

| | |
|---|-------------------------|
| Versuch M14: Rohrströmung | |
| Physik, Studentenfassung(10000) vom 23. November 2021 | |
| Gruppe/Versuchs–Nr.: / | Datum: |
| Name 1: Note Testat: | Name 2: Note Testat: |
| Note Protokoll: | Betreuer: |

• **Versuchsziel**

Untersuchung grundlegender Zusammenhänge bei der laminaren und turbulenten Rohrströmung eines inkompressiblen Fluids.

• **Themen zur Vorbereitung**

Dynamische und kinematische Viskosität eines Fluids, Aktivierungsenergie, Arrhenius–Gesetz; Turbulenz, Reynoldszahl; laminare Rohrströmung, Hagen–Poiseuillesches Gesetz; turbulente Rohrströmung, Rohrrauigkeit, Basisgleichung, Moody–Diagramm; elektrische Analogie zur Flüssigkeitsströmung

• **Messaufgaben**

1. Laminare Strömung — Viskosität:

Messen Sie bei Zimmertemperatur die Volumenstromstärke $J = \Delta V / \Delta t$ von Wasser durch verschiedene Rohre (Schläuche) unter folgenden Bedingungen:

| Messreihe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| L / cm | 60 | 100 | 200 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| R / mm | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 0,5 | 1,5 | 1,0 | 1,0 | 1,5 |
| h / cm | 40 | 40 | 40 | 70 | 20 | 20 | 80 | 6 |

2. Laminare Strömung — Temperaturabhängigkeit der Viskosität:

Messen Sie für den Schlauch mit den Nennwerten $L = 1 \text{ m}$, $R = 1,5 \text{ mm}$ bei der Höhe $h = 6 \text{ cm}$ die Volumenstromstärke J von Wasser bei den Fluidtemperaturen $\vartheta / ^\circ\text{C} = 40; 50; 60$.

3. Turbulente Strömung — Reibungsbeiwert und Wandrauigkeit:

Messen Sie die Volumenstromstärke J für den Schlauch mit den Nennwerten $L = 1 \text{ m}$, $R = 1,5 \text{ mm}$ bei der Höhe $h = 80 \text{ cm}$ und der Fluidtemperatur $\vartheta = 60 ^\circ\text{C}$.

Hinweise:

- Die vorgegebenen Werte für die Rohrlänge L , den Höhenunterschied h und die Temperatur ϑ sind als Richtwerte zu verstehen, die im Experiment näherungsweise einzustellen sind. Jedoch sind sie möglichst genau zu messen und so bei der Auswertung zu verwenden.
- Wählen Sie einheitlich das Fluidvolumen $\Delta V = 0,1 \text{ Liter}$.
- Die Messzeit Δt runden Sie auf ganzzahlige Sekunden.
- Notieren Sie für alle Messreihen (auch im ersten Versuchsteil) die Temperatur des Fluids (Wasser im oberen Becher).
- Nutzen Sie zur Aufzeichnung der Messwerte und für die Auswertung die Tabelle auf S. 18.

- **Sicherheitshinweise**

- Glasthermometer:**

- Falls das Glasthermometer zerbricht, so sammeln Sie nicht die Scherben ein. Warnen Sie Ihre Umgebung und informieren Sie dann den Betreuer oder Praktikumsassistenten.

- Heißes Wasser:**

- Beim Hantieren mit heißem Wasser besteht Verbrühungsgefahr.

- **Auswertung**

- Zur Messaufgabe 1:**

- Überprüfen Sie die Einhaltung der Bedingung (39), S. 14, für laminare Strömungen. Berechnen Sie dazu die Reynoldszahl Re nach Gl. (37), S. 13. Verwenden Sie hierbei für die Viskosität ν die Literaturwerte, welche Sie der Abb. 2 auf S. 4 entnehmen oder auch nach (2) mit den Parametern (3) berechnen können. Geben Sie Re in Einheiten der kritischen Reynoldszahl Re_c an, Gl. (7), S. 6.
 - Berechnen Sie das Verhältnis der Reibungsarbeit zur kinetischen Energie bei laminarer Strömung nach Gl. (40), S. 14.
 - Berechnen Sie nach Gl. (31), S. 13, die kinematische Viskosität ν für eine jede Messreihe. Bestimmen Sie den Mittelwert sowie den Vertrauensbereich der Viskosität für die Konfidenz 95%. Zeichnen Sie die Werte der kinematischen Viskosität ν für alle Messreihen in das Bild auf S. 19 ein. Tragen Sie auch den Mittelwert mit dem entsprechenden Fehlerbalken ein.
 - Was trägt zu den Abweichungen von den Literaturwerten bei?

- Zur Messaufgabe 2:**

- Berechnen Sie für eine jede Messreihe die kinematische Viskosität ν und überprüfen Sie die Laminarität analog zur 1. Aufgabe. Die Massedichte ρ bei der Temperatur T ist der Abb. 8, S. 14, zu entnehmen.
 - Ermitteln Sie aus diesen ν -Werten unter Einbeziehung des Mittelwertes der ersten Aufgabe die Aktivierungsenergie des Fluids mittels einer Regressionsrechnung entsprechend den Hinweisen im Abschnitt 3.6, S. 14.

- Zur Messaufgabe 3:**

- Bestimmen Sie aus den Messwerten den Reibungsbeiwert λ nach Gl. (44) S. 15, und die Reynoldszahl nach Gl. (37), S. 13.
 - Tragen Sie den Messpunkt $(\lg\lambda, \lg Re)$ mit den Messabweichungen (47) und (48) in das Moody-Diagramm auf S.20 ein. Schätzen Sie daraus die Rauigkeit k der Schlauchinnenwand.
 - Vergleichen Sie den erhaltenen Wert für k mit den Angaben in Tab. 2, S. 10.

1 Grundlagen

1.1 Viskosität

Definition: Die *Viskosität* (auch *Zähigkeit*) ist eine Eigenschaft von Stoffen, welche fließen können, sogenannte *Fluide*.¹⁾ Bei ihnen kommt es unter der Einwirkung äußerer Kräfte zu gegenseitigen Verschiebung von Masse- bzw. Volumenelementen. Neben Gasen und Flüssigkeiten können dies auch feste Stoffe wie amorphes Glas sein. Je größer die Wechselwirkungskräfte zwischen den Masselementen sind, desto schwerer lassen sie sich gegeneinander verschieben, was sich in größeren Werten der Viskosität widerspiegelt. Man spricht hier von der *inneren Reibung*. Feste Stoffe haben eine extrem hohe Viskosität im Vergleich zu der von Flüssigkeiten und noch mehr zu der von Gasen. In dünnflüssigen Stoffen beruht die Viskosität auf einen Impulsaustausch zwischen benachbarten Masselementen.

Viskosimetrische Daten sind bei der Entwicklung und Optimierung diverser technischer Anlagen wichtig, wo immer Fluide strömen. So zum Beispiel beim Motoren- und Kraftwerksbau, insbesondere Pumptechniken, chemischen Anlagen wie Raffinerien, in der Medizintechnik u.v.a.m. Sie spielen auch eine Rolle beim Verständnis vieler Naturphänomene wie etwa der ober- und unterirdischen Wasserdynamik oder dem Blutkreislauf in Lebewesen (s. Anhang A.2, S. 16).

Zur Definition der Viskosität stellt man sich zwei planparallel angeordnete Wände im Abstand d vor, eine jede habe die Fläche A , Abb. 1. Unter der Wirkung einer Kraft \mathbf{F} werden sie gegeneinander verschoben. Der Richtungspfeil dieser Kraft liege in der Wandebene. Der Quotient \mathbf{F}_R/A wird *Schubspannung* genannt. Findet die Verschiebung bei konstanter relativer Wandgeschwindigkeit \mathbf{v}_w statt, so wird \mathbf{F} durch die Reibungskraft \mathbf{F}_R kompensiert, wobei sich beide Kräfte auf die gleiche Fläche A beziehen. Folglich gilt,

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_R .$$

Denkt man sich nun das Fluid in dünne planparallele Schichten der Dicke Δy zerlegt, so wirkt zwischen diesen die Reibungskraft \mathbf{F}_R . Sie ist proportional zur Fläche A wie auch zum Geschwindigkeitsgradient $\Delta v/\Delta y$. Die Proportionalitätskonstante η nennt

¹⁾ Aus den Beeren von Misteln (lat.: *Viscum*) kann man einen zähflüssigen Saft (Vogelleim) gewinnen, worauf die Begriffsbildung *Viskosität* beruht.

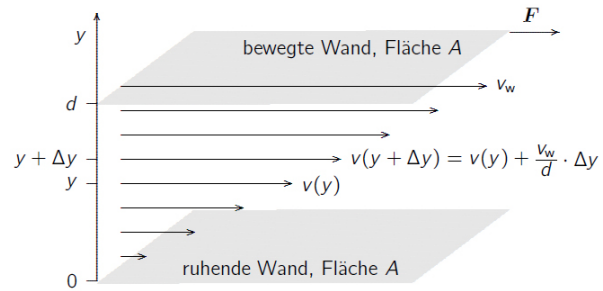


Abb. 1: Zur Definition der Viskosität: Ein Fluid zwischen zwei planparallel angeordneten Wänden, die sich unter Einwirkung der Kraft \mathbf{F} mit der Geschwindigkeit v_w gegeneinander bewegen.

man *dynamische Viskosität*. Ihre Einheit ist

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Somit gilt im Grenzfall $\Delta y \rightarrow 0$ für den Betrag der Reibungskraft,

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \left| \frac{dv}{dy} \right| . \quad (1)$$

Die Fluidschichten, welche eine Wand berühren, haften an dieser, d.h., die unterste Schicht ruht an der unteren Wand und die oberste bewegt sich mit gleicher Geschwindigkeit v_w wie die obere Wand. Wächst die Geschwindigkeit v linear mit dem Abstand y von der ruhenden Wand, so gilt

$$v(y) = \frac{v_w}{d} \cdot y .$$

Dieser lineare Zusammenhang tritt bei gewissen Fluiden in guter Näherung auf, falls die Fluidschicht dünn genug ist, also bei hinreichend kleinem Wandabstand d . Man spricht dann von einer *newtonschen Flüssigkeit*.²⁾ Bei dieser ist η nicht von der Geschwindigkeit abhängig. Dann folgen $dv/dy = v_w/d$ und für die Reibungskraft,

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{v_w}{d} .$$

Die obigen Betrachtungen gelten nur für eine hinreichend kleine Geschwindigkeit v_w , so dass alle Teilchen in einer Fluidschicht die gleiche Strömungsgeschwindigkeit $v(y)$ haben (abgesehen von der thermodynamischen Bewegung). Man nennt die Strömung dann *laminar*. Überschreitet v_w einen bestimmten kritischen Wert, so treten Verwirbelungen (Turbulenzen) auf, worauf weiter unten genauer eingegangen wird.

