

Versuch M15: Schallwellen		Physik, Studentenfassung vom 30. Oktober 2023	
Gruppe/Versuchs-Nr.: /		Datum:	
Name 1:		Name 2:	
Note Testat:		Note Testat:	
Note Protokoll:		Betreuer:	

- **Versuchsziel**

- (i) Messung von Hörschwellen.
- (ii) Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft mittels stehender Wellen in einem Schallrohr mit beidseitig starren Wänden.
- (iii) Messung von Resonanzfrequenzen im Schallrohr mit einseitig starrer Wand.

- **Themen zur Vorbereitung**

Schallwellen, –schnelle, –geschwindigkeit, –intensität, –impedanz, –transmission und –reflektion; Temperaturabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit in Gasen; stehende Wellen und Resonanzen im Schallrohr; Hörkurven des Menschen

- **Messaufgaben**

1. Steuern Sie einen Schallgeber mit harmonischen Signalen (Sinus) der Amplitude $2V_{pp}$ und variabler Frequenz an. Bestimmen Sie die untere und obere Hörschwelle f_U bzw. f_O eines jeden Ihrer beiden Ohren. Wiederholen Sie die Messung mit Rechteck- und Dreiecksignalen.

Hinweise: Zur Signalerzeugung dient ein Funktionsgenerator. Visualisieren Sie die Signale während der Hörtests mit dem Oszilloskop.

Zur Bedienung des Funktionsgenerators und des Oszilloskops beachten Sie die Hinweise auf S. 7 bzw. S. 8.

2. Messen Sie möglichst viele Frequenzen f_n , $n = 1, 2, \dots$ von harmonischen Schallwellen, für welche sich in einem **beidseitig abgeschlossenen**, luftgefüllten Rohr stehende Wellen ausbilden. Messen Sie auch die Rohrlänge L zwischen den reflektierenden Flächen an den Rohrenden sowie die Zimmertemperatur.

Hinweise: Der Aufbau erfolgt entsprechend Abb.4, unten. Zur Bedienung des Oszilloskops beachten Sie die Hinweise auf S. 8.

3. Messen Sie möglichst viele Frequenzen f_n , $n = 1, 2, \dots$ von harmonischen Schallwellen, für welche sich in einem **einseitig abgeschlossenen**, luftgefüllten Rohr Resonanzen zeigen. Messen Sie auch die Rohrlänge L zwischen der reflektierenden Fläche am Schallempfänger und der offenen Seite des Schallrohres.

Hinweis: Der Aufbau erfolgt entsprechend Abb.4, nur dass nun der Schallgeber nicht in das Rohr gesteckt ist, sondern ca. 5 cm vor dem Rohrende platziert wird, wie in Abb.4, oben.

- **Sicherheitshinweise**

Belasten Sie Ihr Gehör nur deutlich unter der Schmerzgrenze, indem Sie die Signalamplitude klein

genug wählen. Melden Sie sich beim Betreuer, falls Sie Ohrstöpsel benötigen.

• **Auswertung**

Messaufgabe 1: Vergleichen Sie Ihre Hörschwellen mit den für Menschen typischen Hörkurven in Abb. 10, S. 16. Schätzen Sie für den reinen Ton (sinusförmiges Signal) die Lautstärke am Außenohr ab (Angabe der Intensität und des Schalldruckpegels). Erklären Sie die Unterschiede in den Hörschwellen der verschiedenen Signalformen (Sinus, Rechteck, Dreieck).

Messaufgabe 2: Bestimmen Sie aus den Messwerten für L und f_n nach Gl.(21), S.6, die Phasengeschwindigkeit c für eine jede betrachtete Ordnung n . Geben Sie den Mittelwert und Vertrauensbereich an. Bestimmen Sie c auch aus dem Anstieg bei linearer Regression von f_n über $n/(2L)$, mit Angabe der Messabweichung. Vergleichen Sie die Messwerte für c mit dem theoretischen Wert bei der aktuellen Zimmertemperatur, nach Gln. (6) und (8), S.3.

Messaufgabe 3: Bestimmen Sie aus den Messwerten für f_n und der in der Messaufgabe 2 ermittelten Schallgeschwindigkeit c die effektive Rohrlänge L^* nach Gl.(23), S. 7. Geben Sie auch das Verhältnis L^*/L bezüglich der wahren Rohrlänge L an.

Aufgaben zur Vorbereitung

1. Wie ändert sich die Schallgeschwindigkeit in Luft, wenn die Temperatur von $0\text{ }^\circ\text{C}$ auf $10\text{ }^\circ\text{C}$ steigt?
2. Wie ändert sich die Schallgeschwindigkeit in Luft, wenn sich der Luftdruck halbiert?
3. Eine ebene Schallwelle in Luft (Druck 1bar, Temperatur $20\text{ }^\circ\text{C}$) treffe senkrecht auf eine Stahlwand (glatte Platte). Welche Bruchteile der einfallenden Schallintensität I_0 werden reflektiert bzw. transmittiert (s. Gln. (17) auf S. 5 sowie (37) und (36) auf S. 12)? Geben Sie die Dämpfung der transmittierten bez. der einfallenden Intensität in Dezibel an!
4. In der obigen Aufgabe sei die einfallende Schallwelle ein Ton der Frequenz 1 kHz und der Intensität 10^{-8} W/m^2 . Ist der Ton hinter der Wand für den Menschen noch hörbar?

1 Schall

1.1 Grundbegriffe

Schallwellen:

Unter einer *Welle* versteht man im Allgemeinen eine physikalische Größe, die sich in Abhängigkeit von der Zeit t und dem Ort \mathbf{x} ändert. Bei einer Schallwelle handelt es sich um Änderungen $\varrho(\mathbf{x}, t)$ der Masseeichte eines räumlich verteilten stofflichen Ausbreitungsmediums gegenüber der (zeitlich) mittleren Dichte am Ort \mathbf{x} . Mit den Schwankungen der Dichte sind örtliche Verschiebungen $\xi(\mathbf{x}, t)$ der Teilchen des Mediums verknüpft wie auch lokale Druckschwankungen $p(\mathbf{x}, t)$, wobei letztere zumeist bei der Beschreibung von Schallwellen verwendet werden (s. Anhang, S. 9 f.). Bei einer Ausbreitung in Luft oder Wasser ist p die Druckabweichung bez. des (zeitlich) mittleren Drucks am jeweiligen Ort.

Der Mechanismus der Schallausbreitung ist an ein stoffliches Medium gebunden.¹⁾ Das Medium kann einen beliebigen Aggregatzustand haben, z. B. gasförmig wie die Umgebungsluft. Aber auch in flüssigen und festen Stoffen kann sich Schall ausbreiten. Die Ausbreitung erfolgt durch eine lokale Wechselwirkung von benachbarten beweglichen Teilchen. Hier werden nur ebene Wellen betrachtet, weshalb der örtliche Lage in Ausbreitungsrichtung eindimensional beschrieben wird, mit der Schreibweise $x = \mathbf{x}$ (Skalar statt Vektor).

Schallschnelle und –geschwindigkeit:

Wird ein kleines, materiegelüftetes Volumenelement eines zunächst ruhenden Mediums aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, mit der Verschiebung $\xi(t, x)$ zur Zeit t am Ort x , man sagt auch *lokal gestört* oder *erregt*, so übt es eine Kraft auf die Umgebung aus, so dass auch Teilchen der Umgebung verschoben werden und ihrerseits eine Kraftwirkung auf die jeweilige Umgebung ausüben usw. Dabei schwingen die Teilchen im Volumenelement um eine Ruhelage (lokale Oszillationen von Masseelementen), mit einer (veränderlichen) Geschwindigkeit

$$v(t, x) = \partial \xi(t, x) / \partial t ,$$

der sogenannten *Schallschnelle*, Abb. 1. Die Erregung (Energie) selbst pflanzt sich jedoch entlang

¹⁾Wellen, die kein Fortpflanzungsmedium brauchen, sind z. B. elektromagnetische Wellen, wie das sichtbare Licht.

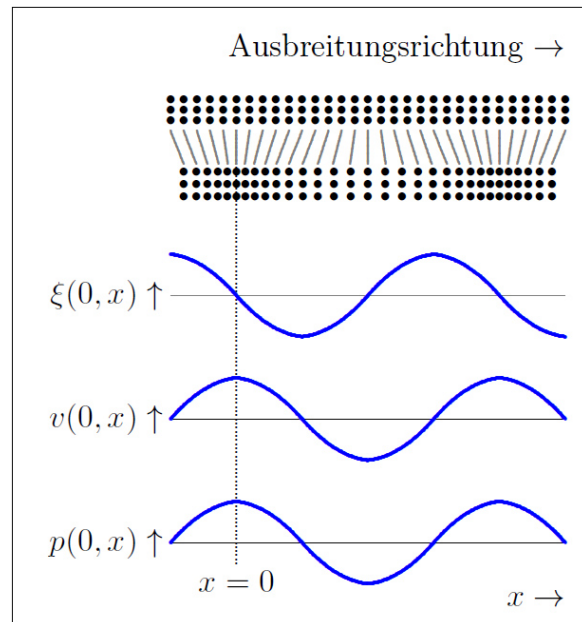


Abb. 1: Örtliche Zuordnung von Verschiebung ξ , Schallschnelle v und Schalldruck p einer harmonischen Schallwelle zu einem festen Zeitpunkt $t = 0$. Der obere Teil der Abbildung illustriert die Verschiebung der Teilchen des Ausbreitungsmediums aus der Ruhelage in Ausbreitungsrichtung der Welle längs der positiven x -Achse.

der gekoppelten Oszillatoren mit einer im Allgemeinen anderen Geschwindigkeit fort, die man schlechthin *Schallgeschwindigkeit* nennt und welche u.a. in diesem Experiment für die Ausbreitung in Luft (indirekt) gemessen wird.

Die Schallausbreitung setzt eine gewisse lokale Bewegungsfreiheit der Teilchen voraus. In flüssigen und erst recht festen Stoffen ist die Bewegungsfreiheit eingeschränkter als in einem Gas. Dies bewirkt größere Kraftwirkungen auf die Umgebung bei vergleichbar kleinen Auslenkungen. In Folge dessen sind die Werte der Schallgeschwindigkeit in Feststoffen am größten. Einige konkrete Zahlenwerte sind in Tab. 1 angegeben.

Longitudinal- und Transversalwellen:

In Medien mit isotropen elastischen Eigenschaften, wie Luft oder Wasser, breitet sich der Schall *longitudinal* aus, d.h., die lokale Ausbreitungsrichtung der Erregung und die Schwingungsrichtung der Teilchen stimmen überein. Im Unterschied hierzu ist bei elektromagnetischen Wellen die Ausbreitungsrichtung senkrecht zur Schwingungsrichtung des elektrischen bzw. magnetischen Feldstärkevektors. Bei Oberflächenwel-

Tab. 1: Logitudinale Schallgeschwindigkeiten c in verschiedenen Ausbreitungsmedien.

