isaohm*, welcher aus mehr als drei metallischen Komponenten besteht und zur Herstellung besonders präziser Widerstände entwickelt wurde.

Metalle haben einen positiven Temperaturkoeffizienten. Folglich leiten sie den elektrischen Strom schlechter, wenn die Temperatur steigt. Sie werden deshalb zur Gruppe der *Kaltleiter* gezählt.

Hingegen haben sogenannte *Halbleiter* einen negativen Temperaturkoeffizienten. Sie werden deshalb zur

Gruppe der *Heißleiter* gezählt. Im engeren Sinne versteht man unter Halbleitern Festkörper wie kristallines Silizium, deren elektrische Leitfähigkeit am absoluten Temperaturnullpunkt verschwindet und sich mit steigender Temperatur erhöht. Nahe am absoluten Temperaturnullpunkt sind quasi alle Elektronen gebunden. Mit steigender Temperatur können jedoch Elektronen die energetische Bandlücke zwischen dem Valenz– und Leitungsband überspringen, wo sie dann als frei bewegliche Ladungsträger zur Verfügung stehen. Erst durch diese thermische Anregung wird das Material elektrisch leitfähig.[5)]

[5)] Die Verhältnisse können sich jedoch schon bei recht geringen Verunreinigungen stark ändern. Dies nutzt man gezielt in der Halbleitertechnik zur Herstellung von diversen Bauelementen wie Halbleiterdioden, Transistoren und komplexen integrierten Schaltungen (integrated circuits: ICs). Hier wird beispielsweise monokristallines Silizium (4–wertig) mit Bor (3–wertig) oder Phosphor (5–wertig) dotiert. Damit erhält man sogenanntes p– bzw. n–dotiertes Silizium, das auch am absoluten Temperaturnullpunkt leitfähig ist. n–dotiertes Silizium hat frei bewegliche Elektronen und verhält sich dann wie ein Metall (Heißleiter). Es wird zum Beispiel auch als Temperatursensor verwendet, indem der monotone funktionale Zusammenhang zwischen Temperatur und elektrischem Widerstand genutzt wird. Bringt man n–und p–dotiertes Silizium in Kontakt, diffundieren Elektronen von der n– in die p–Schicht. Somit baut sich ein elektrisches Gegenfeld auf, bis sich ein Gleichgewicht bezüglich der Raumladungsverteilung einstellt: in Nähe des Kontaktes hat die p–Schicht einen Elektronenüberschuss und somit eine negative Raumladung. In der n–Schicht herrscht Elektronenmangel, also eine positive Raumladung. Durch das Anlegen einer äußeren Spannung kann die Verteilung der Raumladung gezielt verändert werden, worauf letztlich die moderne Halbleiterelektronik aufbaut.

Tab. 1: Werte des spezifischen elektrischen Widerstands ρ und des linearen Temperaturkoeffizienten α verschiedener Stoffe bei der Referenztemperatur $T_0 = 293\,\mathrm{K}$ (gleich Zimmertemperatur 20 °C).

Stoff	$\rho/(\Omega\,\mathrm{m})$	α/K^{-1}
Leiter: $\rho \lesssim 10^{-4}\,\Omega\,\mathrm{m}$		
Silber	$1{,}587 \cdot 10^{-8}$	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$
Kupfer (Elektrokabel)	$(1{,}69 \ldots 1{,}75) \cdot 10^{-8}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
Gold	$2{,}214 \cdot 10^{-8}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	$2{,}65 \cdot 10^{-8}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
Wolfram	$5{,}28 \cdot 10^{-8}$	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$
Messing	$7 \cdot 10^{-8}$	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$
Eisen	$(1{,}0 \ldots 1{,}5) \cdot 10^{-7}$	$5{,}6 \cdot 10^{-3}$
Zinn	$1{,}09 \cdot 10^{-7}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$
Blei	$2{,}08 \cdot 10^{-7}$	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$
Kostantan	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-5}$
Quecksilber	$9{,}55 \cdot 10^{-7}$	$8{,}6 \cdot 10^{-4}$
Isaohm	$1{,}32 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
Graphit	$8 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-4}$
Kohlenstoff	$3{,}5 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{-4}$
Halbleiter: $\rho \approx (10^{-4} \ldots 10^{6})\,\Omega\,\mathrm{m}$		
Wasser (typ. Meer)	$5 \cdot 10^{-1}$	
Blut	$1{,}6 \cdot 10^{0}$	
Muskelgewebe	$2{,}0 \cdot 10^{0}$	
Wasser (typ. Leitung)	$2 \cdot 10^{1}$	
Silizium (rein)	$3{,}97 \cdot 10^{3}$	
Wasser (reinst)	$1 \cdot 10^{6}$	
Isolatoren (Nichtleiter): $\rho \gtrsim 10^{6}\,\Omega\,\mathrm{m}$		
Holz (trocken)	$10^{4} \ldots 10^{10}$	
Papier	$10^{9} \ldots 10^{11}$	
Aluminiumoxid	$1 \cdot 10^{12}$	
Porzellan	$1 \cdot 10^{12}$	
Quarzglas	$7{,}5 \cdot 10^{17}$	

Die Tempertaurabhängigkeit des elektrischen Widerstands bestimmter Stoffe nutzt man zur Herstellung von Sensoren für die Messung der Temperatur T aus. Dazu muss man den Sensor kalibrieren, also den Zusammenhang $T(R)$ ermitteln. Verwendet man ein Kaltleitermaterial, so spricht man vom PTC–Sensor (PTC: positive temperature coefficient). Fällt der Widerstand mit wachsender Temperatur, so handelt es sich um einen NTC–Sensor (NTC: negative temperature coefficient).

1.2 Elektrischer Schaltkreis

Knotenregel: In einem elektrischen Schaltkreis wird der elektrische Strom durch Kabel (z.B. Kupferdrähte) geleitet, welche die elektrischen bzw. elektronischen Bauelemente miteinander verbinden. Durch eine elektrisch isolierende Umgebung (Luft oder Kunststoffe) können sich die Ladungen nur längs des Kabels bewegen, sofern die elektrischen Spannungen zur Umgebung nicht zu groß werden.

Der Stromfluss in einem idealen elektrischen Kabel ist quellenfrei. Das bedeutet, entlang eines Kabels treten an einer jeden Stelle gleich viele elektrische Ladungen pro Zeiteinheit durch die Kabelquerschnittsfläche. Auch solche Stellen, an denen Kabel verzweigen, sogenannte *Knotenpunkte* wie in Abb. 3, akkumulieren keine Ladungen. Folglich gilt auch hier die Quellenfreiheit (33), woraus die sogenannte *Knotenregel* folgt: Zählt man die pro Zeiteinheit zufließenden Ladungen positiv und die abfließenden negativ, so ist die Summe aller Stromstärken gleich null,

$$\boxed{\sum_n I_n = 0} \tag{13}$$

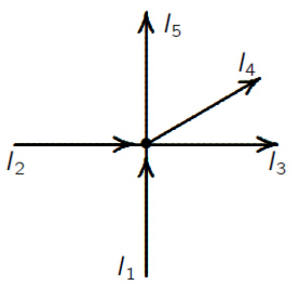

Abb. 3: Nach der Knotenregel ist die Summe aller Stromstärken in einem Schaltungsknoten null, $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$.

Spannungsquelle und Widerstand: Abbildung 4 zeigt einen Schaltkreis, der aus einer Gleichspannungsquelle U und einem ohmschen Widerstand R besteht. Der positive Pol der Spannungsquelle ist mit + gekennzeichnet. Der negative Pol bleibt oftmals ohne Kennzeichnung und liegt hier auf Massepotential (kurzer horizontaler Strich). Wechselspannungsquellen werden mit dem Zeichen $\sim$ statt + gekennzeichnet.

Eine Spannungsquelle ist ein allgemeiner abstrakter Begriff. In der Technik kann dies zum Beispiel eine Batterie, ein Akkumulator (wiederaufladbare Batterie), eine Zimmersteckdose oder ein Labornetzteil sein. Aber auch ein Sensor, der eine physikalische Größe in eine Spannung wandelt, ist an den beiden Ausgangsanschlüssen eine Spannungsquelle. Dies kann zum Beispiel ein Mikrophon sein, welches Schallwellen der Sprache in eine Wechselpannung (Sprachsignal) wandelt. Eine Spannungsquelle ist auch der Mensch, die Pole sind hier zwei beliebige Punkte auf der Haut oder im Körper. Diese hat ihre Ursachen in den physiologischen Vorgängen im Körper, etwa die Eigenbewegung des Herzmuskels oder die Aktivität von Nervenzellen im Gehirn. Die entsprechenden zeitlichen Spannungsänderungen liefern das EKG (Elektrokardiogramm) bzw. das EEG (Elektroenzephalogramm). Ohne besondere Vorkehrungen sind diese Spannungen allerdings von verschiedenen Störspannungen überlagert, etwa dem 50Hz–Netzbrummen von Geräten aus der Umgebung, welche der Körper als Antenne empfängt.

