



Übungsblatt 6

Abgabe: Dienstag 26.11.2019

Aufgabe 11

(14 Punkte)

Statistische Behandlung des Paramagnetismus:

Betrachten Sie N magnetische Dipole mit Dipolmomenten $\vec{\mu}_i$ ($i = 1, \dots, N$), wobei der Betrag des Moments für alle Dipole gleich sei: $|\vec{\mu}_i| = \mu$. Ihre Energie in einem äußeren Magnetfeld \vec{B} ist durch $E = \sum_{i=1}^N E_i$ mit $E_i = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{B}$ gegeben. Die N magnetischen Dipole sollen quantenmechanisch behandelt werden. Ihr magnetisches Moment sei durch

$$\mu^2 = g^2 \mu_B^2 J(J+1)$$

gegeben (wobei g der Landéfaktor ist, und μ_B das Bohrsche Magneton). J ist die Drehimpulsquantenzahl. Die Quantisierungsachse sei in Richtung des äußeren Magnetfeldes (z -Achse) gewählt. Die möglichen Werte μ_z für gegebenes J sind dann

$$\mu_z = g \mu_B m \quad \text{mit} \quad m = -J, -J+1, \dots, J-1, J.$$

Die Suszeptibilität χ verknüpft die Magnetisierung $\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i$ mit dem angelegten Magnetfeld \vec{B} über $\vec{M} = \chi \vec{B}$.

- a) Berechnen Sie für diesen Fall die Zustandssumme und das mittlere magnetische Moment M_z/N . Das Ergebnis kann durch die Brillouinfunktion

$$B_J(x) = \left(1 + \frac{1}{2J}\right) \coth \left\{ \left(1 + \frac{1}{2J}\right) x \right\} - \frac{1}{2J} \coth \left\{ \frac{1}{2J} x \right\}$$

ausgedrückt werden. Wann gilt hier das Curiegesetz $\chi = C/T$? Bestimmen Sie für diesen Fall die Curiekonstante C . (8 Punkte)

- b) Betrachten Sie nun den Grenzfall $J \rightarrow \infty$ und gleichzeitig $g \rightarrow 0$, so daß der Wert für $g \cdot J$ konstant bleibt. Zeigen Sie, daß dann $B_J(x) \rightarrow L(x)$, wobei $L(x)$ die Langevinfunktion

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$$

ist. Was bedeutet das physikalisch? Skizzieren Sie $L(x)$. Berechnen Sie den Hochtemperaturlimes ($k_B T \gg \mu |\vec{B}|$) der Suszeptibilität χ . Zeigen Sie, daß in diesem Fall das Curiegesetz des Paramagnetismus $\chi = C/T$ gilt, und bestimmen Sie die Curiekonstante C . (5 Punkte)

- c) Betrachten Sie den Spezialfall $J = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie dafür das mittlere magnetische Moment. (1 Punkt)

Aufgabe 12

(6 Punkte)

Reißverschlussmodell eines DNS-Moleküls: Die Mikrozustände eines doppelsträngigen DNS-Moleküls (siehe Bild unten) sind wie folgt festgelegt: (i) Die beiden Stränge können an den Stellen $1, 2, \dots, N$ Bindungen eingehen. Eine geschlossene Bindung hat die Energie $\Omega \neq 0$, eine geöffnete die Energie 0; (ii) Die p -te Bindung kann nur geöffnet werden, wenn $1, 2, \dots, p - 1$ bereits geöffnet sind. Die N -te kann nicht geöffnet werden.

- Das Molekül befindet sich im Kontakt mit einem Wärmebad (Temperatur T). Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die mittlere Zahl $\langle p \rangle$ offener Bindungen als Funktion von Ω/kT und N . Was folgt für den Anteil $\langle p \rangle/N$ offener Bindungen im Limes $N \rightarrow \infty$? (4 Punkte)