²⁾ Isaac Newton (1643–1727) hat solche Flüssigkeiten in seinem fundamentalen Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* beschrieben.

Beispiele: Die dynamische Viskosität der verschiedenen Fluide weist eine große Variabilität auf. Einige Beispiele sind in Tab. 1 aufgeführt.

Die Viskosität von Blut hängt stark davon ab, wo es sich im Körper befindet. Beispielsweise werden die roten Blutkörperchen in engeren Gefäßen (Kapillaren) länglich verformt, was die Viskosität verringert und somit den Blutstrom erleichtert. In größeren Gefäßen wie den Schlagadern in Herznähe stapeln sich rote Blutkörperchen in größeren Aggregaten, was ebenso die Viskosität verringert. Hingegen hat (gelbliches) Blutplasma eine vergleichsweise große Viskosität, wie auch Wundsekrete.

Die Viskosität fester Stoffe wie amorphes Glas ist sehr groß, weshalb diese Begriffsbildung hier nur bedingt sinnvoll ist, sofern nicht die Temperatur hoch genug ist. So wird beispielsweise die Viskosität von Glas in der Nähe des Schmelzpunktes deutlich kleiner.

Tab. 1: Werte der dynamischen und kinematischen Viskosität η bzw. $\nu = \eta/\rho$ für verschiedene Stoffe (ρ : Massedichte).

| Substanz | η in $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ | ν in $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ |
|-------------------------|---|--|
| Wasser (0 °C) | 1,7923 | 1,7926 |
| (20 °C) | 1,002 | 1,004 |
| Quecksilber (20 °C) | 1,55 | |
| Ethanol (20 °C) | 1,19 | |
| Essigsäure (80%, 25 °C) | 2,31 | |
| Kaffeesahne (20 °C) | ≈ 10 | |
| Olivenöl (20 °C) | $\approx 10^2$ | |
| Honig (20 °C) | $\approx 10^4$ | |
| Motorenöl (25 °C) | $\approx 10^2$ | |
| (150 °C) | ≈ 3 | |
| Blut (37 °C) | | |
| allgemein | 3.. 25 | 3.. 25 |
| in großen Gefäßen | 3.. 4 | 3.. 4 |
| Glas (20 °C) | $10^{22} \dots 10^{24}$ | |
| (Verarbeitungstemp.) | $10^6 \dots 10^{12}$ | |
| Steinsalz (20 °C) | $10^{18} \dots 10^{21}$ | |

Temperaturabhängigkeit: Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser bei Normaldruck zeigt Abb. 2. In der flüssigen Phase ist sie nur schwach von Druck abhängig, wohingegen sie in der Dampfphase mit steigendem Druck stark anwächst. Dies ist verständlich, weil Dampf viel stärker kompressibel ist als eine Flüssigkeit. Die Erhöhung der Teilchendich-

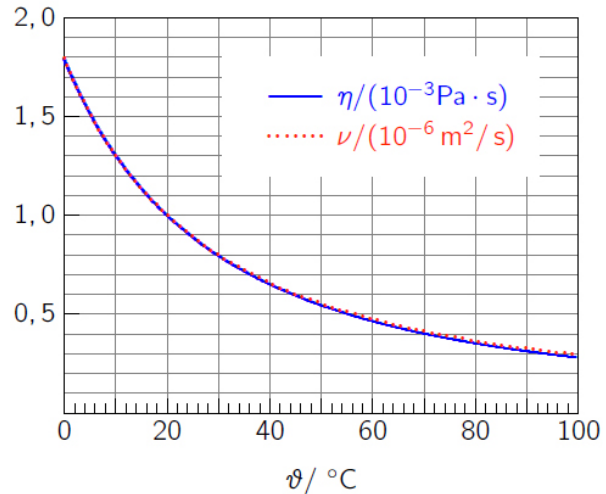


Abb. 2: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser beim Druck 1bar. In den gewählten Maßeinheiten sind die entsprechenden Maßzahlen der dynamischen und kinematischen Viskosität η bzw. $\nu = \eta/\rho$ nahezu gleich, weil die Massedichte ρ im dargestellten Temperaturbereich nahezu konstant den Wert $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ hat.

te führt zu stärkeren Wechselwirkungen der Fluidteilchen und somit zu einer größeren inneren Reibung.

Bei Gasen steigt die Viskosität in der Regel mit der Temperatur, hingegen fällt sie für Flüssigkeiten, wie in Abb. 3 dargestellt. Benachbarte Molekülschichten in einer Flüssigkeitsströmung sind durch Kohäsionskräfte gewissermaßen ineinander verzahnt, was durch energetische Potentialwälle beschrieben wird. Damit die Schichten aneinander vorbeigleiten können, müs-

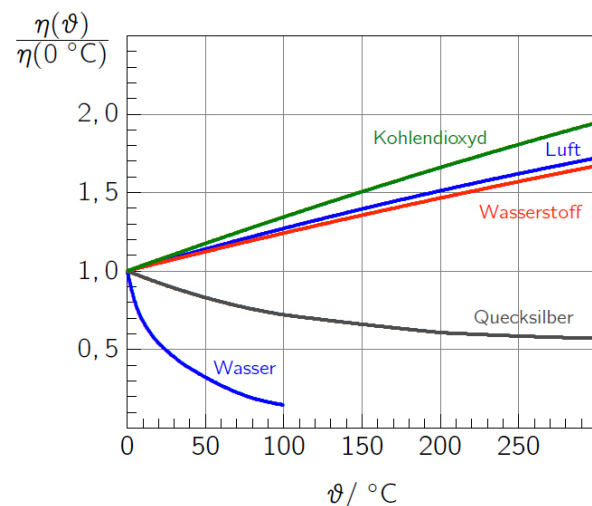


Abb. 3: Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität verschiedener Stoffe bei Normaldruck.

sen die Moleküle ihren Ort wechseln, wozu eine gewisse *Aktivierungsenergie* (*Platzwechselenergie*) nötig ist. Dabei gilt näherungsweise ein nach Svante Arrhenius (1859–1927)³⁾ benanntes Gesetz,

$$\eta(T) = \eta_{\infty} \cdot \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right) \quad (2)$$

Darin ist $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/ K die Boltzmannkonstante. Für wachsende Werte der (absoluten) Temperatur T nähert sich die Viskosität der Konstante η_{∞} , welche vom Stoff abhängt und im Allgemeinen recht klein gegenüber der Viskosität bei Zimmertemperatur ist. Im Temperaturbereich (15...80) °C gelten für Wasser die Näherungen,

$$\begin{aligned} \eta_{\infty} &\approx 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s} , \\ E_a/k &\approx 1840 \text{ K} . \end{aligned} \quad (3)$$

1.2 Turbulenz

Stromfaden: Den Weg eines Fluidteilchens nennt man *Stromfaden*. Bei laminaren Strömungen bewegen sich alle Fluidteilchen auf bestimmten glatten Flächen (Lamellen) mit gleicher Geschwindigkeit, ohne diese Flächen zu verlassen. Benachbarte Stromfäden sind hier parallel.

Wenn sich die Geschwindigkeit pro Längeneinheit und senkrecht zu den Flächennormalen stark genug ändert, können Fluidteilchen zwischen den ursprünglichen Lamellen wechseln und somit ihre Geschwindigkeit ändern. Die Strömung ist dann nicht länger laminar sondern turbulent. Hier kommt es zu Verwirbelungen (*Turbulenz*) im Fluid. Das Geschwindigkeitsfeld von turbulenten Strömungen ist mathematisch schwierig zu beschreiben. Anfangs eng benachbarte Fluidteilchen können sich hier im zeitlichen Mittel exponentiell schnell voneinander entfernen. Die Stromfäden sind in der Regel kompliziert verwickelt. Schon bei kleinsten Änderungen der Anfangslage eines Fluidteilchens bewegt es sich in der Regel schon nach kurzer Zeit entlang eines deutlich anderen Stromfadens mit veränderlichen Geschwindigkeiten — die Bewegung ist instabil und wird *chaotisch* genannt.⁴⁾

³⁾Nobelpreis für Chemie im Jahre 1903 für Arbeiten zur Reaktionskinetik.

⁴⁾Turbulenzen sind in diversen strömungstechnischen Anlagen von großer Bedeutung. Einige Beispiele finden sich im Anhang A.2, S. 16.

Reynoldszahl: Zur Charakterisierung der Strömung eines Fluids der Massedichte ρ und der Viskosität η hinsichtlich ihres laminaren oder turbulenten Verhaltens hat *Osborne Reynolds* (1842–1912) eine nach ihm benannte dimensionslose Kennzahl eingeführt,

$$\text{Re} \equiv \frac{vl}{\nu} \quad (4)$$

Darin sind v und l eine charakteristische Strömungsgeschwindigkeit bzw. Länge, welche für jede Strömungsart gesondert festzulegen sind.⁵⁾ Die Größe ν nennt man *kinematische Viskosität*. Man erhält sie, indem man die dynamische Viskosität η auf die Massedichte ρ bezieht,

$$\nu \equiv \frac{\eta}{\rho} , \quad [\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} .$$

Die physikalische Bedeutung der Reynoldszahl (4) erschließt sich, wenn man sie umschreibt. Mit der Erweiterung νl^2 folgt,

$$\text{Re} = \frac{vl\rho}{\eta} = \frac{v^2 l^3 \rho}{\eta \nu l^2} .$$

Bezeichnet $m = \rho l^3$ die Fluidmasse im charakteristischen Volumen l^3 , und ist $A = l^2$ die charakteristische Fläche für die innere Reibung, so folgt weiter,

$$\text{Re} = \frac{mv^2}{\eta A(v/l) \cdot l} = \frac{2W_{\text{kin}}}{W_{\text{R}}} . \quad (5)$$

Darin bezeichnen $W_{\text{kin}} = mv^2/2$ die kinetische Energie des charakteristischen Masselements m und $W_{\text{R}} \equiv F_{\text{R}} \cdot l$ die Reibungsarbeit der Kraft $F_{\text{R}} = \eta A(v/l)$ entlang der charakteristischen Länge l . In diesem Sinne ist die Reynoldszahl ein Maß für das Verhältnis aus der Bewegungsenergie der trägen Masse m und der Reibungsarbeit.

