

| | |
|-------------------------------------------------------|--------------|
| Versuch M02: Stabpendel | |
| Physik, Studentenfassung(10000) vom 17. November 2021 | |
| Gruppe/Versuchs-Nr.: / | Datum: |
| Name 1: | Name 2: |
| Note Testat: | Note Testat: |
| Note Protokoll: | Betreuer: |

- **Versuchsziel**

Bestimmung der Erdbeschleunigung aus der Schwingungsperiode eines Stabpendels

- **Themen zur Vorbereitung**

Erd- und Fallbeschleunigung, Drehbewegungen, Schwerpunkt und Trägheitsmoment eines starren Körpers, Steinerscher Satz, Drehmoment, Bewegungsgleichung eines physikalischen Pendels und deren Lösung für kleine Auslenkungen, Minimalpendel;

Messunsicherheiten (Skript, pdf, ca. 1MB): Ausreißer, Boxplot, Mittelwert, Standardabweichung, Vertrauensbereich

- **Messaufgaben**

1. Messen Sie die Länge L des Stabpendels.
2. Ermitteln Sie die Pendellängen l_n für die verschiedenen Aufhängepunkte des Stabpendels. Messen Sie dazu zunächst 10-mal den Abstand s des Schwerpunktes S vom Stabende, auf der Seite mit den Bohrlöchern. Messen Sie die Abstände r_n für ein jedes Bohrloch einmal. Beachten Sie die Hinweise im Abschnitt 4.1 (S. 7).
3. Messen Sie die Dauer t_n von N Schwingungsperioden für eine jede Pendellänge l_n . Beachten Sie dabei die Hinweise im Abschnitt 4.2 (S. 7).

Weitere Hinweise:

- (i) Definitionen der verschiedenen Längen entnehmen Sie der Abb. 6.
- (ii) Nutzen Sie zur Aufzeichnung die Tabellen im Anhang.

- **Sicherheitshinweise**

Keine besonderen Gefahren.

- **Auswertung**

1. Bestimmen Sie aus den 10 Messwerten für s den Mittelwert \bar{s} , die Standardabweichung Δs der Einzelmessung sowie den Vertrauensbereich $\Delta \bar{s}$. Analysieren Sie die Messwerte entsprechend der im Anhang S.12 gegebenen Maske.
2. Berechnen Sie nach (21) die Abstände l_n , wobei an Stelle von s der Mittelwert \bar{s} zu setzen ist. Schätzen Sie nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung die Messabweichung von l_n ab. Tragen Sie die Werte in die Tabelle auf S. 13 ein.
3. Berechnen Sie für das Minimalpendel die Erdbeschleunigung g nach (16) und die fortgepflanzte relative Messabweichung nach (19).
4. Tragen Sie in Abb.8 auf S.15 Ihre Messpunkte $(l_n, T_{0,n})$ ein. Zeichnen Sie auch die theoretisch erwartete Kurve $T_0(l)$ entsprechend Gl. (11) ein. Verwenden Sie hierbei für die Stablänge L Ihren gemessenen Wert und für die Erdbeschleunigung den Normwert (2).

5. Berechnen Sie aus den Messwerten mittels linearer Regression die Erdbeschleunigung.¹⁾ Beachten Sie dabei die Hinweise im Abschnitt 2.3, S. 5. Nutzen Sie die Tabelle auf S. 13. Veranschaulichen Sie die Ergebnisse unter Verwendung von Abb. 9 auf S.16. Tragen Sie hier zum Vergleich mit der Theorie auch die Regressionsgerade für $g = g_n$ ein.

¹⁾Ein Programm zur linearen Regression für Rechner mit dem Betriebssystem WINDOWS kann von der folgenden Website bezogen werden,

<https://physik.uni-greifswald.de/studium/physikalisches-grundpraktikum/>

1 Grundlagen

1.1 Erd- und Fallbeschleunigung

Auf einen Körper der Masse m wirkt an der Erdoberfläche eine *Gewichtskraft* G , die proportional zu m ist und (näherungsweise) vom Körper in Richtung des geographischen Erdmittelpunktes zeigt. Für ihren Betrag gilt

$$G = g \cdot m .$$

Darin ist die Proportionalkonstante g gleich dem Betrag der *Erdbeschleunigung* (*Schwerebeschleunigung*). Die Gewichtskraft ergibt sich wesentlich aus dem von Isaac Newton (1643–1727) gefundenen *Gravitationsgesetz*. Danach ziehen sich zwei Massepunkte m^* und m , deren Abstand r ist, mit einer Kraft an, deren Betrag durch

$$G = \gamma \frac{m^*}{r^2} \cdot m$$

gegeben ist, mit der *Gravitationskonstanten*

$$\gamma \approx 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} .$$

Die Gravitationskraft ist eine der fundamentalen Wechselwirkungen (Kräfte), welche die Physik kennt, neben der elektrischen, schwachen und starken.

Denkt man sich die Erde als ideale Kugel mit homogener Massedichte in (kleine) Masselemente zerlegt, so kann man die resultierende Gravitationskraft zwischen einem (kleinen) Körper der Masse m auf der Erdoberfläche und all diesen unterschiedlich weit entfernten Masselementen aufsummieren. Man findet dann, dass der Betrag der Erdbeschleunigung aus

$$g_{\text{th}} \equiv \gamma \frac{m^*}{r^2} \approx 9,831 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (1)$$

berechnet werden kann, worin für m^* die Gesamtmasse der Erde von etwa $5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und für r der (mittlere) Erdradius $R \approx 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$ zu setzen sind.

Tatsächlich hat die Erde keine ideale homogene Kugelgestalt. So ist sie beispielsweise durch die Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation abgeflacht, die Pole liegen etwa 21,4 km dichter am Erdmittelpunkt als der Äquator. Des Weiteren ist ihre Massedichte nicht homogen. Ihre Oberfläche ähnelt mehr jener einer eiförmigen Kartoffel als der eines Tennisballs. Darüber hinaus wirkt eine Zentrifugalkraft auch auf Körper an der Erdoberfläche. Sie ist senkrecht von der Rotationsachse der Erde weggerichtet und verringert die

Gewichtskraft eines Körpers umso mehr, je dichter er am Äquator ist. All dies führt dazu, dass das Körpergewicht von der Position auf der Erdoberfläche abhängt.

Der Wert der Erdbeschleunigung an den Polen ist näherungsweise durch (1) gegeben. Hingegen beträgt er am Äquator etwa $0,995 \cdot g_{\text{th}}$.²⁾

Die Überlagerung von Erd- und Zentrifugalbeschleunigung ergibt die *Fallbeschleunigung*,

$$g_{\text{F}} = a_{\text{Z}} + g .$$

In diesem Experiment wird zunächst der Betrag g_{F} der Fallbeschleunigung bestimmt. Geht man von einer Kugelgestalt mit dem Erdradius R aus, so hat die Zentrifugalbeschleunigung auf dem Breitengrad α den Betrag $a_{\text{Z}} = R\omega_{\text{E}}^2 \cos \alpha$, mit der Kreisfrequenz der Erde $\omega_{\text{E}} \approx 2\pi/86400 \text{ s}$. Aus einer einfachen geometrischen Betrachtung erhält man die relative Fallbeschleunigung zu,

$$\frac{g_{\text{F}}}{g} = \sqrt{\left(\frac{a_{\text{Z}}}{g} - \cos \alpha\right)^2 + \sin^2 \alpha} .$$

Für den Greifwalder Breitengrad $\alpha \approx 54^\circ$ gilt dann $a_{\text{Z}} \approx 0,0198 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ und letztlich,

$$g \approx 1,0012 \cdot g_{\text{F}} .$$

Dieser Unterschied zwischen Fall- und Erdbeschleunigung ist deutlich kleiner als die im Experiment erzielbare Messunsicherheit, weshalb hier nicht weiter zwischen beiden unterschieden wird.

Als Normwert der Erdbeschleunigung wird

$$g_{\text{n}} \equiv 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (2)$$

festgelegt. Dieser Wert wird beispielsweise bei der Festlegung der technischen Maßeinheit *Kilopond* (kp) für die Kraft verwendet, $1 \text{ kp} = g_{\text{n}} \cdot 1 \text{ kg}$.³⁾

Heutzutage gibt es eine Vielzahl von Methoden, um die Erdbeschleunigung mit recht geringen Messabweichungen zu bestimmen.

