**Übungsblatt 5** Abgabe: Dienstag 19.11.2019

**Aufgabe 8** *(10 Punkte)*

**Statistische Entropie:**
Die statistische Entropie wird durch den Ausdruck

$$S\{W(n)\} = -k_B \sum_n W(n) \ln W(n) \equiv -k_B \langle \ln W(n) \rangle \tag{1}$$

gegeben, wobei $k_B$ die Boltzmannkonstante ist und $W(n)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zustände $|n\rangle$.

**a)** Es seien zwei Ereignisgruppen $|m\rangle$, $m = 1, \ldots, M$ und $|n\rangle$, $n = 1, \ldots, N$ gegeben. Greifen wir je ein $|m\rangle$ und ein $|n\rangle$ heraus, dann ist die Wahrscheinlichkeit sowohl $|m\rangle$ als auch $|n\rangle$ zu finden gegeben durch

$$W(m, n) = W(m|n)W(n) = W(n|m)W(m), \tag{2}$$

wobei $W(m|n)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für Ereignis $|m\rangle$ unter der Annahme, dass $|n\rangle$ mit Sicherheit vorliegt, ist. Die Normierungsbedingungen lauten

$$\sum_n W(n) = 1, \qquad \sum_m W(m|n) = 1, \qquad \sum_{n,m} W(m, n) = 1. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$S\{W(n, m)\} = S\{W(n)\} + \sum_n W(n) S\{W(m|n)\} \tag{4}$$

gilt. (6 Punkte)

**b)** In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die Entropie für eine Gleichverteilung $\hat{W}(n) = \frac{1}{N}$ für $N$ Zustände $|n\rangle$ ihren maximalen Wert $S_{max} = k_B \ln N$ erreicht. Dazu hatten wir die Differenz $S_{max} - S$ betrachtet, wobei $S = -k_B W(n) \ln W(n)$ die Entropie für eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(n)$ ist, und hatten die Gleichung

$$S_{max} - S = k_B \sum_n W(n) \left[ \ln (N W(n)) + \frac{1}{N W(n)} - 1 \right] \tag{5}$$

hergeleitet. Zeigen Sie, dass

$$\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geqslant 0 \qquad \text{für} \qquad x > 0 \tag{6}$$

gilt, und somit $S_{max} \geqslant S$ folgt (d.h. $S_{max}$ ist tatsächlich der maximal mögliche Wert der Entropie). (4 Punkte)

**Aufgabe 9** *(4 Punkte)*

**Entropie des Würfelns:**

**a)** Finden Sie die Entropie für das Würfeln mit einem (a) oktaedrischen und (b) dodekaedrischen Spielwürfel. Nehmen Sie an, dass alle Wurfergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit erscheinen.

**b)** Finden Sie nun die entsprechenden Entropien aus Aufgabe a) unter der Annahme, dass das Wurfergebnis '1' eine doppelt so große Wahrscheinlichkeit wie jedes der restlichen Wurfergebnisse aufweist.

**Aufgabe 10** *(6 Punkte)*

**Mikrokanonisches Zweiniveausystem:**
Wir betrachten $N \gg 1$ nichtwechselwirkenden unterschiedlichen Zweiniveausystemen. Jedes System kann in einem der zwei Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit Energien $E_0 = 0$ und $E_1 = \epsilon$ sein. Wenn wir die Anzahl der Systeme im Zustand $|1\rangle$ mit $n_1$ bezeichnen, ist die Gesamtenergie durch $E = n_1\epsilon$ gegeben. Wir nehmen an diese Gesamtenergie sei erhalten (mikrokanonische Gesamtheit).

**a)** Wieviele Mikrozustände lassen sich zu einer festen Gesamtenergie $E$ realisieren? Hinweis: Das Ergebnis ist ein Binomialkoeffizient.

**b)** Berechnen Sie die Entropie als Funktion von $E$. Benutzen Sie dazu die Näherungsformel $\ln(n!) \approx n \ln n - n$ (Stirling-Formel). Wann ist die Entropie minimal? Wann ist sie maximal?