Übungsblatt 1 Abgabe: Dienstag 22.10.2019

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Äquivalenz von Kelvin-Skala und ideales-Gas-Temperaturskala:
Für ein ideales Gas aus N Teilchen lauten die Zustandsgleichungen

$$pV = Nk_BT, \quad U = Nc_VT, \quad c_p - c_V = k_B, \tag{1}$$

wobei c_p, c_V Wärmekapazitäten pro Teilchenzahl bei konstanten Druck bzw. Volumen sind.

a) Zeigen Sie, dass für eine adiabatische Zustandsänderung eines idealen Gases gilt:

$$pV^\gamma = \mathrm{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}. \tag{2}$$

wobei $\gamma = c_p/c_V$ der Adiabatenexponent ist.
Hinweis: benutzen Sie die Gleichungen (1) in differenzieller Form. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie für eine isotherme Zustandsänderung eines idealen Gases die vom Gas aufgenommene Wärme (*Hinweis*: für ein ideales Gas gilt bei einem isothermen Prozess $dU = 0$.). (3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Kelvinsche Temperaturskala mit der Temperaturskala, die durch ein ideales Gas definiert wird, übereinstimmt. Nehmen Sie dazu als Arbeitsmittel eines Carnotprozesses ein ideales Gas an. (3 Punkte)

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Volumenabhängigkeit der innere Energie:

Die Zustandsgleichung für ein Van-der-Waals-Gas lautet

$$p(T, V) = \frac{Nk_BT}{V - Nb} - \frac{N^2a}{V^2}, \tag{3}$$

wobei a und b Materialkonstanten sind.

a) Zeigen Sie, dass für ein Van-der-Waals-Gas die Beziehung

$$\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T = \frac{N^2a}{V^2} \tag{4}$$

gilt. Schreiben Sie dazu das vollständige Differential von $S(U, V)$ auf, und führen eine Variablentransformation von (U, V) nach (T, V) durch. Werten Sie sodann die Bedingung dafür, dass $dS(T, V)$ ein vollständiges Differential ist, aus.

(6 Punkte)

b) Benutzen Sie das Ergebnis aus a), um zu zeigen, dass die Wärmekapazität bei konstantem Volumen, C_V, unabhängig vom Volumen ist: $C_V(T, V) \equiv C_V(T)$.

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass für ein ideales Gas die innere Energie (als Funktion von Temperatur und Volumen) unabhängig vom Volumen ist: $U(T, V) \equiv U(T)$. (1 Punkt)

d) Interpretieren Sie die beiden Terme im vollständigen Differential der Inneren Energie (als Funktion von Temperatur und Volumen), indem Sie die Ergebnisse von idealem Gas und Van-der-Waals-Gas vergleichen. (1 Punkt)

Zusatzaufgabe 1 *(8 Punkte)*

Thermodynamische Potentiale:

a) Berechnen Sie für ein ideales Gas mit temperaturunabhängigem C_V die innere Energie als Funktion von S, V und N. (Nutzen Sie aus, daß U, S und V extensive Größen sind.)
Ergebnis:

$$U(S, V, N) \;=\; U_0 \cdot \frac{N}{N_0} \cdot \left(\frac{NV_0}{VN_0}\right)^{\frac{C_P}{C_V}-1} \cdot \exp\left\{\frac{N}{C_V}\left(\frac{S}{N} - \frac{S_0}{N_0}\right)\right\} \; .$$

Berechnen Sie daraus $S(U, V, N)$. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie aus $U(S, V, N)$ die Helmholtzsche freie Energie $F(T, V, N)$. (3 Punkte)