Medium	$c / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
Gase	
Kohlendioxid (20 °C)	266
Sauerstoff	316
Luft (20 °C) (78% N, 21% O, \lesssim 1% Ar)	343
Helium	981
Wasserstoff	1280
Flüssigkeiten	
Wasser (0 °C)	1407
Wasser	1484
Meerwasser	≈ 1500
Feststoffe	
Gummi	150
Plexiglas	2670
Wassereis (-4 °C)	3250
Beton	3600.. 3900
Eisen	5170
Glas	5300
Stahl	5920
Diamant	18000

len auf Flüssigkeiten kreisen die Oberflächenteilchen auf nahezu ellipsenförmigen Bahnen, näherungsweise nennt man diese auch transversal.

Harmonische Welle:

Eine ebene harmonische Schallwelle, die sich in Richtung der x -Achse eines Koordinatensystems ausbreitet, wird durch die zeitlich und räumlich veränderliche Druckschwankung

$$p(t, x) = \hat{p} \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

beschrieben. Darin bezeichnen \hat{p} die Druckamplitude, ω die Kreisfrequenz und k die Kreiswellenzahl. Der Schalldruck gibt nur die lokale Druckabweichung vom mittleren Luftdruck an. ²⁾ Die Kreisfrequenz hängt mit der Schwingungsperiode T und der Frequenz f über folgende Beziehungen zusammen,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

Hält man den Ort x fest, so ist T die Zeit, nach der sich der Verlauf der Druckschwankungen zeitlich wiederholt, Abb. 2 oben. Die Kreiswellenzahl berechnet

²⁾Im Vergleich zum Normaldruck der Luft ($\approx 101325\text{Pa}$) sind die Schalldruckamplituden selbst im extrem lauten Fall recht klein. Bei Schalldruckpegeln von 130 dB (z. B. nahe einem Düsentriebwerk) gilt $\hat{p} \approx 63\text{Pa}$.

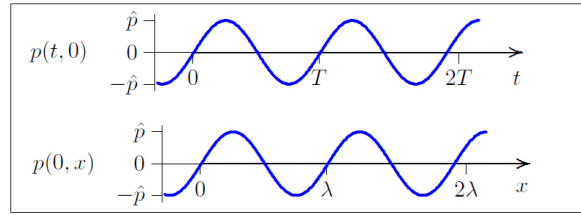


Abb. 2: Zeitliche (oben) und räumliche (unten) Änderung des relativen Drucks einer harmonischen Schallwelle, nach Gl. (1).

sich aus der Wellenlänge λ und der Kreiszahl ν wie folgt,

$$k = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3)$$

Hält man die Zeit t fest, so ist λ die Wegstrecke, nach der sich der Verlauf der Druckschwankungen örtlich wiederholt, Abb. 2 unten.

Phasenlage und -geschwindigkeit:

Als *Phasenlage* (auch *Phasenwinkel* oder kurz nur *Phase*) einer harmonischen Welle (1) zur Zeit t und am Ort x bezeichnet man den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$, für welchen $\sin(\omega t - kx) = \sin(\varphi)$ gilt.

Misst man den Druck gleichzeitig an zwei benachbarten Orten x und $x + \Delta x$, mit $0 < \Delta x < \lambda$, so kann man die Zeit Δt bestimmen, nach der sich am Ort $x + \Delta x$ die gleiche Phase wie am Ort x zur Zeit t einstellt. Es muss also

$$\omega t - kx = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x) = \text{const.}$$

gelten, woraus

$$\omega \cdot \Delta t - k \cdot \Delta x = 0$$

folgt. Somit erhält man unter Beachtung von (2) und (3) für den Quotienten $c_{\text{ph}} \equiv \Delta x / \Delta t$,

$$c_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (4)$$

Dies ist die sogenannte *Phasengeschwindigkeit* einer harmonischen Welle.

Für Wellenpakete (Überlagerung verschiedener harmonischer Wellen) betrachtet man auch die sogenannte *Gruppengeschwindigkeit*, die sich im Allgemeinen von der Phasengeschwindigkeit unterscheidet, s. Anhang A.2, S. 11.

1.2 Phasengeschwindigkeit von Schall in Gasen

Die lokalen Druckschwankungen des Schallfeldes in einem Gas erfolgen recht schnell, so dass die damit verbundenen thermodynamischen Zustandsänderungen in einem Volumenelement in guter Näherung entlang von Adiabaten erfolgen, also ohne Wärmeaustausch mit benachbarten Volumenelementen. Für ein ideales Gas findet man nach Aufstellung der Wellengleichung für die Schallgeschwindigkeit (gleich Phasengeschwindigkeit, $c \equiv c_{\text{ph}}$; Details im Anhang A.1, S. 9 f.)

$$c = \sqrt{\frac{\kappa R}{M} \cdot T} \quad (5)$$

Darin bezeichnen

$$R = 8,314\,459(48) \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

die molare Gaskonstante, T die absolute Temperatur, M die molare Masse und κ den Adiabatenexponenten.

Trockene Luft kann man unter Normalbedingungen als nahezu ideales Gas ansehen, mit der Molmasse

$$M \approx 28,964 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} .$$

Im Temperaturbereich ($-20 \dots 50 \text{ }^\circ\text{C}$) gilt $\kappa \approx 1,4$. Für die Temperatur $T_0 = 273,15 \text{ K} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ erhält man somit nach (5) die Phasengeschwindigkeit

$$c_0 \approx 331,3 \text{ m/s} \quad (6)$$

In feuchter Luft ist die Geschwindigkeit etwas größer, weil dann die Molmasse wegen des höheren Wasseranteils geringer ist.³⁾

Kennt man die Schallgeschwindigkeit c_0 eines Mediums für eine bestimmte Temperatur T_0 , so folgt aus (5),

$$\frac{\kappa R}{M} = \frac{c_0^2}{T_0} .$$

Setzt man dies wiederum in (5) ein, so folgt die Schallgeschwindigkeit c bei einer beliebigen anderen

³⁾Die Molmasse von Wasserdampf beträgt etwa $18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, was die Molmasse der Luft (des Gasgemisches) bei Zunahme des Wasserdampfgehalts verringert und damit die Schallgeschwindigkeit erhöht.

Temperatur T aus,

$$c = c_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} .$$

Mit der Celsius-Temperaturskala folgt unter Beachtung von

$$\vartheta / \text{ }^\circ\text{C} = T / \text{K} + 273$$

die Beziehung

$$c(\vartheta) = c_0 \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273 \text{ }^\circ\text{C}}} , \quad (7)$$

mit der Geschwindigkeit c_0 bei $0 \text{ }^\circ\text{C}$, Gl. (6). Für $\vartheta/273 \text{ }^\circ\text{C} \ll 1$ kann man wie folgt nähern,⁴⁾

$$c(\vartheta) \approx c_0 + 0,61 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\vartheta}{\text{ }^\circ\text{C}} \quad (8)$$

Mit Erhöhung der Temperatur um 1 K wächst demzufolge die Schallgeschwindigkeit um etwa $0,61 \text{ m/s}$, sofern dies in der Nähe der Zimmertemperatur stattfindet.

Die Zustandsgleichung für Luft beim (mittleren absoluten) Druck p_L lautet in guter Näherung,

$$p_L V = n R T , \quad (9)$$

mit der Molzahl n . Im Volumen V befinde sich die Masse $m = nM$. Dividiert man nun in (9) beide Seiten durch m , so folgt,

$$\frac{p_L}{\varrho} = \frac{R T}{M} ,$$

mit der (mittleren) Massedichte $\varrho = m/V$. Geht man hiermit in (5) ein, so gilt auch,

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_L}{\varrho}} . \quad (10)$$

Die Dichte ist temperaturabhängig, $\varrho(T)$. Berechnet man nun die Schallgeschwindigkeit nach (10) für den Normalluftdruck $p_L = 101325 \text{ Pa}$ und die Luftdichte $\varrho = 1,2041 \text{ kg/m}$, welche bei Zimmertemperatur $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ auftritt, so erhält man die Geschwindigkeit,

$$c(20 \text{ }^\circ\text{C}) \approx 343,2 \text{ m/s} .$$

Dies ist nahezu der gleiche Wert, den man nach (8) und (6) berechnen kann.

⁴⁾Die Taylorreihenentwicklung nach der kleinen Größe ϵ liefert, $\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \epsilon/2 + o(\epsilon^2)$.

Nach Gleichung (10) könnte man vermuten, dass die Schallgeschwindigkeit vom Luftdruck p_L abhängt. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn mit dem Druck ändert sich die Dichte ρ in gleichem Maße. Die obige Rechnung hat gezeigt, dass (10) und (5) unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Zustandsgleichung (9) identisch sind. In (5) erkennt man jedoch, dass die Schallgeschwindigkeit nur von der Temperatur abhängt, nicht aber vom Druck.⁵⁾

1.3 Schallintensität

Der zeitliche Mittelwert des Produktes aus Schalldruck p und –schnelle v ist die sogenannte *Schallintensität*,

$$I(x) = \overline{p(t, x) \cdot v(t, x)} \quad (11)$$

$$\equiv \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} p(t, x) \cdot v(t, x) dt$$

Sie hat die Einheit $[I] = \text{W/m}^2$ und gibt an, wie viel Energie (im Mittel) pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement am Ort x strömt, deren Flächennormale in Richtung der Schallschnelle weist.

Die Bedeutung dieser Größe erschließt sich aus folgender Betrachtung: Auf eine Fläche A wirke die Kraft F , es herrsche also der Druck $p = F/A$. Diese Kraft bewirke in der Zeit Δt eine Verschiebung $\Delta \xi$. Bei der Schallschnelle $v = \Delta \xi / \Delta t$ wird dann die Verschiebungsarbeit $\Delta W = F \cdot \Delta \xi = F \cdot \Delta t \cdot v$ geleistet. Diese entspricht der Leistung (Arbeit pro Zeiteinheit) $\Delta W / \Delta t = F \cdot v$. Wird diese Leistung nun noch auf die Fläche A bezogen, so erhält man schließlich die Intensität $I = F \cdot v / A = p \cdot v$.

Bezeichnet ρ die (mittlere) Massedichte des Ausbreitungsmediums, so gilt (s. Anlage S. 9f.)

$$p(t, x) = \rho c \cdot v(t, x) .$$

Damit berechnet sich die Schallintensität für harmonische Schallwellen (1) aus dem mittleren quadrati-

⁵⁾ Werden an einem Sonnentag erdnahe Luftschichten aufgeheizt, so dass die Lufttemperatur mit der Höhe abnimmt, so führt dies dazu, dass ein allseitig ausgestrahlter Schall einer erdnahen Punktquelle sich an der Erdoberfläche schneller ausbreitet als in höheren Lagen. Dies führt letztlich zu einer Änderung der Ausbreitungsrichtung, von zunächst horizontal nach oben. Damit gelangen entfernt liegende Punkte auf der Erdoberfläche in einen Schallschatten. Diese Ablenkung kehrt sich um, wenn nach Sonnenuntergang die oberen Luftschichten noch wärmer als die erdnahen sind. Beispielsweise wird dann entfernter Straßenlärm deutlicher wahrgenommen als am Tage.

schon Schalldruck nach,

$$I(x) = \frac{1}{\rho c} \cdot \overline{p^2(t, x)}$$

$$= \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t, x) dt$$

$$= \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\hat{p}^2}{2} , \quad (12)$$

Darin ist \hat{p} die Amplitude des Schalldrucks (1).