Für eine bestimmte Strömungssituation, die zum einen vom Fluid und zum anderen von der Geometrie (Strömungsführung und Körperform) abhängig ist, kann nun ein kritischer Wert Re_c ermittelt werden, dessen Überschreitung zu Turbulenzen führen kann. Folglich muß man bei Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit $\text{Re}_c \cdot \nu/l$ damit rechnen, dass eine zunächst laminare Strömung instabil wird und turbulente Verwirbelungen eintreten.⁶⁾

⁵⁾Bei Strömungskörpern wie beispielsweise Brückenpfeilern in einem Fluss oder einem Flugzeugflügel wird für l in der Regel die Körperlänge in Strömungsrichtung gesetzt und bei Rohrströmungen der Rohrdurchmesser oder –radius. Bei Gerinnen (z. B. das Bett eines Wasserlaufs) setzt man für l die (größte) Fluidtiefe oder die Breite der Fluidoberfläche.

⁶⁾Bei der Entwicklung von technischen Großgeräten, wie

2 Rohrströmung inkompressibler Fluide

2.1 Reynoldszahl

Zur Definition der Reynoldszahl (4) setzt man bei der Rohrströmung als charakteristische Länge l den Rohrradius R und als Fluidgeschwindigkeit v die mittlere Geschwindigkeit (10),

$$\text{Re} \equiv \frac{2R\bar{v}}{\nu} = \frac{2J}{\pi R\nu} \quad (6)$$

Dies geht über in Gl. (5) mit den folgenden Entsprechungen für die charakterischen Größen:

$$\begin{aligned} \text{Länge: } l &\hat{=} 2R \\ \text{Fläche: } A &\hat{=} (2R)^2 \\ \text{Geschwindigkeit: } v &\hat{=} \bar{v} \\ \text{Masse: } m &\hat{=} \rho(2R)^3 \end{aligned}$$

Für die kritische Reynoldszahl einer Rohrströmung findet man experimentell den Wert,⁷⁾

$$\text{Re}_c = 2040 \pm 10 \quad (7)$$

Würde man in einem Experiment mit einer laminaren Strömung starten und sukzessive den Wert von Re erhöhen, so muss man für $\text{Re} \gtrsim \text{Re}_c$ mit dem Umschlag in eine turbulente Strömung rechnen. Man kann den Umschlagspunkt jedoch nur näherungsweise vorhersagen.⁸⁾

Schiffen und Flugkörpern, verwendet man in Strömungsexperimenten oftmals deutlich kleinere Modelle. Damit diese die gleichen Strömungseigenschaften zeigen, müssen die Reynoldszahlen gleich sein. Ist beispielsweise die charakteristische Länge l des Großgerätes im Modell um den Faktor $\epsilon < 1$ verringert, so muss dies im Experiment durch Vergrößerung des Terms v/ν um den Faktor $\epsilon^{-1} > 1$ ausgeglichen werden. Dies kann durch eine entsprechende Vergrößerung der Geschwindigkeit v geschehen oder auch eine Verringerung der kinematischen Viskosität ν des Fluids, was wiederum durch eine kleinere dynamische Viskosität η oder größere Massedichte ρ des Fluids möglich ist.

⁷⁾Der hier angegebene Wert für Re_c bezieht sich auf die Arbeit *Onset of Turbulence in Pipe Flow* von K. Auila u.a. in *Science* **333**(2011)192–196. In der Literatur findet man auch andere, leicht abweichende Werte. Unterschiede ergeben sich auch daraus, dass Re_c nicht einheitlich definiert wird.

⁸⁾Experimentell beobachtet man zuweilen eine deutliche Verzögerung des Umschlags in eine turbulente Strömung. Hat man für $\text{Re} > \text{Re}_c$ noch immer eine laminare Strömung, so führen in der Regel kleine Störungen (Erschütterungen) zum

2.2 Laminarer Fall

Geschwindigkeitsprofil: Ein starrwandiges gerades Rohr (Schlauch, Kapillare) habe die Länge L und eine kreisförmige innere Querschnittsfläche, mit dem Innenradius R , Abb. 4. Durch das Rohr ströme ein inkompressibles Fluid mit der dynamischen Viskosität η . Der Fluid-Transport wird durch die Druckdifferenz p zwischen den Rohrenden angetrieben. Man spricht dann von einer *Rohrströmung*. Für hinreichend kleine Werte p bildet sich eine laminare Strömung aus. Das radiale Geschwindigkeitsprofil $v(r)$ eines newtonschen Fluids erhält man wie folgt: Der Betrag der Reibungskraft (1) zwischen zwei benachbarten Fluidschichten auf einer konzentrischen Zylinderoberfläche $A(r) = 2\pi rL$ an der Stelle r ist,

$$F_R(r) = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dr} = \eta \cdot 2\pi rL \cdot \frac{dv}{dr}$$

Ist das Geschwindigkeitsprofil zeitlich konstant, so besteht für einen jeden Abstand r von der Rohrachse ein Kräftegleichgewicht zwischen der Reibungskraft $F_R(r)$, die an der gesamten Zylinderoberfläche A angreift, und der Druckkraft $p \cdot \pi r^2$, die auf der Zylinderdeckfläche πr^2 einwirkt. Folglich gilt für jeden Radius $r = 0 \dots R$,

$$-\eta \cdot 2\pi rL \cdot \frac{dv}{dr} = \pi r^2 \cdot p$$

Dies ist eine Differentialgleichung für das Geschwindigkeitsprofil $v(r)$. Nach Umstellung lautet sie,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p}{2\eta L} \cdot r$$

Die allgemeine Lösung ist,

$$v(r) = -\frac{p}{4\eta L} \cdot r^2 + C$$

Die Integrationskonstante C ergibt sich aus der Randbedingung $v(R) = 0$ zu,

$$C = \frac{p}{4\eta L} \cdot R^2$$

Somit lautet das gesuchte radiale Geschwindigkeitsprofil der laminaren Rohrströmung,

$$v(r) = \frac{p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (8)$$

plötzlichen Umschlag in die Turbulenz. Bei konstanter Re ist dann die spontane Rückkehr zu einer laminaren Strömung wenn nicht unmöglich so doch zumindest sehr unwahrscheinlich. In Computersimulationen findet man recht verschiedene periodische wie auch nichtperiodische Strömungsmuster für Werte der Reynoldszahl ober- wie auch unterhalb von Re_c , s.z.B. M. Avila u.a., *PRL* **110**, 224502 (2013).

Die an der Rohrwand ruhende Fluidschicht hält die bewegte Wassersäule (Fluidzylinder mit Radius R und Länge L) mit der Kraft $F_R(R)$ zurück. Die maximale Geschwindigkeit stellt sich auf der Rohrachse ein,

$$v_{\max} = v(r=0) = \frac{\rho R^2}{4\eta L}.$$

Das Profil (8) stellt sich jedoch erst nach einer gewissen Anlaufstrecke ein, die mit L_A (s. Gl.(19), S. 9) nach unten abgeschätzt werden kann.

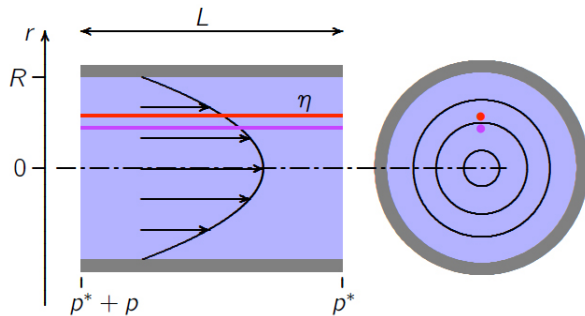


Abb. 4: Laminare Rohrströmung: Ein Rohr mit starren Wänden (Länge L , Innenradius R) ist mit einem Fluid (blau) der dynamischen Viskosität η gefüllt. Fällt über dem Rohr ein nicht zu großer Druck p ab, so bildet das strömende Fluid ein stationäres parabolisches Geschwindigkeitsprofil über dem Rohrquerschnitt aus, das durch Gl. (8) beschrieben wird. Die Fluidteilchen bewegen sich auf achsenparallelen Bahnen, also ohne Querbewegung. Würde man beispielsweise an zwei Punkten auf der Eintrittsfläche in das Rohr die Fluidteilchen einfärben (rechts, rot und violett), so würde man zwei Stromfäden erhalten, die jeweils parallel zur Rohrachse verlaufen (links) und sich demzufolge nicht vermischen. Die laminare Strömung wird deshalb auch *Parallelströmung* genannt.

Druckabfall — Hagen–Poiseuillesches Gesetz:

Gotthilf Hagen (1797–1884) und Jean Poiseuille (1797–1869, sprich: poa:'zœj) haben wie folgt das Fluidvolumen berechnet, welches pro Zeiteinheit den Rohrquerschnitt passiert: Alle Fluidteilchen auf konzentrischen Zylinderoberflächen (Abb. 4, Draufsicht rechts) haben die gleiche Geschwindigkeit $v(r)$. Die infinitesimale Querschnittsfläche der entsprechenden Zylinderoberfläche beträgt, unter Verwendung von Polarkoordinaten,

$$dA = 2\pi r \, dr.$$

In der Zeit dt strömt durch diese Fläche das Volumen dV und es gilt,

$$\frac{dV}{dt} = v(r) \cdot dA = v(r) \cdot 2\pi r \, dr.$$

Die Integration über alle Zylinderoberflächen von $r = 0$ bis R liefert dann das Volumen ΔV , das in der Zeitspanne Δt durch den Rohrquerschnitt strömt. Somit

folgt unter Verwendung von (8) für die Volumenstromstärke $J \equiv \Delta V / \Delta t$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r \, dr \\ &= \frac{\pi \rho}{2\eta L} \cdot \int_0^R r (R^2 - r^2) \, dr \\ &= \frac{\pi \rho}{2\eta L} \cdot \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich das Hagen–Poiseuillesche Gesetz,

$$\rho = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \cdot J \quad (9)$$

Mittelt man die Fluidgeschwindigkeit (8) über die Querschnittsfläche $A = \pi R^2$ des Rohres, so erhält man die mittlere Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{J}{\pi R^2} = \frac{\rho R^2}{8\eta L} = \frac{v_{\max}}{2}. \quad (10)$$

Sie wird in Gl. (6) zur Berechnung der Reynoldszahl einer Rohrströmung verwendet.