Der Widerstand ist elektrisch leitend zu den beiden Polen der Spannungsquelle parallel geschaltet. Dies ist ein geschlossener Stromkreis, eine sogenannte *Masche*, weil man sich die beiden Massestriche als elektrisch verbunden vorzustellen hat. In der realen Schaltung sind also die Massepunkte mit einem elektrischen Kabel verbunden.

Der Widerstand ist ebenso wie die Spannungsquelle ein recht allgemeiner Begriff. Konkret kann dies ein technischer Widerstand sein, wie er in elektronischen Schaltungen verbaut wird. Dies kann aber auch der Wolframdraht einer Glühlampe sein, was man dann allerdings durch ein spezielles Symbol im Schaltbild kennzeichnet. Der Widerstand kann aber auch der Eingangswiderstand einer elektronischen Schaltung sein, wie z.B. eines Digitalvoltmeters (s.u.). Ein Kabel stellt man sich als einen idealen elektrischen Leiter vor. Real handelt es sich oftmals um einen Kupferdraht mit hinreichend großem Querschnitt bzw. kurzer Länge, so dass sein Widerstand gegenüber R vernachlässigbar klein ist.

Idealisierend wird davon ausgegangen, dass der elektrische Strom nur entlang der Kabel und durch die Spannungsquelle wie auch durch den Widerstand fließen kann. Dazu muss sich der ganze Stromkreis in einem Isolator befinden. Dies ist in der Regel Luft, die Schaltung könnte aber zum Beispiel auch zumindest teilweise in einem elektrisch isolierenden Kunststoffblock eingeschmolzen sein.

Das ohmsche Gesetz (11) stellt eine Beziehung zwischen den drei Gößen R, U und I her. Kennt man zwei dieser Größen, kann man die dritte berechnen. Weiß man bespielsweise, das über R die Spannung U abfällt, so folgt der Strom aus $I = U/R$. Kennt man andererseits den Strom I durch R, so berechnet sich die Spannung nach $U = R \cdot I$. Dabei wird von der konkreten Bauart des Widerstandes abgesehen, insbesondere braucht dies kein zylinderförmiger Körper sein. Hat man ein räumlich ausgedehntes Medium, zum Beipiel ein Glas Salzwasser, und fließt über ein Kabel ein gewisser Strom I in das Wasser und wird der gesamte Strom über ein zweites Kabel aus dem Was-

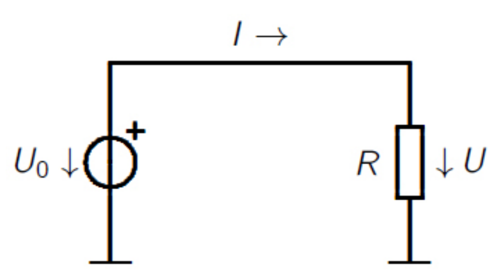

Abb. 4: Schaltkreis aus Spannungsquelle U und ohmschen Widerstand R. Mit einem kurzen Querstrich wird ein jeder Punkt gekennzeichnet, der auf dem elektrischen Bezugspotential, der sogenannten Masse, liegt. Beim realen Aufbau der Schaltung sind alle Massepunkte durch Kabel elektrisch leitend verbunden, was man jedoch oftmals (wie hier) nicht explizit zeichnet.

ser herausgeleitet, wobei über den beiden Punkten, an denen das Kabel das Medium berührt, die Spannung U abfällt, so berechnet sich der Widerstand zwischen diesen Punkten nach (11).[6)]

Reihen– und Parallelschaltung von Widerständen: Schaltet man die Widerstände R_1 und R_2 in Reihe (Abb. 5, links), so ist der Gesamtwiderstand R die Summe der einzelnen Widerstände,

$$\boxed{R = R_1 + R_2} \tag{14}$$

Unterscheiden sich die Widerstände stark, so kann man wie folgt nähern,

$$R_1 + R_2 \approx R_2 \quad \text{für} \quad R_1 \ll R_2 \ .$$

Der größere Widerstand dominiert in einer Reihenschaltung.

Der gesamte Leitwert R^{-1} einer Parallelschaltung zweier Leitwerte R_1^{-1} und R_2^{-1} (Abb. 5, rechts) ist die Summe der einzelnen Leitwerte,

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{15}$$

Dies lässt sich unter Verwendung der Bezeichnung $R = R_1 \| R_2$ (sprich: R_1 parallel R_1) wie folgt umformen,

$$R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \ .$$

Unterscheiden sich die Widerstände stark, so kann man wie folgt nähern,

$$R_1 \| R_2 \approx R_1 \quad \text{für} \quad R_1 \ll R_2 \ .$$

Folglich dominiert der kleinere Widerstand (größere Leitwert) in einer Parallelschaltung.

Reale Spannungsquelle und Spannungsteiler: Verwendet man in einer Schaltskizze für eine Spannungsquelle das Schaltsymbol wie in Abb. 4, so geht man davon aus, dass der Innenwiderstand R_i verschwindet. Dies trifft für reale Spannungsquellen jedoch nicht zu. Hier muss man sich in Reihe zur Spannungsquelle und dem Lastwiderstand R einen Innenwiderstand R_i denken, Abb. 6. Beipielsweise gilt für eine voll aufgeladene Autobatterie $R_\mathrm{i} \approx 20\,\mathrm{m\Omega}$.[7)]

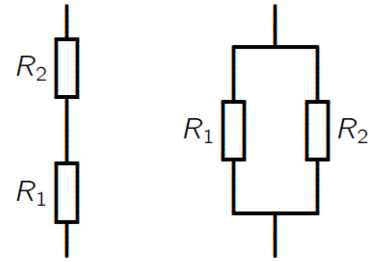

Abb. 5: Reihen– und Parallelschaltung ohmscher Widerstände R_1 und R_2.

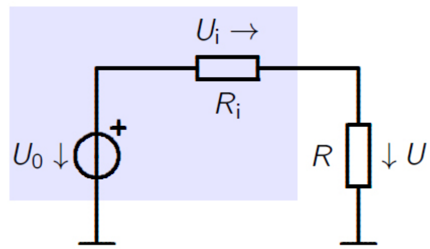

Abb. 6: Schaltkreis aus realer Spannungsquelle U_0, mit dem Innenwiderstand R_i, und dem Lastwiderstand R.

Somit wirkt im gesamten Stromkreis der Widerstand $R_\mathrm{i} + R$, und die Stromstärke ist dann,

$$I = \frac{U_0}{R_\mathrm{i} + R} \ .$$

Damit fällt nach dem ohmschen Gesetz über dem Lastwiderstand R die Spannung

$$\boxed{U = \frac{R}{R_\mathrm{i} + R} \cdot U_0} \tag{16}$$

[6)] Beispielsweise misst man zwischen zwei nicht allzu eng benachbarten Punkten auf der Körperoberfläche eines Menschen Widerstände im Bereich $(0{,}5 \ldots 5)\,\mathrm{M\Omega}$. Kommt es bei Aufregung zu verstärkter Transpiration, sinkt der Widerstand, was in sogenannten Lügendetektoren verwendet wurde.

[7)] Entlädt sich eine Batterie nach längerem Gebrauch, so bleibt die Leerlaufspannung zunächst nahezu konstant, allerdings wächst hierbei der Innenwiderstand stetig an. Den Ladezustand der Batterie beurteilt man demzufolge durch Messung des Innenwiderstands, nicht aber der Leerlaufspannung. Erst bei sehr stark entladenen Batterien ist die Leerlaufspannung deutlich kleiner als bei einer nahezu voll geladenen Batterie.

Physiologische Spannungsquellen, die in der medizinischen Diagnostik wie beispielsweise dem EKG oder EEG untersucht werden, haben einen im Vergleich zu Batterien sehr hohen Innenwiderstand. Zur Messung dieser (zeitlich veränderlichen) Spannungen werden deshalb Messverstärker mit einem vergleichsweise großen Eingangswiderstand verwendet.

ab. Die Klemmspannung U bricht also unter Belastung mit dem Widerstand R um den Wert

$$U_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} \cdot I = \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R} \cdot U_0$$

gegenüber der Urspannung U_0 zusammen,

$$U = U_0 - U_\mathrm{i} \quad .$$

Sind beispielsweise beide Widerstände gleich groß, folgt $U_\mathrm{i} = U = U_0/2$. Für $R \gg \mathrm{R}_i$ bricht die Spannung jedoch kaum zusammen. Dies ist beispielsweise bei einer Taschenlampe mit (umgangssprachlich) „voller Batterie“ der Fall.

