

# Husimi - Darstellung des getriebenen harmonischen Quanten - Oszillators

Bachelor-Arbeit im Fach Physik

an der Universität Greifswald  
am 13. Juli 2009  
eingereicht von

Daniel Pagel

1. Gutachter: Prof. Dr. H. Fehske
2. Gutachter: Prof. Dr. K. Fesser



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kohärente Zustände des quantenmechanischen harmonischen Oszillators</b>	<b>3</b>
2.1	Algebraische Methode . . . . .	4
2.2	Kohärente Zustände . . . . .	5
2.3	Oszillator unter dem Einfluss einer äußeren Kraft . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Die Husimi - Darstellung</b>	<b>11</b>
3.1	Definition . . . . .	11
3.2	Berechnung von Erwartungswerten . . . . .	12
3.3	Husimi - Darstellung verschiedener Zustände . . . . .	13
3.3.1	Besetzungszahl - Zustände . . . . .	13
3.3.2	Kohärente Zustände . . . . .	13
3.3.3	Gequetschte Zustände . . . . .	14
3.3.4	Thermische Zustände . . . . .	15
3.4	Phasenraum - Interpretation . . . . .	15
3.5	Beispiel - periodisch getriebener Oszillator . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Dichteoperatoren</b>	<b>21</b>
<b>B</b>	<b>Zerlegung der Eins mittels kohärenter Zustände</b>	<b>23</b>

## *Inhaltsverzeichnis*

# 1 Einleitung

Der harmonische Oszillator ist in vielen Bereichen der Physik eines der wichtigsten theoretischen Modelle. Es kann nicht nur klassisch sondern auch quantenmechanisch vollständig gelöst werden, und bildet deswegen ein Standardbeispiel in Lehrbüchern zur Quantenmechanik (siehe etwa F. Schwabl, *Quantenmechanik I*).

Ziel dieser Arbeit ist es, in entsprechender Weise die Physik des quantenmechanischen harmonischen Oszillators unter dem Einfluss einer äußeren Kraft zu verstehen. Dazu verwenden wir eine geeignete Beschreibung mittels kohärenter Zustände, welche die Übertragung der bekannten Ergebnisse der klassischen Mechanik auf dieses Problem ermöglicht. Insbesondere erlaubt diese Vorgehensweise eine Interpretation der quantenmechanischen Bewegung in Analogie zum klassischen Phasenraumkonzept.

Unsere Darstellung orientiert sich an der algebraischen Behandlung des getriebenen Quanten-Oszillators mit Leiteroperatoren (siehe P. Carruthers und M. M. Nieto, *Am. J. Phys.* **33**, 537 (1965)), welche die Lösung für kohärente Zustände liefert. Die Einführung der Husimi-Funktion als Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem klassischen Phasenraum ermöglicht uns die Übertragung dieses Lösungswegs auf allgemeine Zustände. Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse stehen in enger Verbindung zu wichtigen Fragestellungen der Quanten-Optik (siehe etwa W. Vogel und D.-G. Welsch, *Quantum Optics*).

## 1 Einleitung

# 2 Kohärente Zustände des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

Das erste Kapitel dieser Arbeit widmet sich der quantenmechanischen Behandlung des harmonischen Oszillators. Dabei stellt sich heraus, dass die Formulierung über die sogenannten *kohärenten Zustände* eine fast klassische Interpretation der physikalischen Vorgänge erlaubt. Wir zeigen zunächst, dass sich die bekannten Ergebnisse der klassischen Mechanik auch dann auf die quantenmechanische Beschreibung übertragen lassen, wenn eine beliebige zeitabhängige Kraft auf den harmonischen Oszillator wirkt. Dieses Ergebnis geht über die übliche Diskussion des harmonischen Oszillators hinaus.

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung ist ein Teilchen im eindimensionalen harmonischen Potential

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 \quad \text{mit Federkonstante} \quad k > 0. \quad (2.1)$$

Für dieses Problem ist die aus der klassischen Mechanik bekannte Hamilton-Funktion durch

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2)$$

gegeben, wobei  $m$  die Masse des Teilchens und  $\omega$  die Frequenz bezeichnen. Im Rahmen der klassischen Mechanik ist der Zustand eines Teilchens durch seinen Ort und seine Geschwindigkeit eindeutig bestimmt. Die quantenmechanische Beschreibung erhält man, indem man zu Operatoren  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  übergeht, die die Vertauschungsrelation  $[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$  erfüllen. Damit erhält man den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2. \quad (2.3)$$

In der Ortsdarstellung  $\psi(x)$  der quantenmechanischen Wellenfunktion entspricht der Ortsoperator  $\hat{x}$  einer Multiplikation mit der Ortskoordinate und der Impulsoperator  $\hat{p}$  einer Ableitung nach dem Ort:

$$\hat{x} = x \quad \text{und} \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Im Heisenberg-Bild, in welchem die Zustände zeitlich unveränderlich sind und die gesamte Zeitabhängigkeit des Systems über Operatoren gegeben ist, wird die Zeitentwicklung

eines Operators  $\hat{A}$  durch die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}(t) = [\hat{A}(t), \hat{H}] \quad (2.5)$$

beschrieben. Wenden wir diese Gleichung für den Orts- und Impulsoperator an und nutzen die Vertauschungsrelation von Ort und Impuls aus, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \frac{1}{m} \hat{p}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \hat{p}(t) = -m\omega^2 \hat{x}(t), \quad (2.6)$$

welche den klassischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für Ort und Impuls entsprechen. Diese Entsprechung ist eine Besonderheit des harmonischen Oszillators, welche im allgemeinen Fall nicht gilt. Geht man im Sinne des Ehrenfest-Theorems von Operatoren zu Erwartungswerten über, erhält man die klassischen Oszillatorgleichungen

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{x} \rangle + \omega^2 \langle \hat{x} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{p} \rangle + \omega^2 \langle \hat{p} \rangle = 0. \quad (2.7)$$

## 2.1 Algebraische Methode

Um die Schreibweise kompakter zu gestalten führen wir die charakteristische Länge