Der Faktor

$$G \equiv \frac{\pi R^4}{8\eta L}, \quad [G] = \frac{\text{m}^3}{\text{Pa} \cdot \text{s}}, \quad (11)$$

in (9) kann in Analogie zur Elektrodynamik als Strömungsleitwert und somit G^{-1} als Strömungswiderstand angesehen werden.⁹⁾ Der Leitwert wächst mit der 4-ten Potenz des Rohrradius R . Folglich würde er auf 1/16 des ursprünglichen Wertes fallen, wenn sich der Durchmesser nur halbiert.¹⁰⁾

⁹⁾In Analogie zur Elektrodynamik entsprechen die Volumenstromstärke J und der Druck p der elektrischen Stromstärke I bzw. Spannung U . Somit ist das Hagen–Poiseuillesche Gesetz $J = G \cdot p$ das Analogon zum Ohmschen Gesetz $I = R^{-1} \cdot U$, worin R^{-1} der elektrische Leitwert, wobei hier mit R der ohmsche Widerstand bezeichnet wird. Die elektrische Leistung $P = U \cdot I = U^2 \cdot R^{-1}$ entspricht hier der Größe $p^2 \cdot G$, was auch eine Leistung ist, also in der Einheit $[p^2 \cdot G] = W$ gemessen wird.

¹⁰⁾Dies hat erhebliche Konsequenzen beispielsweise für den menschlichen Blutkreislauf: Eine Verengung eines Blutgefäßes auf den halben Durchmesser müsste durch einen 16-fachen Druck ausgeglichen werden, damit durch das Gefäß pro Zeiteinheit die ursprüngliche Blutmenge fließt. Dies würde den Herzmuskel erheblich stärker belasten. Zu bemerken ist hier aber, dass das Blut keine homogene Flüssigkeit darstellt und somit das Hagen–Poiseuillesche Gesetz nur näherungsweise anwendbar ist, zumal bei sehr engen Gefäßen (Kapillaren). Hinzu kommt, dass ein gesundes Blutgefäß keine starren Wände hat, was die Strömungsverhältnisse ebenso komplizierter macht.

Weicht die Querschnittsfläche von der Kreisform ab, verändert sich die Volumenstromstärke bei sonst gleichen Bedingungen. Für elliptische Flächen, wie sie beispielsweise bei leicht gequetschten Schläuchen auftreten, ist dies im Anhang A.1, S. 16 ausgeführt.

Reynoldszahl und Maximaldruck: Laminare Strömungen erwartet man für hinreichend kleine Werte der Reynoldszahl ($Re < Re_c$). Ersetzt man in (6) die Volumenstromstärke J entsprechend dem Hagen–Poiseuilleschen Gesetz (9), so erhält man für die Reynoldszahl einer laminaren Rohrströmung,

$$Re = \frac{2J}{\pi R \nu} = \frac{R^3 \rho}{4 \eta \nu L} \quad (12)$$

Die Bedingung für Laminarität lautet dann,

$$p < p_{\max, Re} \equiv 4 \nu \eta \cdot \frac{L}{R^3} \cdot Re_c \quad (13)$$

Besteht das Fluid beispielsweise aus Wasser, so erhält man unter Normalbedingungen (Druck ≈ 1 bar, Temperatur ≈ 20 °C),

$$p_{\max, Re} = 8,20(5) \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{L}{R^3} \quad .$$

Wird bei einem gegebenen Geometriefaktor L/R^3 der Druck p so lange erhöht, bis die Strömung turbulent wird ($p > p_{\max}$), so ist das Hagen–Poiseuillesche Gesetz nicht länger anwendbar. Die Volumenstromstärke J verringert sich dann abrupt und der Strömungswiderstand wächst. Die Wegstrecke, welche ein Volumenement des Fluids bei der Rohrpassage zurücklegt, ist dann nicht mehr durch die Rohrlänge L gegeben. Durch die Wirbel ist dieser Weg nun in der Regel deutlich größer, was höhere Reibungsverluste bedingt. Für das Experiment folgt daraus, dass die Viskosität bei einer turbulenten Strömung nicht aus der Messung der Größen J und p sowie der geometrischen Größen L und R nach dem Hagen–Poiseuilleschen Gesetz bestimmt werden kann.

Reibungsarbeit und Maximaldruck: Bei der Ableitung des Hagen–Poiseuilleschen Gesetzes wurde vom parabolischen Geschwindigkeitsprofil (8) ausgegangen. Damit sich dieses Profil vollständig ausbilden kann, muss hinreichend viel Energie zur Verfügung stehen. Dazu muss der Druckabfall p über der Rohrlänge L klein genug sein, was zunächst paradox erscheint, die folgende Betrachtung jedoch zeigt.

Die Fluidmasse in einem konzentrischen Hohlzylinder mit der Rohrlänge L , dem Radius r und der (infinitesimal kleinen) Dicke dr beträgt,

$$dm = \rho \cdot L \cdot 2\pi r \, dr \quad .$$

Mit dem parabolischen Geschwindigkeitsprofil (8) folgt für die kinetische Energie,

$$\begin{aligned} dE_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} v^2 \, dm \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\rho \cdot (R^2 - r^2)}{4\eta L} \right)^2 \rho \cdot L \cdot 2\pi r \, dr \\ &= \frac{\pi \rho^2}{16\eta \nu L} (R^4 r - 2R^2 r^3 + r^5) \, dr \quad . \end{aligned}$$

Die Integration über alle Radien $r = 0 \dots R$ liefert die gesamte kinetische Energie der Flüssigkeitssäule im Rohr,

$$E_{\text{kin}} = \int_0^R dE_{\text{kin}}(r) = \frac{\pi \rho^2}{16\eta \nu L} \cdot \frac{R^6}{6} \quad (14)$$

Mit der gesamten Fluidmasse im Rohr, $m = \pi R^2 L \rho$, und der mittleren Geschwindigkeit (10) gilt,

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot \bar{v}^2 = \frac{m}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \bar{v}^2 \quad .$$

Unter Beachtung von (10) erhält man,

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{\pi R^2 L \rho}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{J}{\pi R^2} \right)^2 \\ &= \frac{2L\rho J^2}{3\pi R^2} \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

Durch den Druck $p = F_R/\pi R^2$ wird am gesamten Fluidvolumen, das sich im Rohr der Länge L befindet, die Arbeit

$$W_{\text{reib}} = F_R \cdot L = \pi R^2 \cdot p \cdot L \quad (16)$$

verrichtet. Mit dem Strömungsleitwert (11) gilt,

$$\frac{W_{\text{reib}}}{\Delta t} = G \cdot p^2 = J \cdot p = \frac{\Delta V \cdot p}{\Delta t} \quad .$$

Dies ist die Reibungsleistung, also die Reibungsarbeit, welche am Fluid im Innenvolumen $\Delta V = \pi R^2 L$ des Rohres während der Durchströmungszeit Δt geleistet wird.¹¹⁾ Die Energiemenge W_{reib} erwärmt die Fluidmasse im Rohr. Nur wenn

$$W_{\text{reib}} > E_{\text{kin}} \quad (17)$$

¹¹⁾In der Elektrodynamik lautet der zu $W_{\text{reib}}/\Delta t = G \cdot p^2$ analoge Ausdruck $P = R^{-1} \cdot U^2$. Das ist die elektrische Leistung, also die elektrische Energie, welche pro Zeiteinheit im Widerstand R in Wärme umgesetzt wird.

gilt, ist die geleistete Arbeit groß genug, damit sich das volle Geschwindigkeitsprofil (8) einstellen kann, welches der kinetischen Energie E_{kin} entspricht. Setzt man hier die Werte gemäß (14) bzw. (15) und (16) ein, so geht die Bedingung (17) über in,

$$\frac{W_{\text{reib}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{3\rho}{2\rho} \left(\frac{\pi R^2}{J} \right)^2 = \frac{24L}{\text{Re} \cdot R} > 1 \quad (18)$$

Dies ist für eine hinreichend große Rohrlänge erfüllt,

$$L > L_A \equiv \frac{R}{24} \cdot \text{Re} \quad (19)$$

Erst nach der sogenannten *Anlaufstrecke* L_A kann sich das Geschwindigkeitsprofil (8) aufbauen. Am Einlauf ist das Geschwindigkeitsprofil zunächst nahezu konstant.

Aus (18) folgt eine weitere obere Grenze für den zulässigen Druckabfall,

$$p < p_{\text{max},W} \equiv 4\nu\eta \cdot \frac{L}{R^3} \cdot \frac{24L}{R} \quad (20)$$

Ist die Bedingung (13) für laminare Strömungen schon erfüllt, dann trifft dies auch für (20) zu, sofern

$$\frac{L}{R} > \frac{\text{Re}_c}{24} \approx 85 \quad (21)$$

gilt.

2.3 Allgemeiner Fall (laminar oder turbulent)

Hydraulischer Verlust — Basisgleichung: In turbulenten Strömungen wird der Strömungswiderstand nicht allein durch die Zähigkeit des Fluids sondern auch durch die Rauigkeit k der Rohrwand bestimmt (Einheit: $[k] = \text{m}$). Für große Werte der Reynoldszahl wird die Rauigkeit gegenüber der Zähigkeit immer bedeutsamer. Dies ist beispielsweise der Fall in den Rohrleitungen von großen Wasserkraftwerken oder in Wasserleitungen, bei denen nach längerem Gebrauch die Rauigkeit durch Ablagerungen zunimmt. Turbulent ist die Strömung beispielsweise auch in einigen Abschnitten des menschlichen Gefäßsystems (s. Anhang A.2, S. 16).