Elektronisch stabilisierte Labornetzteile regeln die Ausgangsspannung, so dass sie bei veränderten Lasten R nahezu konstant bleibt, sofern der Laststrom nicht zu groß wird. Den maximalen Laststrom kann man hier in einem gewissen Bereich einstellen, beispielsweise auf einen Wert zwischen 0 und 3 A.

Den Widerstand R_i kann man sich auch als absichtlich eingefügt denken. Dann kann man die Schaltung als *Spannungsteiler* auffassen, der nach (16) die Urspannung U_0 auf die Klemmspannung U mit dem Faktor $R/(R_\mathrm{i} + R)$ herunterteilt.

Die Spannungsquelle in Abb. 6 könnte eine handelsübliche Batterie sein und der Lastwiderstand R eine Glühlampe. Die Verschaltung erfolgt üblicherweise mit Kupferleitungen. Physikalisch durchströmen dann Elektronen den Stromkreis im Uhrzeigersinn, beginnend am negativen Pol der Spannungsquelle über R zum positiven Pol. Sie würden dabei ihre elektrische Energie zum einen in der Glühlampe und zum anderen am Innenwiderstand in andere Energieformen (Wärme, Licht) umsetzen. Für $R_\mathrm{i} = R$ würde die elektrische Leistung in beiden Widerständen gleich groß sein. Der elektro–chemische Energieinhalt der Batterie würde dabei abnehmen. Sowohl der Lastwiderstand wie auch die Batterie würden sich erwärmen.

Im Anhang A.3, S. 18, finden sich einige Hinweise zum Umgang mit Batterien und Akkumulatoren, die heutzutage in vielen mobilen Geräten zum Einsatz kommen.

Reihen– und Parallelschaltung von Spannungsquellen: Schaltet man Spannungsquellen in Reihe, wie in Abb. 7 (oben und Mitte) dargestellt, so ist der gesamte Innenwiderstand R_0 die Summe der einzelnen Innenwiderstände R_1 und R_2. Die Gesamtspannung

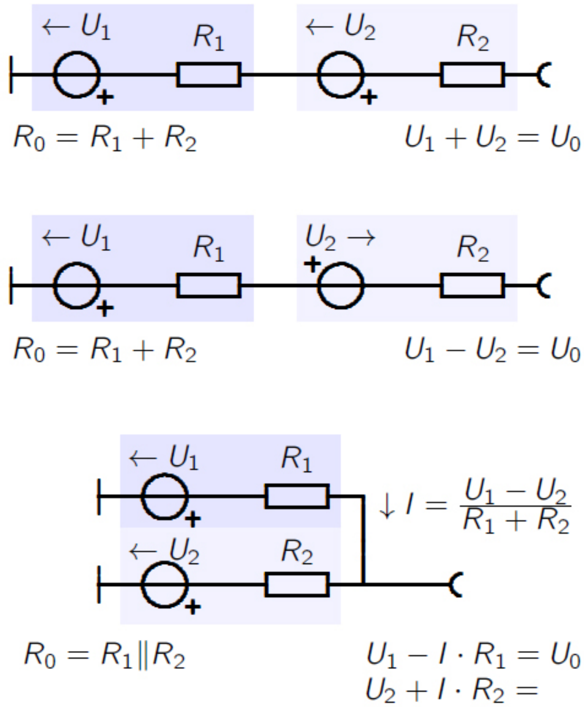

Abb. 7: Reihen– und Parallelschaltung von Spannungsquellen U_1 und U_2 mit den Innenwiderständen R_1 bzw. R_2. Die resultierende Spannungsquelle U_0 hat den Innenwiderstand R_0. Bei der Parallelschaltung (unten) fließt bei $U_1 \neq U_2$ zwischen den Quellen ein Strom I, der allzu groß werden kann, wenn die Innenwiderstände klein sind.

U_0 ergibt sich aus der Summe oder der Differenz der Einzelspannungen U_1 und U_2, je nachdem, ob die ungleichnahmigen (oben) oder die gleichnahmigen Pole (Mitte) zusammengeschaltet sind.

Die Parallelschaltung zweier Spannungsquellen zeigt Abb. 7 (unten). Hierbei ist Vorsicht geboten, weil bei unterschiedlichen Spannungen und kleinen Innenwiderständen ein allzu großer Strom I fließen kann. Schaltet man beispielsweise zwei Batterien parallel, so erhält man für $U_1 = 1{,}24\,\mathrm{V}$, $U_2 = 1{,}37\,\mathrm{V}$, $R_1 = 0{,}30\,\Omega$, $R_2 = 0{,}10\,\Omega$ die Stromstärke

$$I = (0{,}13/0{,}4)\,\mathrm{A} \approx 0{,}3\,\mathrm{A} \quad .$$

Bei größeren Spannungsunterschieden kann leicht die maximal zulässige Stromstärke überschritten werden. In der Batterie mit der kleineren Spannung fließt hierbei ein Ladestrom, welcher nur bei einer wiederaufladbaren Batterie (Akkumulator) zulässig ist.

Maschensatz und Energieumsatz: Die Schaltung in Abb. 6 stellt eine sogenannte *Masche* dar. Alle Spannungenspfeile sind vom höheren zum niedrigeren

Potential gerichtet. Bewegt man sich nun mit einer gedachten negativen Probeladung $-e$ (einem Elektron) entlang der Masche im Uhrzeigersinn, so wird bei der Passage der Spannungsquelle die elektrische Energie $e \cdot U_0$ zunächst zugeführt und bei der Bewegung durch die Widerstände, entgegen den Spannungspfeilen, vollständig aufgezehrt, also in andere Energieformen gewandelt. Folglich gilt

$$e \cdot U_0 = -e \cdot U - e \cdot U_i$$

und somit

$$\boxed{U_0 + U + U_i = 0} \tag{17}$$

Dies ist der sogenannte *Maschensatz*: *Die Summe aller Spannungsabfälle in einer Masche ist Null.* Hierin spiegelt sich wider, dass das elektrische Feld ein Potentialfeld ist. Letztlich drückt der Maschensatz die allgemeine Energieerhaltung aus.

Fällt in einem bestimmten Abschnitt eines elektrischen Stromkreises die Spannung U ab, bei der Stromstärke I, so wird in der Zeit Δt die elektrische Ladungsmenge $Q = I \cdot \Delta t$ transportiert und dabei die Energie $U \cdot Q$ in andere Energieformen gewandelt.[8)] Die in der Zeit Δt umgesetzte Energie ist somit $P \equiv U \cdot Q/\Delta t$. Folglich gilt in Übereinstimmung mit (8) auch im Schaltkreis,

$$\boxed{P = U \cdot I} \tag{18}$$

Beispielsweise beträgt die Leistung am Innenwiderstand der Spannungsquelle in Abb. 6,

$$P_{\mathrm{i}} = U_{\mathrm{i}} \cdot I = \frac{U_{\mathrm{i}} \cdot U_0}{R_{\mathrm{i}} + R} \quad .$$

Für $R_{\mathrm{i}} > 0$ folgt $U_{\mathrm{i}} > 0$ und somit $P_{\mathrm{i}} > 0$. Folglich erwärmt sich die mit R belastete Spannungsquelle.[9)]

[8)] Beispielsweise wird bei einer Glühlampe (Glühwendel aus Wolframdraht in einem Schutzgas) im Normalbetrieb nur ca. 3% der in einer bestimmten Zeitspanne umgesetzten Elektroenergie E in Lichtenergie E_{L} gewandelt (Effizienz: $E_{\mathrm{L}}/E = 0{,}03$). Lichtenergie ist die Energie von elektromagnetischen Wellen im für das menschliche Auge sichtbaren Vakuum–Wellenlängenbereich $(400 \ldots 780)\,\mathrm{nm}$. Die Wärme im Wolframdraht wird in Form von Wärmestrahlung (Wellenlänge $\gtrsim 800\,\mathrm{nm}$) und Wärmeleitung über die Anschlussdrähte und das Schutzgas abgeführt. Verwendet man ein vergleichsweise schlecht wärmeleitendes Schutzgas wie Krypton, so sind die Wärmeverluste geringer und damit die Effizienz höher.

[9)] Reale Spannungsquellen wie Batterien/Akkumulatoren können überhitzen und möglicherweise in Brand geraten, wenn Innen– und Lastwiderstand hinreichend klein sind. Insbesondere trifft dies für Li–Ionen–Batterien in Handys und Notebooks wie auch Batterien der modernen Elektro–Mobilität zu.