Das subjektive Empfinden der Lautstärke des menschlichen Gehörs verhält sich nicht auch nur annähernd linear zur Schallintensität. Vielmehr empfindet man eine Verdopplung der Lautstärke eines hörbaren Tons nicht etwa bei einer Verdopplung sondern (näherungsweise) bei einer Quadrierung der Intensität. Man führt deshalb für die Intensität eine logarithmische Skala ein, die sogenannte *Dezibel-Skala* (dB-Skala),

$$10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} = 20 \cdot \lg \frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} .$$

Dies ist eine logarithmische Relativskala, mit dem dekadischen Logarithmus, $\lg \equiv \log_{10}$, und dem Bezugsdruck sowie der Referenzintensität,

$$\hat{p}_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \quad \text{bzw.} \quad I_0 = \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\hat{p}_0^2}{2} .$$

Diese Bezugswerte ⁶⁾ sind hörphysiologisch begründet, s. auch Anlage S.15 f., insbes. Abb. 10.

1.4 Schallschnelle und Auslenkung an der Hörschwelle

Die Amplituden \hat{v} und $\hat{\xi}$ der Schallschnelle bzw. der Teilchenauslenkung für einen Ton der Frequenz f erhält man aus der Schalldruckamplitude wie folgt,

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\rho c} , \quad \hat{\xi} = \frac{\hat{v}}{2\pi f} = \frac{\hat{p}}{\rho c} \cdot \frac{1}{2\pi f} .$$

Für Luftschall unter Normalbedingungen gilt,

$$\rho = \rho^* \approx 1,20 \text{ kg/m}^3 , \quad c = c^* \approx 343,5 \text{ m/s} , \quad (13)$$

⁶⁾ Der Bezugswert \hat{p}_0 wurde Anfang des 20. Jahrhunderts als Hörschwelle des menschlichen Gehörs bei der Frequenz 1kHz und Luftschall gehalten. Später stellte sich heraus, dass dieser Wert etwas zu niedrig angesetzt war, er wurde dennoch als Referenzwert beibehalten. Für Wasserschall verwendet man heutzutage jedoch mit 10^{-6} Pa einen anderen Bezugswert.

woraus man an der Hörschwelle für einen 1-kHz-Ton die folgenden Werte erhält,

$$\hat{v}_0^* \approx 4,85 \cdot 10^{-8} \text{ m/s} \quad , \quad \hat{\xi}_0^* \approx 7,72 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad . \quad (14)$$

Dies verdeutlicht, dass die Schallschnelle $v(t)$, mit $0 \leq |v(t)| \leq \hat{v}_0^*$ für alle Zeiten t , sehr viel kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit c^* der Schallwelle ist. Die zugehörigen Auslenkungen der Luftmoleküle haben die Größenordnung von Atomradien.⁷⁾

Für den Bezugsdruck \hat{p}_0 folgt nach (12) die Referenz-Schallintensität

$$I_0^* = \frac{\hat{p}_0^2}{2\rho^*c^*} \approx 4,85 \cdot 10^{-13} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad . \quad (15)$$

1.5 Reflexion und Transmission von Schall

Die Schallausbreitung in einem Medium ist wesentlich bedingt durch die Phasengeschwindigkeit c und Massedichte ρ . Das Produkt

$$Z = c\rho \quad (16)$$

heißt *akustische Impedanz* des Mediums, mit der Einheit $[Z] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ (s. Abschnitt A.1, S. 9 ff., Gl.(31)).

Trifft eine Schallwelle im Medium 1 (Impedanz Z_1) mit der Intensität I auf eine Grenzfläche zu einem Medium 2 (Impedanz Z_2), so wird der relative Anteil α von I reflektiert, wobei

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

gilt. Treten keine Energieverluste auf (keine Absorption, also die Umwandlung von Schallenergie in Wärme des Mediums) so folgt aus der Energieerhaltung, dass der Anteil $\beta = 1 - \alpha$ transmittiert wird, also die Intensität der Schallwelle im Medium 2 den Wert $\beta \cdot I$ hat. Trifft die Schallwelle senkrecht auf die Grenzfläche, so berechnen sich diese Koeffizienten wie folgt aus den Impedanzen,

$$\alpha = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad , \quad \beta = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad . \quad (17)$$

Mit der relativen Impedanz $\phi \equiv Z_2/Z_1$ kann man auch

$$\alpha = \left(\frac{1 - \phi}{1 + \phi} \right)^2 \quad (18)$$

⁷⁾Der Atomradius (Kovalenzradius) von Wasserstoff beträgt $32 \cdot 10^{-12} \text{ m}$, von anderen Elementen bis zu einigen wenigen $100 \cdot 10^{-12} \text{ m}$.

schreiben.

Unterscheiden sich die Impedanzen nur geringfügig, so gelten $\beta \lesssim 1$ und $\alpha \gtrsim 0$. Hier wird also fast die ganze Schallenergie transmittiert. Unterscheiden sich jedoch die Impedanzen stärker, so wird umso mehr der Schallenergie reflektiert.

Trifft eine ebene Schallwelle schräg auf eine glatte Grenzfläche, deren Ausmaße groß im Vergleich zur Wellenlänge ist, so wird eine ebene Welle reflektiert, wobei die beiden Winkel zwischen dem Einfallslot und den Wellennormalen der ein- bzw. ausfallenden Welle gleich sind (Reflexionsgesetz wie in der Optik).

Schallreflexionen sind in verschiedenen Bereich von praktischer Bedeutung (s. Anhang A.5, S. 13).

Im Experiment tritt Schallreflexion an den Grenzflächen zwischen der Luft im Schallrohr und den Schallrohrenden auf, also an der festen Kunststoffwand vom Gehäuse des Schallempfängers und -gebers. Die akustischen Impedanzen der Luft und der Wand betragen,

$$Z_L \approx 414 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad Z_{\text{Wand}} \gtrsim 10^3 \cdot Z_L$$

Daraus folgt $\phi = Z_{\text{Wand}}/Z_L \gtrsim 10^3$ und nach (18) folgt der Reflektionskoeffizient

$$\alpha \gtrsim 0,996 \quad .$$

Es wird also mehr als 99,6% der an der Wand eintreffenden Schallenergie ins Innere des Schallrohres reflektiert. Andererseits gelangen weniger als 4‰ der Energie nach außen, weshalb der Experimentator bei einem beidseitig geschlossenen Schallrohr die Töne als deutlich leiser wahrnimmt im Vergleich zum geöffneten Schallrohr.

2 Wellen im Schallrohr

2.1 Stehende Wellen bei beidseitig starren Wänden

In einem mit Luft gefüllten starren Rohr (Zylinder), welches beidseitig (Zylinderboden und -decke) durch starre Wände begrenzt wird, werde eine harmonische Schallwelle erzeugt. Der Schallgeber auf der einen (linken) Seite des Schallrohres erzeuge eine Schallwelle mit dem Schalldruckverlauf

$$p_r(t, x) = \hat{p} \sin(\omega t - kx)$$

entlang der Rohrachse (positive x -Richtung), mit der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

und der Wellenzahl

$$k = 2\pi/\lambda .$$

Die Welle läuft in Richtung des rechten Rohrendes und wird dort reflektiert, was durch die rücklaufende Welle (nach links, negative x -Richtung),

$$p_l(t, x) = \hat{p} \sin(\omega t + kx) ,$$

beschrieben wird. Durch Überlagerung (Interferenz) resultiert die Welle⁸⁾

$$\begin{aligned} p(t, x) &= p_r(t, x) + p_l(t, x) \\ &= \hat{p} \cdot [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)] \\ &= 2\hat{p} \cdot \cos kx \cdot \sin \omega t . \end{aligned}$$

Dies kann als Schwingung mit der Kreisfrequenz ω und der ortsabhängigen Druckamplitude $2\hat{p} \cdot \cos kx$ angesehen werden. Diese Amplitude ist maximal für $kx = n\pi$, mit $n = 0, 1, 2, \dots$, also an den Stellen

$$x = \frac{n\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2} .$$

Da der Schalldruckverlauf gegenüber dem Schallamplitudenverlauf um $\pi/4$ phasenverschoben ist (Vgl. Abb. 1), entspricht die Bedingung jenen Orten, an denen die Elongation der Teilchen minimal ist (Knoten). Hingegen verschwindet die Druckamplitude für $kx = n\pi + \pi/2$, also an den Stellen

$$x = \frac{2n+1}{4} \lambda$$

an denen die Elongation der Teilchen maximal ist (*Bäuche*), Abb. 3.

Stehende Wellen bilden sich nur dann aus, wenn der Abstand L zwischen Schallgeber und Stempel ein ganzzahliges Vielfache von $\lambda/2$ beträgt, also für

$$L = n \frac{\lambda}{2} . \tag{19}$$

Nimmt man an, dass die Phasengeschwindigkeit nicht von der Frequenz abhängt, so gilt nach (4), $c = \lambda \cdot f = \text{const.}$ Vergrößert man nun bei einer festen Resonatorlänge L die Frequenz f , so verringert sich

⁸⁾Beachte: $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a$ und folglich $\sin(a - b) + \sin(a + b) = 2 \sin a \cdot \cos b$.

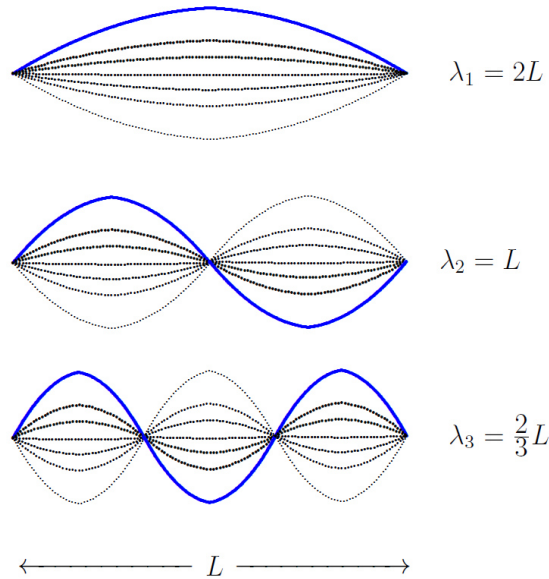


Abb. 3: Schematischer Schallamplitudenverlauf im Schallrohr der Länge L für stehende Wellen der Ordnungen $n = 1; 2; 3$. Man beachte, dass der Schalldruckverlauf gegenüber dem Schallamplitudenverlauf um $\pi/4$ phasenverschoben ist. Die blaue Kurve zeigt die Ortabhängigkeit jeweils zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt. An den Knotenpunkten laufen alle Kurven einer Ordnung zusammen.

in gleichem Maße die Wellenlänge λ . Es gibt dann immer wieder einen Frequenzwert f_n , bei dem die zugehörige Wellenlänge $\lambda_n = c/f_n$ die Bedingung (19) erfüllt, was auf die Gleichung

$$f_n = \frac{c}{L} \cdot \frac{n}{2} , \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{20}$$

führt. Die kleinste Frequenz, bei der stehende Wellen auftreten, ist dann $f_1 = c/(2L)$, mit der Wellenlänge $\lambda_1 = 2L$. Die nächst höhere Ordnung $n = 2$ liefert $\lambda_2 = L$ bei der Frequenz $f_2 = c/L$ usw.