Der Druckabfall p (auch: *Druckverlust* oder *hydraulischer Verlust*) eines strömenden Fluids (Massedichte ρ , Volumenstromstärke J) in einem geraden Rohr

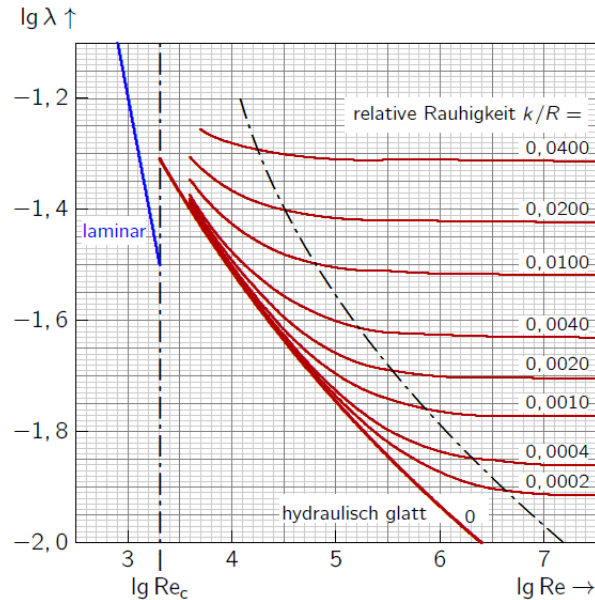


Abb. 5: Moody-Diagramm: Abhängigkeit des Reibungsbeiwertes λ von der Reynoldszahl Re bei der Fluidströmung in Rohren des Radius R mit der Wandrauigkeit k . Im laminaren Fall (blau) spielt k keine Rolle, sondern allein die Viskosität, welche in Re eingeht. Im stark turbulenten Fall (rot, oberhalb der gestrichelten Linie) verhält es sich umgekehrt. Im Bereich $\text{Re} = \text{Re}_c \dots 10\text{Re}_c$ ist der Zusammenhang zwischen λ und Re schwierig zu quantifizieren, weil die Strömung hier nicht sicher als laminar oder turbulent zu beschreiben ist.

(Radius R , Länge L) wird allgemein (laminar oder turbulent) durch die Basisgleichung

$$p = \frac{\lambda L \rho}{4\pi^2 R^5} \cdot J^2 \quad (22)$$

beschrieben. Die Zahl λ wird *Rohrreibungsbeiwert* genannt. Dieser Wert ist abhängig von der Reynoldszahl und von der relativen Rauigkeit k/R des Rohres, Abb. 5.

Führt man in (22) anstelle von J unter Beachtung von (10) die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ein, so folgt,

$$p = \lambda \cdot \frac{L}{2R} \cdot \frac{\rho}{2} \bar{v}^2$$

Den hier enthaltenen Term $\rho \bar{v}^2 / 2$ nennt man *Staudruck*.

Im turbulenten Fall liest man den Reibungsbeiwert aus dem nach Lewis Ferry Moody (1880–1953) benannten Diagramm ab, Abb. 5. Die Angaben im turbulenten Bereich sind empirisch gewonnen. Einige typische Werte für Rauigkeiten sind in Tab. 2 aufgeführt.

Tab. 2: Rauigkeit k der Innenwand von Rohren aus verschiedenen Materialien.

| Rohrmaterial | Rauigkeit k / mm |
|------------------|--------------------|
| Stahl, neu | 0,04 ... 0,10 |
| neu verzinkt | 0,07 ... 0,10 |
| stark verkrustet | 1,00 ... 3,00 |
| Beton, glatt | 0,10 ... 0,50 |
| rau | 1,20 ... 3,00 |
| Glas, neu | 0,001 ... 0,002 |
| Kunststoff, neu | 0,002 ... 0,007 |
| gebraucht | 0,010 ... 0,030 |

Nach (6) ergibt sich die Reynoldszahl aus drei Werten,

$$\text{Re} = \text{Re}(J, R, \nu) .$$

Folglich muss der Reibungsbeiwert im Allgemeinen als Funktion von vier Größen aufgefasst werden,

$$\lambda = \lambda(J, R, k, \nu) .$$

Im laminaren Fall gilt,

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} . \quad (23)$$

Mit der Reynoldszahl (6) und der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v} = J/(\pi R^2)$ erhält man,

$$\lambda = \frac{64\nu}{2R\bar{v}} = \frac{32\pi\nu R}{J} .$$

Hier spielt also die Rauigkeit keine Rolle. In diesem Spezialfall geht die Basisgleichung (22) in das Hagen–Poiseuillesche Gesetz(9) über.

Im stark turbulenten Fall (in Abb. 5 oberhalb der gestrichelten Hilfslinie) ist λ nur noch von der relativen Rauigkeit k/R abhängig. Die Viskosität, welche in die Reynoldszahl eingeht, spielt hier kaum noch eine Rolle. λ kann dann mit der Näherungsformel

$$\lg \lambda \approx -2 \lg \left[2 \lg \frac{7,42R}{k} \right]$$

berechnet werden.¹²⁾

¹²⁾Für die verschiedenen Abschnitte im Moody–Diagramm gibt es in der einschlägigen Literatur eine Vielzahl weiterer Näherungsformeln.

Den Grenzfall $k/R \rightarrow 0$ nennt man *hydraulisch glatt*. Die Kurvenschar im Moody–Diagramm strebt im turbulenten Bereich gegen eine Grenzkurve, auf welcher die Gleichheit¹³⁾

$$\sqrt{\lambda} = \left[2 \lg(\sqrt{\lambda} \cdot \text{Re}) - 0,8 \right]^{-1} \quad (24)$$

erfüllt ist.

Aus (22) folgt

$$B \equiv \frac{p}{J^2} = \frac{\lambda L \rho}{4\pi^2 R^5} . \quad (25)$$

Dieser Quotient wird *Widerstandsbeiwert* genannt (Einheit: $[B] = \text{kg/m}^7$). Im Fall laminarer Strömungen erhält man unter Verwendung von (11),

$$B = \frac{1}{JG} = \frac{1}{\rho G^2} , \quad (26)$$

was dem Hagen–Poiseuilleschen Gesetz $p = J/G$ entspricht. Auf der Basis der Widerstandsbeiwerte lassen sich die hydraulischen Verluste in den verschiedenen Abschnitten eines verzweigten Rohrsystems berechnen.

¹³⁾Gleichung (24) kann nicht explizit nach λ aufgelöst werden. Die Berechnung erfolgt deshalb iterativ. (nach: Bernd Glück *Hydrodynamische und Gasdynamische Rohrströmung* VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1988, S.52.)

3 Versuchsdurchführung

3.1 Geräte und Vorgehensweise

Den Versuchsaufbau zeigt Abb. 6. Es stehen fünf Schläuche (Rohre) zur Verfügung:

| Schlauchlänge L / mm | Radius R / mm |
|------------------------|-----------------|
| ≈ 600 | 1 |
| ≈ 1000 | 1 |
| ≈ 2000 | 1 |
| ≈ 1000 | 0,5 |
| ≈ 1000 | 1,5 |

Die konkreten Schlauchlängen sind auszumessen.



Abb. 6: Geräte zur Versuchsdurchführung: Stativ mit oberen und unteren Messbecher, diverse Schläuche, Ansaugspritze, Stoppuhr und Stahllineal.

Das Wasser befindet sich in zwei Bechern. Der höher gelegene (kleinere) Becher ist auf einer höhenverstellbaren Halterung an einem Stativ platziert.

Zu Beginn einer Messung wird der obere Becher mit einer hinreichend großen Menge Leitungswasser gefüllt und der verwendete Schlauch in den Schlauchhalter eingefädelt. Zum Ansaugen des Wassers steht eine Spritze (Zylinder mit Kolben) zur Verfügung. Nach dem Ansaugen wird der nun schon Wasser leitende Schlauch in den Schlauchhalter des unteren Bechers eingefädelt. Während der gesamten Messzeit müssen die Schlauchenden möglichst zentrisch im Wasservolumen der entsprechenden Becher eingetaucht bleiben.

Die Zeitmessung beginnt, wenn der obere Wasserpegel eine zu wählende Marke auf der Messskala am oberen Becher passiert. Sie endet, wenn $\Delta V = 100$ ml Wasser abgeflossen sind.

Zu Beginn und Ende der Messzeit ist der jeweilige Höhenunterschied $h(0)$ und $h(\Delta t)$ zwischen der oberen und unteren Wasseroberfläche zu messen. Dazu dient ein 1-Meter-Stahllineal.

Die Temperatur des Wassers im oberen Becher ist mit einem Flüssigkeitsthermometer zu ermitteln. Zur Erwärmung des Wassers steht ein elektrischer Wasserkocher zur Verfügung (nicht gezeigt im Bild).

3.2 Druck

Im Experiment fließt das Wasser im Gravitationsfeld der Erde, mit der Erdbeschleunigung

$$g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (27)$$

aus einem oberen Reservoir in ein unteres, Abb. 7. Die Druckdifferenz p zwischen den Schlauchenden ergibt sich wie folgt aus der Höhendifferenz h der Reservoirs:

Das obere Schlauchende ragt in die Flüssigkeit, wodurch sich der Druck am Schlauchende um den Tiefendruck gegenüber dem Luftdruck erhöht. In gleichem Maße steigt jedoch der Druck im Inneren des Schlauches vom Schlauchanfang bis zur Höhe h_o . Folglich stellt sich im Inneren des Schlauches auf der Höhe h_o der äußere Luftdruck ein.

Im absteigenden Abschnitt zwischen den Höhen h_o und h_u befindet sich eine Wassersäule, deren Hang-

abtriebskraft die Strömung antreibt. Zu deren Berechnung betrachtet man einen kleinen Abschnitt des (im Allgemeinen gekrümmten) Schlauches der Länge dL . Dieser Abschnitt sei um den Winkel α gegenüber dem Lot geneigt (Abb. 7, unten). Bezeichnen A die innere Querschnittsfläche und ρ die Fluiddichte, dann ist

$$dm = \rho A \cdot dL$$

das dort enthaltene Masselement, auf das die Hangabtriebskraft $\rho g A \cdot dL \cdot \cos \alpha$ wirkt. Der Schlauchabschnitt überwindet den Höhenunterschied

$$dh = dL \cdot \cos \alpha .$$

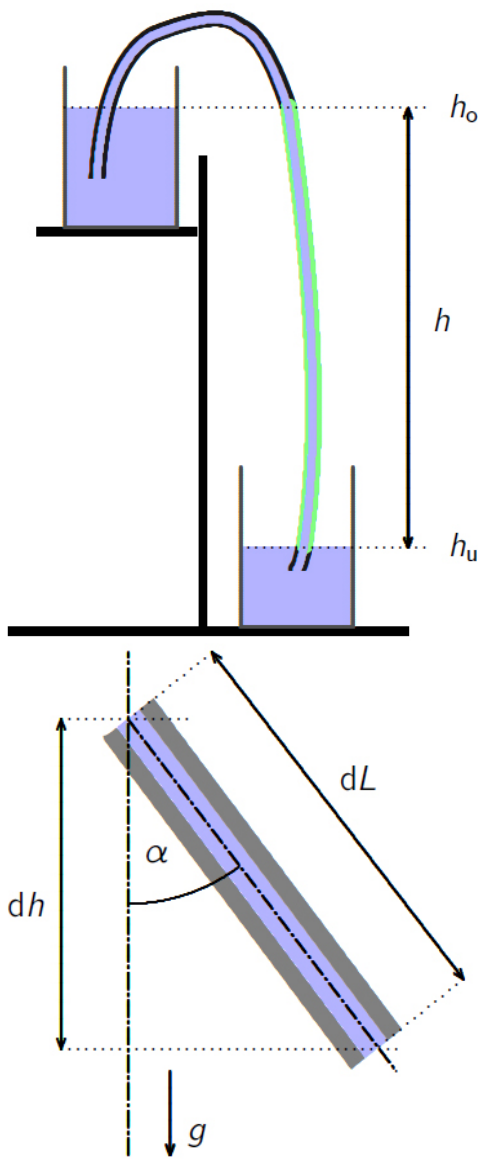


Abb. 7: Versuchsaufbau, schematisch (s. Text).

