Vertiefungsaufgabe (nur zum Spaß an der Freude, keine Bewertung)

Irreversible Prozesse 2: Adiabatischer Kolben:
Wir wollen hier das Problem aus Aufgabe 3 noch etwas vertiefen. Dort hatten wir einen Prozess betrachtet, der bei einem frei beweglichen wärmedurchlässigen Kolben abläuft. Das hypothetische Problem des Gleichgewichts in einem abgeschlossenen zusammengesetzten System (Zylinder) mit einem inneren beweglichen adiabatischen (wärmeundurchlässigen) Kolben ist ein unbestimmtes Problem. Physikalisch würde der Kolben, einmal von seiner Fixierung freigelassen, periodische Oszillationen durchführen, die ohne Reibung unendlich andauerten. Mit Reibung (zwischen dem Kolben und den idealen Gasen in den beiden Kammern; wir vernachlässigen Reibung zwischen Kolben und Zylinder) kommt der Kolben schließlich zur Ruhe, wobei in der Ruheposition die Drücke in den beiden Kammern auf beiden Seiten des Kolbens gleich sind, die Temperaturen in jeder der Kammern jedoch von dynamischen Betrachtungen abhängig sind. Wir benutzen Indizes 1 für das anfangs kleine Volumen und 2 für das anfangs große Volumen. Zu Beginn ist $T_1^0 = T_k$ und $T_2^0 = T_g$ vorgegeben, und die Volumina sind $V_1^0 = V_0/4$ und $V_2^0 = 3V_0/4$ wie in Aufgabe 3. Ein oberer Index 0 indiziert den Anfangszustand, ein oberer Index ∞ den Endzustand (nachdem der Kolben zur Ruhe kommt).

a) Zeigen Sie zunächst, dass das Prinzip der maximalen Entropie entsprechend unbestimmt bezüglich der Temperatur ist (jedoch bestimmt bezüglich der Drücke). Zeigen Sie dazu zunächst, dass für den Endzustand mit $dU_1^\infty = -p_1^\infty dV_1^\infty$ und $dU_2^\infty = -p_2^\infty dV_2^\infty$ die Gesamtenergieerhaltung zu

$$p_1^\infty = p_2^\infty \tag{1}$$

führt. Demonstrieren Sie dann, dass die Bedingung der maximalen Entropie identisch veschwindet, und somit keine Lösung für T_1^∞ und T_2^∞ beiträgt.

b) Zeigen Sie, dass die Erhaltung der Gesamtenergie und des Gesamtvolumens zu den Beziehungen

$$T_1^\infty + T_2^\infty = T_1^0 + T_2^0, \qquad V_1^\infty + V_2^\infty = V_1^0 + V_2^0 \tag{2}$$

führt. [Hinweis: werten Sie die innere Energie für ein ideales Gas aus.]

c) Bestimmen Sie aus den gegebenen Anfangsbedingungen den Enddruck $p_1^\infty = p_2^\infty$ im System.

d) Zeigen Sie, dass

$$\frac{T_1^\infty}{V_1^\infty} = \frac{T_1^0 + T_2^0}{V_1^0 + V_2^0} = \frac{T_2^\infty}{V_2^\infty} \tag{3}$$

gilt.

e) Der Endzustand ist durch Gleichungen (1)-(3) noch nicht eindeutig bestimmt. Eine zusätzliche Gleichung erhält man nur durch die dynamische Betrachtung der Oszillation des Kolbens um seine Gleichgewichtslage. Betrachten Sie zunächst den Vorgang ohne Reibung und nehmen Sie an, dass der Kolben sehr schwer ist und sich nur sehr langsam, quasistatisch, bewegt. Leiten Sie für diesen adiabatischen Prozess für das ideale Gas die Beziehungen

$$\frac{T_1(t)}{T_1^0} = \left(\frac{V_1^0}{V_1(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad \frac{T_2(t)}{T_2^0} = \left(\frac{V_2^0}{V_2(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{4}$$

her, wobei γ der Adiabatenexponent ist.