Kennt man die Ordnung n und die zugehörige Frequenz f_n , so kann man nach Umstellung von (20) die Schallgeschwindigkeit berechnen,

$$c = 2L \cdot \frac{f_n}{n} , \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{21}$$

2.2 Resonanzen bei einseitig offener Wand

Es wird wiederum ein mit Luft gefülltes starres Rohr der Länge L betrachtet, welches nun aber nur einseitig durch einen starren Deckel begrenzt wird, Abb. 4

oben. Leitet man auf das offene Ende eine harmonische Schallwelle, so wird an der starren Wand im Inneren des Rohres die Schallwelle reflektiert und mit der einlaufenden Welle zur Überlagerung gebracht.⁹⁾ Die reflektierte Welle wird wiederum am offenen Ende teilweise reflektiert, weil der Übergang vom Rohr mit seinen starren Wänden in den freien luftgefüllten Raum einen Impedanzwechsel darstellt. Ein Schallimpuls (lokaler Überdruck) wird an der festen Wand als Über- und am offenen Ende als Unter-Druck-Schallimpuls reflektiert.

Die Schalldruckschwankungen an der starren Wand sind am stärksten bei den *Resonanzfrequenzen*

$$f_n = \frac{c}{L^*} \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Darin ist c wiederum die Phasengeschwindigkeit des Schalls und L^* die effektive Rohrlänge, die im Allgemeinen etwas größer als die tatsächliche Rohrlänge ist, $L^* \gtrsim L$. Kennt man die Schallgeschwindigkeit c und eine Resonanzfrequenz f_n der Ordnung n , so kann L^* durch Umstellung von (22) berechnet werden,

$$L^* = \frac{c}{f_n} \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

3 Versuchsapparatur

3.1 Schallgeber und Mikrofon

Die Messapparatur in Abb.4 besteht aus einem PVC-Rohr, an dessen Enden ein Schallgeber bzw. -aufnehmer (Kopfhörer bzw. Mikrofon) befestigt werden können. Beide sind von gleicher Bauart: an einer Membran ist eine elektrische Spule befestigt, die sich im Feld eines Dauermagneten befindet. Wird durch die Spule ein elektrischer Strom geleitet, so baut sich ein magnetisches Feld auf, das mit dem Feld des Dauermagneten wechselwirkt und somit eine Kraftwirkung auch auf die Membran ausübt. Ist der Strom veränderlich, so fungiert die Membran auf diese Weise als Schallquelle. Wird jedoch umgekehrt die Membran mit der Spule durch eine einlaufende Schallwelle bewegt, so induziert dies über der Spule eine elektrische Spannung, in dieser Betriebsart spricht man vom

⁹⁾ Dies ist beispielsweise die Situation im äußeren Gehörgang des menschlichen Ohres (s. Anhang, S.13 ff.).

Mikrofon. Die zeitlichen Verläufe der Erreger- wie auch die Mikrofonspannung können zeitgleich mit einem Zwei-Kanal-Oszilloskop visualisiert werden. Die vom Schallgeber erzeugten Schallwellen breiten sich im Schallrohr aus. Am anderen Ende des Rohres befindet sich das Mikrofon, dessen Gehäuse zum einen als quasi starre Wand die eintreffende Schallwelle reflektiert und zum anderen einen (geringen) Teil der Schallenergie in eine zeitlich veränderliche Spannung wandelt.

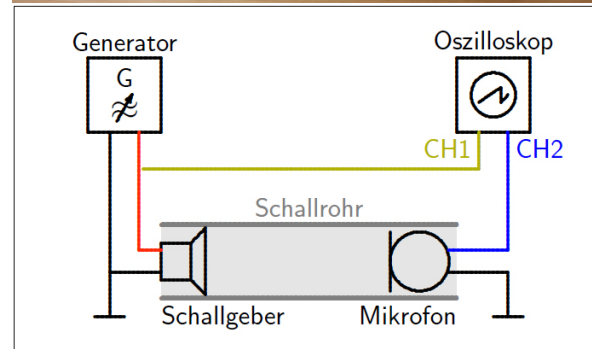
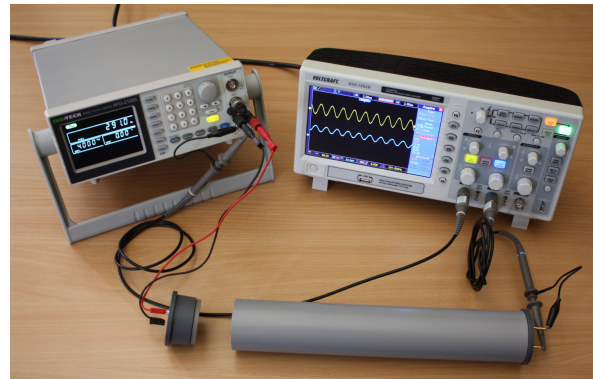


Abb. 4: Oben: Messplatz mit Funktionsgenerator, 2-Kanal-Digital-Oszilloskop und Schallrohr. Der Schallgeber liegt hier vor dem Schallrohr (Messaufgabe 3). Unten: Schaltskizze. Die Masseanschlüsse werden durch die Krokodilklemmen an den beiden Tastköpfen des Oszilloskops realisiert. Der Schallgeber steckt hier im Schallrohr (Messaufgabe 2).

3.2 Funktionsgenerator

Der Funktionsgenerator in Abb.5 erzeugt zeitlich veränderliche elektrische Spannungen, die man an der BNC-Buchse OUTPUT, MAIN abgreift. Mögliche Signalformen sind u.a. Sinus, Rechteck und Dreieck, mit der Taste FUNC kann man zwischen ihnen wählen.

Der Innenwiderstand der Ausgangsstufe des Generators beträgt 50Ω . Ein Innenwiderstand 50Ω ist für



Abb. 5: Funktionsgenerator für verschiedene Signalformen (u.a. Sinus, Rechteck, Dreieck).

moderne Funktionsgeneratoren üblich. Belastet man den Ausgang mit einem Lastwiderstand von $50\ \Omega$, so finden am Übergang Ausgang/Last keine Reflektionen des elektrischen Signals statt, so dass die Signalform der Ausgangsspannung über der Last unverzerrt ist. Mit der Taste High-Z, $50\ \Omega$ kann die Ausgangsspannung ein- bzw. abgeschaltet werden.

Weitere Einstellmöglichkeiten sind:

FREQ: Grundfrequenz von periodischen Signalen.

AMPL: Amplitude von verschiedenen Signalen. Der einstellbare Wert der Amplitude kann in verschiedenen Einheiten angegeben werden.

V_{pp} bedeutet „volt peak-to-peak“, dies ist das Doppelte der Amplitude.

V_{rms} bedeutet „volt root mean square“, dies ist der Effektivwert, also Amplitude dividiert durch $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Die angegebenen Zahlenwerte der Amplitude gelten, wenn der Lastwiderstand $50\ \Omega$ beträgt. Belastet man den Ausgang jedoch hochohmig, beispielsweise mit dem Eingangswiderstand $1\ \text{M}\Omega$ eines Oszilloskops, so beträgt die tatsächliche Amplitude doppelt so viel wie am Display des Generators angezeigt.

OFST: Gleichspannungsanteil (Mittelwert) des Signals engl. „offset“.

DUTY: Tastverhältnis, nur bei Rechteck- und Dreiecksignal einstellbar.

Die Einstellung gewünschter Zahlenwerte erfolgt mit einem Drehknopf oder über den Ziffernblock.

3.3 Oszilloskop

Oszilloskope dienen der Visualisierung zeitlich veränderlicher elektrischer Spannungen quasi gleichzeitig (on-line) zur Signalentstehung. Das hier verwendete Zwei-Kanal-Oszilloskop zeigt Abb.6. Damit können im Experiment zeitsynchron das von Schallgeber erzeugte wie auch das am Mikrophon empfangene Signal dargestellt werden.

Mit der Taste AUTO SET (rechts oben auf dem Chassis) findet das Oszilloskop automatisch zumeist sinnvolle Einstellungen der Darstellungsparameter, etwa für den Triggerpegel sowie die horizontale und vertikale Auflösung der Darstellung. Der geübte Experimentator nimmt diese Einstellung jedoch per Hand vor.

Es handelt sich hier um ein Digitaloszilloskop, das bedeutet, die Eingangssignale werden in der Amplitude wie auch der Zeit diskretisiert und mittels einer speziellen Hard- und Software analysiert. Beispielsweise werden mit der Taste MEASURE im Bedienfeld MENU (rechts oben) auf dem Bildschirm verschiedene Kenndaten von harmonischen Signalen angezeigt, wie die Frequenz unter Frequency und die Peak-To-Peak-Spannung (doppelte Amplitude) unter Pk-Pk.

Im Menüpunkt ACQUIRE kann mit den Funktionstasten F2 und F3 (rechts vom Bildschirm) ein über mehrere phasensynchrone Signalfenster gemittelt Signal zur Anzeige gebracht werden, was der Rauschunterdrückung dient. Im Experiment ist die Mittelung über 4 Fenster angebracht, Averages: 4.

Als Messleitungen verwendet man bei Oszilloskopen generell Koaxialkabel mit einem Tastkopf. Die Kabel dürfen nicht geknickt werden, weil dies an der Knickstelle eine Impedanzänderung hervorrufen würde, an der ein Teil der Signalenergie reflektiert wird, was letztlich zu Verzerrungen der Signal-Darstellung führt.

Der Tastkopf beinhaltet einen frequenzkompensierten Spannungsteiler, mit dem Teilverhältnis 1:10, Stellung X10. Alternativ kann mit einem Schieber am Tastkopf das auch das Teilverhältnis 1:1 eingestellt werden, Stellung X1, was für dieses Experiment empfohlen wird. Die Einstellung X10 dient der Verhinderung von Signalverzerrungen anharmonischer Signale, was in diesem Experiment nur für die verzerrungsfreie Darstellung von Rechteck- und Dreiecksignalen der ersten Messaufgabe von Bedeutung ist.