²⁾Einer der geringsten Werte der Erdbeschleunigung von $9,7639 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ wurde 2013 in den peruanischen Anden gemessen.

³⁾Zur Eichung von Waagen sind Werte der Fallbeschleunigung für verschiedene Zonen gesetzlich vorgeschrieben. Beispielsweise die Werte $g_{\text{F}} = 9,8130 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ für die nördlichen Bundesländer in Deutschland. Für das südliche Bayern ist dieser Wert mit $g_{\text{F}} = 9,8070 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ um ca. 0,6‰ kleiner.

chungen zu bestimmen.⁴⁾ Eine mehr didaktisch motivierte indirekte Methode wird im vorliegenden Experiment verfolgt, indem g aus der Schwingungsdauer T eines *physikalischen Pendels* berechnet wird. Bei solchen *Pendelgravimetern* muss der funktionale Zusammenhang zwischen g und T sowie verschiedenen Parametern, welche das Pendel charakterisieren, bekannt sein. Diese Zusammenhänge werden im Rahmen der *Klassischen Mechanik* recht genau beschrieben.

1.2 Bewegungsgleichung eines Stabpendels

Ein Stab der Masse m ist ein spezieller *starrer Körper*. Wird er drehbar um eine Achse D im Schwerfeld der Erde gelagert, so wirkt auf ihn ein Drehmoment \mathbf{M} . Man spricht dann von einem *Stabpendel*, Abb. 1. Die Drehachse liegt hier senkrecht zur Erdbeschleunigung \mathbf{g} . Das Drehmoment \mathbf{M} ergibt sich aus dem Gewicht $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ des Stabes, das im Schwerpunkt S angreift, welcher sich im Abstand l von der Drehachse D befindet. Bezeichnet \mathbf{l} den Abstandsvektor von D nach S , so ist \mathbf{M} das Vektorprodukt

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{G} .$$

Somit zeigt \mathbf{M} in Richtung der Drehachse, senkrecht zu \mathbf{l} wie auch zu \mathbf{G} . Das Drehmoment ist von Null verschieden, wenn S nicht auf dem Lot durch D liegt. Sein Betrag hängt wie folgt vom zeitlich veränderlichen Auslenkwinkel φ ab,⁵⁾

$$M = mlg \sin \varphi .$$

Nach dem 3. Newtonschen Axiom hat eine Kraft eine gleich große Gegenkraft — *actio gleich reactio*. Für eine Drehbewegung gilt analog, dass ein Dreh-

⁴⁾ Man kann die Erdbeschleunigung mit zwei Satelliten messen, die einen gegenseitigen Abstand von ca. 100 km haben und sich in größeren Höhen über der Erdoberfläche bewegen. Der Abstand kann mit dem GPS (Global Positioning System (engl.), Globales Positionsbestimmungssystem) kontinuierlich gemessen und daraus die Erdbeschleunigung mit Messabweichungen von ca. $2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ berechnet werden. Letztlich werden daraus Karten der Erdbeschleunigung erstellt.

Moderne Präzisions-Gravimeter gestatten die Messung der Erdbeschleunigung mit Messabweichungen von etwa $10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Damit lassen sich beispielsweise Änderungen im Grundwasserspiegel oder die Bewegung großer Wassermassen detektieren. Derartige Messungen nutzen u.a. Geologen bei der Lagerstättenerkundung.

⁵⁾ Eine Ableitung wird im Anhang S. 8 gegeben.

moment ein gleich großes entgegengesetztes Trägheitsdrehmoment $J\ddot{\varphi}$ hat. Darin bezeichnen

$$\ddot{\varphi} \equiv \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$$

die Winkelbeschleunigung, also die zweite zeitliche Ableitung des Auslenkwinkels, und J das *Trägheitsmoment* des Stabes bezüglich der gegebenen Drehachse. Somit gilt $J\ddot{\varphi} = -M$ und folglich,

$$J\ddot{\varphi} + mlg \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Dies ist die sog. *Bewegungsgleichung* (BGL) des Stabpendels (s. Anhang A.4, S. 10). Ihre allgemeine Lösung kann analytisch angegeben werden, sie ist aber recht kompliziert.⁶⁾ Die mathematische Schwierigkeit liegt darin begründet, dass die gesuchte Funktion $\varphi(t)$ als Argument der nichtlinearen Winkelfunktion \sin auftritt. Beschränkt man sich jedoch auf kleine

⁶⁾ Dies führt u.a. auf die *elliptischen Integrale*, welche keine elementare Funktionen sind.

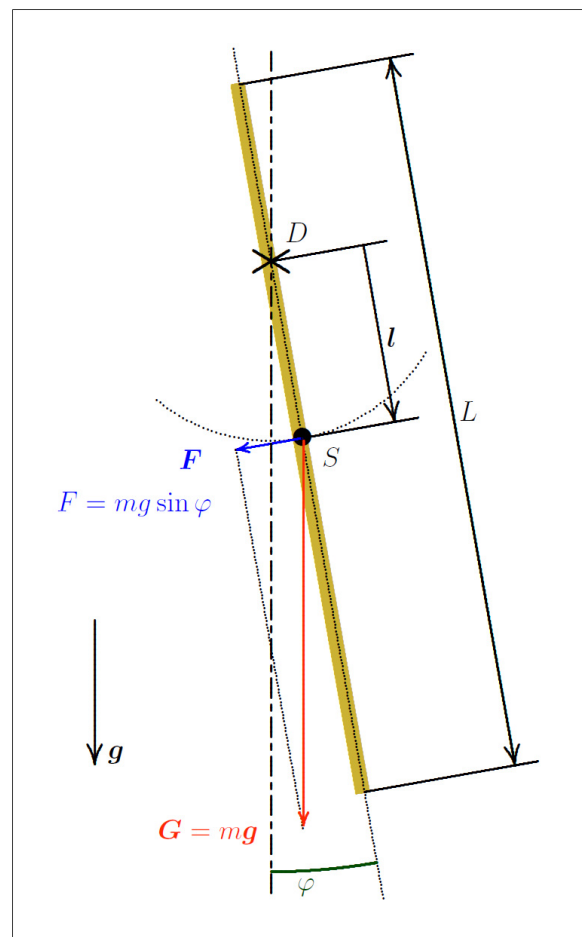


Abb. 1: Pendel im Schwerfeld mit der Beschleunigung \mathbf{g} .

Auslenkungen $\varphi \lesssim 7^\circ \approx 0,12\text{rad}$, so kann man näherungsweise $\sin \varphi \approx \varphi$ setzen, worin φ im Bogenmaß anzugeben ist. Dies führt auf die lineare BGL des *harmonischen Oszillators*,

$$J\ddot{\varphi} + mlg\varphi = 0 \quad (4)$$

Für diese können Lösungen analytisch angegeben werden (s.u.). Darüber hinaus ist zu beachten, dass das reale Pendel gedämpft wird. Hier werden jedoch Dämpfungen als klein angenommen und somit vernachlässigt, s. Anhang A.5, S. 11.

1.3 Lösung der Bewegungsgleichung

Eine Lösung der Bewegungsgleichung (4) lautet

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos \omega_0 t \quad (5)$$

Darin heißt

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad (6)$$

Eigenkreisfrequenz. Die Winkelgeschwindigkeit ist die erste Ableitung von φ nach der Zeit,

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega_0 \hat{\varphi} \sin \omega_0 t .$$

Die Bewegung wird *harmonisch* genannt.⁷⁾ $\varphi(t)$ ist eine spezielle Lösung von (4) für den Anfangszustand

$$\varphi(0) = \hat{\varphi} , \quad \dot{\varphi}(0) = 0 .$$

Der Anfangszeitpunkt $t = 0$ ist also (willkürlich) so festgelegt, dass das Pendel hier seine Maximalauslenkung, die sogenannte *Amplitude* $\hat{\varphi}$ hat, Abb. 2. Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit nimmt seinen Maximalwert $\omega_0 \hat{\varphi}$ immer dann an, wenn $\varphi = 0$ gilt. Dann hat der Schwerpunkt S seine tiefste Lage, er liegt hierbei auf dem Lot durch den Drehpunkt D , Abb. 1.