Folglich hat die gesamte Hangabtriebskraft im Bereich zwischen den Höhen h_u und h_o den Wert

$$\rho g A \cdot h .$$

Dabei ist die Krümmung des Schlauchs irrelevant, es zählt allein der Höhenunterschied h . Ist er beispielsweise zwischen den Höhenmarken h_u und h_o stärker gewunden, so vergrößert sich seine Länge und somit auch das enthaltene Fluidgewicht. In gleichem Maße nimmt jedoch auch die Hangabtriebskraft ab, weil sich die Neigungswinkel entsprechend ändern. Dies erklärt auch, dass sich die Hangabtriebskräfte im auf- und absteigenden Bereich des Schlauches oberhalb der Marke h_o kompensieren, nahezu unabhängig davon, wie der Schlauch geführt wird. Somit wird letztlich die Fluidströmung durch den Druckunterschied

$$\rho = \rho \cdot h \cdot g \quad (28)$$

angetrieben. Setzt man dies in (9) ein, so lässt sich das Hagen–Poiseuillesche Gesetz unter Beachtung von $\nu = \eta/\rho$ wie folgt umschreiben,

$$J = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi g}{8} \cdot \frac{R^4 h}{\nu L} \quad (29)$$

3.3 Mittlere Höhe

Während der Messdauer $t = 0 \dots \Delta t$ verringert sich der Höhenunterschied $h_{o,u}(t) = h_o(t) - h_u(t)$ der Fluidoberflächen des unteren und oberen Bechers. Die obere Höhe $h_o(t)$ fällt, die untere Höhe $h_u(t)$ steigt (Abb. 7, oben). In (28) und (29) sowie den folgenden Gleichungen ist für h die mittlere Höhe während der Messzeit Δt zu verwenden,

$$h = \frac{h_{o,u}(0) + h_{o,u}(\Delta t)}{2} . \quad (30)$$

Dies ist gerechtfertigt, weil nach (29) die Volumenstromstärke J nur linear von h abhängt. Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass die Querschnittsfläche eines jeden der beiden Becher im relevanten Höhenbereich konstant ist. Diese beiden Querschnittsflächen müssen aber nicht gleich groß sein.

3.4 Messabweichungen

Die gesuchte Viskosität ν berechnet sich durch Umstellung von (29) aus den Größen L , R , h und $J = \Delta V / \Delta t$,

$$\nu = \frac{\pi g}{8} \cdot \frac{R^4 h}{JL} \quad (31)$$

Die Messgrößen haben eine gewisse Größtabweichung ΔL , ΔR , Δh bzw. ΔJ . Diese pflanzen sich über die Berechnung nach (31) auf ν fort. Nach den Regeln der linearen Größtfehlerfortpflanzung gilt,

$$\Delta \nu = \left| \frac{\partial \nu}{\partial R} \right| \cdot \Delta R + \left| \frac{\partial \nu}{\partial h} \right| \cdot \Delta h + \left| \frac{\partial \nu}{\partial L} \right| \cdot \Delta L + \left| \frac{\partial \nu}{\partial J} \right| \cdot \Delta J .$$

Daraus folgt für die relativen Messabweichungen,

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = 4 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta J}{J} . \quad (32)$$

Die Radien der im Experiment verwendeten Schläuche sind recht klein und man kann sie mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln nicht genau nachmessen. Die entsprechenden maximalen relativen Messabweichungen muss man mit

$$\Delta R/R \lesssim 0,05 \quad (33)$$

als vergleichsweise groß schätzen, weil es sich nicht um Präzisionsrohre handelt. Zudem geht diese Abweichung mit dem 4-fachen Gewicht in (32) ein. Darüber hinaus können geringfügige Verformungen des Rohrquerschnitts Abweichungen von bis zu 4% verursachen (s. Anhang A.1, S. 16). Dagegen sind die relativen Messabweichungen der anderen Größen L , h und J gering, sofern $L \gg R$ und $h \gg R$ gelten. Plausible Werte sind

$$\Delta L/L \lesssim 0,01 \quad \text{und} \quad \Delta h/h \lesssim 0,02 . \quad (34)$$

Geht man davon aus, dass das in der Zeit Δt abgeflossene Fluidvolumen die maximale Abweichung von $\approx 0,005$ Liter vom verwendeten Wert $\Delta V = 0,100$ Liter hat, so folgt für die relative Abweichung der Volumenstromstärke,

$$\Delta J/J \approx 0,05 . \quad (35)$$

Für die Erdbeschleunigung kann man mit dem Wert in (27) rechnen, dessen Abweichung vom tatsächlichen Wert ist angesichts der anderen Messabweichungen vernachlässigbar.

Schließlich folgt für die relative Messabweichung der Viskosität aus einer einzelnen Messreihe,

$$\Delta \nu / \nu \approx 0,28 \quad (36)$$

Dieser recht große Wert ergibt sich also vor allem aus der systematischen Messabweichung des Rohrradius. Allerdings kann hier nichts über das Vorzeichen dieser Abweichung gesagt werden, da der Radius nicht genau genug gemessen werden kann. Die zufälligen Messabweichungen bei Mittelung über viele Messreihen sind jedoch bei sorgsamer Vorgehensweise deutlich kleiner.

3.5 Reynoldszahl und Maximalhöhe

Ersetzt man in (6) die Volumenstromstärke J entsprechend (29), so folgt für die Reynoldszahl ,

$$\text{Re} = \frac{gR^3 h}{4\nu^2 L} \quad (37)$$

Die Bedingung (13) für laminare Rohrströmungen wird im Experiment unter Beachtung von (28) für Höhen

$$h < \frac{4\nu^2 L}{gR^3} \cdot \text{Re}_c \quad (38)$$

erfüllt. Zur Prüfung dieser Bedingung muss man die Viskosität ν des Fluids kennen, man möchte sie jedoch im Experiment erst ermitteln. Dieses prozedurale Dilemma kann gelöst werden, indem man viele Messreihen bei sukzessiver Vergrößerung der Höhe gewinnt, beginnend mit möglichst kleinen Werten. Für alle hinreichend kleinen Höhen sind dann die erhaltenen Werte der Viskosität im Rahmen der zufälligen Schwankungen gleich. Beim Umschlag in die Turbulenz würde der formal berechnete Wert der Viskosität deutlich angehoben werden und mit wachsender Höhe steigen, wenn auch nicht notwendig streng monoton. Diese deutlich größeren Werte beschreiben nicht länger die Viskosität des Fluids, weil das Hagen-Poiseuillesche Gesetz hier nicht länger anwendbar ist. Diese aufwändige Untersuchung soll hier jedoch nicht ausgeführt werden. Deshalb sind die Literaturwerte ν_{Lit} der Viskosität in der Abb. 2 angegeben, so dass die Bedingung (38) für eine jede Messreihe überprüft werden kann, wobei zur Berechnung der Reynoldszahl nach (37) $\nu = \nu_{\text{Lit}}$ zu setzen ist.

Offenbar gilt im Experiment immer $h < L$. Folglich ist

$$R < \left(\frac{4\nu^2}{g} \cdot \text{Re}_c \right)^{1/3}$$

hinreichend, um auch (38) zu erfüllen, also Turbulenzen auszuschließen. Für Wasser unter Normalbedingungen (Druck ≈ 1 bar, Temperatur ≈ 20 °C) bedeutet dies,

$$R < 0,94 \text{ mm} .$$

Dies ist jedoch insbesondere für den Schlauch mit $R = 1,5$ mm und $L = 1$ m nicht erfüllt. Folglich muss hier darauf geachtet werden, dass die Höhe h klein genug gewählt wird. Für Wasser unter Normalbedingungen muss nach (38)

$$h \lesssim 0,25 \text{ m}$$

erfüllt sein. Bei höheren Temperaturen sinkt die Viskosität, weshalb hier die Höhe noch kleiner gewählt werden muss. So fällt beispielsweise ν bei Erwärmung von Normaltemperatur 20 °C auf 60 °C um etwa die Hälfte (s.Abb. 2). Somit muss für die Höhe

$$h \lesssim \frac{1}{4} \cdot 0,25 \text{ m} \approx 0,08 \text{ m}$$

gelten, um Turbulenzen auszuschließen.

Wie oben dargelegt, ist die Bedingung (21) hinreichend zur Erfüllung von (20), sofern schon (13) oder dazu äquivalent (38) erfüllt ist. Für alle verwendeten Schläuche gilt

$$L > 85 \cdot R .$$

Folglich langt es in diesem Experiment, allein noch die Bedingung

$$\boxed{\frac{\text{Re}}{\text{Re}_c} < 1} \quad (39)$$

für laminare Strömungen zu prüfen.

Das Verhältnis (18) aus Reibungsarbeit und kinetischer Energie bei laminarer Strömung geht unter Beachtung von (28) über in,

$$\boxed{\frac{W_{\text{reib}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{3gh}{2} \left(\frac{\pi R^2 \cdot \Delta t}{\Delta V} \right)^2} \quad (40)$$

3.6 Aktivierungsenergie

Hat man die kinetische Viskosität ν von flüssigem Wasser für verschiedene Temperaturen T gemessen, so folgt daraus die dynamische Viskosität nach

$$\eta(T) = \rho(T) \cdot \nu(T) . \quad (41)$$

Die Massedichte ρ bei der Temperatur T kann der Abb. 8 entnommen werden.