Unter Beachtung des ohmschen Gesetzes (11) kann die Leistung an einem Widerstand R auch wie folgt berechnet werden,

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad .$$

Durch den Energieumsatz P erwärmt sich der Widerstandskörper. Nach Inbetriebnahme einer elektrischen Schaltung steigt die Temperatur des Widerstandskörpers umso schneller, je kleiner seine Wärmekapazität ist, und nähert sich asymptotisch einer gewissen Endtemperatur, die umso höher ist, je schlechter die Wärme durch Wärmeleitung und –strahlung an die Umgebung abgegeben werden kann. Überhitzung kann den Körper zerstören.[10)]

Volt– und Amperemeter: Die Geräte zur Messung von Spannung und Strom heißen *Volt–* bzw. *Amperemeter*. Dies sind heutzutage zumeist digitale elektronische Geräte, als Bestandteil von *Multimetern*. Mit einem Auswahlschalter wird bei einem Multimeter die gewünschte Betriebsart eingestellt. Die entsprechenden Schaltsymbole zeigt Abb. 8, mit den Innenwiderständen R_{V} bzw. R_{A}. Je nach Größe dieser Widerstände unterscheidet man zwischen idealen und realen Messgeräten:

	ideal	real
Voltmeter: $R_{\mathrm{V}}/\,\Omega$	$+\infty$	$\approx 10^7$
Amperemeter: $R_{\mathrm{A}}/\,\Omega$	0	$10^{-1} \ldots 10^3$

Ein Voltmeter schaltet man immer parallel zu dem Widerstand (oder der Widerstandskombination), über welchem man den Spannungsabfall messen möchte. Der Stromkreis braucht zur Einfügung des Voltmeters also nicht unterbrochen werden. Zur Messung der Stromstärke in einem bestimmten Zweig eines Stromkreises muss dieser jedoch unterbrochen werden. Das Amperemeter überbrückt die Schnittstelle niederohmig, so dass der Stromkreis wieder geschlossen ist.

[10)] Betreibt man eine traditionelle 230–Volt–Glühlampe bei Unterspannung ($< 230\,\mathrm{V}$), so verlängert sich ihre Betriebsdauer („Lebensdauer“), allerdings ist dann die Lichtausbeute geringer ($< 3\%$). Umgekehrt würde bei Überspannung ($> 230\,\mathrm{V}$) die Betriebsdauer kürzer, jedoch die Lichtausbeute höher ($> 3\%$). Als Kompromiss hatten frühere Hersteller die Glühwendel von Glühlampen derart ausgelegt, dass bei der Nennspannung 230 V die Betriebsdauer ca. 1000h beträgt.

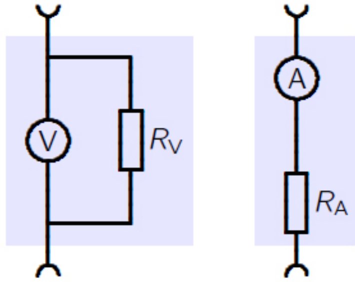

Abb. 8: Ersatzschaltbild für ein reales Voltmeter (links) und Amperemeter (rechts). Lässt man in einer Schaltskizze die Innenwiderstände weg, so deutet man damit an, dass sie im entsprechenden Kontext vernachlässigbar sind, also in den Berechnungen idealisierend $R_V \approx +\infty$ und $R_A \approx 0$ gesetzt werden kann.

Bei einem idealen Voltmeter braucht man den Widerstand R_V in Abb. 8 nicht einzeichnen, denn dann fließt über ihn kein Strom. Ein ideales Voltmeter belastet somit nicht die Spannungsquelle, welche man ausmessen möchte, denn der Messstrom I_V ist hier null. Misst man jedoch eine reale Spannungsquelle U_0 (Innenwiderstand $R_i > 0$) mit einem realen Voltmeter (Innenwiderstand $R_V < +\infty$) aus, so tritt in Abb. 6 an die Stelle des Lastwiderstands R der Innenwiderstand R_V. Nun misst man nicht die Urspannung U_0, sondern einen kleineren Wert U_V, der sich nach der Spannungsteilerregel (16) zu

$$\frac{U_V}{U_0} = \frac{R_V}{R_i + R_V} = \frac{1}{1 + R_i/R_V}$$

ergibt. Für $R_i \ll R_V$ kann man wie folgt nähern,

$$U_V \approx \left(1 - \frac{R_i}{R_V}\right) \cdot U_0 \quad .$$

Daran erkennt man beipielsweise, dass bei einer relativen Messabweichung des Voltmeters von etwa 0,1%, die Abweichung zwischen U_V und U_0 keine Rolle spielt, sofern für das Verhältnis der Widerstände $R_i/R_V < 1/1000$ gilt.

Bei einem idealen Amperemeter kann man sich den Innenwiderstand R_A in Abb. 8 durch eine Leitung überbrückt denken, man braucht ihn dann also gar nicht einzeichnen. Für ein reales Amperemeter gilt jedoch $R_A > 0$, so dass nach dem ohmschen Gesetz bei der Stromstärke I_A die Spannung

$$U_A = I_A \cdot R_A$$

abfällt. Bei einem üblichen Multimeter kann man für die Messung der Stromstärke verschiedene Messbereiche wählen. Für die größeren Messbereiche ist der Innenwiderstand kleiner.

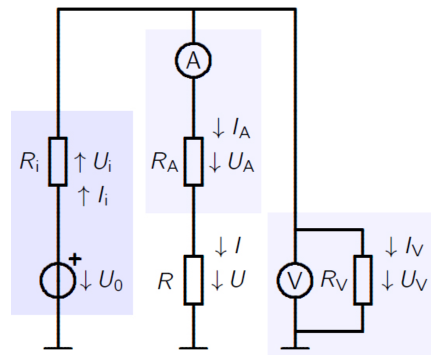

Abb. 9: Stromrichtige Kennlinienaufnahme am Widerstand R.

Messung von Kennlinien: Hat man einen Lastwiderstand R gegeben, so interessiert man sich häufig für die sogenannte *Kennlinie*, worunter man den funktionellen Zusammenhang $I(U)$ zwischen Strom I und Spannung U versteht. Im einfachsten Fall gilt

$$I = \frac{1}{R} \cdot U \quad ,$$

mit einem konstanten Widerstand R. Man spricht dann vom *ohmschen Widerstand*. In der Realität gilt diese Proportionalität $I \sim U$ jedoch höchstens näherungsweise in einem beschränkten Spannungsintervall. Zur Aufnahme einer Kennlinie muss man an den Widerstand R eine veränderliche (einstellbare) Spannung U_0 anlegen und U und I gleichzeitig messen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Stromrichtige Messung: Nach Abb. 9 erfolgt die gleichzeitige Messung von Strom und Spannung *stromrichtig*. Hier ist also der gemessene Strom I_A gleich dem Strom I durch R,

$$I = I_A \quad .$$

Hingegen gelingt die Messung des Spannungsabfalls U über R nur indirekt. Nach dem Maschensatz gilt $U_V = U + U_A$. Unter Beachtung von $U_A = I_A \cdot R_A$ erfolgt die Spannungskorrektur nach,

$$U = U_V - I_A \cdot R_A \quad . \tag{19}$$

Dabei wird der Innenwiderstand R_A des Amperemeters als bekannt vorausgesetzt (Herstellerangabe, s. Anhang S. 20).

2. Spannungsrichtige Messung: Nach Abb. 10 erfolgt die gleichzeitige Messung von Spannung und Strom *spannungsrichtig*. Hier ist also die gemessene Spannung U_V gleich der gesuchten Spannung U über R,

$$U = U_V \quad .$$

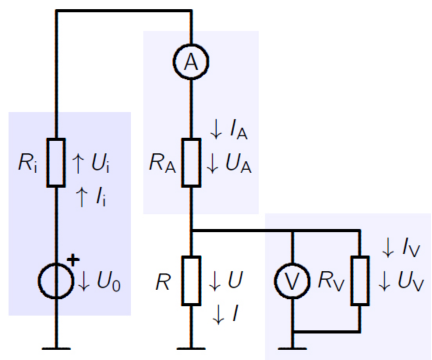

Abb. 10: Spannungsrichtige Messung am Widerstand R.

Hingegen gelingt nun die Messung des Stroms I durch R nur indirekt. Nach der Knotenregel gilt $I_A = I + I_V$. Unter Beachtung von $I_V = U_V/R_V$ erfolgt die Stromkorrektur nach,

$$I = I_A - U_V/R_V \ . \tag{20}$$

Dabei wird der Innenwiderstand R_V des Voltmeters als bekannt vorausgesetzt (Herstellerangabe).