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (2.8)$$

ein. Der Vernichtungsoperator  $a$  und der dazu konjugierte Erzeugungsoperator  $a^\dagger$  (Leiteroperatoren) werden als Linearkombination von Orts- und Impulsoperator definiert:

$$a = \frac{1}{2l} \hat{x} + \frac{i}{\hbar} \hat{p}, \quad \text{so dass} \quad a^\dagger = \frac{1}{2l} \hat{x} - \frac{i}{\hbar} \hat{p}. \quad (2.9)$$

Diese Operatoren sind wegen  $a \neq a^\dagger$  nicht hermitesch. Unter Ausnutzung der Vertauschungsrelation von Ort und Impuls erhalten wir für ihren Kommutator

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.10)$$

Mit Hilfe von (2.9) können wir zunächst den Orts- und Impulsoperator

$$\hat{x} = l(a^\dagger + a), \quad \hat{p} = i\frac{\hbar}{2l}(a^\dagger - a), \quad (2.11)$$

und damit auch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{8ml^2}(a^\dagger - a)^2 + \frac{m\omega^2 l^2}{2}(a^\dagger + a)^2 = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.12)$$

umschreiben. Man bezeichnet den Operator  $\hat{n} = a^\dagger a$  als Besetzungszahloperator. Er liefert die Anzahl  $n$  der Energiequanten in einem Zustand. Damit ergeben sich folgende orthonormierte Eigenfunktionen  $|n\rangle$  und Eigenwerte  $E_n$  des Hamilton-Operators:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Für die Wirkung der Leiteroperatoren auf diese Zustände erhalten wir

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{und} \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.14)$$

Insbesondere ist der Grundzustand durch  $a|0\rangle = 0$  charakterisiert. Die Erwartungswerte von Ort und Impuls in diesen Zuständen ergeben sich zu

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle n | \hat{x} | n \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \hat{p} \rangle = \langle n | \hat{p} | n \rangle = 0. \quad (2.15)$$

Die Operatoren  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  besitzen in der Energie-Basis also keine Diagonalelemente.

Wir haben somit Zustände gefunden, die einzig der trivialen Lösung  $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$  der Oszillator-Gleichungen (2.7) entsprechen. Um nicht-triviale oszillierende Lösungen zu erhalten, führt man kohärente Zustände ein.

## 2.2 Kohärente Zustände

Ein kohärenter Zustand  $|\alpha\rangle$  ist definiert als Eigenzustand des Vernichtungsoperators  $a$  zum Eigenwert  $\alpha$ ,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.16)$$

Für den Eigenwert  $\alpha = 0$  erhalten wir nach (2.14) den Grundzustand  $|0\rangle$  als Eigenzustand.

Drücken wir einen kohärenten Zustand als Linearkombination von Besetzungszahl-Zuständen aus, so können wir, bis auf einen Phasenfaktor, folgende explizite Darstellung ableiten:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle. \quad (2.17)$$

Somit existiert zu jeder komplexen Zahl  $\alpha \in \mathbb{C}$  genau ein Eigenzustand des Operators  $a$ . Im Folgenden werden wir zunächst einige Eigenschaften der kohärenten Zustände diskutieren. Zwar sind die kohärenten Zustände  $|\alpha\rangle$  normiert, aber nicht orthogonal zueinander:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}} e^{-i \operatorname{Im}(\beta^* \alpha)} \neq \delta_{\alpha, \beta}. \quad (2.18)$$

Nach der Definition (2.16) ist

$$\langle \alpha | a | \alpha \rangle = \alpha \quad \text{und} \quad \langle \alpha | a^\dagger | \alpha \rangle = \alpha^*, \quad (2.19)$$

## 2 Kohärente Zustände des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

womit wir für die Erwartungswerte des Ortes und des Impulses

$$\langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle = 2l \operatorname{Re}(\alpha), \quad (2.20)$$

bzw.

$$\langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{l} \operatorname{Im}(\alpha) \quad (2.21)$$

erhalten. Für die Unschärfen von  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  in kohärenten Zuständen findet man:

$$(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = l^2 \quad (2.22)$$

und

$$(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4l^2}. \quad (2.23)$$

Das Unschärfeprodukt ergibt sich damit zu

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.24)$$

womit gerade Gleichheit in der Heisenbergschen Unschärferelation für  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  gilt. Kohärente Zustände sind also Zustände minimaler Unschärfe und endlichem  $\langle \hat{x} \rangle$ ,  $\langle \hat{p} \rangle$ .

Die Zeitentwicklung der kohärenten Zustände können wir aus der bekannten Zeitabhängigkeit der Besetzungszahl-Zustände ableiten:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \quad (2.25)$$

Wir sehen, dass ein kohärenter Zustand unter der Zeitentwicklung des Hamilton-Operators des harmonischen Oszillators kohärent bleibt.

Schreiben wir die komplexe Zahl  $\alpha$  in  $\alpha = |\alpha| \exp(i\delta)$  um und erinnern uns an die Erwartungswerte von Ort (2.20) und Impuls (2.21), so stellen wir fest, dass diese eine oszillierende Bewegung vollziehen:

$$\langle \hat{x} \rangle = 2l \operatorname{Re}(\alpha e^{-i\omega t}) = 2l|\alpha| \cos(\delta - \omega t), \quad \langle \hat{p} \rangle = \frac{\hbar}{l} |\alpha| \sin(\delta - \omega t). \quad (2.26)$$

Da wir es mit kohärenten Zuständen zu tun haben bleibt die Unschärfe im zeitlichen Verlauf konstant. Dieses Verhalten entspricht dem klassischen Bild eines Oszillators.

Eine alternative und sehr kompakte Darstellung der kohärenten Zustände kann unter Verwendung des Verschiebungsoperators

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \quad (2.27)$$

abgeleitet werden. Man sieht anhand der Definition, dass der Verschiebungsoperator unitär ist:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = e^{-(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} = \hat{D}(-\alpha) = \hat{D}^{-1}(\alpha). \quad (2.28)$$

Verwendet man die Identität

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \quad \text{wenn} \quad [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0, \quad (2.29)$$

ergibt sich die alternative Darstellung

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}. \quad (2.30)$$

Wieder unter Ausnutzung von (2.29) finden wir für das Produkt zweier Verschiebungsoperatoren

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = e^{i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)} \hat{D}(\alpha + \beta), \quad (2.31)$$

das heißt - bis auf einen zusätzlichen Phasenfaktor - einen Verschiebungsoperator zur Summe der Argumente.