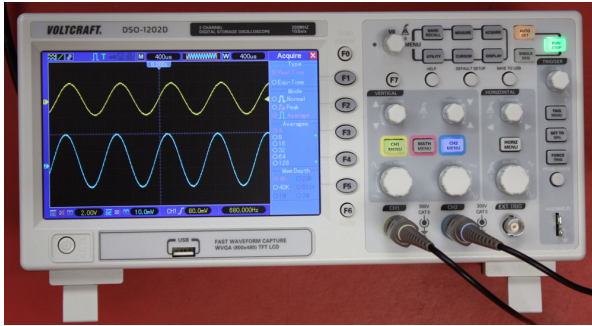


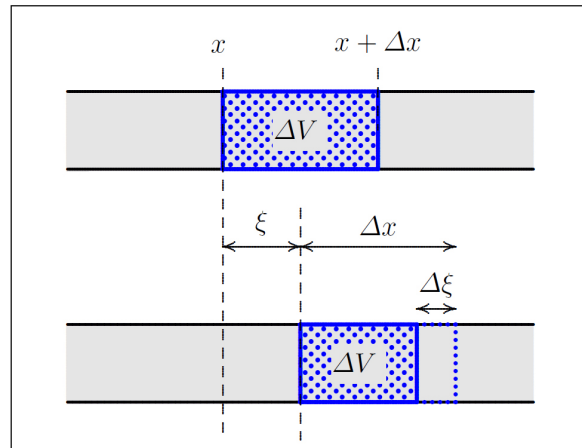
Abb. 6: 2-Kanal-Digital-Oszilloskop

Das verwendete Teilverhältnis muss für einen jeden Messkanal am Oszilloskop eingestellt werden, was über die Tasten CH1, MENU bzw. CH2, MENU und die Funktionstaste F4 erfolgt. Weicht diese Einstellung vom verwendeten Tastverhältnis ab, so werden die Signalamplituden falsch angezeigt, jedoch wird das Signal dadurch nicht verzerrt.

A Weitergehende Grundlagen

A.1 Wellengleichung

Betrachtet wird eine Gassäule, also ein zylindrischer Behälter mit starren Wänden, gefüllt beispielsweise mit Luft. In dieser Säule kann man Schallwellen durch Vibrationen des Zylinderbodens erzeugen. Zur Ableitung der Wellengleichung (partielle Differentialgleichung) betrachtet man an der Stelle x ein (kleines) Volumenelement $\Delta V(x) = A(x) \cdot \Delta x$, mit der (kleinen) Höhe Δx , und der Zylinderquerschnittsfläche A , die hier entlang der Zylinderachse als konstant angesehen wird, Abb. 7.

Abb. 7: Lage des Volumenelementes ΔV im schalldruckfreien Zustand (oben) und unter Druck (unten).

Im schalldruckfreien Zustand herrscht ein gewisser konstanter Druck, $p_0(x, t) = \text{const.}$, hingegen schwankt dieser Druck in einem Schallfeld. Unter dem *Schalldruck* $p(t, x)$ versteht man die zeitlichen und räumlichen Druckabweichungen vom mittleren Druck p_0 . p ist also der relative Druck bezüglich p_0 . p kann auch negative Werte annehmen, allerdings gilt immer $p_0 + p(t, x) \geq 0$.

Im schalldruckfreien Zustand erstreckte sich das Volumenelement von x bis $x + \Delta x$. Beim Schalldruck p werde das Volumenelement um die Strecke ξ verschoben. Wegen der Kompressibilität von Gasen verringert sich dabei seine axiale Ausdehnung um den Wert $\Delta \xi$, was die Volumenänderung $-A \cdot \Delta \xi$ ausmacht (beachte: $\Delta \xi > 0$). Damit erhöht sich der Schalldruck an der Stelle $x + \xi$ auf den Wert

$$p(x + \xi) \approx K \frac{\Delta \xi}{\Delta x}. \quad (24)$$

Hier bezeichnet K den Kompressionsmodul des Gases.¹⁰⁾

$$K \equiv -V \frac{\Delta p}{\Delta V} . \quad (25)$$

Auf der anderen Seite des Volumenelementes herrscht der Druck

$$p(x + \xi + \Delta x - \Delta \xi) = p(x + \xi) + \Delta p(x + \xi) .$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$ (infinitesimale Volumenelemente) geht (24) über in

$$p(x + \xi) = K \frac{\partial \xi}{\partial x} ,$$

und für die Druckänderung über dem Volumenelement erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta p(x + \xi) &= d \left(K \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \\ &= K \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx . \end{aligned}$$

Damit wirkt auf das Volumenelement die resultierende Kraft $\Delta F = A \cdot \Delta p$ in axialer (x -)Richtung,

$$\Delta F = AK \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x . \quad (26)$$

Das Volumenelement ΔV hat die Masse

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta x ,$$

wobei ρ die Massedichte des Gases ist. Somit gilt auch allgemein (Kraft gleich Masse mal Beschleunigung),

$$\Delta F = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} . \quad (27)$$

Fasst man (26) und (27) zusammen, indem man die Kraft eliminiert, so folgt unter Verwendung der Abkürzung

$$c \equiv \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (28)$$

die *eindimensionale Wellengleichung*¹¹⁾

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (29)$$

¹⁰⁾ Hat ein Gas in einem Kolben bei einem bestimmten Druck p das Volumen V und ändert sich dieses Volumen um den Wert ΔV bei der Druckänderung Δp , so nennt man K *Kompressionsmodul*, mit der Einheit [Pa]. Gleichung (24) erhält man für $\Delta p = p(x + \xi)$ sowie $V = A \cdot \Delta x$ und $\Delta V = -A \cdot \Delta \xi$.

¹¹⁾ Man nennt diese Wellengleichung *homogen*, weil sie keine Terme enthält, welche eine Erregung beschreiben.

Lösung dieser Gleichung ist die raum–zeitlich veränderliche Auslenkung $\xi(t, x)$ des Volumenelementes aus der Ruhelage (Lage bei Schallfreiheit). Die Lösung ist eindeutig bestimmt, wenn man die Anfangsbedingungen kennt, das sind die örtlichen Verläufe der Auslenkung und der Schallschnelle zu einem (Anfangs–)Zeitpunkt $t = 0$, also die Funktionen

$$\xi(0, x) \quad \text{bzw.} \quad v(0, x) \equiv \left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} .$$

Das allgemeine Integral (Lösung) der Wellengleichung für alle x und t lautet hier,

$$\xi(t, x) = \xi_1(ct + x) + \xi_2(ct - x) ,$$

mit (nahezu) beliebigen Funktionen ξ_1 und ξ_2 . Dies ist also die Überlagerung einer nach links ($x \rightarrow -\infty$) und einer nach rechts ($x \rightarrow +\infty$) laufenden Welle. Soll sie auch die Anfangsbedingungen erfüllen, so lautet die Lösung für alle zukünftigen Zeitpunkte $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \xi(t, x) &= \frac{\xi(0, ct + x) + \xi(0, ct - x)}{2} \\ &\quad + \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{v(0, x)}{2c} dx . \end{aligned}$$

Ergänzt man dies durch eine Randbedingung, etwa durch

$$\xi(t, x_1) = \xi(t, x_r) = 0$$

für alle $t \geq 0$ an den Rändern x_1 und x_r , mit $x_1 < x_r$, dann erhält man wiederum eine eindeutige Lösung. Die obige Randbedingung bedeutet, dass die Teilchen des Ausbreitungsmediums an den Rändern ruhen, wie es im Schallrohr mit starren Wänden der Fall ist.

Ebene Schallwellen können mit der eindimensionalen Wellengleichung (29) beschrieben werden (Ausbreitung in Richtung der x -Achse). Im Falle einer ebenen harmonischen Schallwelle lautet eine spezielle Lösung

$$\xi(t, x) = \xi_0 \sin(ct - x) . \quad (30)$$

Hier erkennt man, dass der Konstanten c in (28) die Bedeutung der Phasengeschwindigkeit zukommt,

$$c = \frac{\partial(ct - x)}{\partial t} = \frac{\lambda}{T} .$$

Die Phasenlage $(ct - x)$ hat in der obigen Schreibweise (30) die Einheit m. Als physikalische Formel empfiehlt es sich jedoch, die Zeit t in Einheiten der Schwingungsperiode T und den Weg x in Einheiten der Wellenlänge λ einzusetzen, was unter Beachtung von $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ sowie

$$ct - x = \frac{\lambda}{T} t - x = \frac{\lambda}{2\pi} (\omega t - kx)$$

auf die Schreibweise

$$\xi(t, x) = \xi_0 \sin(\omega t - kx)$$

führt.

Wenn $\xi(t, x)$ die zeitliche Abhängigkeit der Auslenkung der Luftmoleküle aus der Ruhelage am Ort x beschreibt, so ist

$$v(t, x) \equiv \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} = \xi_0 \omega \cos(\omega t - kx)$$

die Schallschnelle am Ort x zur Zeit t .

Durch die Teilchenbewegung ergeben sich momentane Dichte- und Druckschwankungen. Anstelle des Auslenkung ξ wird deshalb häufig der besser messbare Schalldruck p (Abweichung vom mittleren Luftdruck) betrachtet, für den eine analoge Wellengleichung gilt. An den Orten x und zu den Zeitpunkten t , bei denen die Auslenkung ξ extrem ist (minimal oder maximal), sind der Schalldruck wie auch die Schallschnelle null, Abb. 1.

Bezeichnet ρ die mittlere Massedichte des Ausbreitungsmediums, dann berechnet sich der Schalldruck aus der Schallschnelle nach

$$p(t, x) = \rho c \cdot v(t, x) \quad (31)$$

Dies nennt man auch das Ohmsche Gesetz der Akustik, weil die akustischen Größen p , v und ρc in Analogie zu den elektrischen Größen U , I und R (Spannung, Stromstärke bzw. Widerstand) betrachtet werden können. $Z \equiv \rho c$ heißt deshalb *akustische Impedanz*.

A.2 Gruppengeschwindigkeit

Betrachtet man die Ausbreitung eines Schallpulses, erzeugt etwa durch den einmaligen Schlag auf eine Trommel, so stellt man möglicherweise fest, dass sich der Puls mit einer anderen Geschwindigkeit als der Phasengeschwindigkeit ausbreitet. Die Erklärung hierfür liefert die folgende Betrachtung.

Einen Puls kann man sich als Überlagerung von vielen harmonischen Wellen unterschiedlicher Frequenz und Wellenlänge vorstellen. Man spricht hier auch von einem *Wellenpaket*. Im einfachsten Fall kann man sich ein Wellenpaket als additive Überlagerung von zwei

harmonischen Wellen (1) gleicher Amplitude $\hat{p}/2$, jedoch mit gering unterschiedlichen Kreisfrequenzen ω_1 und $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ sowie Wellenzahlen k_1 und $k_2 = k_1 + \Delta k$ vorstellen. Man nennt dies *Schwebung*.