Zwischen der Kreisfrequenz, der *Frequenz* f_0 und der *Periode* T_0 bestehen die Beziehungen

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} .$$

⁷⁾Im Falle von Druckschwankungen in einem Medium wie Luft (Schall) werden solche sinusförmigen Änderungen als reine Töne wahrgenommen, sofern sie im hörbaren Frequenz- und Lautstärkebereich liegen. Daher die Bezeichnung *harmonisch* (wohlklingend).

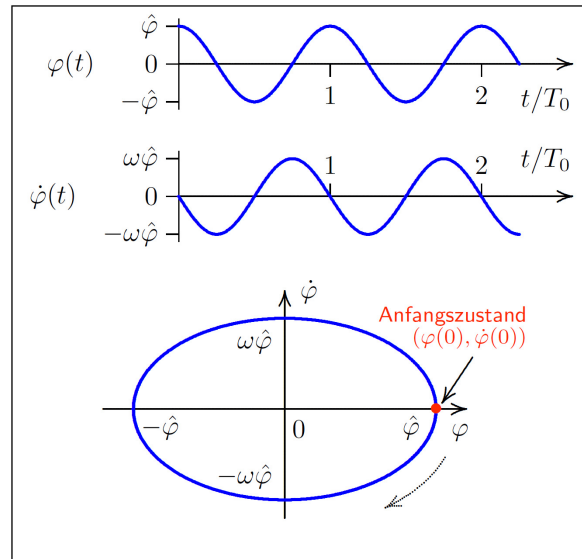


Abb. 2: Oben, Mitte: Zeitlicher Verlauf von Auslenkwinkel φ und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ beim Stabpendel mit kleiner Amplitude. Unten: Zugehörige Phasenbahn. Mit fortschreitender Zeit t durchlaufen die Zustände $[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ diese Ellipse im Uhrzeigersinn.

Unter Beachtung von (6) folgt somit,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (7)$$

T_0 wird *Eigenperiode* genannt.

1.4 Gültigkeitsbereich

Bei einer (physikalischen) Modellbildung müssen immer gewisse Näherungen gemacht werden. Der Experimentator sollte sich jedoch über die Konsequenzen im Klaren sein. Im vorliegenden Fall bedeutet dies beispielsweise, dass die aus der BGL (3) resultierende Schwingungsperiode von der Amplitude $\hat{\varphi}$ abhängt, wohingegen bei einer Modellierung mit der linearen BGL (4) keine solche Abhängigkeit auftritt. Will man also bei der Auswertung der experimentell gewonnenen Daten mit Gl.(7) arbeiten, so muss darauf geachtet werden, dass im Experiment $\hat{\varphi}$ nicht zu groß gewählt wird.

Durch Lösung der nichtlinearen BGL (3) findet man, dass an Stelle der Eigenperiode T_0 die Schwingungsperiode $T(\hat{\varphi})$ tritt, wobei $T > T_0$ gilt, mit $T \rightarrow T_0$ für $\hat{\varphi} \rightarrow 0$. Die relative Abweichung zwischen T und T_0 ist für Amplituden $\hat{\varphi} < 7^\circ$ kleiner als 1%. Mit der

besseren Näherung

$$T_0 \approx \frac{T}{(1 + \hat{\varphi}^2/16)} \quad (8)$$

beträgt sie weniger als 1% für $\hat{\varphi} < 40^\circ = (2\pi/9)\text{rad}$.

Will man im Experiment die Eigenperiode T_0 bestimmen, so kann man mit größeren Schwingungsamplituden arbeiten. Man misst dann T und korrigiert die Werte gemäß (8). Dabei ist die Amplitude im Bogenmaß (rad) einzusetzen. Alternativ kann der Korrekturfaktor aus Abb. 3 abgelesen werden.

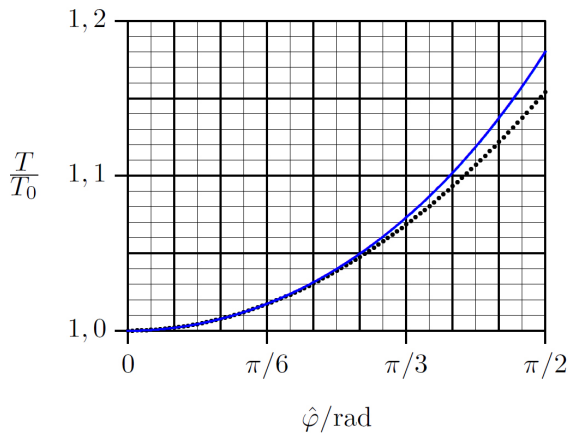


Abb. 3: Schwingungsperiode T in Einheiten der Eigenperiode T_0 als Funktion der Maximalauslenkung $\hat{\varphi}$ (blau, oben). Die schwarze (gepunktete) Linie ist die Approximation nach Gl. (8). Für $\hat{\varphi} \lesssim 30^\circ = \pi/6\text{rad}$ sind beide Verläufe im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht unterscheidbar.

Weiterhin ist zu beachten, dass das reale Stabpendel gedämpft wird. Dämpfungen bewirken, dass die Pendelbewegung nicht mehr periodisch ist und demzufolge auch nicht die Rede von einer Schwingungsperiode im strengen Sinne sein kann. Ist die Dämpfung jedoch nicht zu stark und die Rotationsenergie klein genug, so führt das Pendel eine sog. *Librationsbewegung* aus. Dabei überschlägt sich das Pendel nicht und ändert in den Umkehrpunkten das Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit. Unter Schwingungsperiode wird dann die Zeit bis zur Wiederkehr zum gleichen Umkehrpunkt verstanden. Der Auslenkwinkel in den Umkehrpunkten wird von Wiederkehr zu Wiederkehr kleiner und erreicht asymptotisch den Wert Null. Dämpfungen bewirken eine Vergrößerung der Schwingungsperiode. Sie sorgen somit dafür, dass die Messwerte der Schwingungsperiode die gesuchte Eigenperiode T_0 ebenso systematisch überschätzen, wie die oben erwähnten größeren Amplituden, Gl. (8). Eine quantitative Analyse der Zusammenhänge setzt die Bestimmung der dämpfenden Drehmomente voraus, wovon

hier jedoch abgesehen wird.

1.5 Trägheitsmoment des Stabes

Das Trägheitsmoment J eines starren Körpers bezüglich einer Drehachse D kann man sich nach Jakob Steiner (1796–1863) aus zwei Anteilen zusammengesetzt denken,

$$J = ml^2 + J_0 \quad (9)$$

Darin sind m die Gesamtmasse des Körpers und l der Abstand des Schwerpunktes S von D . Damit kann ml^2 interpretiert werden als das Trägheitsmoment einer Punktmasse, die im Abstand l von D rotiert. Weiterhin ist J_0 das Trägheitsmoment des starren Körpers bezüglich einer gedachten Drehachse, die parallel zu D und durch S verläuft. Für das Stabpendel erhält man (s. Anhang, S. 9),

$$J_0 = \frac{1}{12} mL^2 \quad (10)$$

wenn L die Stablänge ist.

Aus (9) erkennt man, dass das *Null-Trägheitsmoment* J_0 das kleinste Trägheitsmoment ist, welches der Stab bez. aller möglichen Drehachsen haben kann, die zur tatsächlichen Achse parallel verlaufen.

1.6 Schwingungsperiode

Unter Beachtung von (9) und (10) kann die Schwingungsperiode (7) eines Stabpendels wie folgt berechnet werden,

$$T_0(l) = \pi \sqrt{\frac{12l^2 + L^2}{3gl}} \quad (11)$$

Es gelten $T_0(l) \rightarrow +\infty$ falls $l \rightarrow 0$. Für $l = l^*$, mit

$$l^* \equiv \frac{L}{\sqrt{12}} \approx 0,289 \cdot L \quad (12)$$

ist T_0 minimal (s. Anhang S. 10), und es gilt

$$T_0^* \equiv T_0(l^*) = \frac{2\pi}{3^{1/4}} \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (13)$$

Man spricht hier vom *Minimalpendel*.