Setzen wir für die Leiteroperatoren die Definition (2.9) ein und nutzen erneut (2.29) aus, so können wir den Verschiebungsoperator durch den Orts- bzw. Impulsoperator ausdrücken

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-i \operatorname{Im}(\alpha) \operatorname{Re}(\alpha)} e^{\frac{i}{\hbar} \operatorname{Im}(\alpha) \hat{x}} e^{-i \frac{2l}{\hbar} \operatorname{Re}(\alpha) \hat{p}}. \quad (2.32)$$

Der Verschiebungsoperator setzt sich also aus zwei Translationsoperatoren bezüglich Ort und Impuls zusammen, wobei auch hier ein zusätzlicher Phasenfaktor auftritt.

Will man die Wirkung des Verschiebungsoperators auf andere Operatoren berechnen, ist die Beziehung

$$e^{\hat{B}} \hat{A} e^{-\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\hat{B}, \hat{A}]_n \quad (2.33)$$

mit dem iterierten Kommutator

$$[\hat{B}, \hat{A}]_n = [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]_{n-1}], \quad \text{wobei} \quad [\hat{B}, \hat{A}]_0 = \mathbb{1} \quad (2.34)$$

hilfreich. Da für die Leiteroperatoren die Vertauschungsrelation (2.10) gilt, entstehen offenbar nur Terme bis zur Ordnung  $n = 1$ . Wir erhalten für den Vernichtungsoperator

$$\hat{D}(-\alpha) a \hat{D}(\alpha) = e^{\alpha^* a - \alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = a + [\alpha^* a - \alpha a^\dagger, a] = a + \alpha, \quad (2.35)$$

und analog für den Erzeugungsoperator

$$\hat{D}(-\alpha) a^\dagger \hat{D}(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*. \quad (2.36)$$

Es lassen sich nun die Verschiebungen des Orts- und Impulsoperators berechnen:

$$\hat{D}(-\alpha) \hat{x} \hat{D}(\alpha) = \hat{x} + [\alpha^* a - \alpha a^\dagger, l(a + a^\dagger)] = \hat{x} + 2l \operatorname{Re}(\alpha), \quad (2.37)$$

$$\hat{D}(-\alpha) \hat{p} \hat{D}(\alpha) = \hat{p} + [\alpha^* a - \alpha a^\dagger, i \frac{\hbar}{2l} (a^\dagger - a)] = \hat{p} + \frac{\hbar}{l} \operatorname{Im}(\alpha). \quad (2.38)$$

Mit den Gleichungen (2.17) und (2.30) folgt für die Darstellung eines kohärenten Zustandes

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (2.39)$$

## 2 Kohärente Zustände des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

Der Verschiebungsoperator überführt also den Grundzustand des harmonischen Oszillators in einen kohärenten Zustand. Aus (2.31) folgt, dass kohärente Zustände unter Verschiebungen kohärent bleiben:

$$\hat{D}(\beta)|\alpha\rangle = e^{i \operatorname{Im}(\alpha^*\beta)}|\alpha + \beta\rangle. \quad (2.40)$$

Wir können nun die Ortsdarstellung eines kohärenten Zustandes berechnen. Da der Grundzustand des harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung eine Gauß-Funktion ist, erhalten wir auch für  $\langle x|\alpha\rangle$  eine verschobene, normierte Gauß-Funktion:

$$\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle = \langle x|\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-i \operatorname{Im}(\alpha) \operatorname{Re}(\alpha)} e^{\frac{i}{l} \operatorname{Im}(\alpha)x} \frac{1}{\sqrt{l\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{x-2l \operatorname{Re}(\alpha)}{l}\right)^2}. \quad (2.41)$$

Gleichung (2.20) zeigt, dass die Gauß-Verteilung im Ortsraum um den Erwartungswert des Ortes zentriert ist. Nimmt man die Zeitentwicklung (2.26) hinzu, so stellt man fest, dass der Mittelpunkt der Gauß-Verteilung oszilliert, die Varianz aber konstant bleibt. Im klassischen Limes  $\hbar \rightarrow 0$  - was nach der Definition der charakteristischen Länge (2.8) dem Grenzfall  $l \rightarrow 0$  entspricht - geht die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Ortsraum gegen eine  $\delta$ -Funktion.

Im Ergebnis gelingt mit den kohärenten Zuständen eine weitgehend klassische Beschreibung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators.

## 2.3 Oszillator unter dem Einfluss einer äußeren Kraft

Wir erweitern nun unser System durch eine äußere, zeitabhängige, auf den harmonischen Oszillator wirkende Kraft. Für die Erwartungswerte von Ort und Impuls gelten weiterhin klassische Bewegungsgleichungen. Eine wichtige Frage ist, ob sich die Bewegung weiterhin durch kohärente Zustände beschreiben lässt.