Für die Überlagerung $p(t, x)$ gilt dann,

$$\begin{aligned} p(t, x) &= \frac{\hat{p}}{2} [\sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x)] \\ &= A(t, x) \cdot \sin(\omega t - kx), \end{aligned}$$

mit den Mittelwerten

$$\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 \quad \text{und} \quad k = (k_1 + k_2)/2$$

der beiden Kreisfrequenzen bzw. Wellenzahlen und der Amplitudenfunktion

$$A(t, x) \equiv \hat{p} \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right).$$

Letztere beschreibt die Einhüllende des Wellenpaketes $p(t, x)$. Sie kann selbst als Welle aufgefasst werden, die sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$c_{gr}^* = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

ausbreitet und Gruppengeschwindigkeit heißt. Dies ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Lage des Maximums der Einhüllenden des Wellenpakets verschiebt. Für infinitesimal kleine Unterschiede der Kreisfrequenzen und Wellenzahlen definiert man deshalb die sogenannte *Gruppengeschwindigkeit* als,

$$c_{gr} \equiv \frac{d\omega}{dk} \quad (32)$$

Wegen (4) kann man in (32) $\omega = k \cdot c_{ph}$ setzen, wobei im Allgemeinen c_{ph} von der Wellenzahl k abhängt. Die obige Ableitung $d\omega/dk = d(k \cdot c_{ph})/dk$ erfolgt nach der Produktregel, man erhält dann,

$$c_{gr} = c_{ph} + k \frac{dc_{ph}}{dk}.$$

Es gilt $k = 2\pi/\lambda$, so dass man unter Beachtung der Kettenregel auch wie folgt schreiben kann,

$$c_{gr} = c_{ph} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dc_{ph}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}.$$

Aus $\lambda = 2\pi/k$ folgt

$$d\lambda/dk = -2\pi/k^2 = -\lambda^2/2\pi$$

und somit schließlich für die Gruppengeschwindigkeit,

$$c_{gr} = c_{ph} - \lambda \frac{d c_{ph}}{d \lambda} \quad (33)$$

Hier erkennt man, dass c_{gr} und c_{ph} gleich sind, wenn c_{ph} nicht von der Wellenlänge abhängt, wenn also $d c_{ph}/d \lambda = 0$ gilt. Andernfalls würde ein anfangs auf engem Raum lokalisierter Puls (lokale Erregung) bei der Ausbreitung im Raum auseinander laufen, also immer stärker „verschmiert“ werden. Dies nennt man *Dispersion*.¹²⁾

A.3 Phasengeschwindigkeit im idealen Gas

Die Schallausbreitung bewirkt lokale Druckänderungen, welche lokale Temperaturschwankungen nach sich ziehen — eine Erwärmung bei Kompression und Abkühlung bei Expansion. Weil diese Schwankungen in Gasen oder Gasgemischen wie Luft, extrem schnell erfolgen, können die entsprechenden thermodynamischen Zustandsänderungen als adiabatisch angesehen werden, also mit vernachlässigbarem Wärmeaustausch zwischen benachbarten Volumenelementen. Die entsprechende Adiabaten Gleichung lautet

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.} ,$$

mit der (absoluten) Temperatur T und dem Volumen V . Der Adiabatenexponent (Isentropenexponent) $\kappa = c_p / c_v$ ergibt sich aus dem Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und c_v für Zustandsänderungen des Ausbreitungsmediums bei konstantem Druck (isobar) bzw. Volumen (isochor). Mit der Zustandsgleichung für ideale Gase,

$$pV = nRT , \quad (34)$$

(n : Molzahl, R : universelle molare Gaskonstante), folgt,

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \frac{pV}{nR} \cdot V^{\kappa-1} = \frac{pV^\kappa}{nR} = \text{const.}$$

Hieraus folgt mit anderer Bedeutung der Konstanten,

$$pV^\kappa = \text{const.}$$

¹²⁾Im hörbaren Frequenzbereich zeigt Luft kaum Dispersion. Jedoch tritt merkliche Dispersion in mehratomigen Gasen wie CO_2 auf, bei Frequenzen im unteren Ultraschallbereich ($f \gtrsim 100$ kHz). Auch Oberflächen- und Biegewellen in plattenförmigen Bauteilen (Festkörpern) sind dispersiv, was für die Bau- und Raumakustik von Bedeutung ist. Auch breitbandige Wellenpakete in Flüssigkeiten zeigen merkliche Dispersion.

mit dem totalen Differential

$$V^\kappa dp + \rho \kappa V^{\kappa-1} dV = 0 .$$

Leicht umgestellt folgt,

$$\frac{dV}{d\rho} = - \frac{V^\kappa}{\rho \kappa V^{\kappa-1}} .$$

Der Vergleich mit (25) liefert für den Kompressionsmodul,

$$K = \frac{1}{\kappa \rho} . \quad (35)$$

Die Zustandsgleichung (34) kann mit der Masse m , der molaren Masse $M = m/n$ und der Massedichte $\rho = m/V$ wie folgt umgestellt werden,

$$\rho = \frac{\rho RT}{M} .$$

Somit kann (35) auch als

$$K = \frac{M}{\kappa \rho RT}$$

geschrieben werden. Setzt man dies in (28) ein, erhält man die auf S. 3 angegebene Gleichung (5) für die Phasengeschwindigkeit.

A.4 Reflektions- und Transmissionskoeffizient für feste Wände

Trifft Luftschall mit der Intensität I_0 auf die Vorderseite einer festen Wand, so tritt der Bruchteil βI_0 in die Wand ein. Beim Austritt auf der hinteren Wandseite, vom Wandinneren in die Luft, tritt erneut ein Impedanzwechsel auf. Hier wird der Bruchteil $\beta \cdot \beta I_0$ transmittiert, der Anteil $\alpha \cdot \beta I_0$ verbleibt im Inneren. Dieser wird nun an der Vorderseite erneut teilweise reflektiert, und letztlich ein weiterer Anteil $\beta \cdot \alpha^2 \beta I_0$ transmittiert usw. (Abb. 8). Diese Mehrfachreflektionen überlagern sich letztlich zur gesamten durch die Wand transmittierten relativen Intensität,

$$\begin{aligned} \frac{I_t}{I_0} &= \beta^2 \cdot (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \dots) \\ &= \frac{\beta}{2 - \beta} . \end{aligned} \quad (36)$$

Analog erhält man für die gesamte reflektierte Intensität nach kurzer Rechnung,

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_0} &= \alpha + \beta^2 \cdot (\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \dots) \\ &= \frac{2\alpha}{1 + \alpha} . \end{aligned} \quad (37)$$

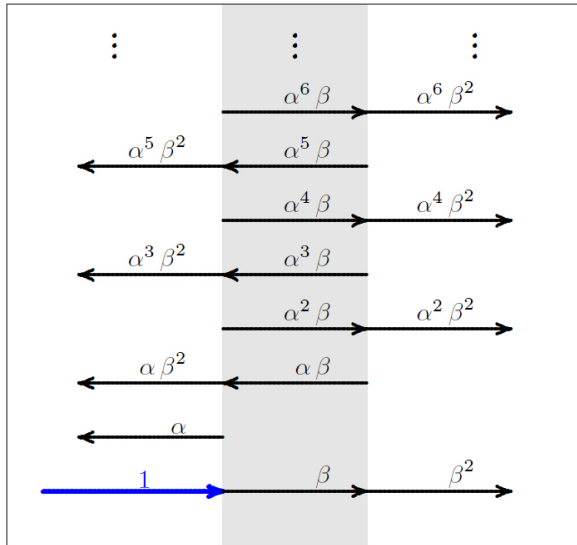


Abb. 8: Termschema für die Reflexion und Transmission von Schallwellen an einer Wand (grau).

Für die Koeffizienten gilt wiederum die Energieerhaltung, denn unter Beachtung von $\beta = 1 - \alpha$ folgt,

$$\frac{I_t}{I_0} + \frac{I_r}{I_0} = \frac{\beta}{2 - \beta} + \frac{2\alpha}{1 + \alpha} = 1.$$

Für sehr große Impedanzunterschiede gilt $\beta \ll 1$, so dass

$$\frac{I_t}{I_0} \approx \frac{\beta}{2}, \quad \frac{I_r}{I_0} \approx \frac{1 + \alpha}{2}$$

gesetzt werden kann.

A.5 Anwendungsbereiche

Wasserschall: Wasser (10 °C) und Luft (20 °C) haben die Impedanzen

$$Z_W \approx 144 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Z_L \approx 414 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Trifft nun Schall senkrecht auf diese Grenzfläche, so beträgt der Reflektionskoeffizient $\alpha \approx 0,999$. Folglich dringt von der Energie des Luftschalls nur der winzige Bruchteil von etwa 1‰ in das Wasser ein. Umgekehrt gelangt vom Wasserschall nur dieser Bruchteil in die Luft. Beispielsweise bleibt unterseeischer Lärm von Ölplattformen oder Schiffschrauben im Wesentlichen im Wasser „gefangen“ und irritiert möglicherweise Meeressäuger, die per Ultraschall über große Entfernungen kommunizieren.

Schallschutz: In verkehrsreichen Wohngebieten baut man Schallschutzwände aus möglichst massedichten Material (Beton) um die Transmission zu minimieren. Die akustischen Impedanzen von Luft und Beton verhalten sich etwa wie $\phi \lesssim 1/20000$, woraus nach (18) der Reflektionskoeffizient $\alpha \gtrsim 0,9999$ folgt. Diese nahezu vollständige Reflexion bedeutet jedoch im Allgemeinen keine quasi vollständige Schalleminierung hinter einer Schallschutzwand, weil zum einen die Schallwellen an der Oberkante der Wand gebeugt werden und zum anderen das menschliche Gehör sehr empfindlich ist (s. Anhang, S. 13). Zu beachten ist auch, dass es innerhalb der Wand zu Mehrfachreflexionen, so dass der Reflektions- und Transmissionskoeffizient (17) modifiziert werden muss (s. Anhang, S. 12).

Diagnostik: In der Medizin nutzt man die Schallreflexion an den Grenzflächen verschiedener Organe. Man sendet hier kurze hochfrequente (MHz-Bereich) Ultraschallimpulse in den Körper und misst die Zeit bis zum Eintreffen der Echos aus der Tiefe des Körpers. Unterscheiden sich die Phasengeschwindigkeiten in den Organen nur gering, so kann man aus der Geschwindigkeit und der vermessenen Impulslaufzeit auf den Ort der Reflexion in der Tiefe des Körpers schließen. Letztlich wird diese Ortsinformation graphisch als Ultraschall-Bild (in Falschfarben oder Grautönen) dem Nutzer präsentiert. Dieses Radarprinzip nutzen auch Techniker bei der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung sowie Geologen bei Lagerstätten erkundung. Im Unterwasserbereich nutzt man es zur Sonarortung¹³⁾ von tauchenden Objekten, z. B. von Fischschwärmen und U-Booten, sowie zur Messung von Wassertiefen.

A.6 Gehör des Menschen

Das Hören ist eines der wichtigsten Sinne des Menschen, neben dem Tast- und Geruchssinn sowie dem Sehen (Gesichtssinn). Das Ohr ist das Hörorgan, Abb. 9. Es wandelt Schallwellen in Nervenreize, die im auditiven Kortex, dem Hörzentrum der Großhirnrinde, weiterverarbeitet werden. Die Schallwandlung in Nervenreize erfolgt schrittweise.

¹³⁾Das Acronym **sonar** steht für **sound navigation & ranging**.

Gehörmuschel:

Die Gehörmuschel besteht im Wesentlichen aus elastischem Knorpelgewebe. Sie fungiert als *Schallrichter*, der die auf ihn eintreffende Schallenergie in den äußeren Gehörgang fokussiert. Je größer die Ohrmuschel, desto niedriger liegt die Reizwahrschwelle, d.h. desto leisere Töne können wahrgenommen werden.