2 Messprinzip und Auswertung

2.1 Einzelmessung

Stellt man (11) nach der gesuchten Erdbeschleunigung um, so erhält man

$$g = \frac{\pi^2(12l^2 + L^2)}{3T_0^2} \quad (14)$$

Somit kann man g als Funktion von drei Messgrößen auffassen, der Stablänge L , des Abstands l des Schwerpunktes S von der Drehachse D (Abb.1) und der Schwingungsperiode T_0 . Die zugehörigen maximalen Messabweichungen („Größtfehler“) seien ΔL , Δl bzw. ΔT_0 . Die entsprechenden relativen Empfindlichkeiten sind,

$$E_L \equiv \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial L} = \frac{2L}{12l^2 + L^2}$$

$$E_l \equiv \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{1}{l} \cdot \frac{12l^2 - L^2}{12l^2 + L^2}$$

$$E_{T_0} \equiv \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial T_0} = -\frac{2}{T_0}$$

Nach den Regeln der Größtfehlerfortpflanzung erhält man schließlich die größt mögliche relative Messabweichung von g aus

$$\frac{\Delta g}{g} = |E_L \cdot \Delta L| + |(E_l \cdot \Delta l)| + |(E_{T_0} \cdot \Delta T_0)| \quad (15)$$

2.2 Minimalpendel

Beim Minimalpendel geht (14) über in,

$$g = c^* \cdot \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L}{T_0^{*2}} \quad (16)$$

Allerdings wurde hier der Korrekturfaktor

$$c^* \equiv 0,996(1)$$

hinzugefügt, welcher für den Pendelstab sowie für den gewählten Abstand $l = l^*$ charakteristisch ist. Der Faktor korrigiert vor allem, dass der Stab mehrfach durchbort ist, was das Trägheitsmoment um etwa 0,5% verringert. Darüber hinaus wird mit dem Faktor berücksichtigt, dass der Stab nicht ideal dünn

ist, wodurch sich das Trägheitsmoment geringfügig erhöht (s. Abb. 4 und Anhang, S. 9).

Beim Minimalpendel gelten $E_l = 0$ und $E_L = 1/L$. Somit vereinfacht sich (15) und man erhält für die relative Messabweichung der Erdbeschleunigung,

$$\frac{\Delta g}{g} = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T_0^*}{T_0^*} \right| \quad (17)$$

Im Unterschied zu (14) kommt in (16) die schwer bestimmbare Größe l nicht mehr vor. Allerdings muss hier zur Messung der Schwingungsperiode T_0^* der Abstand l auf den Wert l^* eingestellt werden. Aber glücklicherweise ändert sich T_0 bei Variation von l in der Umgebung von l^* nur recht schwach, denn für die relative Abweichung erhält man (s. Anhang, S.10),

$$\frac{T_0(l^* + \Delta l) - T_0(l^*)}{T_0(l^*)} \approx \sqrt{3} \left(\frac{\Delta l}{L} \right)^2$$

Somit geht (17) über in,

$$\frac{\Delta g}{g} = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T_0}{T_0} \right| + 2\sqrt{3} \left(\frac{\Delta l}{L} \right)^2 \quad (18)$$

Darin ist ΔT_0 allein die Abweichung der Zeitmessung, die sich aus der verwendeten Stoppuhr ergibt.

Die Größe Δl ist im Experiment durch den Abstand $\delta l \approx 5$ mm der Bohrlöcher gegeben. Mit der Stablänge $L \approx 200$ mm folgt somit,

$$2\sqrt{3} \left(\frac{\delta l}{L} \right)^2 \approx 0,002$$

Darüber hinaus gilt $\Delta L = 0,5$ mm und somit $\Delta L/L \approx 0,0025$. Mit diesen Werten vereinfacht sich (18) zu

$$\frac{\Delta g}{g} = 0,0045 + 2 \left| \frac{\Delta T_0}{T_0} \right| \quad (19)$$

2.3 Mehrfachmessung und Regressionsrechnung

Gleichung (11) kann wie folgt umgestellt werden,

$$l^2 = -\frac{L^2}{12} + g \cdot \frac{lT_0^2}{4\pi^2} \quad (20)$$

Somit ist $y \equiv l^2$ eine lineare Funktion von

$$x \equiv \frac{lT_0^2}{4\pi^2},$$

mit dem absoluten Glied $a \equiv -L^2/12$ und dem Anstieg $b \equiv g$. Es gilt also die Geradengleichung

$$y = a + b \cdot x.$$

Liegen nun mehrere Messwertepaare (x_n, y_n) vor, so kann g aus dem Anstieg der Regressionsgeraden bestimmt werden.

3 Versuchsaufbau

3.1 Geräte

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 4 dargestellt. Der Pendelstab hat auf einer Seite 18 äquidistante Bohr­löcher, so dass verschiedene Werte des Abstandes l der Drehachse vom Schwerpunkt realisiert werden

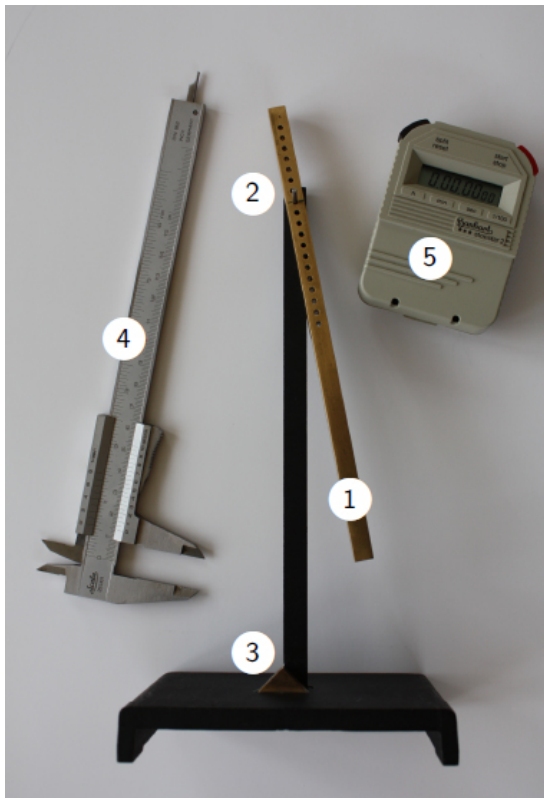


Abb. 4: Versuchsaufbau: (1) Pendelstab mit Bohr­löchern, (2) Ständer mit Drehachse, (3) Auf­lageschneide, (4) Messschieber und (5) Digitalstoppuhr.

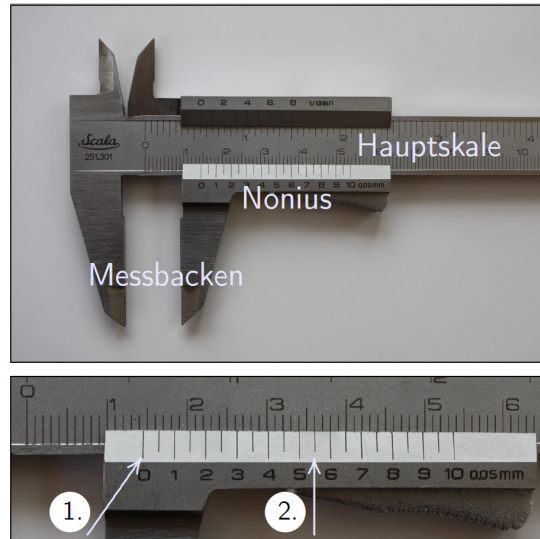


Abb. 5: Messschieberkopf mit Nonius. Der Ablesewert beträgt in diesem Fall 14,55 mm.

können. Der Durchmesser der Drehachse beträgt 2,0 mm, der eines Loches 2,2 mm. Die Löcher bedingen eine inhomogene Masseverteilung des Stabes, was bei der Ableitung von (11) für die Schwingungsperiode jedoch nicht berücksichtigt wurde.

3.2 Längenmessung mit dem Messschieber

Der *Messschieber* (älter auch *Schieblehre*) gestattet Längenmessungen mit einer Präzision (Größtfehler) von 0,10 mm oder auch 0,05 mm (s. Herstellerangabe auf dem Gerät). Zur Erleichterung des Ablesens des Messwertes dient ein verschiebbarer Messstabszusatz, der sogenannte *Nonius*. Den Ablesewert erhält man in zwei Schritten (Abb. 5):

1. Der Null-Skalenstrich des Nonius liegt im Bereich (14 . . . 15) mm der Hauptskala, der Messwert beträgt also 14, . . . mm.
2. Der 5-Strich des Nonius stimmt am besten mit einem Strich der Hauptskala überein, der Messwert beträgt also 14,55 mm.