2 Geräte

Es stehen folgende Geräte zur Verfügung (Abb. 11):

1. Grundplatine mit 3 Festwiderständen (1/4 W) und 3 Klemmbuchsenpaaren
2. Netzteil
   (1 . . . 36) V, 3 A
3. 2 Multimeter VC290
   (s. Parameter S. 20)
4. 3 Laborschnüre
   je 30 cm; 0,035(5) Ω/ m
5. 2 Batterien (Ni–MH AA Akku)
   0,95Ah; (1,20 . . . 1,45) V
6. 2 Leistungswiderstände, jeweils 9 W
   Nennwerte 1 Ω; 150 Ω
7. Glühlampe
   12 V, 3 W

3 Hinweise zu den Messungen

3.1 Innenwiderstand von Spannungsquellen

Mit der Schaltung in Abb. 12 kann der Innenwiderstand R_i und die Leerlaufspannung U_0 einer Spannungsquelle ermittelt werden. Bei geöffnetem Schalter (Stellung 1) wird die Spannungsquelle nur mit dem Innenwiderstand R_V des Voltmeters belastet und bei geschlossenem Schalter (Stellung 2) mit der Parallelschaltung aus R_V und einem Lastwiderstand R,

$$R_V \| R = \frac{R_V \cdot R}{R_V + R} \ .$$

Nach der Spannungsteilerregel misst man die entsprechenden Spannungen

$$U_1 = \frac{R_V}{R_V + R_i} \cdot U_0 \quad \text{bzw.} \quad U_2 = \frac{R_V \| R}{R_V \| R + R_i} \cdot U_0 \ .$$

Dieses Gleichungssystem kann nach den beiden unbekannten Größen R_i und U_0 umgestellt werden. Aus

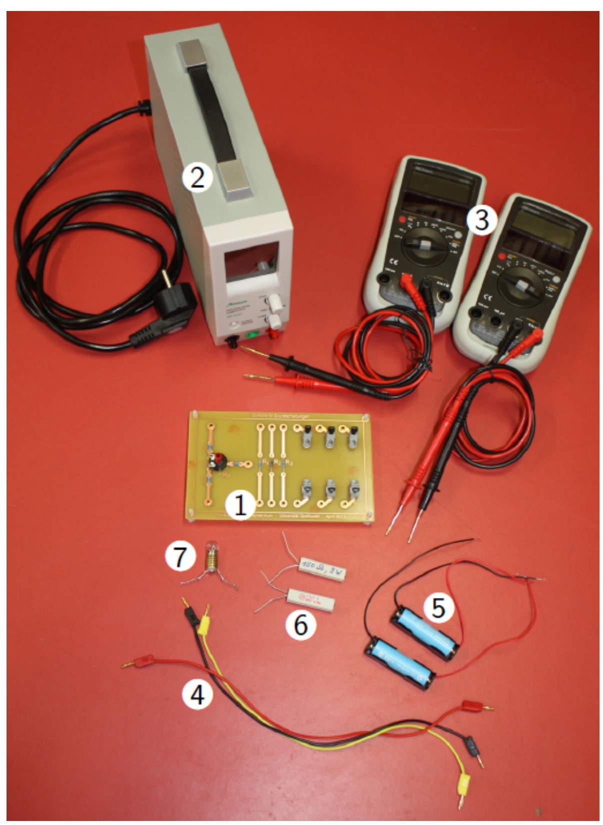

Abb. 11: Versuchsgeräte

der Division beider Seiten folgt,

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_V \| R}{R_V \| R + R_i} \cdot \frac{R_V + R_i}{R_V} \approx \frac{R}{R + R_i} \quad .$$

Hierin ist die Näherung unter den Bedingungen $R_V \gg R$ und $R_V \gg R_i$ gerechtfertigt. Damit gelten schließlich,

$$\boxed{U_0 \approx U_1 \quad \text{und} \quad R_i \approx \frac{U_1 - U_2}{U_2} \cdot R} \tag{21}$$

Der Lastwiderstand R wird hier als bekannt vorausgesetzt (s. Angabe auf dem Widerstandskörper).[11] Er sollte einerseits klein genug gewählt werden, damit sich U_2 deutlich von U_1 unterscheidet. Andererseits darf die Stromstärke

$$I = \frac{U_0}{R_V \| R + R_i} \approx \frac{U_0}{R + R_i} \tag{22}$$

nicht die maximal zulässige Stromstärke der Spannungsquelle übersteigen.[12] Darüber hinaus ist darauf zu achten, dass der technische Widerstand R für die elektrische Leistung $P = U_2 \cdot I$ ausgelegt ist. Wegen $I = U_2/R$ erhält man

$$\boxed{P = \frac{U_2^2}{R}} \tag{23}$$

Am Innenwiderstand fällt dann die Spannung $U_1 - U_2$ ab. Die Leistung am Innenwiderstand der Batterie beträgt somit unter Beachtung von $U_0 \approx U_1$,

$$\boxed{P_i \approx \frac{(U_1 - U_2)^2}{R_i}} \tag{24}$$

Für $R = R_i$ wird P maximal, man nennt dies *Leistungsanpassung* der Last R an die Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand R_i (s. Anhang A.5, S. 18). In diesem Fall gilt $U_2 = U_0/2$ (falls $R_V = \infty$). Belastet man also eine Spannungsquelle mit einem Widerstand R, der ebenso groß ist, wie der Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle, so ist die Klemmspannung U_2 gleich der halben Leerlaufspannung (Urspannung) U_0. Man sagt dann auch, dass die Spannung U_0 durch die Last R auf die Hälfte „zusammenbricht“. Die Leistung am Lastwiderstand R beträgt dann

$$\boxed{P_{max} = \frac{U_1^2}{4R_i}} \tag{25}$$

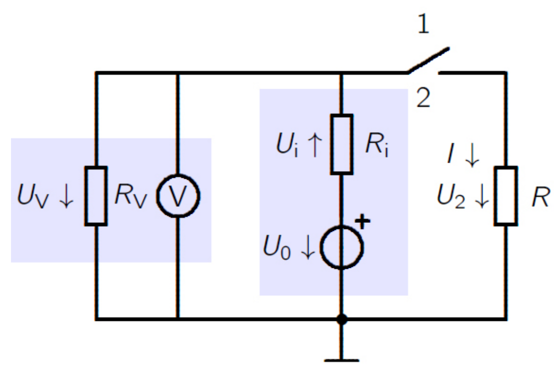

Abb. 12: Schaltung zur Ermittlung des Innenwiderstands R_i einer Spannungsquelle.

Bei der Berechnung von R_i nach (21) pflanzen sich die Messabweichungen ΔU_1, ΔU_2 und ΔR der drei Messgrößen U_1, U_2 bzw. R fort. Nach den Regeln der Größtfehlerrechnung berechnet man die relative Messabweichung für R_i nach (s. Anhang A.4, S. 18),

$$\frac{\Delta R_i}{R_i} = \frac{U_1}{U_1 - U_2} \cdot \left(\frac{\Delta U_1}{U_1} + \frac{\Delta U_2}{U_2} \right) + \frac{\Delta R}{R} \quad . \tag{26}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R}{R} &= 0{,}001 \\ \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{\Delta U_2}{U_2} &\approx 0{,}015 \end{aligned}$$

[11] Kleine Widerstände können mit dem zur Verfügung gestellten Multimeter nur recht ungenau bestimmt werden. Die entsprechende (große) Messabweichung für R pflanzt sich bei der Berechnung von R_i nach Gl. (21) fort. Deshalb wird hier auf dem Widerstandskörper eine Angabe für R gemacht, die aus der Messung mit einer Präzisionsmessbrücke stammt.