Gehörgang:

Der Gehörgang wird nach innen durch das *Trommelfell (Membrana tympani)* begrenzt. Das ist eine elastische Membran, die von den Druckkräften des Schallfeldes im Gehörgang zu mechanischen Schwingungen angeregt wird.

Mittelohr:

Das Trommelfell ist luftundurchlässig, es separiert das wiederum luftgefüllte Mittelohr vom Gehörgang. Ändert sich der Außendruck (mittlerer Luftdruck, ohne Schalldruckschwankungen), so bleibt der Luftdruck im Mittelohr zunächst nahezu unbeeinflusst. Durch die resultierende Druckdifferenz wird das Trommelfell vorgespannt und somit gewölbt. Die Wölbung zeigt nach innen, wenn der Außendruck steigt, etwa beim Absteigen vom Berg oder Tauchen ins Wasser. Ein vorgespanntes Trommelfell wird im sonst gleichen Schallfeld zu Schwingungen mit geringerer Amplitude angeregt, was mit einer Einschränkung des Hörvermögens einhergeht. Folglich ist ein Druckausgleich des (mittleren) Luftdrucks zwischen dem Außen- und Mittelohr wünschenswert. Dies kann über die *eustachische Röhre* erfolgen, einem Kanal zwischen dem

Mittelohr und Mundraum. In der Regel ist diese Röhre mit schleimartigen Substanzen verklebt. Bei Bewegungen des Unterkiefers, etwa durch sprachliche Artikulation oder Schlucken, wird diese Röhre jedoch kurzzeitig luftdurchlässig, so dass ein Druckausgleich erfolgen kann. ¹⁴⁾

Die Übertragung des Schallsignals im Mittelohr erfolgt über eine dreigliedrige Kette von Gehörknöchelchen: *Hammer (Malleus)*, *Amboss (Incus)* und *Steigbügel (Stapes)*. Der Hammer liegt an der Innenseite des Trommelfells, nimmt dessen mechanische Schwingungsenergie auf, die über den Amboss an den Steigbügel zum *ovalen Fenster (Fenestra vestibuli ovalis)* übertragen wird. Dieses Fenster ist eine Membran, welche das Mittel- vom flüssigkeitsgefüllten Innenohr separiert.

Innenohr:

Im Innenohr befinden sich Hörnervenzellen, die ein flüssiges Medium benötigen. Folglich muss die Schallenergie zunächst in die Flüssigkeit eingebracht werden. Ein direkter Übergang von Luft in die Flüssigkeit wäre wegen der großen Unterschiede der akustischen Impedanzen beider Medien recht ineffektiv, ein Großteil der Schallenergie würde an der Grenzschicht reflektiert werden. Abhilfe schafft hier der Steigbügel, der auf das ovale Fenster drückt und somit seine Schwingungsenergie recht effektiv in das Innenohr leitet.

Das Innenohr befindet sich in einem Hohlraum des Schädelknochens, es hat also starre Wände. Darüber hinaus ist die enthaltene Flüssigkeit (nahezu) inkompressibel. Folglich würde der Steigbügel die Membran des ovalen Fensters zunächst kaum bewegen können. Nun gibt es jedoch an einer anderen Stelle eine weitere Membran zwischen dem Mittel- und Innenohr, das *runde Fenster (Fenestra cochleae)*. Dieses wölbt sich mit dem Eindrücken des ovalen Fensters zum Mittelohr hin aus, so dass letztlich der Energieeintrag ins Innenohr sehr effektiv ist.

Wesentlicher Bestandteil des Innenohres ist die *Hörschnecke (Cochlea)*. Dies ist ein spiralförmig geformter Hohlraum im Felsenbein (sehr hartes Knochenma-

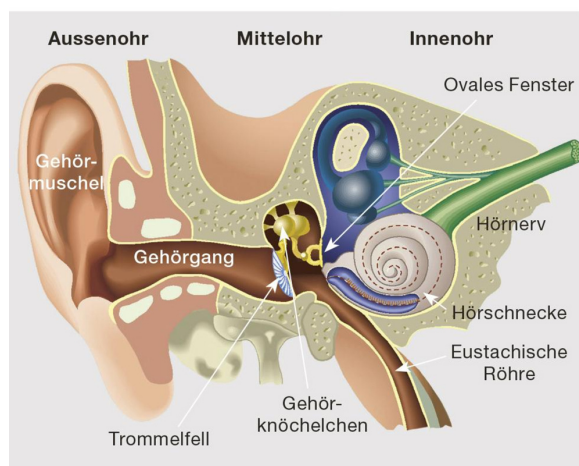


Abb. 9: Querschnitt durch das menschliche Ohr.

¹⁴⁾ Taucher provozieren diesen Druckausgleich, indem sie sich die Nase zuhalten (mit Fingern oder der Taucherbrille) und dann bei geschlossenem Mund Luft aus der Lunge in dem Mundraum pressen. Hier geht es vor allem darum, das Trommelfell nicht zu überdehnen und somit schmerzliche Rissbildungen zu vermeiden.

terial), mit einer Länge von 33...35 mm und etwa zweieinhalb Windungen, beim gesunden Menschen. Der Hörschneckengang ist in drei (flüssigkeitsgefüllte) Teilgänge (Treppen) untergliedert, welche durch verschiedene Membranen getrennt sind. Unmittelbar hinter dem ovalen Fenster ist es die *Vorhof-treppe* (*Scala vestibuli*), die am Schneckenloch in die *Paukentreppe* (*Scala tympani*) übergeht. Ein Druck auf das ovale Fenster erregt eine *Wanderwelle* entlang der Vorhof-treppe in Richtung der *Schnecken-spitze* (*Apex*) und führt zur Auslenkung der Basilarmembran.

Diese Membran ist im Mittel 0,4...0,6 mm breit, ihre (mechanische) Spannung nimmt hin zur Schnecken-spitze ab. Am stärksten gespannt ist sie also in der Nähe des ovalen Fensters (Schneckeneingang), dort ist sie auch mit 0,08...0,16 mm deutlich schmaler. Hieraus ergeben sich unterschiedliche elastische Eigenschaften entlang der Basilarmembran. Wird nun eine Wanderwelle von einer harmonischen Schallwelle (reiner Ton) erregt, lenkt dies in Folge der variierenden elastischen Eigenschaften die Basilarmembran an verschiedenen Orten unterschiedlich stark aus. Je höher die Tonfrequenz desto dichter liegt der Ort der maximalen Auslenkung am ovalen Fenster. Somit werden Tonhöhen in Ortlagen übersetzt (kodiert). Bei Tongemischen (Überlagerung harmonischer Schallwellen, wie Klänge oder Geräusche) erfolgt auf diese Weise quasi eine Fourierzerlegung. Dabei wird jedoch nur die Amplitude der Fourierkomponenten wahrgenommen, ihre Phasenlage spielt für den Schallwahrnehmung keine Rolle. Dies nutzt man u.a. bei der redundanzarmen Sprachkodierung in der modernen Telefonietechnik.

Entlang der Basilarmembran befinden sich sensorische Nervenzellen, sogenannte *Haarzellen*, welche entsprechend der Auslenkung der Basilarmembran mehr oder weniger stark erregt werden. Sie stellen ihrerseits aktive biomechanische Oszillatoren dar. Das bedeutet, sie benötigen nur einen energetisch äußerst geringen Anstoß (Trigger), um selbständig zu schwingen und elektrische Nervenreize über ihre Axone weiterzuleiten. Hierauf beruht wesentlich die extrem hohe Empfindlichkeit des menschlichen Gehörs.

Die Axone der Haarzellen vereinigen sich im Hörnerv, der zunächst zum auditorischen Kortex führt. Schließlich werden die Signale einer komplexen neurophysiologischen Verarbeitung zugeführt. Dabei werden Tongemische (Klänge, Geräusche) als (nahezu) gleichzeitig eintreffende Signale von Haarzellen an verschie-

denen Orten deutbar. Hierauf basiert wesentlich das Sprachverständnis, also die Differenzierung unterschiedlicher Phoneme und Phonemvarianten (Allophone).

Der gesamte Höreindruck wird jedoch auch von anderen Sinneseindrücken beeinflusst. So wird beispielsweise ein roter Zug unter sonst gleichen Bedingungen (gleiche objektive Lautstärke) lauter als ein grauer wahrgenommen.

Darüber hinaus werden Haarzellen auch durch sogenannten Körperschall erregt, der vom Sprechorgan durch den Körper zum Innenohr unter Umgehung der Luft und des Außenohres gelangt. Eine Folge hiervon ist, dass die eigene Stimme verfremdet erscheint, wenn sie von einem auditiven Aufzeichnungsgerät wiedergegeben wird.

Hörkurven:

In Abb.10 sind Hörkurven des Ohres dargestellt, für gesunde junge Menschen. Den hörbaren Bereich von harmonischen Schallwellen (Tönen) liegt etwa zwischen 20 Hz und 20 kHz. Zur Schallwahrnehmung an diesen Hörgrenzen sind jedoch recht hohe Intensitäten nötig.

Die Hörempfindlichkeit hängt in komplizierter Weise von der Tonhöhe ab. Zur quantitativen Beschreibung führt man die *Phon-Skala* ein. Dazu teilt man zunächst für die Tonhöhe 1 kHz den Schalldruck-Pegel in gleich hohe Stufen von z. B. 10 dB ein und nennt diese Einteilung *Phon*. Damit gilt bei 1 kHz, $n \text{ phon} = n \text{ dB}$, n beliebig. Nun macht man Hörtest, indem man von der Frequenz $f = 1 \text{ kHz}$ ausgehend zunächst einen bestimmten Phon-Wert (z. B. 30 phon) einstellt, also die Schalldruckamplitude auf den Wert $\hat{p}_f = 1000 \cdot \hat{p}_0$ setzt. Nun ändert man die Frequenz um einen bestimmten Wert Δf und passt dann die Schalldruckamplitude \hat{p} so an, dass der Ton mit der Frequenz $1 \text{ kHz} + \Delta f$ die gleiche Lautstärkeempfindung hervorruft wie der 1-kHz-Ton. Dies macht man für alle Frequenzverschiebungen $1 \text{ kHz} + \Delta f$ im hörbaren Bereich und erhält somit eine *Isophone*, also eine Kurve gleicher Lautstärkeempfindung, in unserem Beispiel von 30 phon. Dies wiederholt man nun für andere Lautstärken und erhält dann die Kurvenschar in Abb.10. Lautstärkeunterschiede von ca. 1 phon sind gerade noch wahrnehmbar, weshalb man in der Regel keine Bruchteile von einem Phon angibt.