4 Hinweise

4.1 Längenmessungen

Der Abstand l_n vom n -ten Bohrloch des Pendelstabes zu seinem Schwerpunkt S kann mit dem Messschieber nicht direkt gemessen werden, weil seine Messbacken hierbei keinen beidseitigen Anschlag haben. Deshalb wird l_n aus zwei Messwerten berechnet, dem Abstand r_n von einem Loch zum (oberen) Stabende und dem Abstand s von Stabende zum Schwerpunkt (Abb.6). Es gilt dann

$$l_n = s - r_n . \quad (21)$$

Zur Messung von s , wird der Pendelstab auf der Schneide am Stativfuß in Waage gebracht, wie in Abb.6 (unten) dargestellt. Dies gelingt, weil die Schneide etwas abgeflacht ist. Damit weiß man, dass der Schwerpunkt des Pendelstabes in dem Volumenelement senkrecht über der Schneidenfläche liegt. Darin liegt aber

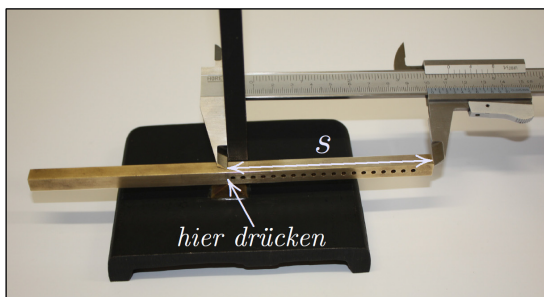
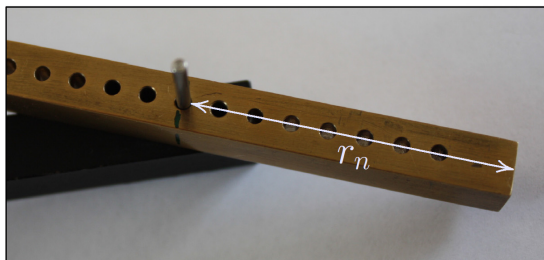
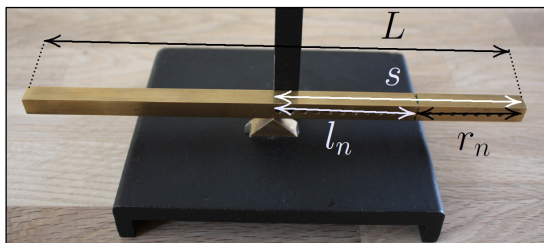


Abb. 6: Definition der zu messenden Abstände r_n vom Stabende bis zum n -ten Bohrloch im Pendelstab und s vom Stabende zum Schwerpunkt.

auch die linke Seitenfläche des Ständerpfostens. Zwischen letzterer und dem rechten Stabende kann dann der Messschieber zur Messung von s angelegt werden. Dabei muss allerdings mit einigem Geschick der Pendelstab gegen den Ständerpfosten gedrückt werden, um ihn für die Messung zu fixieren.

Die maximale Messungenauigkeit einer Einzelmessung ist dann gleich der Breite $\Delta s \lesssim 0,6 \text{ mm}$ der Schneidenfläche. Durch Mehrfachmessung und Mittelung kann die Ungenauigkeit verringert werden. Seien K Messungen s_1, s_2, \dots, s_K ausgeführt, dann ist der Mittelwert gegeben durch,

$$\bar{s} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K s_k , \quad (22)$$

und für den zugehörigen Vertrauensbereich gilt,

$$\Delta \bar{s} \approx \frac{\Delta s}{\sqrt{K}} . \quad (23)$$

Für $K = 10$ erhält man $\Delta \bar{s} \approx 0,2 \text{ mm}$, was hier als hinreichend genau anzusehen ist.

Die Abstände r_n können mit der Präzision des Messschiebers von $0,05 \text{ mm}$ direkt gemessen werden. Berechnet man nun die gesuchten Abstände l_n nach (21), wobei für s nun \bar{s} gesetzt wird, so erhält man für diesen die Größtmessabweichung

$$\Delta l \approx 0,25 \text{ mm} .$$

Berechnet man die Erdbeschleunigung nach (16) bei der Minimalschwingungsdauer T^* , so ist nach (17) die Messungenauigkeit Δl jedoch irrelevant.

Die Gesamtlänge L des Pendelstabes kann mit einem Stahllineal gemessen werden, oder Abschnittsweise mit dem Messschieber. Die Messungenauigkeit beträgt

$$\Delta L \approx 0,3 \text{ mm} .$$

Bei einer Stablänge von $L \approx 200 \text{ mm}$ folgt die relative Messungenauigkeit

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0,002 . \quad (24)$$

4.2 Zeitmessung

Zur Messung der Eigenperiode T_0 steht eine Digitalstoppuhr zur Verfügung, mit einer Ablesegenauigkeit auf 10^{-2} s . Eine händische Zeitmessung hat unter Laborbedingungen eine Messabweichung von ca. $0,1 \text{ s}$.

Im Experiment misst man vorteilhaft die Zeit t für N Schwingungsperioden und erhält dann

$$T = t/N$$

mit der Messabweichung

$$\Delta T \approx \frac{2 \cdot 0,1 \text{ s}}{N} . \quad (25)$$

Darin berücksichtigt der Faktor 2 beide Abweichungen, also die für den Start wie auch den Stopp. Mit Vergrößerung von N kann diese Messabweichung theoretisch beliebig klein gemacht werden, praktisch ist dies jedoch wegen der Dämpfung nicht möglich — das Pendel kommt in endlicher Zeit zur Ruhe.

Nach Abb.3 beträgt die systematische Unterschätzung der Eigenperiode für Schwingungsamplituden $\hat{\varphi} \lesssim 20^\circ$ weniger als 1%.

In Folge der Reibung verringert sich während der Messzeit t der Auslenkwinkel in den Umkehrpunkten. Arbeitet man mit der Anfangsamplitude $\hat{\varphi}(0) \approx 20^\circ$ und wählt $N = 10$, so kann man mit einem Korrekturfaktor α diese systematische Messabweichung angemessen verringern,

$$T_0 \approx \alpha \cdot T , \quad \text{mit } \alpha = 0,99 . \quad (26)$$

Dieser Faktor berücksichtigt zwei Aspekte, welche eine Vergrößerung der Schwingungsperiode bewirken: 1. größere Auslenkungen und 2. Dämpfung. Eine genauere Korrektur der systematischen Messabweichung würde die quantitative Beschreibung des dämpfenden Drehmomentes und die Lösung der entsprechenden BGL erfordern, wovon hier jedoch abgesehen wird.

Wählt man $N = 10$, so erhält man für Schwingungsperioden um 0,7s die relative zufällige Messabweichung

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} \approx 0,0300 . \quad (27)$$

Nach (17) sind im Falle der Minimalschwingungsperiode T_0^* nur die Messabweichungen der Stablänge L und der Schwingungsperiode T_0 für die Genauigkeit der Erdbeschleunigung g relevant. Ein Vergleich der Werte in (27) und (24) zeigt nun, dass im Experiment für die Abweichung Δg vor allem die Abweichung ΔT_0 der Zeitmessung verantwortlich ist. Folglich ist der Messung von T_0 besondere Sorgfalt zu schenken.