[12] Für $R = 0$ erhält man den *Kurzschlussstrom* $I_K = U_0/R_i$. Hält der Kurzschluss der Batterie allzu lange an, kann sich eine ursprünglich „gut“ aufgeladene Batterie stark erwärmen und zu deren Zerstörung führen. Beispielsweise kann eine übliche Autobatterie (Leerlaufspannung 12 V, el. Ladung (voll) $Q = 60$Ah, Innenwiderstand $R_i = 10^{-2}\,\Omega$) im Kurzschluss Stromstärken von ca. 1000 A liefern, was der beachtlichen Leistung $P = R_i \cdot I^2 = 10$ kW entspricht. Akkumulatoren (aufladbare Batterien) können in der Regel problemlos mit der Stromstärke $I = Q/10\text{h} = 6A$ aufgeladen werden. Eine ursprünglich vollständig entladene Batterie würde mit diesem Ladestrom nach 10h vollständig aufgeladen sein. Dieser Ladestrom kann dann auch problemlos über längere Zeit als größt zulässiger Entladestrom angesehen werden. Schnell aufladbare Batterien können auch schadlos noch größere Ströme liefern. Allerdings reduziert sich bei allzu großen Strömen in der Regel deren mögliche Nutzungsdauer, was insbesondere für die Elektromobilität sehr nachteilig ist.

und wegen $U_1/(U_1 - U_2) > 1$ kann die angegebene Messabweichung für R vernachlässigt werden. Man erhält dann,

$$\boxed{\frac{\Delta R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i}} \approx \frac{U_1}{U_1 - U_2} \cdot 0{,}03} \qquad (27)$$

Hiernach ist es offenbar günstig, wenn U_2 möglichst klein wird, was prinzipiell für $R \to 0$ erreichbar ist. Dann würden allerdings die relativen Messabweichungen $\Delta U_2/U_2$ und $\Delta R/R$ allzu groß werden. Darüber hinaus würde auch die Stromstärke stark ansteigen, was letztlich zur Überhitzung der Batterie führt, insbesondere bei allzu langem Betrieb. Der hier verwendete Nennwert $R = 1\,\Omega$ stellt einen Kompromiss dar. Die Zeitdauer der Belastung der Batterie ist möglichst kurz zu wählen, nicht nur um eine Überhitzung zu vermeiden, sondern auch deshalb, weil sich bei hohen Lastströmen die Messspannung U_2 rasch verringert.

3.2 Kennlinie einer Glühlampe

Die Schaltung in Abb. 13 dient zur Messung der Kennlinie $I(U)$ einer Glühlampe im Bereich $U = (0\ldots2)$ V. Weil das Labornetzteil keine Spannungen $U_0 \lesssim 0{,}8$ V liefert, verwendet man einen Vorwiderstand R. Dann fällt die Spannung $I \cdot R$ über R ab und für die Messspannung folgt $U = U_0 - I \cdot R$. Geht man davon aus, dass der Widerstand der Glühlampe im gesamten Messbereich etwa $30\,\Omega$ nicht übersteigt, so kann man mit $R = 150\,\Omega$ die Spannung U im gewünschten Bereich in kleinen Schritten variieren. Unmittelbar nach Erhöhung der Spannung U_0 steigt die Temperatur der Glühlampe an. Weil sie eine von Null verschiedene Wärmekapazität hat, muss man einige Sekunden mit dem Ablesen des Volt– und Amperemeters warten, bis sich eine stationäre Temperatur einstellt und damit auch U und I konstant sind.

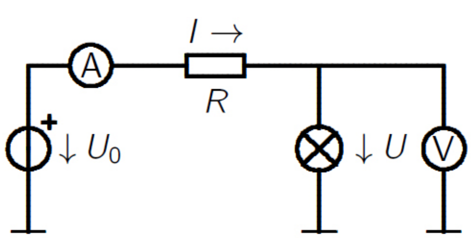

Abb. 13: Schaltung zur spannungsrichtigen Messung der Kennlinie einer Glühlampe.

Geht man davon aus, dass der spezifische Widerstand des Materials nach (12) von der Temperatur T abhängt, so gilt auch eine entsprechende Gleichung für einen daraus gefertigten Widerstand,

$$R(T) = R_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (T - T_0)] \ .$$

Darin ist $R_0 \equiv R(T_0)$, der Widerstand bei der Bezugstemperatur T_0, welches die Zimmertemperatur sei.

Fällt nun über dem Widerstand die Spannung U ab, so wird pro Zeiteinheit die elektrische Energie $P = U \cdot I$ in Wärme umgesetzt, der Widerstand wird damit wärmer und somit steigt auch die pro Zeiteinheit an die Umgebung durch Wärmeleitung und –strahlung abgeführte Wärmemenge. Nach kurzer Zeit stellt sich eine nahezu stationäre höhere Temperatur $T > T_0$ ein, bei der P und die Wärmeabgabe pro Zeiteinheit gleich groß sind. Mit der Proportionalität

$$P = \beta \cdot (T - T_0) \qquad (28)$$

gilt dann auch,

$$\begin{aligned} R(T) &= R_0 \cdot [1 + \gamma \cdot P] \qquad (29) \\ \gamma &\equiv \alpha/\beta \ . \end{aligned}$$

Der Gerätefaktor β hängt von der konkreten technischen Ausführung (Abmessungen/Form) und der Umgebung des Widerstands ab. Hat man γ ermittelt und verwendet man als Temperaturkoeffizient den Tabellenwert $\alpha = 4{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ für Wofram (Tab. 1, S. 7), so folgt,

$$\boxed{\beta = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{4{,}1}{\gamma \cdot 10^3\,\mathrm{K}}} \qquad (30)$$

Somit kann man durch Umstellung von (28) die Temperatur des Glühfadens aus der gemessenen Leistung berechnen,

$$\boxed{T = T_0 + P/\beta} \qquad (31)$$

Diese Möglichkeit der Temperaturbestimmung setzt einen linearen Zusammenhang (28) zwischen der Leistung P und der Temperaturdifferenz $T - T_0$ voraus. Dies ist bei der hier verwendeten Glühlampe nur für hinreichend kleine Werte $P \lesssim 25$ mW der Fall. Der Glühfaden hat in diesem Bereich allerdings zu niedrige Temperaturen, als dass er mit dem menschlichen Auge als leuchtend wahrnehmbar wäre. [13]

[13] Generell gelten folgende Wahrnehmungstemperaturen der

A Anhang

A.1 Ladungserhaltung:

Der Vektor

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \Big(j_x(\boldsymbol{x}),\, j_y(\boldsymbol{x}),\, j_z(\boldsymbol{x})\Big)$$

ordnet jedem Raumpunkt $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ den Vektor der elektrischen Stromdichte zu, mit der Einheit $[j] = \mathrm{A/m^2} = \mathrm{C/(s\,m^2)}$. Die skalare Größe $\varrho(\boldsymbol{x})$ beschreibt die elektrische Ladungsdichte am Ort $\boldsymbol{x}$, $[\varrho] = \mathrm{C/m^3}$. In ein Volumenelement der Größe $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ an der Stelle $\boldsymbol{x}$ fließt in der Zeitspanne Δt in x–Richtung die Ladungsmenge

$$Q_{x,\mathrm{ein}} = j_x(\boldsymbol{x}) \cdot \Delta t \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \frac{j_x(\boldsymbol{x})}{\Delta x} \cdot \Delta t \cdot \Delta V$$

ein, Abb. 14. An der Stelle $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$, mit $\Delta\boldsymbol{x} = (\Delta x, 0, 0)$ fließt in gleicher Zeit die Ladung

$$Q_{x,\mathrm{aus}} = \frac{j_x(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})}{\Delta x} \cdot \Delta t \cdot \Delta V$$

heraus. Dies bedingt die Ladungsänderung

$$\begin{aligned} \Delta Q_x &= Q_{x,\mathrm{ein}} - Q_{x,\mathrm{aus}} \\ &= \frac{j_x(\boldsymbol{x}) - j_x(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})}{\Delta x} \cdot \Delta t \cdot \Delta V \ . \end{aligned}$$

Bezogen auf das Volumenelement ΔV und die Zeitspanne Δt folgt bei Verwendung der Abkürzung $\Delta j_x \equiv j_x(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - j_x(\boldsymbol{x})$,

$$\frac{\Delta Q_x}{\Delta t \cdot \Delta V} = -\frac{\Delta j_x}{\Delta x} \ .$$

Das Minuszeichen ergibt sich daraus, das für $\Delta j_x > 0$ weniger Ladungen heraus– als einfließen und folglich die Ladungsmenge im Volumenelement abnimmt.

Eine analoge Betrachtung zu den beiden anderen Raumrichtungen liefert für die gesamte Ladungsänderung $\Delta Q \equiv \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z$ im Volumenelement ΔV und folglich die Änderung $\Delta\rho = \Delta Q/\Delta V$ der Ladungsdichte,

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -\left(\frac{\Delta j_x}{\Delta x} + \frac{\Delta j_y}{\Delta y} + \frac{\Delta j_z}{\Delta z}\right) \ .$$

Im Grenzfall $\Delta V \to 0$ und $\Delta t \to 0$ geht dies über in die infinitesimale Schreibweise,[14]

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0} \qquad (32)$$

Diese *Kontinuitätsgleichung* drückt die Erhaltung der elektrischen Ladung aus.