Ausgangspunkt ist der Hamilton-Operator (2.3), ergänzt durch einen zusätzlichen Kraftterm  $-F(t)\hat{x}$ :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - F(t)\hat{x} = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - F(t)l(a^\dagger + a). \quad (2.42)$$

Der Spezialfall einer konstanten Kraft  $F(t) = F_0$  entspricht einer einfachen Verschiebung des Oszillators im Ortsraum:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - F_0\hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \left( \hat{x} - \frac{F_0}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{F_0^2}{2m\omega^2}. \quad (2.43)$$

Wir wissen bereits, dass man eine derartige Translation durch den Verschiebungsoperator erzeugen kann. Wir berechnen konkret die Wirkung des Verschiebungsoperators auf den

Hamilton-Operator (2.3):

$$\begin{aligned}
 \hat{D}(-\alpha)\hat{H}\hat{D}(\alpha) &= \hbar\omega \left( \hat{D}(-\alpha)a^\dagger\hat{D}(\alpha)\hat{D}(-\alpha)a\hat{D}(\alpha) + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \hbar\omega \left( (a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha) + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega(\alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2) \\
 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \frac{\hbar\omega}{l}\operatorname{Re}(\alpha)\hat{x} + \frac{\hbar}{ml}\operatorname{Im}(\alpha)\hat{p} + \hbar\omega|\alpha|^2 \\
 &= \frac{1}{2m} \left( \hat{p} + \frac{\hbar}{l}\operatorname{Im}(\alpha) \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left( \hat{x} + \frac{\hbar}{m\omega l}\operatorname{Re}(\alpha) \right)^2. \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Verschiebungsoperators auf kohärente Zustände des Oszillators ohne äußere Kraft erhält man somit kohärente Zustände des Oszillators mit konstanter äußerer Kraft. Die entsprechende Zeitentwicklung kann also wieder durch kohärente Zustände ausgedrückt werden.

Die genaue Betrachtung der Gleichungen (2.42) bis (2.44) zeigt, dass obiges Argument auf beliebige Kräfte  $F(t)$  erweitert werden kann. Das heißt, ein kohärenter Zustand bleibt auch bei der Zeitentwicklung unter dem vollen Hamilton-Operator (2.42) kohärent. Da kohärente Zustände Eigenzustände des Vernichtungsoperators sind, sollte man dieses Verhalten an der Zeitentwicklung dieses Operators sehen:

$$\frac{d}{dt}a = \frac{1}{i\hbar}[a, \hat{H}] = -i\omega a + i\frac{l}{\hbar}F(t). \quad (2.45)$$

Der Kraft-Term ist dabei ein Multiplikationsoperator mit einer komplexen Zahl. Bei der Zeitentwicklung mit dem Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators geht der Vernichtungsoperator somit in einen Vernichtungsoperator über. Damit können die Zustände explizit berechnet werden. Hierzu gehen wir von der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \quad (2.46)$$

aus und setzen kohärente Zustände ein. Dabei müssen wir beachten, dass im allgemeinen Fall eine zusätzliche Phase auftauchen kann. Wir setzen an

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\varphi(t)}|\alpha(t)\rangle. \quad (2.47)$$

Diesen Ansatz setzen wir in die Schrödinger-Gleichung (2.46) ein. In einem ersten Schritt drücken wir die kohärenten Zustände nach (2.39) durch einen Verschiebungsoperator, der auf den Grundzustand wirkt, aus. In einem zweiten Schritt berechnen wir die Ableitungen nach dem Real- und Imaginärteil von  $\alpha$ , sowie nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
 i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle &= i\hbar \left( i\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \operatorname{Re}(\alpha)}{\partial t}(a^\dagger - \operatorname{Re}(\alpha)) + \frac{\partial \operatorname{Im}(\alpha)}{\partial t}(ia^\dagger - \operatorname{Im}(\alpha)) \right) e^{i\varphi(t)}|\alpha(t)\rangle \\
 &= \hat{H}|\Psi(t)\rangle = \left( \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega a^\dagger a - F(t)l(a + a^\dagger) \right) e^{i\varphi(t)}|\alpha(t)\rangle. \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

## 2 Kohärente Zustände des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

Die rechte Seite der entstehenden Gleichung können wir unter Ausnutzung der Tatsache, dass kohärente Zustände Eigenzustände des Vernichtungsoperators sind, umschreiben. Im Ergebnis finden wir zwei Differentialgleichungen. Die erste beschreibt die Zeitentwicklung des Zustandes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha = -i\omega\alpha + i\frac{l}{\hbar}F(t). \quad (2.49)$$

Sie entspricht der Gleichung (2.45) für den Vernichtungsoperator. Die zweite Gleichung bestimmt die Zeitentwicklung der Phase zu

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{l}{\hbar}F(t) \operatorname{Re}(\alpha) - \frac{\omega}{2}. \quad (2.50)$$

Sie kann nur gelöst werden, wenn die Zeitentwicklung des Zustandes bekannt ist. Trennt man Gleichung (2.49) nach Real- und Imaginärteil, erhält man klassische Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\alpha) &= \omega \operatorname{Im}(\alpha), \\ \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im}(\alpha) &= -\omega \operatorname{Re}(\alpha) + \frac{l}{\hbar}F(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

für dieses Problem. Rechnen wir in diesen Gleichungen den Real- und Imaginärteil von  $\alpha$  unter Verwendung von (2.20) und (2.21) in die Erwartungswerte von Ort und Impuls um, so finden wir wieder die klassischen Oszillatorgleichungen

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{x}\rangle + \omega^2\langle\hat{x}\rangle = \frac{1}{m}F(t) \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{p}\rangle + \omega^2\langle\hat{p}\rangle = \frac{d}{dt}F(t). \quad (2.52)$$

Die Lösung der Gleichung (2.49) kann wie in der klassischen Mechanik über die Einführung einer Green'schen Funktion  $G(t)$  erfolgen, die für  $t > 0$  die Lösung dieser Gleichung für eine  $\delta$ -förmige Inhomogenität darstellt. Für Zeiten  $t < 0$  muss die Green'sche Funktion verschwinden. Explizit ist

$$G(t) = i\frac{l}{\hbar}e^{-i\omega t}\theta(t). \quad (2.53)$$

Es folgt

$$\alpha(t) = \alpha(t_0)e^{-i\omega t} + \int_{t_0}^t F(t')G(t-t')dt' = \alpha(t_0)e^{-i\omega t} + i\frac{l}{\hbar} \int_{t_0}^t F(t')e^{-i\omega(t-t')}\theta(t-t')dt'. \quad (2.54)$$

Wir haben somit, in Erweiterung der Resultate aus Kapitel 1, die Zeitentwicklung kohärenter Zustände bestimmt. Auch für den getriebenen harmonischen Oszillator erhält man die quantenmechanische Lösung im Prinzip aus der klassischen Lösung dieses Problems, wobei allerdings die zusätzliche Gleichung (2.50) für die Phase gelöst werden muss.