f) An den beiden Umkehrpunkten der oszillatorischen Bewegung des Kolbens ohne Reibung ist die Bewegung stationär (kinetische Energie des Kolbens null) und alle Energie des Systems ist in den Gasen gespeichert. Zeigen Sie, dass die Temperaturen der Gase an den Umkehrpunkten der Beziehung

$$T_1^* + T_2^* = T_1^0 + T_2^0 \tag{5}$$

genügen, wobei der Stern im oberen Index den Umkehrpunkt bezeichnet. Der erste Umkehrpunkt ist durch die Position des Kolbens zu Beginn festgelegt, der zweite Umkehrpunkt ergibt sich durch lösen des Gleichungssystems (4)-(5), wobei in (4) die Substitution $T_1(t) = T_1^*$, $T_2(t) = T_2^*$ $V_1(t) = V_1^*$, $V_2(t) = V_2^*$ durchgeführt wird. Leiten Sie daraus eine Gleichung für V_1^* in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen her (V_2^* ist dann gleich $V_1^0 + V_2^0 - V_1^*$).

g) Für gegebene V_1^* und V_2^* erhält man T_1^* und T_2^* aus Gleichung (4) mittels der Substitution aus Aufgabe (f). Der Endzustand bei dem der Kolben unter Berücksichtigung von Reibung zur Ruhe kommt kann näherungsweise durch die Annahme beschrieben werden, dass die Temperaturen der Gase in den beiden Kammern im Endzustand gleich den Mittelwerten der entsprechenden Temperaturen für die beiden adiabatischen Umkehrpunkte des Kolbens aus Aufgabe (f) sind.[1] Da einer der beiden Umkehrpunkte durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist, resultieren daraus die Beziehungen

$$T_1^\infty = \frac{T_1^0 + T_1^*}{2}, \qquad T_2^\infty = \frac{T_2^0 + T_2^*}{2}. \tag{6}$$

Mittels dieser T_1^∞, T_2^∞ erhalten wir V_1^∞, V_2^∞ in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen und der Temperaturen T_1^*, T_2^* aus Gleichung (3). Im Falle $T_k = T_g/3$ findet keine Oszillation statt und der Kolben bleibt in Ruhe. Warum? Versuchen Sie eine Lösung für Schwingungen mit kleiner Amplitude für den Fall $T_g/T_k = 3 + \nu$ mit $\nu \ll 1$ zu finden. Entwickeln Sie dazu die Gleichung für V_1^* aus (f) für kleine ν und kleine Schwingungen, bestimmen daraus T_1^* und T_2^* aus Gleichungen (4), und mittels dieser T_1^∞, T_2^∞, V_1^∞ und V_2^∞.

h) Die Entropieänderungen für den Prozess mit Reibung sind durch

$$\Delta S_1 = \frac{\gamma N k_B}{2}\left(1 - \frac{V_1^0}{V_1^\infty}\right)^2 \frac{V_1^0 + V_2^0}{\sqrt{V_1^\infty V_2^\infty} + V_2^\infty} \tag{7}$$

$$\Delta S_2 = \frac{\gamma N k_B}{2}\left(1 - \frac{V_2^0}{V_2^\infty}\right)^2 \frac{V_1^0 + V_2^0}{\sqrt{V_1^\infty V_2^\infty} + V_1^\infty} \tag{8}$$

gegeben.[2] Diskutieren Sie die Änderungen der Entropien der Teilsysteme und des Gesamtsystems ($\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$) für den Fall $T_g/T_k = 3 + \nu$ mit $\nu \ll 1$ aus Aufgabe (g).

[1] Diese Annahme ist nichttrivial und ist erst relativ kürzlich in der Publikation von E. A. Gislason, *A close examination of the motion of an adiabatic piston*, American Journal of Physics **78**, 995 (2010) hergeleitet worden.

[2] Siehe dieselbe Publikation wie unter Fußnote 1.