Übungsblatt 10 Abgabe: Donnerstag 9.1.2020

Aufgabe 21 *(5 Punkte)*

Heisenbergmodell:
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die freie Energie im Heisenbergmodell durch

$$F(T,B) = -kTN\left\{\ln\left[2\cosh\left(\frac{\mu_B B_{eff}}{kT}\right)\right] - \frac{Jz}{2kT}\langle\sigma\rangle^2\right\}$$

gegeben wird, wobei

$$B_{eff} = B + \frac{zJ\langle\sigma\rangle}{\mu_B}.$$

Zeigen Sie, dass die Magnetisierung $M = -\partial F/\partial B$ durch

$$M = \mu_B N \tanh\left(\frac{\mu_B B_{eff}}{kT}\right)$$

gegeben ist (beachten Sie dabei, dass $\langle\sigma\rangle$ auch vom äußeren Magnetfeld B abhängt). Skizzieren Sie die Magnetisierung in Abhängigkeit von T.

Aufgabe 22 *(15 Punkte)*

Exakte Lösung der Ising-Kette mit freien Enden:
Betrachten Sie eine Kette aus $N+1$ Ising-Spins mit freien Enden und nächster-Nachbar-Wechselwirkung J ($J > 0$ für ferromagnetische Kopplung).

$$H_{N+1} = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1}, \quad \sigma_i = \pm 1. \tag{1}$$

Wir interessieren uns für den thermodynamischen Limes, d.h. wir nehmen an, dass N sehr groß ist.

a) Berechnen Sie die Zustandssumme Z_{N+1} mit Hilfe der folgenden Prozedur (Rekursionsprozedur): zerlegen Sie den Hamiltonoperator (1) in zwei Teile, $H_{N+1} = H_N - J\sigma_N\sigma_{N+1}$ (wobei H_N der Hamiltonoperator (1) für nunmehr nur die ersten N Spins ist) und benutzen Sie, dass die Eigenwerte von σ_{N+1} gleich ± 1 sind, führen Sie die Summe über $s_{N+1} = \pm 1$ explizit aus, vereinfachen Sie, und wiederholen Sie die Prozedur rekursiv (i.e. $H_N = H_{N-1} - J\sigma_{N-1}\sigma_N$ etc).

b) Finden Sie Ausdrücke für die Freie Energie und Entropie, sowie für innere Energie und Wärmekapazität. Skizzieren Sie die Wärmekapazität als Funktion der Temperatur. Hängt die Wärmekapazität vom Vorzeichen von J ab (d.h. davon, ob die Wechselwirkungen ferromagnetisch oder antiferromagnetisch sind)?

c) Berechnen Sie die Magnetisierungsdichte $m = \langle\sigma_j\rangle$ für den Fall, dass der Spin σ_j nicht zu Nahe zu einem der Enden der Spinkette ist.

d) Berechnen Sie die Spinkorrelationsfunktion $\Gamma_{ij} = \langle\sigma_i\sigma_j\rangle - \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle$ und zeigen Sie, dass diese exponentiell mit ansteigenem Abstand $|j-i|$ auf der Skala der Korrelationslänge ξ abfällt, d.h. $\Gamma_{ij} \approx e^{|j-i|/\xi}$ wobei $\xi = -[\ln(\tanh\beta J)]^{-1}$.