# 3 Die Husimi - Darstellung

Im vorherigen Kapitel haben wir die Zeitentwicklung kohärenter Zustände bestimmt, welche im Wesentlichen durch die klassische Lösung des getriebenen Oszillators gegeben ist. In diesem Kapitel übertragen wir die bisherigen Ergebnisse auf die Zeitentwicklung allgemeiner Zustände. Dazu verwenden wir die Husimi-Funktion - auch als  $Q$ -Funktion bezeichnet - welche eine geeignete Darstellung allgemeiner Zustände durch kohärente Zustände ermöglicht.

## 3.1 Definition

Wir führen zunächst die Husimi-Darstellung für Dichtematrizen ein. Dabei nutzen wir die Hermitezität, die positive Semidefinitheit und die Spureigenschaft  $\text{Sp}(\rho) = 1$  der Dichtematrizen aus. Weitere Eigenschaften sind im Anhang A zu finden.

Die Husimi-Funktion wird als Diagonalelement einer Dichtematrix über die kohärenten Zustände definiert:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle. \quad (3.1)$$

Aus Hermitezität und positiver Semidefinitheit von  $\rho$  folgt

$$Q(\alpha) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad Q(\alpha) \geq 0. \quad (3.2)$$

Aufgrund der Nicht-Orthogonalität (2.18) bilden kohärente Zustände keine Orthonormalbasis. Es gilt jedoch die Zerlegung der Eins

$$\mathbb{1} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle \langle \alpha| d\alpha \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{C}} d\alpha \equiv \int_{\mathbb{R}} d\text{Re}(\alpha) \int_{\mathbb{R}} d\text{Im}(\alpha), \quad (3.3)$$

welche den Identitätsoperator  $\mathbb{1}$  als Integral über Projektionen  $|\alpha\rangle \langle \alpha|$  darstellt. Der Beweis hierfür ist im Anhang B gegeben. Die kohärenten Zustände sind (über-) vollständig. Äquivalent zur Zerlegung der Eins (3.3) gilt die Spurformel

$$\text{Sp}(\hat{A}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle d\alpha. \quad (3.4)$$

Unter Verwendung dieser Beziehung folgt, dass die Husimi-Funktion normiert ist:

$$\int_{\mathbb{C}} Q(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle d\alpha = \text{Sp}(\rho) = 1. \quad (3.5)$$

Die Husimi-Funktion erfüllt also alle Eigenschaften einer klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Jedem Zustand, der durch einen Dichteoperator  $\rho$  beschrieben wird, ist eine eindeutige Funktion  $Q(\alpha)$  zugeordnet, deren komplexes Argument  $\alpha$  über die Gleichungen (2.20), (2.21) als Punkt im klassischen Phasenraum verstanden werden kann. Wir werden später ausführen, dass die Husimi-Funktion tatsächlich in natürlicher Weise eine Interpretation als Phasenraumverteilung zulässt. Damit wird die Übertragung der bisher nur für kohärente Zustände erzielten Ergebnisse auf allgemeine, sogar gemischte, Zustände gelingen.

## 3.2 Berechnung von Erwartungswerten

Damit die Husimi-Funktion eine vollständige Beschreibung eines physikalischen Systems liefert, muss eine Vorschrift zur Berechnung von Erwartungswerten existieren. Diese werden wir im Folgenden ableiten. Dabei benutzen wir die Spurformel (3.4), um die Spurbildung  $\langle \hat{A} \rangle = \text{Sp}(\rho \hat{A})$  (vgl. Gleichung (A.7)) auf eine Integration über die komplexe Ebene zurückzuführen, welche die Husimi-Funktion enthält.

Für den Erwartungswert des Vernichtungsoperators finden wir

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \text{Sp}(\rho a) = \frac{1}{\pi} \int \langle \alpha | \rho a | \alpha \rangle d\alpha = \frac{1}{\pi} \int \alpha \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle d\alpha \\ &= \int \alpha Q(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (3.6)$$

und analog für den Erzeugungsoperator

$$\langle a^\dagger \rangle = \text{Sp}(a^\dagger \rho) = \frac{1}{\pi} \int \langle \alpha | a^\dagger \rho | \alpha \rangle d\alpha = \int \alpha^* Q(\alpha) d\alpha. \quad (3.7)$$

Hieraus können wir die Vorschrift für allgemeine Erwartungswerte ablesen. Da sich Operatoren unter der Spurbildung zyklisch vertauschen lassen, können wir für eine Kombination  $a^n (a^\dagger)^m$  von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren den Erwartungswert gemäß

$$\langle a^n (a^\dagger)^m \rangle = \text{Sp}\left((a^\dagger)^m \rho a^n\right) = \int \alpha^n (\alpha^*)^m Q(\alpha) d\alpha \quad (3.8)$$

berechnen. Die Potenzen des Vernichtungsoperators müssen dabei links von denen des Erzeugungsoperators stehen. Unter Ausnutzung der Kommutatorrelation (2.10) können wir jede Kombination von Leiteroperatoren in diese Form - auch Antinormalordnung genannt - bringen. Sobald ein Operator, der über Leiteroperatoren ausgedrückt ist, entsprechend umgeordnet wurde, lässt sich sein Erwartungswert nach Gleichung (3.8) berechnen. Dies führt auch im allgemeinen Fall die Spurbildung mit einer Dichtematrix (A.7) auf die Integration der entsprechenden Husimi-Funktion zurück.

Als erstes Beispiel berechnen wir die Erwartungswerte des Ortes und des Impulses.