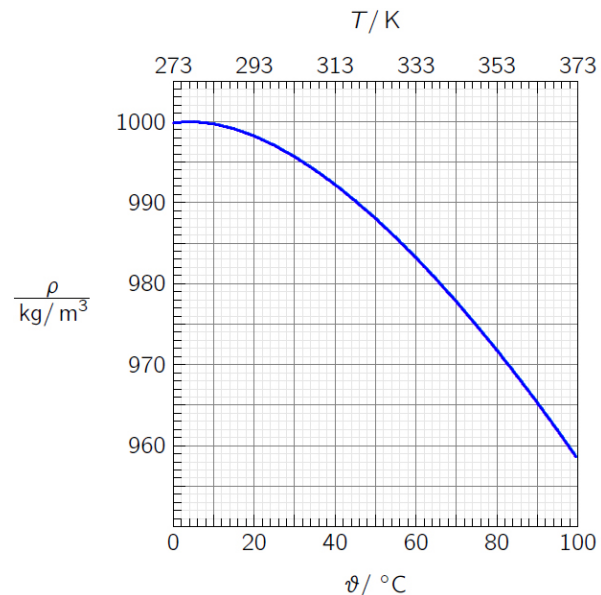


Abb. 8: Temperaturabhängigkeit der Dichte von Wasser bei Normaldruck.

Aus dem Arrhenius-Gesetz (2) erhält man nach leichter Umformung,

$$\ln \left(\frac{\eta(T)}{\text{Pa} \cdot \text{s}} \right) = \ln \left(\frac{\eta_\infty}{\text{Pa} \cdot \text{s}} \right) + \frac{E_a}{k} \cdot \frac{1}{T} .$$

Zwischen den Termen

$$y \equiv \ln \left(\frac{\eta(T)}{\text{Pa} \cdot \text{s}} \right) \quad \text{und} \quad x \equiv \frac{1}{T}$$

besteht also ein linearer Zusammenhang. Hat man nun die Messwertepaare (x, y) für mehrere Temperaturen ermittelt, so erhält man aus dem Anstieg b der entsprechenden Regressionsgerade $y = a + bx$ die gesuchte Aktivierungsenergie,

$$E_a = b \cdot k .$$

Die Viskositätskonstante ergibt sich aus dem absoluten Glied a der Regressionsgeraden,

$$\eta_\infty = e^a \cdot \text{Pa} \cdot \text{s} .$$

Die relativen Messabweichungen ΔE_a und $\Delta \eta_\infty$ folgen aus den entsprechenden Abweichungen Δa und Δb der Regressionsparameter. Im Sinne der Größtfehlerfortpflanzung (wie auch der gaußschen Regel) gilt,

$$\Delta E_a = \left| \frac{\partial E_a}{\partial b} \right| \cdot \Delta b = k \cdot \Delta b$$

$$\Delta \eta_\infty = \left| \frac{\partial \eta_\infty}{\partial a} \right| \cdot \Delta a = e^a \cdot Pa \cdot s \cdot \Delta a$$

und folglich,

$$\frac{\Delta E_a}{E_a} = \frac{\Delta b}{b} \quad (42)$$

$$\frac{\Delta \eta_\infty}{\eta_\infty} = \Delta a \quad (43)$$

3.7 Reibungsbeiwert für eine turbulente Rohrströmung

Ersetzt man in der Basisgleichung (22) den Druck p entsprechend (28), so erhält man nach leichter Umstellung den Reibungsbeiwert aus,

$$\lambda = \frac{4g\pi^2 R^5 h}{LJ^2} \quad (44)$$

Die Reynoldszahl berechnet man nach (37), wobei die kinematische Viskosität ν für die gewählte Temperatur aus Abb. 2 abzulesen ist.¹⁴⁾ Nach den Regeln der linearen Größtfehlerfortpflanzung folgt für die relativen Messabweichungen unter Beachtung von (33) und (34),

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 5 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta J}{J}$$

$$\approx 0,38 \quad (45)$$

$$\frac{\Delta Re}{Re} = 3 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta L}{L}$$

$$\approx 0,18 \quad (46)$$

Trägt man nun den Punkt

$$(\lg \lambda, \lg Re)$$

in das Moody-Diagramm von Abb. 5 ein, so kann man die relative Rauigkeit k/R näherungsweise ablesen.

¹⁴⁾ Im Falle der Turbulenz kann ν nicht nach (31) berechnet werden, denn diese Gleichung gilt nur für laminare Strömungen.

Offenbar ist dies nur möglich, wenn die Strömung hinreichend turbulent ist, also für

$$\lg Re \gtrsim 3,6 \quad .$$

Im Übergangsbereich zwischen der laminaren und turbulenten Strömung sind die Zusammenhänge unsicher.

Die Intervalle der Messunsicherheit in der logarithmischen Skala sind bei Verwendung der Werte (45) und (46),

$$\lg(\lambda \pm \Delta \lambda)$$

$$= \lg \lambda + \lg(1 \pm \Delta \lambda / \lambda)$$

$$= (\lg \lambda - 0,21) \dots (\lg \lambda + 0,14) \quad (47)$$

$$\lg(Re \pm \Delta Re)$$

$$= \lg Re + \lg(1 \pm \Delta Re / Re)$$

$$= (\lg Re - 0,09) \dots (\lg Re + 0,08) \quad (48)$$

A Anhang

A.1 Laminare Rohrströmung bei elliptischem Querschnitt

Für elliptische Querschnittsflächen, mit den Längen A und B der Hauptachsen, erhält man für die Volumenstromstärke

$$J \equiv \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A^3 \cdot B^3}{64(A^2 + B^2)} \cdot \frac{\pi}{\eta L} \cdot p \quad (49)$$

Entartet die Ellipse zu einem Kreis, so gelten $2R = A = B$ und

$$\frac{A^3 \cdot B^3}{64(A^2 + B^2)} = \frac{R^4}{8} \quad .$$

Damit geht (49) in das Hagen–Poiseuillesche Gesetz(9) über.

Weicht die Ellipse nur geringfügig von einem Kreis ab, so kann man für die Hauptachsen,

$$A = 2R(1 + \varepsilon) \quad , \quad B = 2R(1 - \varepsilon) \quad (50)$$

setzen, mit $\varepsilon \ll 1$. Dann sind die Querschnittsflächen nahezu unverändert und es gilt,

$$\frac{A^3 \cdot B^3}{64(A^2 + B^2)} = F(\varepsilon) \cdot \frac{R^4}{8} \quad ,$$

mit dem Faktor (s. Abb. 9),

$$F(\varepsilon) \equiv \frac{2(1 + \varepsilon)^3 \cdot (1 - \varepsilon)^3}{(1 + \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon)^2} \quad . \quad (51)$$

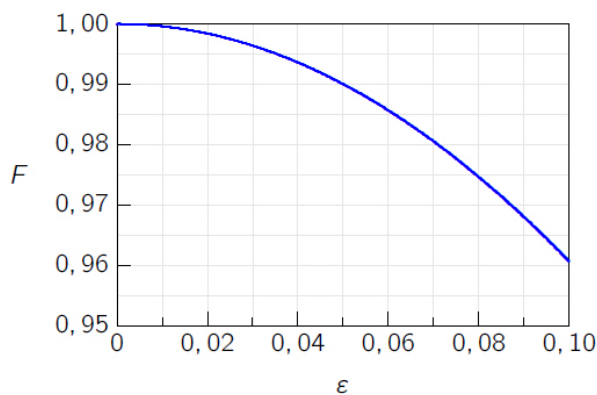


Abb. 9: Schwächungsfaktor des Volumenstroms bei elliptischer Verformung des Rohres, Gl. (51), in Abhängigkeit vom Verformungsparameter ε , s. Gl. (50).

Um diesen Faktor schwächt sich die Volumenstromstärke J ab, wenn die zunächst kreisförmige Querschnittsfläche des Rohres mit dem Radius R in eine elliptische Fläche mit den Hauptachsen (50) überführt wird, wie es beim geringfügigen Zusammendrücken eines Schlauches der Fall ist. Wird beispielsweise ein zunächst runder Schlauch um 10% entlang der Gesamtlänge L gequetscht, gilt also $\varepsilon = 0,1$, so folgt $F \approx 0,96$. Dabei fällt die Volumenstromstärke also auf etwa 96% des ursprünglichen Wertes.

A.2 Turbulenzen in Technik und Natur

Flugzeug: Die Flügel eines Flugzeugs werden im normalen Flugbetrieb von der Luft (nahezu) laminar umströmt. Oberhalb der Flügel ist dann der Weg der Luftteilchen länger als unterhalb, wodurch hier ein größerer Druck als oberhalb wirkt. Dies führt zu einer Auftriebskraft, welche das Gewicht des Flugzeugs kompensiert und somit das Fliegen ermöglicht.

Durch den Überdruck unter dem Flügel strömt unmittelbar jenseits der Flügelspitzen Luft von unten nach oben in den Unterdruckbereich, wobei Luftwirbel entstehen, die dem Flugzeug Energie entziehen. Damit erhöht sich der Strömungswiderstand und somit letztlich der Kerosinverbrauch. Zur Unterdrückung bzw. Minderung dieser unerwünschten Turbulenzen werden heutzutage sogenannte *Winglets* (einseitig nach oben) oder auch *Sharklets* (zweiseitig nach oben und unten) an den Flügelspitzen angebracht, wodurch den Treibstoffverbrauch um 3 bis 5% sinkt.

Dennoch lässt sich die Wirbelbildung hinter Flugzeugen nicht vollständig vermeiden, weshalb in Richtung der Start- und Landebahn von Flughäfen Mindestabstände zwischen den Flugzeugen eingehalten werden müssen, so dass die sogenannten *Wirbelschleppen* abklingen (dissipieren) und somit nachfolgende Flugzeuge keinen Strömungsabriss durch Luftwirbel erleiden.

Beim Landen werden an den Flügeln Klappen ausgefahren, so dass die laminare in eine turbulente Strömung übergeht. Dies ist hier erwünscht, weil dadurch der Auftrieb gemindert oder gar unterdrückt wird. Darüber hinaus wird dadurch der Bremsvorgang unterstützt, ebenso wie durch Bremschirme.

Windpark: Ähnliche Probleme wie bei Flugzeugen bestehen auch in Windparks zur Stromerzeugung. Stehen die Windräder allzu eng, können bei ungünstigen Windrichtungen die in Luv stehenden Räder Wirbelschleppen in Richtung der Lee-Räder verursachen, was hier Strömungsabrisse und damit schlechtere Wirkungsgrade bedingt. Darüber hinaus würden turbulente Luftströmungen die Räder in erratische Schwingungen versetzen und somit die Flügel und Getriebe mechanisch stärker belasten, was die Anlagen schneller verschleiben lässt. Winglets finden sich zunehmend auch an Rotorblättern von Windkraftanlagen, was Wirbelschleppen abschwächt und Rotorblätter schont.