A Ergänzungen zum Pendel

A.1 Kräfte am Stabpendel

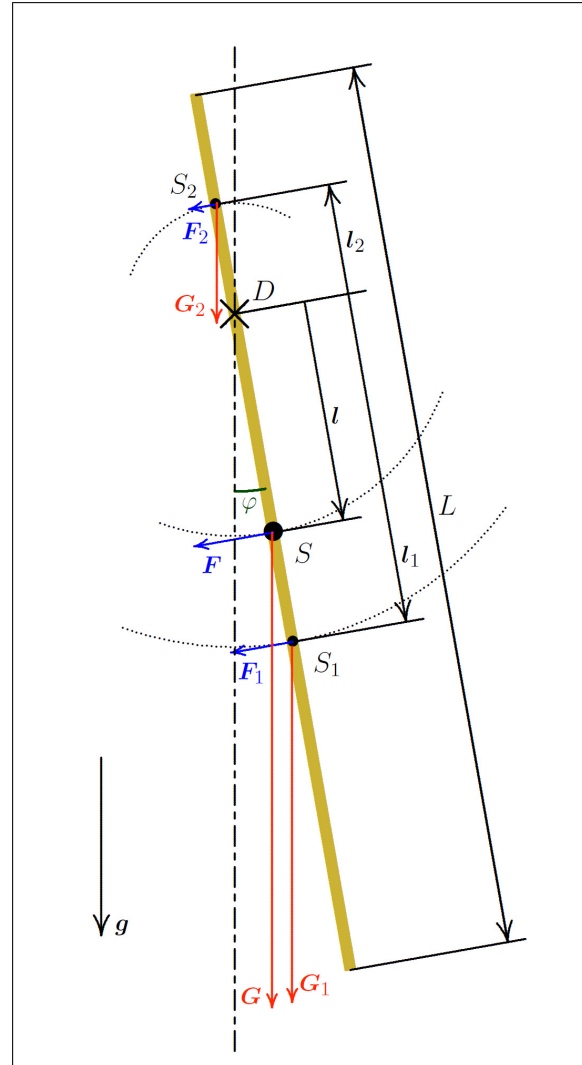


Abb. 7: Kräfte am Stabpendel unter Wirkung der Schwerkraft g . Das Gesamtdrehmoment M ist gleich dem Drehmoment, das man erhält, wenn das Gesamtgewicht $G = mg$ im Gesamtschwerpunkt S angreift, welcher sich im Abstand l von der Drehachse D befindet, $M = l \times G$.

Der Drehpunkt D des Pendels unterteilt den Stab in zwei Teilstücke. Ihre Schwerpunkte S_n haben den Abstand l_n von D , $n = 1; 2$ (Abb. 7). Ein Teilstück hat die Gewichtskraft

$$G_n = m_n g ,$$

mit der Masse m_n des Teilstücks. Ist φ die Auslenkung des Stabes vom Lot, so sind die Beträge ihrer

Tangentialkomponenten

$$F_n = G_n \sin \varphi .$$

Die entsprechenden Drehmomente sind dann

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{l}_n \times \mathbf{G}_n ,$$

worin \mathbf{l}_n den Ortsvektor von D nach S_n bezeichnet.

Bei homogener Masseverteilung entlang der Gesamtlänge L des Stabes liegt der Gesamtschwerpunkt S in der Stabmitte, im Abstand l von D , und es gelten

$$l_1 = \frac{L}{4} + \frac{l}{2} , \quad l_2 = \frac{L}{4} - \frac{l}{2} .$$

Darüber hinaus gilt für die Gesamtmasse $m = m_1 + m_2$, mit

$$m_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{L} \right) m , \quad m_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{L} \right) m .$$

Die Teildrehmomente \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 sind entgegengerichtet, denn \mathbf{l}_1 und \mathbf{l}_2 haben entgegengesetzten Richtungssinn. Folglich erhält man den Betrag des resultierenden Drehmoments $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ aus

$$M = M_1 - M_2 = (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \sin \varphi .$$

Mit

$$\begin{aligned} & (m_1 l_1 - m_2 l_2) / m \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{L} \right) \left(\frac{L}{4} + \frac{l}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{L} \right) \left(\frac{L}{4} - \frac{l}{2} \right) \\ &= l \end{aligned}$$

folgt schließlich für den Betrag des Gesamtdrehmoments

$$M = mgl \sin \varphi . \quad (28)$$

A.2 Trägheitsmoment eines Stabes

Die Drehachse eines dünnen Stabes der Länge L , Masse m und homogener Masseverteilung verlaufe durch seinen Schwerpunkt und senkrecht zur Stabachse. Die Querschnittsfläche sei A , die Massedichte ρ . Das entsprechende Trägheitsmoment erhält man dann aus,

$$J_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = 2 \int_0^{L/2} x^2 dm .$$

Setzt man für das Masselement $dm = \rho A dx$, so folgt

$$J_0 = 2 \int_0^{L/2} x^2 \rho A dx = 2 \frac{(L/2)^3}{3} \rho A .$$

Unter Beachtung von $m = \rho AL$ folgt schließlich,

$$J_0 = \frac{1}{12} mL^2 .$$

Im Experiment hat der Stab die Länge L und eine quadratische Querschnittsfläche mit der Kantenlänge a . Die Drehchse liegt parallel zu einer Kante der Querschnittsfläche. Der Stab gilt als dünn, falls $a \ll L$ gilt. Ohne die oben gemachte Näherung für einen dünnen Stab erhält man jedoch das Trägheitsmoment

$$J_0^* = \frac{1}{12} m(L^2 + a^2) = \frac{1}{12} mL^2 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{L^2} \right) .$$

Der hier verwendete Stab hat die Abmaße

$$L \approx 200,0(5) \text{ mm} , \quad a \approx 8,0(2) \text{ mm} .$$

Daraus folgt,

$$c_1^2 \equiv 1 + \frac{a^2}{L^2} \approx 1,0016(1)$$

folgt. In den Gleichungen (10) und folgenden lässt sich dies leicht berücksichtigen, indem L durch $c_1 \cdot L$ ersetzt wird.

Hinzu kommt, dass der Stab 19 Durchbohrungen mit dem Durchmesser $2,10(3) \text{ mm}$ hat, im gegenseitigen Abstand von $\delta l = 5,0(2) \text{ mm}$. Diese dienen der Aufhängung an der Drehachse und verringern das Trägheitsmoment. Der Stab hat die Masse $m = 100(1) \text{ g}$, und das jeweils „fehlende“ Masselement an den Bohrstellen ist $\delta m = 0,21(2) \text{ g}$. Die Drehachse der 8. Bohrung (gezählt vom Stabende auf der Seite der Bohrungen), entspricht etwa dem Minimalpendel ($l = L/\sqrt{12}$). Hier reduziert sich das Trägheitsmoment J in Gl. (9) um den Wert

$$\begin{aligned} \Delta J^* &= \delta m \cdot \delta l^2 \cdot \left(\sum_{n=1}^7 n^2 + \sum_{n=1}^{11} n^2 \right) \\ &= \Delta m \cdot \Delta l^2 \cdot 646 \\ &= 3,4(4) \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 . \end{aligned}$$

Das gesamte Trägheitsmoment des Minimalpendels ist,

$$J^* = ml^2 + \frac{mL^2}{12} = \frac{mL^2}{6} = 667(10) \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 .$$

Die relative Verringerung des Trägheitsmomentes in Folge der Bohrungen ist somit,

$$\Delta J^* / J^* \approx 5,1(8) \cdot 10^{-3} .$$

In (16) lässt sich dies durch den Korrekturfaktor

$$c_2 \equiv 1 - \Delta J^*/J^* = 0,995(1)$$

berücksichtigen. Zusammen mit dem Korrekturfaktor c_1 erhält man schließlich den Gesamt-Korrekturfaktor

$$c^* \equiv c_1 \cdot c_2 \approx 0,996(1) .$$

A.3 Minimale Schwingungsperiode und Messempfindlichkeit

Nach (11) hängt die Schwingungsperiode T_0 (stetig differenzierbar) vom Abstand l ab. Die Werte von g und L werden als konstant aufgefasst. Um zu zeigen, dass $T_0(l)$ an der durch (12) gegebenen Stelle l^* minimal ist, wird (11) wie folgt umgeschrieben. Mit der Abkürzung $r \equiv l/L$ für den relativen Abstand von Schwer- und Drehpunkt gilt,

$$f(r) \equiv T_0 \cdot \pi^{-1} \sqrt{3g/L} = \sqrt{12r + r^{-1}}$$

Offenbar ist $T_0(l)$ dann und nur dann minimal, wenn dies auch für $f(r)$ zutrifft. Die erste Ableitung von f nach r ist,

$$\frac{df(r)}{dr} = \frac{12 - r^{-2}}{2\sqrt{12r + r^{-1}}}$$

Offenbar gilt $df(r)/dr = 0$ falls $12 - r^{-2} = 0$, also für $r = r^* \equiv l^*/L = 1/\sqrt{12}$. Folglich ist T_0 an der Stelle l^* extrem.