Wir bezeichnen hier und im Folgenden  $\alpha \equiv \text{Re}(\alpha) + i \text{Im}(\alpha) \equiv u + iv$ . Damit gilt

$$\langle \hat{x} \rangle = l \langle a + a^\dagger \rangle = l \int (\alpha + \alpha^*) Q(\alpha) d\alpha = 2l \langle u \rangle, \quad (3.9)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = i \frac{\hbar}{2l} \langle a^\dagger - a \rangle = i \frac{\hbar}{2l} \int (\alpha^* - \alpha) Q(\alpha) d\alpha = \frac{\hbar}{l} \langle v \rangle. \quad (3.10)$$

Für das Quadrat des Ortes bzw. des Impulses erhalten wir:

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = l^2 \langle a^2 + (a^\dagger)^2 + 2aa^\dagger - 1 \rangle = 4l^2 \left( \langle u^2 \rangle - \frac{1}{4} \right), \quad (3.11)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{4l^2} \langle a^2 + (a^\dagger)^2 - 2aa^\dagger + 1 \rangle = \frac{\hbar^2}{l^2} \left( \langle v^2 \rangle - \frac{1}{4} \right). \quad (3.12)$$

Wir können ablesen, dass  $\langle u^2 \rangle, \langle v^2 \rangle \geq 1/4$  erfüllt sein muss, damit  $\langle \hat{x}^2 \rangle, \langle \hat{p}^2 \rangle \geq 0$  gilt. Alle Husimi-Funktionen besitzen also eine endliche Unschärfe  $\Delta u, \Delta v$ :

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{x})^2 &= \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = 4l^2 \left( \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2 - \frac{1}{4} \right) = 4l^2 \left( (\Delta u)^2 - \frac{1}{4} \right), \\ (\Delta \hat{p})^2 &= \frac{\hbar^2}{l^2} \left( (\Delta v)^2 - \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Der Erwartungswert des gemischten Terms  $\hat{x}\hat{p}$  berechnet sich schließlich zu

$$\langle \hat{x}\hat{p} \rangle = i \frac{\hbar}{2} \langle (a^\dagger)^2 - a^2 + 1 \rangle = 2\hbar \left( \langle uv \rangle + \frac{i}{4} \right) = \langle \hat{p}\hat{x} \rangle + i\hbar. \quad (3.14)$$

## 3.3 Husimi - Darstellung verschiedener Zustände

Wir geben für einige wichtige Beispiele die Husimi-Funktion explizit an.

### 3.3.1 Besetzungszahl - Zustände

Ein Besetzungszahl-Zustand in  $Q$ -Darstellung hat die folgende Form:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (3.15)$$

Die Husimi-Funktion ist durch eine radialsymmetrische Verteilung gegeben, die bei  $\alpha = 0$  eine Nullstelle hat.

### 3.3.2 Kohärente Zustände

Das Skalarprodukt (2.18) zeigt, dass die Husimi-Funktion eines kohärenten Zustandes keine  $\delta$ -Funktion, sondern eine Verteilung mit endlicher Breite ist:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (3.16)$$

Sie entspricht also einer radialsymmetrischen Gauß-Funktion mit Varianz  $1/2$ , die um den Punkt  $\beta$  zentriert ist.

### 3.3.3 Gequetschte Zustände

Man bezeichnet kohärente Zustände, deren Varianz in einer Richtung verkleinert wird, als gequetscht. Dabei muss natürlich die Varianz in die dazu senkrechte Richtung entsprechend wachsen. Wir gehen von einer Gauß-Funktion im Ortsraum aus:

$$\langle x|\Psi\rangle = \Psi(x) = e^{i\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}} e^{\frac{i}{\sigma}v_0x} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2\sigma u_0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.17)$$

Hierbei bezeichnet  $\theta$  eine Phase und der Parameter  $\sigma$  ist ein Maß der „Quetschung“.

Unter Verwendung der Ortsdarstellung (2.41) kohärenter Zustände berechnet sich die Husimi-Funktion eines gequetschten Zustandes zu:

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \langle \alpha|\Psi\rangle \langle \Psi|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle \alpha|x\rangle \langle x|\Psi\rangle dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi(\sigma^2+l^2)}{2l^2}}} e^{-\frac{2l^2}{\sigma^2+l^2}(u-\frac{\sigma}{l}u_0)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi(\sigma^2+l^2)}{2\sigma^2}}} e^{-\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+l^2}(v-\frac{l}{\sigma}v_0)^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Wir erhalten also ein Produkt zweier normierter Gauß-Funktionen, welches für  $l = \sigma$  der Husimi-Funktion eines kohärenten Zustandes (3.16) entspricht. Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (3.19)$$

folgt für die Varianzen

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle &= \frac{\sigma^2 + l^2}{4l^2}, \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{\sigma^2 + l^2}{4\sigma^2}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

und für die Grenzfälle maximal gequetschter Zustände:

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow 0 &\Rightarrow \langle u^2 \rangle \rightarrow \frac{1}{4} & \text{und} & \langle v^2 \rangle \rightarrow \infty, \\ \sigma \rightarrow \infty &\Rightarrow \langle u^2 \rangle \rightarrow \infty & \text{und} & \langle v^2 \rangle \rightarrow \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Husimi-Funktion hat somit selbst für maximal gequetschte Zustände eine endliche Varianz in jeder Richtung (vgl. Gleichung (3.13)). Nach Umrechnen auf Orts- und Impulsvariable erhalten wir aus (3.20) mit (3.11) und (3.12)

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle} = 2l \sqrt{\langle u^2 \rangle - \frac{1}{4}} = 2l \sqrt{\frac{\sigma^2 + l^2}{4l^2} - \frac{l^2}{4l^2}} = \sigma, \\ \Delta p &= \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle} = \frac{\hbar}{l} \sqrt{\langle v^2 \rangle - \frac{1}{4}} = \frac{\hbar}{l} \sqrt{\frac{\sigma^2 + l^2}{4\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2}} = \frac{\hbar}{2\sigma}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Das Produkt der Unschärfen eines gequetschten Zustandes ist mit  $\Delta x \Delta p = \hbar/2$  wie für einen kohärenten Zustand minimal (vgl. Gleichung (2.24)), aber die Unschärfe im Ort oder Impuls lässt sich unter die der kohärenten Zustände verringern.

### 3.3.4 Thermische Zustände

Für thermische Zustände erwartet man eine Verteilung, dessen Breite von der Temperatur  $T$  abhängt. Die kanonische Dichtematrix ist durch

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} |n\rangle \langle n| \quad (3.23)$$

mit der inversen Temperatur  $\beta = (k_B T)^{-1}$  definiert. Dabei ist die Zustandssumme  $Z$  durch

$$Z = \text{Sp} \left( e^{-\beta \hat{H}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} = e^{-\beta \hbar \frac{\omega}{2}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \quad (3.24)$$

gegeben.