Kraftwerke: In großtechnischen Rohrsystemen sind die Strömungen oftmals turbulent. Beispielsweise tragen sie in Wasserkraftwerken zu Verringerung des Wirkungsgrads bei. Hier erreicht die Reynoldszahl Werte von $> 10^6$.

Tiere: Auch im Tierreich finden sich viele Beispiele für strömungsphysikalisch optimierte Formgebungen. So finden sich beispielsweise bei großen Raubvögeln an den Flügelenden Federn, die den Winglets bei Flugzeugen entsprechen. Eulen haben ein sehr weiches feingliedriges Federkleid, wodurch Turbulenzen und somit Fluggeräusche stark gemindert werden. Die Körperform von Pinguinen, vom Schnabel über den Kopf und Rumpf, sorgt für sehr geringe Strömungswiderstände im Wasser, indem insbesondere große Wirbelstrukturen in den unvermeidbaren Wirbelschleppen unterdrückt werden.

Blutstrom im Menschen: Die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} des Blutstroms in der Aorta (große Körperschlagader, Radius $R \approx 1,25$ cm) hat während der Kontraktion des Herzmuskels (Systole) den Wert $\bar{v} \approx 1,2$ m/s. Mit der kinematischen Viskosität $\nu \approx 3 \cdot 10^{-6}$ m²/s folgt nach (6) die Reynoldszahl ,

$$Re \approx 10^4 > Re_c .$$

Sie übersteigt die kritische Reynoldszahl $Re_c = 2040$ nahezu um das 5-fache, die Strömung ist also turbulent. Die Strömung wird hier durch die Viskosität des Blutes und die Rauigkeit der inneren Gefäßwand bestimmt. Kommt es durch Blutgerinnsel (Thromben) zu lokalen Einengungen des Gefäßes, so steigt die Reynoldszahl in diesem Abschnitt stark an, was das Herz stärker belastet. Elastische Gefäßwände würden

sich weiten und damit den Strömungswiderstand verringern, was allerdings bei Verkalkungen (Atherosklerose) nur noch eingeschränkt möglich ist. Mit blutverdünnenden Medikamenten kann die Viskosität des Blutes gesenkt werden, was bei sonst gleichbleibenden Bedingungen eine ausreichende Blutversorgung des Körpers befördert.

In kleineren Blutgefäßen (Kapillaren) erhält man für $\nu \approx 3 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $R = 6 \cdot 10^{-6}$ m und $\bar{v} \approx 3 \cdot 10^{-4}$ m/s die Reynoldszahl

$$Re \approx 12 \cdot 10^{-4} \ll Re_c .$$

Folglich ist die Strömung hier laminar. Sie wird deshalb wesentlich durch die Viskosität des Blutes bestimmt, die Rauigkeit der inneren Kapillarwand hat hier kaum einen Einfluss.

Ist der Durchmesser eines Blutgefäßes noch kleiner, und zwar in der Größenordnung von Blutzellen, dann gelten wiederum andere Gesetzmäßigkeiten für die Volumenstromstärke. Nun reihen sich die Blutzellen wie in eine Kette. Dies führt effektiv zu deutlich größeren Werten der Volumenstromstärke, als sie nach den oben genannten Gesetzen berechnet würden.

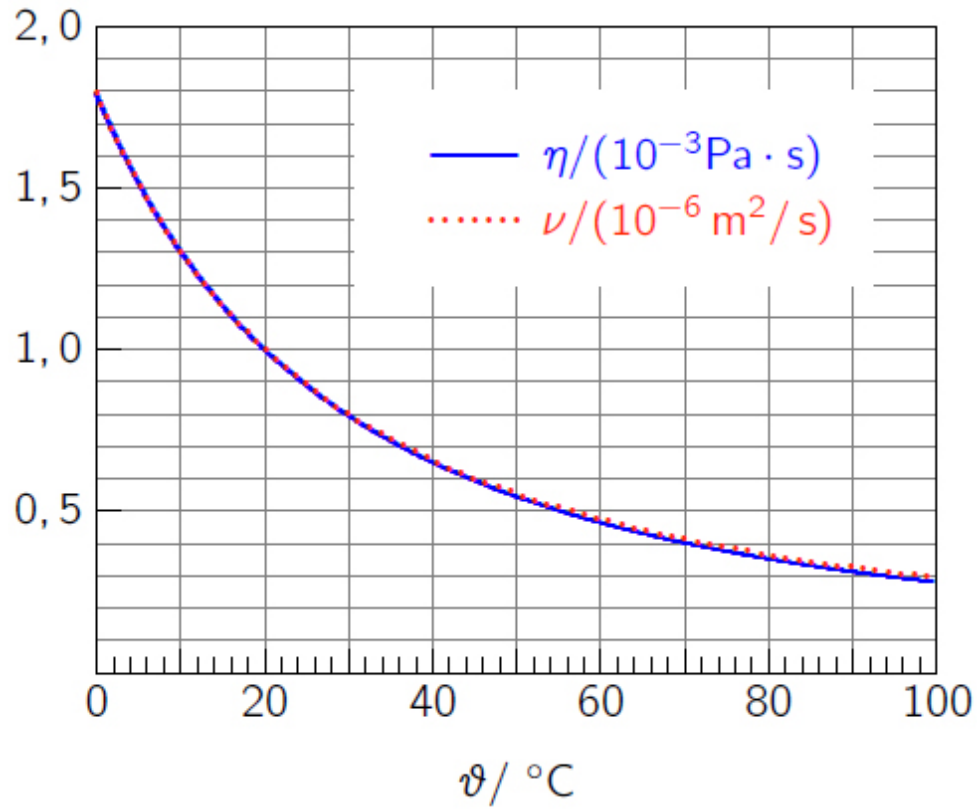
A.3 Messergebnisse

| | |
|--|--|
| L : Rohrlänge | R : Rohrradius |
| h : mittlere Höhe | T : Temperatur |
| ΔV : Volumen | Δt : Zeit |
| ν : kinematische Viskosität | Re: Reynoldszahl |
| Re _c = 2040: kritische Reynoldszahl | $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: Erdbeschleunigung |

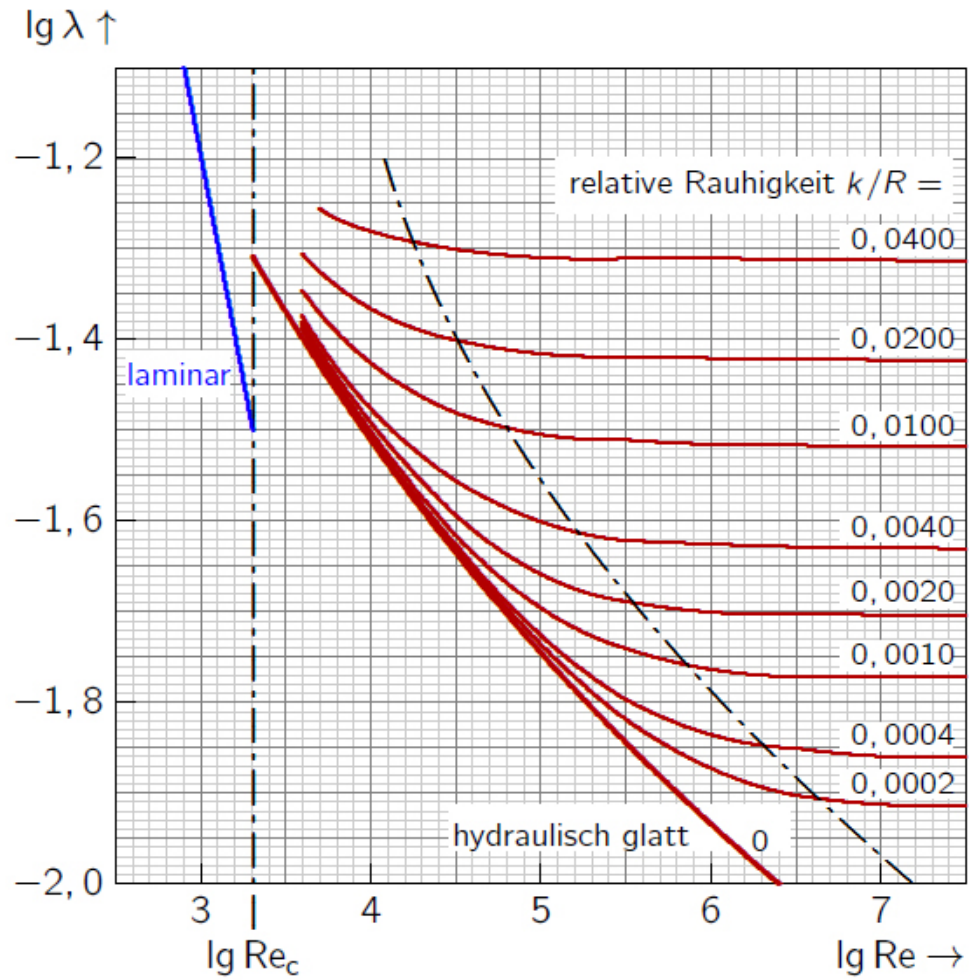
$$\nu = \frac{\pi g}{8} \cdot \frac{R^4 \cdot h \cdot \Delta t}{L \cdot \Delta V} \quad \text{Re} = \frac{2 \cdot \Delta V}{\pi \cdot R \cdot \nu_{\text{Lit}} \cdot \Delta t} \quad \frac{\nu_{\text{Lit}}(T)}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 1,87 \cdot 10^{-9} \cdot \exp\left(\frac{1840 \text{ K}}{T}\right)$$

$$\frac{W_{\text{reib}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{3gh}{2} \cdot \left(\frac{\pi R^2 \cdot \Delta t}{\Delta V}\right)^2$$

| # | L m | R mm | h m | T K | ΔV 10 ⁻⁶ m ³ | Δt s | ν 10 ⁻⁶ m ² /s | Re Re _c | W _{reib} E _{kin} |
|---------------|--------|---------|--------|--------|---------------------------------------|---------|---|-----------------------|---------------------------------------|
| Messaufgabe 1 | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| Messaufgabe 2 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | |
| Messaufgabe 3 | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |



Vorgabe der Temperaturabhängigkeit der Viskositäten
zum Eintrag der Messpunkte (ν, ϑ)



Moody-Diagramm zum Eintrag des Messpunktes ($\lg \lambda$, $\lg Re$).