Ist die Landungsdichte ϱ am Ort $\boldsymbol{x}$ zeitlich konstant, so gilt $\partial\varrho(\boldsymbol{x}, t)/\partial t = 0$ und folglich,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = 0 \ . \qquad (33)$$

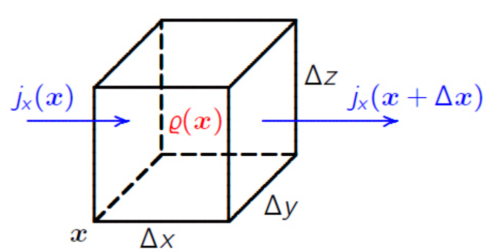

Abb. 14: Unterschiede der Stromdichte j_x in x–Richtung zwischen den beiden Seiten eines Volumenelements bewirken eine Änderung der Ladungsdichte ϱ.

(elektromagnetischen) Wärmestrahlung von beliebigen (glühenden) Körpern:

ca. 400 °C	beginnende farblose Grauglut, nur beim Nachtsehen wahrnehmbar
ca. 525 °C	beginnende Rotglut
ca. 700 °C	dunkle Rotglut
ca. 800 °C	helle Rotglut
ca. 1100 °C	Gelbglut
ca. 1300 °C	beginnende Weißglut
ca. 1500 °C	volle, blendende Weißglut

Die Schmelztemperatur von Wolfram liegt mit 3422 °C. deutlich über den Schmelztemperaturen vieler anderer Metalle. Dies ermöglicht vergleichsweise hohe Temperaturen des Glühfadens der Glühlampe und damit Lichtausbeuten (Anteil Lichtleistung im Vergleich zur elektrischen Gesamtleistung) von ca. 3%. Mit der Temperatur wächst die Lichtausbeute, allerdings verringert sich damit die Lebensdauer, weil der Glühfaden dann schneller verdampft und schließlich unterbrochen wird. Betreibt man eine übliche Glühlampe bei der Nennspannung, so beträgt die Betriebsdauer etwa 1000h. Damit wird jedoch noch immer der überwiegende Energieteil von ca. 97% im Wärme gewandelt, die über Wärmeleitung und –strahlung an die Umgebung abgegeben wird. Diese Wärmeleitungsverluste kann man durch Schutzgase mit geringer Wärmeleitfähigkeit (Krypton oder Xenon) verringern. Mit modernen Leuchtdioden erreicht man jedoch noch deutlich höhere Lichtausbeuten von immerhin ca. 30%. Somit geht aber auch hier der größte Teil von ca. 70% der zum Betrieb nötigen Elektroenergie als Wärme verloren.

[14]

$$\mathrm{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial j_x(\boldsymbol{x})}{\partial x} + \frac{\partial j_y(\boldsymbol{x})}{\partial y} + \frac{\partial j_z(\boldsymbol{x})}{\partial z}$$

A.2 Von der Steckdose zum Labornetzteil

In einer üblichen Zimmersteckdose gibt es drei Anschlüsse, Abb. 15. Das sind zunächst der Nullleiter auf Massepotential und die Phase mit der zeitlich veränderlichen Spannung (gegenüber dem Nullleiter)

$$U(t) = \widehat{U} \cdot \cos(2\pi f t) \quad .$$

Darin sind die Frequenz[15)]

$$f = (50{,}00 \pm 0{,}15)\,\mathrm{Hz}$$

und die Amplitude[16)]

$$\widehat{U} = \sqrt{2} \cdot (220 \ldots 250)\,\mathrm{V} \approx 325\,\mathrm{V} \quad .$$

Die beiden Anschlüsse sind so verbaut, dass man sie nicht einfach berühren kann, denn ein Kontakt (Fingerkontakt) mit der Phase gefährdet die Gesundheit (elektrischer Schlag). Die Berührung des Nullleiters ist ungefährlich, allerdings ist die Verteilung dieser beiden Leiter auf die Steckdosenkontakte nicht normiert und auch nicht gekennzeichnet. (Der Elektriker nutzt zur Bestimmung der Phase einen Phasenprüfer.) Der dritte Leiter ist leicht mit den Fingern erreichbar. Dies ist der so genannte Schutzleiter auf Massepotential (= Nullleiterpotential).

In ein Haus werden üblicherweise vier Leitungen geführt. Das sind neben dem Nullleiter 3 Phasen. Die Wechselspannung zwischen einer jeden Phase und dem Nullleiter sind gleich, bis auf den Umstand, dass sie untereinander um 120° phasenverschoden, also zeitlich um (20/3) ms gegeneinander versetzt sind. Zu einer üblichen 230 V–Haushaltssteckdose werden vom Hausverteiler zum einen eine Phase geführt und zum anderen der Null– und der Schutzleiter geführt. Letztere liegen auf dem gleichen elektrischen Potential, dennoch werden sie aus Sicherheitsgründen als separate Leitungen verlegt. Bei einem Gerät mit Schutzleiterstecker (Wasserkocher, Labornetzteil) ist das Gehäuse mit dem Schutzleiter verbunden. Würde nun durch einen Gerätedefekt die Phase mit dem Gehäuse verbunden sein, so würde ein starker Strom fließen was die elektrische Anlage detektiert und sich dann automatisch abschaltet (Kurzschluss). Dazu dienen die sogenannten Sicherungen (Sicherungsautomat oder Schmelzsicherung) in der Hausverteilung. Damit wird letztlich eine Berührung mit einem Geräteteil auf dem Phasepotential, also ein elektrischer Schlag, verhindert. Darüber hinaus sorgen die Sicherungen dafür, dass bei Überlast oder gar einem Kurzschluss die elektrischen Kabel, Schalter u.a. Geräte im Strompfad nicht überhitzen und zerstört werden oder gar Brände entstehen.

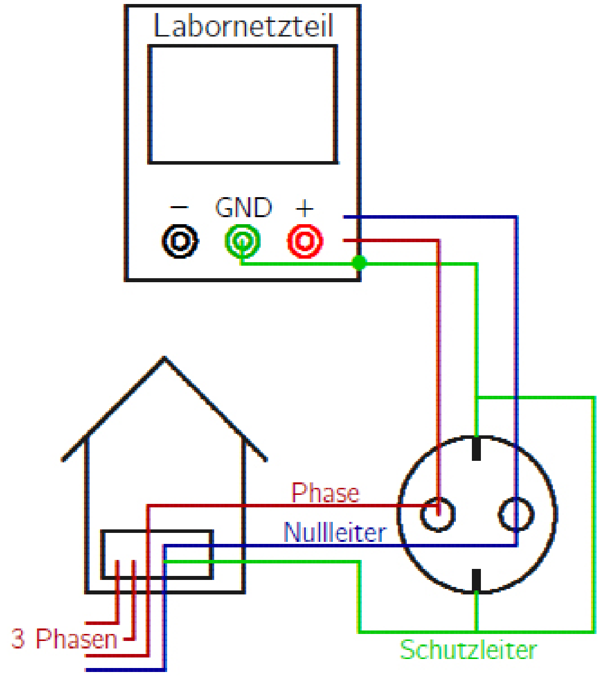

Abb. 15: Elektrische Verschaltung einer üblichen 1–Phasen Steckkdose mit Schutzkontakt, zwischen dem Hausanschluss und einem Labornetzteil.

Ein Labornetzteil hat drei farblich gekennzeichnete Ausgangsbuchsen (sog. Bananenbuchse, Innendurchmesser 4mm). Zwischen der schwarzen Minus– und der roten Plus–Buchse greift man eine wohl definierte einstellbare Gleichspannung ab, welche zum Betrieb der Experimentier–Schaltung benötigt wird. Allerdings ist der Potentialunterschied zwischen einer jeden dieser Buchsen und dem Nullleiter der Steckdose unbestimmt (schwebende Potentiale, erdfrei). Möchte man diese Unbestimmtheit beseitigen, so kann man die dritte (grüne) Ausgangsbuchse (ground: GND) zum Beispiel mit der Minus–Buchse mit einem Kabel verbinden.

Neben der Überlastabsicherung gibt es für Steckdosen in Feuchtezonen (Außensteckdosen, Bäder, Labore) eine Fehlstromsicherung. Sie detektiert, ob der

15)Speisen alle Kraftwerke mit einer konstanten Leistung in das Verbundnetz ein, so nimmt die Netzfrequenz mit wachsender Last ab. Weicht die Netzfrequenz um mehr als 0,20 Hz von der Sollfrequenz 50,00 Hz ab, so wird die Kraftwerksleistung entsprechend gegengeregelt.

16)Der Soll–Effektivwert ist $\widehat{U}/\sqrt{2} = 230\,\mathrm{V}$.

