Übungsblatt 9 Abgabe: Dienstag 17.12.2019

Aufgabe 19 *(15 Punkte)*

Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen:
In der Vorlesung wurde der idealisierte Fall eines uniformen Bose-Gases betrachtet, bei dem die Bose-Teilchen in einem Kasten vom Volumen V eingeschlossen sind. Hier soll die Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen behandelt werden, die von Eric Cornell, Wolfgang Ketterle und Carl Wieman im Labor erstmals nachgewiesen wurde, und für die es im Jahre 2001 den Physik-Nobelpreis gab. Im Experiment kühlt man Alkaliatome in magneto-optischen Fallen ab. Letztere erzeugen mit guter Genauigkeit ein im allgemeinen asymmetrisches Oszillatorpotential

$$V(x,y,z) \;=\; \frac{m}{2}\left\{\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right\} \;. \tag{1}$$

Um Bose-Einstein-Kondensation zweifelsfrei nachweisen zu können, war es nötig, die thermodynamischen Eigenschaften eines im Potential $V(x,y,z)$ befindlichen Bose-Gases zu verstehen. Diese unterscheiden sich teilweise drastisch vom uniformen Fall.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Einteilchen-Eigenzustände eines im Potential $V(x,y,z)$ befindlichen Teilchens (also des dreidimensionalen harmonischen Oszillators) durch

$$E_{n_x,n_y,n_z} \;=\; \hbar\left\{\omega_x\left(n_x+\frac{1}{2}\right)+\omega_y\left(n_y+\frac{1}{2}\right)+\omega_z\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{2}$$

gegeben sind. (Dazu verwendet man am einfachsten einen Separationsansatz.)

b) (2 Punkte) Betrachten Sie den im Falle von Bose-Einstein-Kondensation in einer dreidimensionalen Atomfalle makroskopisch besetzten Zustand. Welche Wellenfunktion hat dieser in Orts- bzw. Impulsdarstellung? Wie sieht die entsprechende Dichte- bzw. Geschwindigkeitsverteilung aus? Was ist das typische Volumen V welches das Kondensat in diesem Zustand einnimmt? Vergleichen Sie mit der Situation des uniformen Bose-Gases. Was ist qualitativ anders durch die Existenz des äußeren Potentials?

c) (6 Punkte) Wir nehmen nun an, dass sich N Bosonen im Potential $V(x,y,z)$ befinden. Zeigen Sie, ausgehend von der bosonischen Besetzungszahlverteilung, dass

$$N \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\tilde{z}^j \sum_{n_x,n_y,n_z} e^{-j\beta\tilde{E}_{n_x,n_y,n_z}} = \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}} + \sum_{j}^{\infty}\tilde{z}^j \sum_{n_x,n_y,n_z>0} e^{-j\beta\tilde{E}_{n_x,n_y,n_z}} \tag{3}$$

gilt, mit $\beta = 1/(k_B T)$, der Fugazität $\tilde{z} = \exp\{\beta[\mu - \frac{\hbar}{2}(\omega_x+\omega_y+\omega_z)]\}$ und $\tilde{E}_{n_x,n_y,n_z} = E_{n_x,n_y,n_z} - \frac{\hbar}{2}(\omega_x+\omega_y+\omega_z)$. Hier ist $N_0 = \tilde{z}/(1-\tilde{z})$ die Besetzungszahl des Einteilchenzustandes mit der niedrigsten Energie. Im Grenzfall hoher Temperatur, d.h. $k_B T \gg \max\{\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z\}$, kann man die Summe über angeregte Zustände durch ein Integral ersetzen:

$$\sum_{n_x,n_y,n_z} \cdots \to \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \int_0^\infty dn_z \cdots \;. \tag{4}$$

Werten Sie diese aus, um $N-N_0$ als Funktion der Fugazität und der Temperatur zu finden. Zeigen Sie, dass $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$ und finden Sie T_c.

d) (6 Punkte) Mittels der Zustandsdichte $N(E)$ lässt sich die Zahl von Boseteilchen in angeregten Zuständen allgemein schreiben als

$$N - N_0 \;=\; V \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \int_0^{\infty} dE N(E) e^{-j\beta E} \,. \tag{5}$$

Vergleich von Gl. (5) mit Gl. (3) liefert den formalen Ausdruck

$$N(E) = \frac{1}{V} \sum_{n_x, n_y, n_z > 0} \delta(E - \tilde{E}_{n_x,n_y,n_z})$$

für die Zustandsdichte einer dreidimensionalen Atomfalle. Benutzen Sie die Relation $\frac{d}{dE}\Theta(E) = \delta(E)$ sowie die Ersetzung (4), um $N(E)$ für ein harmonisches Potential in $d = 3, 2, 1$ Dimensionen zu bestimmen und berechnen Sie $N - N_0$ durch Einsetzen in Gl. (5). Wiederholen Sie dieses für den Fall eines uniformen Bose-Gases. [Hinweis: Die Zustandsdichte des uniformen Bose-Gases ist gegeben durch $N_u(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \;\delta(E - \frac{p^2}{2m})$.] Für welche Zahl von Raumdimensionen tritt Bose-Einstein-Kondensation des Bose-Gases in einer Atomfalle bzw. im uniformen Bose-Gas auf? Wie hängt jeweils T_c von der Teilchendichte ab? Begünstigt oder erschwert ein äußeres Potential das Auftreten von Bose-Einstein-Kondensation?

e) Zusatzaufgabe: (4 Zusatzpunkte) In den experimentell realisierten Bose-Gasen in Atomfallen ist die Teilchenzahl üblicherweise im Bereich von $10^4 \cdots 10^6$ und damit so klein, dass erste Korrekturen zum thermodynamischen Limes eine Rolle spielen. Finden Sie die Korrektur zu $N - N_0$, indem Sie Gl. (3) in führender Ordnung im Hochtemperaturlimes auswerten. [Hinweis: Die Summe $\sum_{n_x,n_y,n_z}$ ist das Produkt dreier geometrischer Reihen. Summieren Sie diese nach der bekannten Formel, bevor Sie N_0 abziehen und die Hochtemperaturentwicklung vornehmen.]

Aufgabe 20 *(5 Punkte)*

Plancksches Strahlungsgesetz:
Die Oberflächentemperatur eines Sternes lässt sich über die Frequenz abschätzen, bei der das Maximum der vom Stern emittierten Strahlungsenergie liegt.

a) (2 Punkte) Berechnen Sie das Maximum der spektralen Energiedichte aus dem Planckschen Strahlungsgesetz.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Wellenlängen für bestimmte kosmische Objekte die zugehörigen Temperaturen. Die folgenden Wellenlängen gehören zum Maximum der Frequenzverteilung:

(i) Grundstrahlung des Weltalls: $\lambda_{max} = 0.16$ cm

(ii) Erdoberfläche: $\lambda_{max} = 1.6 \cdot 10^{-3}$ cm

(iii) Sonnenoberfläche: $\lambda_{max} = 0.8 \cdot 10^{-4}$ cm