Damit können wir die Husimi-Darstellung eines thermischen Zustandes berechnen:

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega n} |\langle \alpha | n \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \\ &= \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2 e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-|\alpha|^2 (1 - e^{-\beta \hbar \omega})}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die  $Q$ -Darstellung eines thermischen Zustandes entspricht - wie die der kohärenten Zustände - einer radialsymmetrischen Gauß-Verteilung, die hier aber um den Ursprung zentriert ist. Die Varianz der Verteilung ist offensichtlich temperaturabhängig. Die Grenzfälle hoher bzw. tiefer Temperaturen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &\simeq \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2} && \text{für } T \rightarrow 0, \\ Q(\alpha) &\simeq \frac{1}{\pi} \frac{\hbar \omega}{k_B T} e^{-\frac{\hbar \omega |\alpha|^2}{k_B T}} && \text{für } T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Für tiefe Temperaturen erhalten wir das Ergebnis (3.16) eines kohärenten Zustandes. Für hohe Temperaturen wächst die Varianz linear mit der Temperatur. Die  $Q$ -Funktion ist dann über die gesamte komplexe Ebene ausgeschmiert.

## 3.4 Phasenraum - Interpretation

Sehen wir uns die Gleichungen (3.9) und (3.10) an, so stellen wir fest, dass die Erwartungswerte von  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  direkt mit den Erwartungswerten der Komponenten  $u$  und  $v$  des komplexen Arguments  $\alpha$  der Husimi-Funktion zusammenhängen. Dies legt einen Zusammenhang mit dem Phasenraum der klassischen Mechanik nahe, der von den Koordinaten  $x$  und  $p$  aufgespannt wird. Um diesen Zusammenhang ausführen zu können, muss sich

auch die Zeitentwicklung der Husimi-Funktion in Analogie zum klassischen Verhalten beschreiben lassen.

Wir haben gezeigt, dass ein kohärenter Zustand  $|\alpha\rangle$  unter der Zeitentwicklung des vollen Hamilton-Operators (2.42) kohärent bleibt. Der Parameter  $\alpha$  erfüllt dabei die klassische Bewegungsgleichung (2.49) beziehungsweise (2.51). Da die Husimi-Darstellung gerade auf kohärenten Zuständen beruht, übertragen sich diese Eigenschaften auf die Husimi-Funktion selbst.

Es bezeichne  $U(t)$  den Zeitentwicklungsoperator mit  $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(t=0)\rangle$ . Nach Abschnitt 2.3 ist  $U(t)|\alpha\rangle = e^{i\varphi(t)}|\alpha(t)\rangle$  mit geeignetem  $\varphi(t)$  und  $\alpha(t)$ . Damit finden wir die Zeitentwicklung der Husimi-Funktion in der Form

$$Q(\alpha, t) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho(t) | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{U}(t) \rho(0) \hat{U}^\dagger(t) | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \langle \alpha(-t) | \rho(0) | \alpha(-t) \rangle = Q(\alpha(-t), 0). \quad (3.27)$$

Man bemerkt, dass der Phasenfaktor  $e^{i\varphi(t)}$  in dieser Gleichung wegfällt, weshalb Gleichung (2.50), welche keine klassische Entsprechung hat, nicht benötigt wird.

Die Beziehung (3.27) bedeutet, dass man  $Q(\alpha, t)$  aus  $Q(\alpha, t=0)$  erhält, indem man das komplexe Argument  $\alpha$  entlang der durch Gleichung (2.51) bestimmten klassischen Trajektorie  $\alpha(t)$  rückwärts in der Zeit laufen lässt. Umgekehrt erhält man  $Q(\alpha, t)$ , indem man  $Q(\alpha, t=0)$  entlang klassischer Trajektorien propagiert.

Damit ist die Phasenrauminterpretation der  $Q$ -Darstellung vollständig. Die Husimi-Funktion ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung in der komplexen Ebene, die mittels der Zerlegung  $x = 2l \operatorname{Re}(\alpha)$ ,  $p = (\hbar/l) \operatorname{Im}(\alpha)$  mit dem klassischen Phasenraum identifiziert werden kann. Die Zeitentwicklung der Husimi-Funktion ist durch klassische Trajektorien im Phasenraum bestimmt. Insbesondere haben wir über die  $Q$ -Darstellung einen Weg gefunden, die Ergebnisse für kohärente Zustände auf allgemeine Zustände zu übertragen. Damit ist das Problem, die Zeitentwicklung für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator unter dem Einfluss einer äußeren Kraft zu bestimmen, gelöst.

Unsere Lösung zeigt, dass die Physik des getriebenen Quanten-Oszillators in gewissem Sinne als fast klassisch bezeichnet werden kann. Der einzige Unterschied zwischen der klassischen und der quantenmechanischen Beschreibung liegt darin, dass eine klassische Phasenraumverteilung beliebig scharf sein kann, etwa durch eine  $\delta$ -Funktion gegeben ist. Die quantenmechanische Husimi-Funktion hat dagegen immer eine endliche Breite. Wenn man so will, ist die gesamte Quantenphysik unseres Problems in der eingeschränkten Wahl der anfänglichen Husimi-Funktion enthalten. In der Zeitentwicklung selbst treten keine über die klassische Physik hinausgehenden Effekte auf. Dies ist selbstverständlich eine Besonderheit des harmonischen Quanten-Oszillators, und gilt im Allgemeinen nicht.

## 3.5 Beispiel - periodisch getriebener Oszillator

Zur Veranschaulichung der abgeleiteten Ergebnisse werden wir im Folgenden die Zeitentwicklung der Husimi-Funktion eines einfach periodisch getriebenen Oszillators explizit berechnen.