Strom durch die Phase gleich dem durch den Nullleiter ist. Durch erhöhte Luftfeuchtigkeit oder Spritzwasser können diese Ströme allzu ungleich werden, weil dann ein Teil des Phasenstroms über Feuchtigkeitsbrücken o.a. in die Umgebung geleitet wird. Die Sicherung löst aus, wenn der Fehlstrom einen bestimmten Wert (z.B. 30 mA) überschreitet.

Wird der gesamte Phasenstrom über den Nullleiter zurückgeleitet, so heben sich die von beiden Leitern erzeugten Magnetfelder nahezu auf, weil diese Leiter üblicherweise räumlich eng (parallel) verlegt werden und die Stromrichtungen entgegengesetzt sind. Dies trifft jedoch bei vorhandenen Fehlströmen nicht zu, so dass dann zuweilen starke magnetische Störfelder entstehen und die Arbeit mit gewissen Apparaturen (z.B. Elektronenmikroskope) beeinträchtigen.

A.3 Batterie und Akkumulator

Bei einem *Akkumulator* (kurz: *Akku*), kann man die elektro–chemischen Prozesse bei der Entladung durch Energiezufuhr rückgängig machen. Dazu schließt man den Akku an eine Spannungsquelle (Ladegerät) an, wobei jeweils die positiven bzw. negativen Pole verbunden werden. Dann regelt man die Spannung des Ladegerätes so stark auf, dass ein Ladestrom fließt. Dies ist der Fall, wenn die aktuelle Leerlaufspannung des Akkus kleiner als die des Ladegerätes ist. Kann der Akku beipielsweise die maximale elektrische Ladung von $Q_{\mathrm{max}} = 60\,\mathrm{Ah}$ speichern und beträgt der Ladestrom 6 A, so wäre der anfangs voll entladene Akku nach der Zeit 10 h wieder voll aufgeladen.

Höherwertige Ladegeräte werten die Spannungsänderung über dem Akku oder die Ladestromstärke aus und schalten sich rechtzeitig ab, um eine Überladung und damit Schädigung des Akkus zu vermeiden. Lädt man einen Li–Ionen–Akku (vom Handy oder Notebook) nur bis zur Ladungsmenge $Q \lesssim 0{,}8 \cdot Q_{\mathrm{max}}$ auf und und vermeidet Tiefenentladungen, $Q \gtrsim 0{,}3 \cdot Q_{\mathrm{max}}$, so erreicht man eine höhere Zykluszahl (Nutzungsdauer).

Die optimale Ladestromstärke beträgt üblicherweise $(0{,}1 \ldots 0{,}2) \cdot Q_{\mathrm{max}}/\mathrm{h}$. Schnellladefähige Akkus für die Elektromobilität können mit bis zu $\approx 8 Q_{\mathrm{max}}/\mathrm{h}$ geladen werden, was jedoch im Allgemeinen zu starker Erwärmung führt und die erreichbare Zykluszahl verringert. Generell können Akkus bei allzu großen Lade– oder Entladeströmen irreparabel beschädigt werden. Schließt man die Kontakte eines geladenen Li–Ionen–Akkus kurz (Lastwiderstand null), so besteht Brandgefahr. Folglich sind Überbrückungen der beiden Batteriepole insbesondere beim Transport zu vermeiden. Vor der Entsorgung in Sammelbehältnissen sollten die Pole mit Isolierband abgeklebt werden.

A.4 Messabweichung des Innenwiderstands einer Spannungsquelle

Nach den Regeln der linearen Größtfehlerfortpflanzung setzen sich die Messabweichungen bei der Berechnung des Innenwiderstands R_{i} nach Gl.(21) wie folgt fort:

$$\Delta R_{\mathrm{i}} = \left|\frac{\partial R_{\mathrm{i}}}{\partial U_1}\right| \cdot \Delta U_1 + \left|\frac{\partial R_{\mathrm{i}}}{\partial U_2}\right| \cdot \Delta U_2 + \left|\frac{\partial R_{\mathrm{i}}}{\partial R}\right| \cdot \Delta R \quad .$$

Mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\mathrm{i}}}{\partial U_1} &= \frac{R}{U_2} = \frac{R_{\mathrm{i}}}{U_1 - U_2} \\
\frac{\partial R_{\mathrm{i}}}{\partial U_2} &= -\frac{R U_1}{U_2^2} = -\frac{R_{\mathrm{i}}}{U_1 - U_2} \cdot \frac{U_1}{U_2} \\
\frac{\partial R_{\mathrm{i}}}{\partial R} &= \frac{U_1 - U_2}{U_2} = \frac{R_{\mathrm{i}}}{R}
\end{aligned}$$

ergibt sich Gl. (26), S. 14.

A.5 Leistungsanpassung

Eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_{i} werde mit dem Widerstand R belastet (s. Abb. 6, S. 9). Dabei bricht die Leerlaufspannung U_0 auf die Klemmspannung (Spannung über R)

$$U = \frac{R}{R_{\mathrm{i}} + R} \cdot U_0$$

zusammen, und es fließt der Strom

$$I = \frac{U_0}{R_{\mathrm{i}} + R} \quad .$$

Die Leistung am Lastwiderstand beträgt dann

$$P = UI = \frac{R}{(R_{\mathrm{i}} + R)^2} \cdot U_0^2 \quad .$$

Bei gegebener Spannungsquelle (U_0, R_i) ist P eine Funktion allein von R. Man erhält $P = 0$ sowohl bei Kurzschluss ($R = 0$) wie auch bei Lastfreiheit ($R = \infty$). Ansonsten gilt $P > 0$. Es stellt sich die Frage, wann P maximal wird. Dazu bildet man die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{R_\mathrm{i} - R}{(R_\mathrm{i} + R)^3} \cdot U_0^2 \quad .$$

Diese verschwindet für

$$R = R_\mathrm{i} \quad ,$$

somit ist P hierfür maximal. Am Lastwiderstand einer fest vorgegeben Spannungsquelle kann also maximal die Leistung

$$P_\mathrm{max} \equiv P(R = R_\mathrm{i}) = \frac{U_0^2}{4R_\mathrm{i}}$$

auftreten. Wegen $R = R_\mathrm{i}$ tritt dieselbe Leistung auch an R auf.

A.6 Multimeter VC290

Tab. 2: Parameter des Multimeters VOLTCRAFT VC290 (Herstellerangaben, Innenwiderstände nachgemessen).

.

Betriebsart	Parameter	Wert
Gleichspannung, alle Bereiche	Innenwiderstand R_V	10,0(3) MΩ
Gleichspannung, Bereiche bis 400 V	Genauigkeit	±0,8% + 10 Stellen der Anzeige
Gleichstrom, Bereich μA	Innenwiderstand R_A	102(1) Ω
Gleichstrom, Bereich mA	Innenwiderstand R_A	2,55(5) Ω
Gleichstrom, Bereich A	Innenwiderstand R_A	0,33(4) Ω
Gleichstrom, Bereich μA	Genauigkeit	±1,2% + 10 Stellen der Anzeige
Gleichstrom, Bereich mA	Genauigkeit	±1,5% + 10 Stellen der Anzeige
Gleichstrom, Bereich A	Genauigkeit	±2,0% + 8 Stellen der Anzeige
Widerstand, Bereich 200 Ω	Genauigkeit	±1,5% + 10 Stellen der Anzeige
Widerstand, Bereiche (2, 20 und 200) kΩ	Genauigkeit	±1,3% + 3 Stellen der Anzeige
Widerstand, Bereich 2 MΩ	Genauigkeit	±1,6% + 3 Stellen der Anzeige
Widerstand, Bereich 20 MΩ	Genauigkeit	±2,0% + 5 Stellen der Anzeige

Ablesebeispiele:

Messbereich	Anzeige	Messabweichung	Messwert
Spannung	`075.3 mV`	$(0{,}008 \cdot 75{,}3 + 1{,}0)$ mV	$(75{,}3 \pm 1{,}7)$ mV
Spannung	`1.596 V`	$(0{,}008 \cdot 1{,}596 + 0{,}010)$ V	$(1{,}596 \pm 0{,}023)$ V
Gleichstrom Bereich mA	`01.60 mA`	$(0{,}015 \cdot 1{,}6 + 0{,}1)$ mA	$(1{,}60 \pm 0{,}13)$ mA
Gleichstrom Bereich mA	`71.90 mA`	$(0{,}015 \cdot 71{,}9 + 0{,}1)$ mA	$(71{,}90 \pm 1{,}18)$ mA
Widerstand	`2.456 kΩ`	$(0{,}013 \cdot 2{,}456 + 0{,}003)$ kΩ	$(2{,}456 \pm 0{,}035)$ kΩ