Übungsblatt 11 Abgabe: Dienstag 14.1.2020

Aufgabe 23 *(5 Punkte)*

Phasenübergang im Van-der-Waals-Gas:
Die Zustandsgleichung für ein Van-der-Waals-Gas ist durch

$$\left(P + \frac{N^2 a}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_B T \tag{1}$$

gegeben. Die Isothermen im $P-V$-Diagramm haben für Temperaturen T unterhalb eines kritischen Wertes T_c jeweils ein lokales Maximum, ein lokales Minimum, und einen Wendepunkt. Die Bereiche zwischen dem Maximum und dem Minimum stellen instabile Zweige mit $\partial P/\partial V > 0$ dar. Diese Bereiche entsprechen einem Phasenübergang zwischen flüssigem und gasförmigem Aggregatzustand, wobei in den instabilen Bereichen eine Phasenseparation zwischen den beiden Phasen auftritt (flüssige Tropfen bilden sich in der Gasphase durch Kondensation, bzw. Gasblasen bilden sich ausgehend von der flüssigen Phase). Im Koexistenzbereich müssen die Isothermen durch Geraden mit konstantem Druck ersetzt werden, wobei die Maxwellkonstuktion (siehe Aufgabe 6) für jede Isotherme den entsprechenden Gleichgewichtsdruck und die Volumina V_F und V_G in der reinen flüssigen Phase F bzw. reinen Gasphase G liefert, zwischen denen der Koexistenzbereich realisiert ist.
Am kritischen Endpunkt gilt $V_F = V_G$ und die lokalen Extrema und der Wendepunkt entarten zu einem Sattelpunkt, der durch die Werte (P_c, V_c, T_c) characterisiert ist. Dieser Punkt heißt kritischer Endpunkt. Die Werte P_c, V_c, und T_c ergeben sich aus Gleichung (1) sowie den Bedingungen

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0. \tag{2}$$

Berechnen Sie P_c, V_c, und T_c als Funktion von a, b, und N, und zeigen Sie, dass Gleichung (1) ausgedrückt durch die reduzierten Variablen

$$\tilde{p} = \frac{P}{P_c}, \qquad \tilde{v} = \frac{V}{V_c}, \qquad \tilde{t} = \frac{T}{T_c} \tag{3}$$

die folgende Form annimmt:

$$\left(\tilde{p} + \frac{3}{\tilde{v}^2}\right)\left(3\tilde{v} - 1\right) = 8\tilde{t}. \tag{4}$$

Aufgabe 24 *(15 Punkte)*

Kritische Exponenten im Van-der-Waals-Gas:
Für Temperaturen oberhalb der Temperatur des kritischen Endpunktes (P_c, V_c, T_c) des Van-der-Waals-Gases kann nicht mehr zwischen Flüssigkeiten und Gasen unterschieden werden. Um das Verhalten in der Nähe des kritischen Endpunktes zu verstehen, führen wir in Gleichungen (3)-(4) Relativvariable

$$\pi = \frac{P - P_c}{P_c}, \quad \nu = \frac{V - V_c}{V_c}, \quad \tau = \frac{T - T_c}{T_c} \tag{5}$$

ein.

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass unter der Annahme $\tau \ll 1$ und $\nu \ll 1$ der Druck π durch die kubische Gleichung

$$\pi \approx -\frac{3}{2}\nu^3 + 9\tau\nu^2 - 6\tau\nu + 4\tau \tag{6}$$

genähert werden kann.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die kritischen Exponenten γ und δ, die die folgenden Beziehungen erfüllen:

$$\kappa_T \sim \left(\frac{\partial\nu}{\partial\pi}\right)_\tau \sim \tau^{-\gamma}, \quad \pi \to 0 \tag{7}$$

und

$$|\pi| \sim |\nu|^\delta, \quad \tau = 0. \tag{8}$$

c) (7 Punkte) Ein geeigneter Ordnungsparameter für den Phasenübergang zwischen Flüssigkeit und Gas ist die Differenz der (molaren) Volumina der beteiligten Phasen, $\nu_G - \nu_F$. Schreiben Sie dazu Gleichung (6) in folgende Form um:

$$(\pi - \pi_0(\tau)) = A(\nu - \nu_0(\tau))^3 + B\tau(\nu - \nu_0(\tau)). \tag{9}$$

Die entsprechenden Werte für ν_G und ν_F sind die Lösungen dieser Gleichung für $\pi = \pi_0(\tau)$. Sie liegen symmetrisch um den Wert $\nu_0(\tau)$. Warum ist dies äquivalent zur Maxwell-Konstruktion? Bestimmen Sie den Ordnungsparameter $\varphi = \nu_G - \nu_F$ und zeigen Sie, dass für $\tau < 0$ im Limes $\tau \to 0$ gilt:

$$\varphi \sim (-\tau)^\beta \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Zusatzaufgabe 5 *(5 Punkte)*

Hysteresis im Heisenbergmodell:
In der Vorlesung hatten wir eine graphische Lösung der Gleichung

$$\frac{T}{T_c}\big(x - h\big) = \tanh(x) \tag{11}$$

in einem m-x-Diagramm diskutiert, wobei

$$T_c = \frac{zJ}{k}, \quad x = \frac{\mu_B B_{\text{eff}}}{kT}, \quad h = \frac{\mu_B B}{kT} \tag{12}$$

und die Magnetisierung pro Spin and magnetic moment,

$$m = \frac{M}{\mu_B N} \tag{13}$$

ist durch $m = \tanh(x)$ gegeben.
Diskutieren Sie für $T < T_c$ graphisch die Lösungen für $m(h)$ als Funktion von h für positive und negative h, indem Sie Gleichung (11) graphisch lösen und die Werte von m als Funktion von h plotten. Berechnen Sie den kleinsten Wert den m vom Betrag her annimmt, bevor die Magnetisierung in die entgegengesetzte Richtung umklappt. Identifizieren Sie einen instabilen Zweig in der Kurve, bei dem $\partial m/\partial h$ negativ wird. Das Resultat für die stabilen ($\partial m/\partial h \geqslant 0$) Zweige beschreibt die Hysterese für einen Eindomänen-Ferromagneten. In realen Ferromagneten stellt sich typischerweise in dem Hysteresebereich ein Multidomänenzustand ein und das Verhalten wird modifiziert (wie?).