Um die zweite Ableitung von f nach r zu bilden, wird die Abkürzung $h(r) \equiv 12r + r^{-1}$ verwendet. Es gelten dann

$$h' \equiv \frac{dh}{dr} = 12 - r^{-2} \quad , \quad h'' \equiv \frac{d^2h}{dr^2} = 2r^{-3} .$$

Damit gilt auch,

$$\begin{aligned} 2 \cdot df/dr &= h' \cdot h^{-1/2} \\ 2 \cdot d^2f/dr^2 &= h'' \cdot h^{-1/2} - h' h^{-3/2} / 2 \\ \frac{d^2f}{dr^2} &= \frac{2h''h - h'}{4 \cdot h^{3/2}} \\ &= \frac{49r^{-2} + 4r^{-4} - 12}{4 \cdot (12r + r^{-1})^{3/2}} \\ &= 12 \cdot 3^{1/4} \quad \text{für } r = 12^{-1/2} . \end{aligned}$$

Wegen $d^2f(r)/dr^2 > 0$ für $r = l^*/L$ ist die Schwingungsperiode $T(l^*)$ minimal.

Für die zweite Ableitung der Schwingungsperiode $T_0(l)$ nach l folgt wegen

$$\begin{aligned} \frac{df}{dl} &= \frac{df}{dr} \cdot \frac{dr}{dl} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{1}{L} \\ \frac{d^2f}{dl^2} &= \frac{d^2f}{dr^2} \cdot \frac{1}{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2T_0(l)}{dl^2} &= \frac{\pi}{\sqrt{3gL^3}} \cdot \frac{1}{L^2} \frac{d^2f}{dr^2} \\ &= \frac{\pi \cdot 12 \cdot 3^{-1/4}}{\sqrt{gL^3}} \quad \text{für } l = l^* \quad (29) \end{aligned}$$

Möchte man die Schwingungsperiode T_0 des Minimalpendels messen, so muss der Abstand l^* verwendet werden, den man allerdings in der Messpraxis häufig nicht genau kennt. Somit stellt sich die Frage, wie stark sich T_0 ändert, wenn statt l^* der Abstand $l^* + \Delta l$ verwendet wird. Für $\Delta l \ll l^*$ erhält man die relative Änderung aus der Entwicklung in eine Taylor-Reihe,

$$T_0(l^* + \Delta l) \approx T_0(l^*) + \left. \frac{dT_0}{dl} \right|_{l^*} \Delta l + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2T_0}{dl^2} \right|_{l^*} \Delta l^2$$

Wegen $dT_0/dl = 0$ an der Stelle l^* und unter Beachtung von (29) und (13) folgt,

$$\frac{T_0(l^* + \Delta l) - T_0(l^*)}{T_0(l^*)} \approx \sqrt{3} \left(\frac{\Delta l}{L} \right)^2$$

A.4 Bewegungsgleichung

Mathematisch handelt es sich bei einer Bewegungsgleichung um eine *Differentialgleichung* (DGL). Sie wird *gewöhnlich* genannt, weil die gesuchte Funktion φ nur von einer Variablen, der Zeit t , abhängt. Ihre Ordnung ist zwei, weil die höchste Ableitung von φ nach der Zeit die Zweite ist. Schließlich ist sie *nichtlinear*, weil φ das Argument der nichtlinearen Funktion sin ist.

Eine Grundaufgabe der klassischen Physik ist es, die relevanten Kräfte (bzw. Drehmomente) zu benennen, um die DGL aufstellen zu können. Dazu gehört es, die Parameter, hier also J , m , l und g , zu bestimmen. Schließlich ist dann eine Funktion $\varphi(t)$ zu finden, welche die DGL zu einem jeden Zeitpunkt t erfüllt. Die Funktion $\varphi(t)$ heißt dann *Lösung der DGL*. Im vorliegenden Fall enthält die Lösung zwei frei wählbare Werte, die *Integrationskonstanten* genannt werden. Man spricht deshalb von der *allgemeinen Lösung*. Kennt man den Auslenkwinkel φ und die

Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ zu einem *Anfangszeitpunkt* $t = 0$, so können diese Konstanten daraus bestimmt werden. Man erhält somit eine *spezielle Lösung* und spricht hier auch von einem *Anfangswertproblem*.

Die Kenntnis dieses Anfangszustandes zusammen mit der Lösung der DGL ermöglicht die Berechnung und somit die Vorhersage der Bewegung für beliebige Zeitpunkte in der Zukunft wie auch die Ermittlung von vergangenen Zuständen. Der *Determinismus der klassischen Mechanik* bezieht sich unmittelbar auf diese Zusammenhänge.

Der *Zustand* des Systems wird hier durch den Auslenkwinkel und die Winkelgeschwindigkeit definiert, also durch den Vektor $(\varphi, \dot{\varphi})$. Diese spannen den *Phasenraum (Zustandsraum)* auf. Die Phasenbahn

$$\{[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]\}_{-\infty < t < \infty}$$

heißt auch *Trajektorie*.

A.5 Pendel mit Dämpfung

Ein üblicher empirischer Ansatz für ein Dämpfungs-drehmoment ist

$$M_D = -\beta\dot{\varphi} \quad ,$$

mit der Dämpfungskonstanten $\beta > 0$. Bei kleinen Auslenkwinkeln φ ist dann

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + mlg\varphi = 0$$

die lineare BGL des Pendels. Bei hinreichend geringer Dämpfung,

$$\beta < 2\sqrt{mlgJ} \quad ,$$

lautet eine spezielle Lösung,

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot e^{-\frac{\beta}{2J}t} \cdot \cos 2\pi t / T_\beta \quad .$$

Darin bezeichnen

$$\hat{\varphi} \equiv \varphi(0)$$

die Schwingungsamplitude und

$$T_\beta = \frac{4\pi J}{\sqrt{4Jmlg - \beta^2}} \quad (30)$$

die *Schwingungsperiode*. Diese Sprechweise ist üblich, obwohl die Bewegung für $\beta > 0$ nicht periodisch ist, denn hier klingt die Amplitude mit der Zeitkonstanten

$$\tau = \frac{2J}{\beta}$$

exponentiell ab. Für $\beta = 0$ geht T_β in die Eigenperiode T_0 nach Gl. (7) über.

Es handelt sich also tatsächlich um einen *transienten* Vorgang. Nach der Zeit τ fällt die Amplitude auf den Wert

$$e^{-1} \cdot \hat{\varphi} \approx 0,37 \cdot \hat{\varphi} \quad .$$

Für das im Experiment verwendete Pendel gilt

$$\beta \approx 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad .$$

Für den größt möglichen Abstand l des Schwerpunktes von der Drehachse erhält man

$$4Jmlg \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad .$$

Somit folgt unter Beachtung von (30),

$$\frac{T_\beta}{T_0} = \sqrt{\frac{4Jmlg}{4Jmlg - \beta^2}} \approx \sqrt{\frac{4}{4 - 0,01}} \lesssim 1,002 \quad .$$

Wegen der Dämpfung wird die Eigenperiode also nur um etwa 0,2% zu groß gemessen. Für sehr kleine Abstände l wird der Einfluss der Dämpfung auf die Schwingungsperiode jedoch deutlich größer.

A.6 Tabellen zu den Messaufgaben und zur Auswertung

Stablänge: $L / \text{mm} =$

Abstand für kleinste Schwingungsperiode: $l^* \approx 0,289 \cdot L =$

Abstand vom Schwerpunkt zum Stabende
auf der durchbohrten Seite bei der k -ten Messung: s_k

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 = K |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| s_k / mm | | | | | | | | | | |
| Rang | | | | | | | | | | |

kleinster Wert: $s_{\min} / \text{mm} =$

größter Wert: $s_{\max} / \text{mm} =$

Spanne: $(s_{\max} - s_{\min}) / \text{mm} =$

Median: $\tilde{s}_{0,5} / \text{mm} =$

unteres Quartil: $\tilde{s}_{0,25} / \text{mm} =$

oberes Quartil: $\tilde{s}_{0,75} / \text{mm} =$

Quartilsabstand: $(\tilde{s}_{0,75} - \tilde{s}_{0,25}) / \text{mm} =$

Ausreißer nach unten:

Ausreißer nach oben:

Mittelwert (ohne Ausreißer): $\bar{s} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K s_k \approx$

Standardabweichung der Einzelmessung: $\Delta s = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\bar{s} - s_k)^2} \approx$

Standardabweichung des Mittelwertes: $\Delta \bar{s} = \frac{\Delta s}{\sqrt{K}} \approx$

Erweiterungsfaktor für Konfidenz $p = 0,95$: $k_{p,K} = 2,32$ für $K = 10$ gleichverteilte Messwerte
(s. Skript Messunsicherheiten)