Besonders empfindlich ist das menschliche Ohr bei Tönen der Frequenzen nahe 4 kHz. Hier kommt es

zur Überlagerung der einlaufenden Welle und der am Trommelfell reflektierten Welle (nur einseitig eine feste Wand). Die Schalldruckamplitude am Trommelfell wird hier maximal, wenn die Länge L_{Ohr} des äußeren Gehörgangs ein ungeradzahliges Vielfache von $\lambda/4$ beträgt (Eigenresonanzen, wie bei Orgelpfeifen). Daraus folgen die Resonanzfrequenzen,

$$f_n = \frac{c}{L_{\text{Ohr}}} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Für die Ohrtemperatur von ca. 30 °C gilt nach (7) $c \approx 350 \text{ m/s}$. Mit $L_{\text{Ohr}} = (20 \dots 25) \text{ mm}$ erhält man dann die hörbaren Resonanzfrequenzen zu,

$$f_1 = (3,5 \dots 4,4) \text{ kHz}, \quad f_2 = (10,5 \dots 13,2) \text{ kHz}.$$

Dies ist in den Hörkurven von Abb. 10 deutlich zu erkennen. Die Amplitude der Schalldruckschwankungen am Trommelfell ist hier besonders groß, was die höhere Empfindlichkeit an den Resonanzstellen bedingt. f_3 liegt an der oberen Grenze des hörbaren Frequenzbereiches und alle noch höheren Resonanzen sind für das menschliche Ohr nicht wahrnehmbar.¹⁵⁾

Geht man davon aus, dass das menschliche Außenohr (die Ohrmuschel) die Schallenergie aus der Fläche von $A_{\text{Ohr}} \lesssim 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ durch den äußeren Gehörgang auf das Trommelfell leitet, so erhält man unter Beachtung von (15) für den Referenzdruck bei 1 kHz (nahezu Hörschwelle) am Trommelfell die Schallleistung

$$I_0^* \cdot A_{\text{Ohr}} \lesssim 10^{-15} \text{ W}.$$

Dieser sehr geringe Wert wie auch die damit verbundenen geringen Auslenkungen (14) der Luftmoleküle verdeutlichen, welche erstaunlich hohe Empfindlichkeit das menschliche Hörorgan besitzt.

Die Schmerzgrenze für einen 1-kHz-Ton wird etwa beim Schalldruckpegel 130 dB erreicht, was der Schalldruckamplitude

$$\hat{p}_1 = 10^{130/20} \cdot \hat{p}_0 \lesssim 63 \text{ Pa}$$

entspricht. Die Amplitude der Auslenkung der Luftmoleküle ist hier unter den Normalbedingungen (13) mit

$$\hat{\xi}_1^* = 10^{130/20} \cdot \hat{\xi}_0^* \lesssim 2,44 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

noch immer recht klein, wie auch die Intensität am Trommelfell,

$$I_1^* \cdot A_{\text{Ohr}} = 10^{130/10} \cdot I_0^* \cdot A_{\text{Ohr}} \lesssim 10^{-2} \text{ W}.$$

¹⁵⁾ Mit einem Hörtrichter könnte man die Resonanzfrequenzen nach unten verschieben. Hätte dieser Trichter beispielsweise die Länge $2 L_{\text{Ohr}}$, so würden die Resonanzfrequenzen gedrittelt werden.

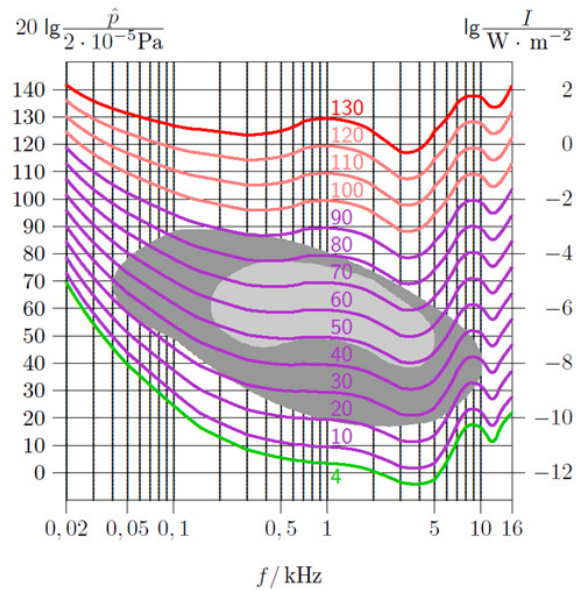


Abb. 10: Typische Hörkurven des Menschen. Auf der Abszisse ist die Frequenz von Tönen mit einer logarithmischen Skala dargestellt und auf der Ordinate der Pegel (Dezibel-Skala) der Schalldruckamplitude \hat{p} . Parameter der Kurvenschar ist die Phonzahl. Für jeden Punkt auf einer Kurve ist die Lautstärkeempfindung gleich. Die untere grüne Kurve markiert die Hörschwelle (ca. 4 Phon). Jenseits der 100-Phon Kurve besteht die Gefahr der Verletzung des Gehörs. Bei 130-Phon liegt die Schmerzgrenze. Individuelle Verschiebungen der Phonlinien von gesunden Menschen um bis zu 10 dB sind möglich. Das kleine und größere, grau unterlegte Gebiet markiert den Bereich der menschlichen Sprache bzw. der Musik (Fastl u. Zwicker, *Psychoacoustics — Facts and Models*, Springer-Verlag 2007, Berlin u.a., S.17ff.).

Wahrnehmung von Tongemischen:

Tongemische sind Schallwellen, die man als additive Überlagerung von vielen harmonischen Wellen (Tönen) darstellen kann (Fourier-Analyse). Je nachdem, ob die Frequenzverhältnisse in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, unterteilt man Tongemische in Klänge und Geräusche. Für die subjektive Wahrnehmung von Tongemischen sind allein die vorkommenden Frequenzen und Amplituden der einzelnen Töne, nicht aber deren gegenseitige Phasenlage entscheidend.

Wird der Schall beispielsweise durch ein symmetrisches Rechtecksignal der Grundfrequenz f und der Amplitude A erzeugt, so hört man die Überlagerung von Tönen der Signale mit den Frequenzen $f_n = n \cdot f$, mit $n = 1, 3, 5 \dots$, und den Amplituden

$$A_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{n}, \quad \text{mit } n = 1, 3, 5 \dots$$

Dies ist in der Abb. 11, oben, illustriert.

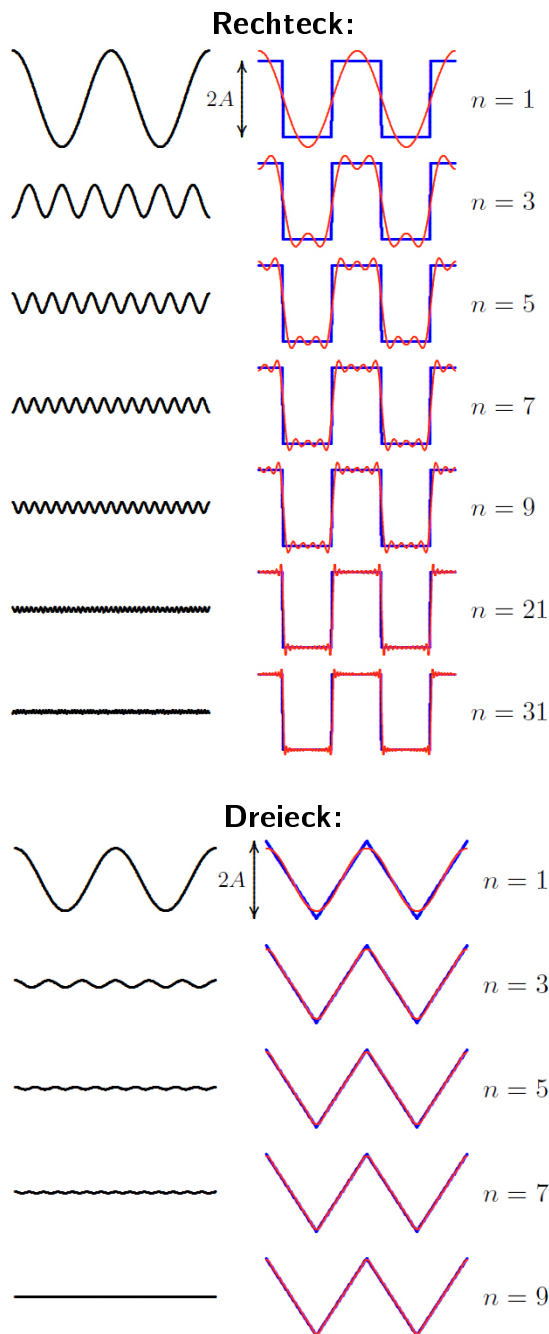


Abb. 11: Fourier-Komponenten $A_n \cdot \sin(2\pi \cdot nft)$ (links, schwarz) von Rechteck- und Dreiecksignalen (rechts, blau). Die Summe aller Fourier-Komponenten bis zur Ordnung n ist rechts, rot dargestellt. Diese rote Kurve approximiert das entsprechende Signal mit zunehmender Ordnung immer besser, jedoch mit Ausnahme der Sprungstellen des Rechtecksignals. Die Amplituden der Oberwellen fallen beim Rechtecksignal linear mit der Ordnung n , hingegen beim Dreiecksignal quadratisch.

Generell kann man nicht alle Oberwellen ($n > 1$) hören. Liegen die Grundfrequenz $f_1 = f$ und die Amplitude $A_0 = 4A/\pi$ im hörbaren Bereich, so wür-

de man schon die erste vorkommende Oberwelle mit der Frequenz $f_3 = 3f$ nicht mehr hören können, sobald $f \gtrsim f_0/3$ gilt, wobei f_0 die obere Hörschwelle bei der entsprechenden Amplitude A_3 sei. Subjektiv nimmt man dann also nur noch einen reinen Ton der Frequenz f wahr. Wird andererseits die Grundfrequenz unterhalb der Hörschwelle f_U gewählt, so hört man nur noch Oberwellen im hörbaren Frequenzband. Dies ist dann ein „Knacken“ mit jedem (positiven und negativen) Sprung des Rechtecksignals, also mit der Wiederholrate $2f$. Man kennt dies zum Beispiel vom Einschaltknacken, wenn etwa ein Lautsprecher an einen schon aufgeregelten Verstärker Ausgang geschaltet wird. Bei Verringerung der Grundfrequenz erscheint das Knacken entsprechend seltener, aber gleichbleibend laut (pro Knacken). Dies wird dadurch verständlich, dass in ein gewisses Frequenzband, in welchem eine Gruppe von Haarzellen entlang der Basilarmembran erregt wird, mit Verringerung der Grundfrequenz immer gleich viel Energie pro Knacken fällt. Dies liegt daran, dass die Amplituden der Oberwellen in diesem Band zwar linear fallen, was aber durch die linear wachsende Anzahl von Oberwellen in diesem Band ausgeglichen wird.

Führt man das gleiche Experiment mit symmetrischen Dreiecksignalen aus, so ist der subjektive Höreindruck bei wachsender Grundfrequenz analog zu dem beim Rechtecksignal. Allerdings fällt hier die Amplitude der Oberwellen mit dem Quadrat der Ordnung (Abb. 11, unten),

$$A_n = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{A}{n^2}, \quad \text{mit } n = 1, 3, 5, \dots$$

Folglich wird die Energie in einem festen hörbaren Frequenzbereich mit fallender Grundfrequenz kleiner, also der Höreindruck immer leiser.