Messwert mit Abweichungsintervall: $s = \bar{s} \pm k_{p,K} \cdot \Delta \bar{s} \quad (q \cdot 100\%)$

Zusammenfassung:

| | |
|-------|----------|
| $s =$ | mm (95%) |
|-------|----------|

Messwert r_n : Abstand von der n -ten Bohrung zum Stabende

Messwert t_n : Dauer von N_n Schwingungsperioden

Abstand Schwerpunkt–Drehachse: $l_n = \bar{s} - r_n$

Schwingungsperiode: $T_{0,n} = \alpha \cdot t_n / N_n, \alpha = 0,99$

Erdbeschleunigung: $g_n = \frac{\pi^2(12 \cdot l_n^2 + L^2)}{3 \cdot l_n \cdot T_{0,n}^2}$

Abzissenwert für lin. Regression: $x_n = l_n T_{0,n}^2 / (4\pi^2)$

Ordinatenwert für lin. Regression: $y_n = l_n^2$

| Loch- Nr. n | Messwerte | | | abgeleitete Größen | | | | |
|---------------------|-------------------------|------------------------|-------|-------------------------|----------------------------|------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------|
| | $\frac{r_n}{\text{mm}}$ | $\frac{t_n}{\text{s}}$ | N_n | $\frac{l_n}{\text{mm}}$ | $\frac{T_{0,n}}{\text{s}}$ | $\frac{x_n}{\text{mm} \cdot \text{s}^2}$ | $\frac{y_n}{10^3 \text{mm}^2}$ | $\frac{g_n}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ |
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | |

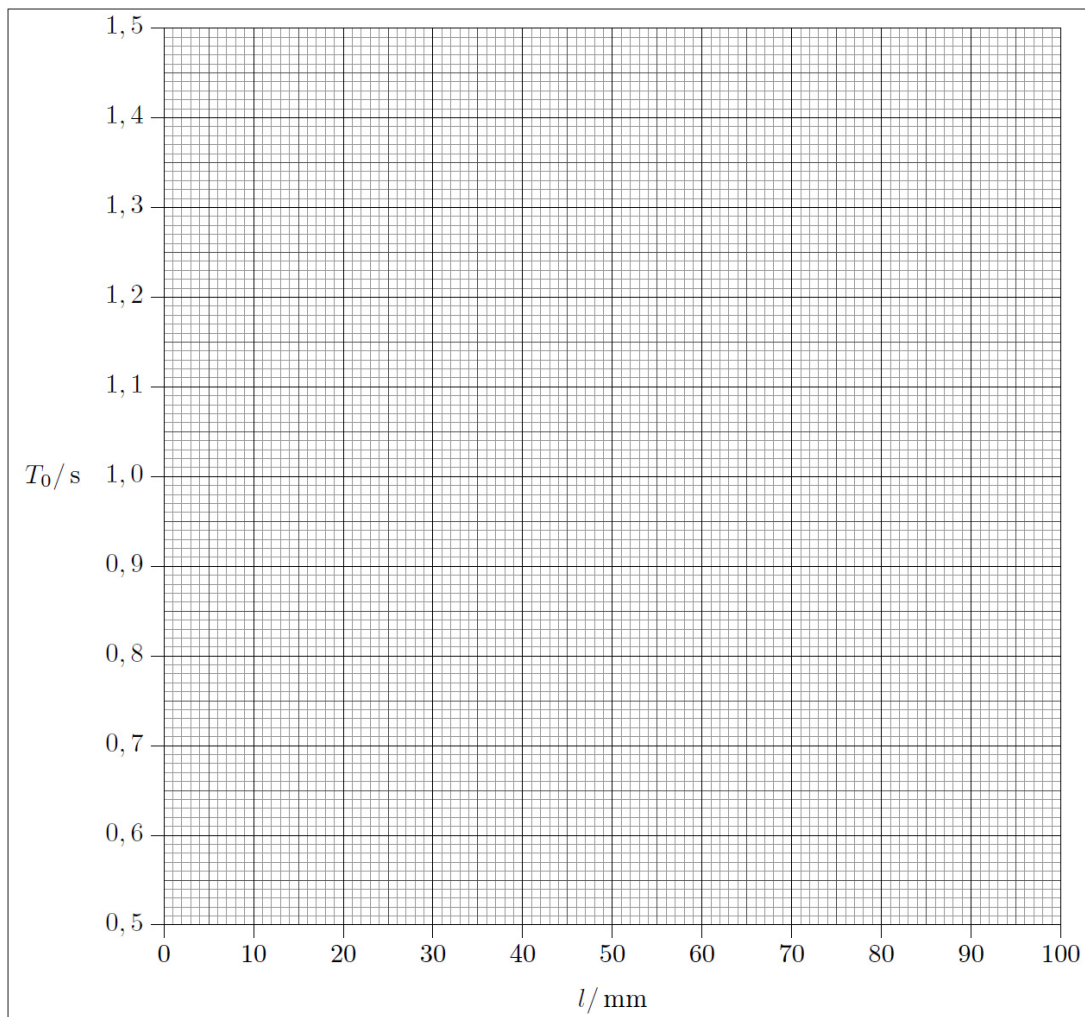


Abb. 8: Abhängigkeit der Eigenperiode T_0 von der Pendellänge l .

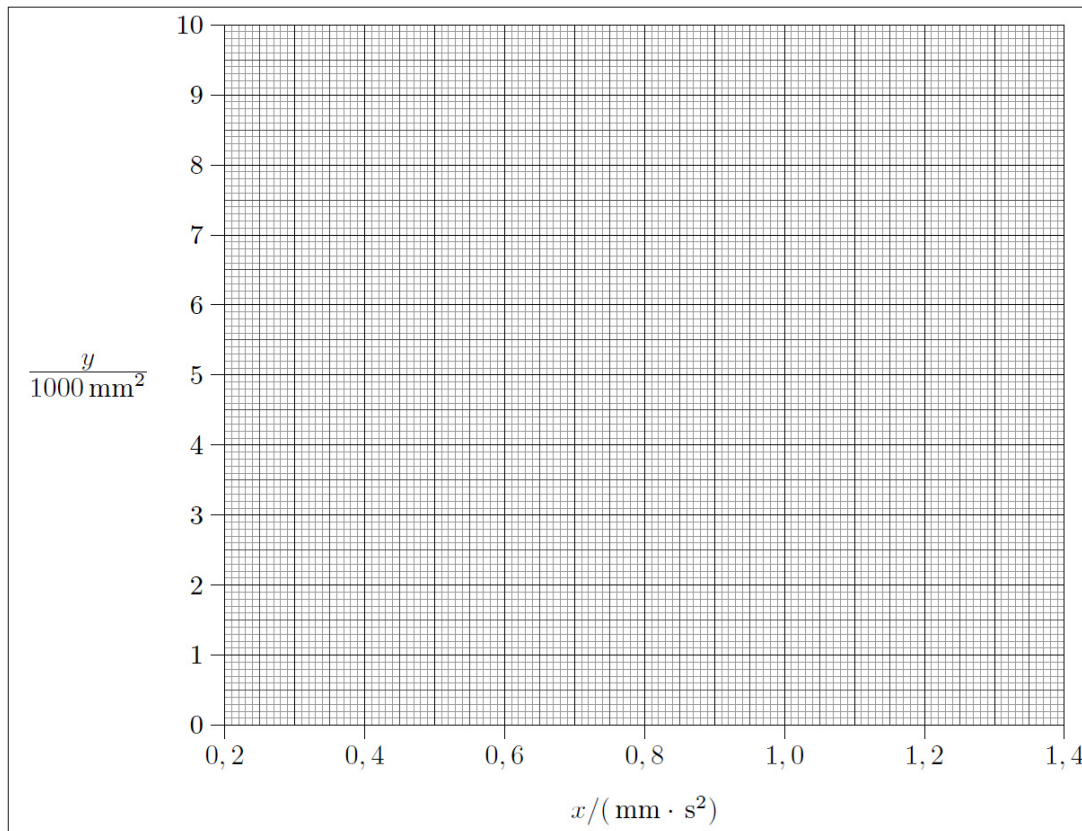


Abb. 9: Abhängigkeit $y_n(x_n)$. Der Anstieg der Regressionsgeraden schätzt die Erdbeschleunigung g .