Die auf den Oszillator wirkende äußere Kraft sei

$$F(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad (3.28)$$

mit der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $\omega_0$ . Nach (3.27) ist die Zeitentwicklung der Husimi-Funktion durch die der kohärenten Zustände gegeben. Die genaue Betrachtung der Gleichung (2.51) zeigt, dass sich ein Punkt  $\alpha = (u, v)^T$  im Phasenraum nach

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \alpha + \frac{l}{\hbar} F(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

in der Zeit entwickelt. Betrachtet man diese Gleichung für die Differenz zweier Phasenraumpunkte, so verschwindet der durch die Kraft gegebene Anteil:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha - \alpha') = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} (\alpha - \alpha'). \quad (3.30)$$

Da diese Gleichung eine Rotation der Differenz zweier Phasenraumpunkte beschreibt, muss deren Abstand  $|\alpha - \alpha'|$  unter der Zeitentwicklung des Hamilton-Operators (2.42) konstant bleiben. Die Zeitentwicklung der Husimi-Funktion kann somit durch die Überlagerung einer Drehung und einer Verschiebung des gesamten Phasenraumes beschrieben werden. Die äußere Kraft hat also insbesondere keinerlei Einfluss auf die Form der Phasenraumverteilung, wohl aber auf ihre Lage.

Unter Ausnutzung von (2.54) ergibt sich für den Fall  $\omega_0 \neq \omega$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= \left( u_0 - \frac{l\omega A}{\hbar} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \cos(\omega t) + v_0 \sin(\omega t) + \frac{l\omega A}{\hbar} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t), \\ v(t) &= \left( \frac{l\omega A}{\hbar} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} - u_0 \right) \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t) - \frac{l\omega_0 A}{\hbar} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da der Oszillator ungedämpft ist, bleiben Schwingungen mit beiden Frequenzen erhalten.

Für den Resonanz-Fall  $\omega_0 = \omega$  ist die Lösung von (2.54) durch

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos(\omega t) + v_0 \sin(\omega t) + \frac{lA}{2\hbar} t \cos(\omega t), \\ v(t) &= \left( \frac{lA}{2\hbar\omega} - u_0 \right) \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t) - \frac{lA}{2\hbar} t \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

gegeben. Die Amplitude der Schwingung wächst linear mit der Zeit.

Die Gleichungen (3.31) und (3.32) geben die klassischen Trajektorien an, deren Kenntnis es mittels Gleichung (3.27) erlaubt, die Zeitentwicklung der Husimi-Funktion zu bestimmen.

Als konkretes Beispiel betrachten wir abschließend einen gequetschten Zustand, der in Husimi-Darstellung einer Gauß-Verteilung (3.18) entspricht. Die Zeitentwicklung dieses Zustandes ist nach dem bisher Gesagten durch eine Rotation der gesamten Gauß-Verteilung mit der Oszillator-Frequenz  $\omega$  gegeben, wobei sich der Mittelpunkt auf den klassischen Trajektorien - gegeben durch die Lösung (3.31) bzw. (3.32) von (2.49) - bewegt. In den Abbildungen 3.1 und 3.2 ist die Zeitentwicklung eines gequetschten Zustandes im Resonanz-Fall gleicher Frequenzen der äußeren Kraft und des Oszillators  $\omega_0 = \omega$  abgebildet.

### 3 Die Husimi - Darstellung

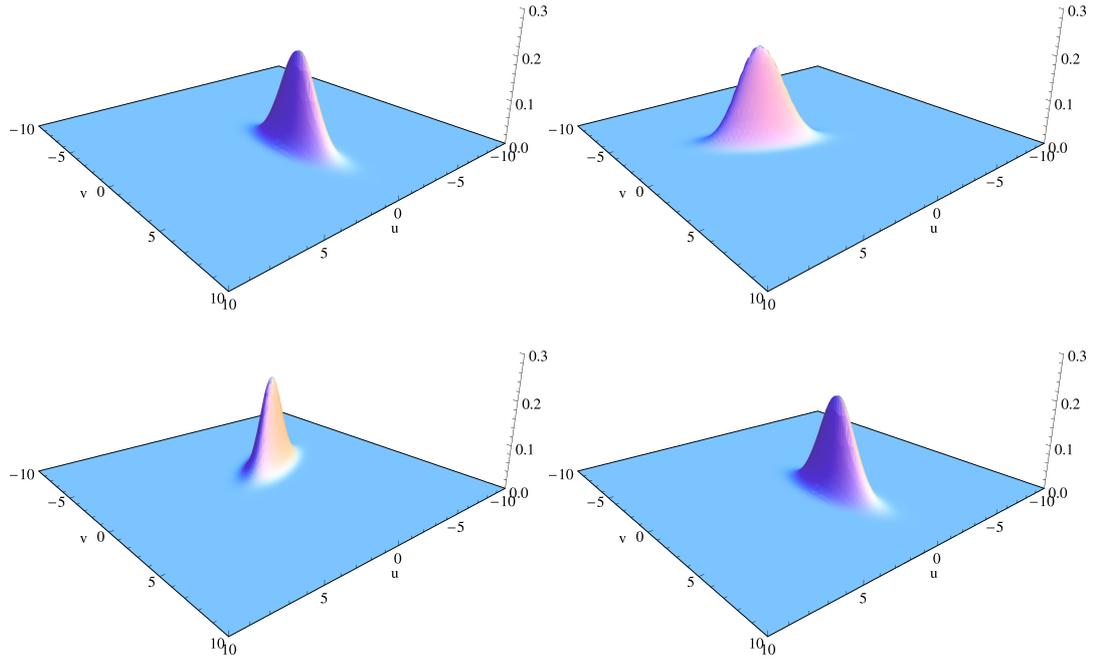


Abbildung 3.1: Zeitentwicklung eines gequetschten Zustandes mit  $\sigma = 0, 2$ ,  $l = 0, 5$ ,  $\omega = \omega_0 = 1$  und  $A = 0$  zu den Zeiten  $t = 0$  (links-oben),  $t = 2\pi/(3\omega)$  (rechts-oben),  $t = 4\pi/(3\omega)$  (links-unten) und  $t = 2\pi/\omega$  (rechts-unten).

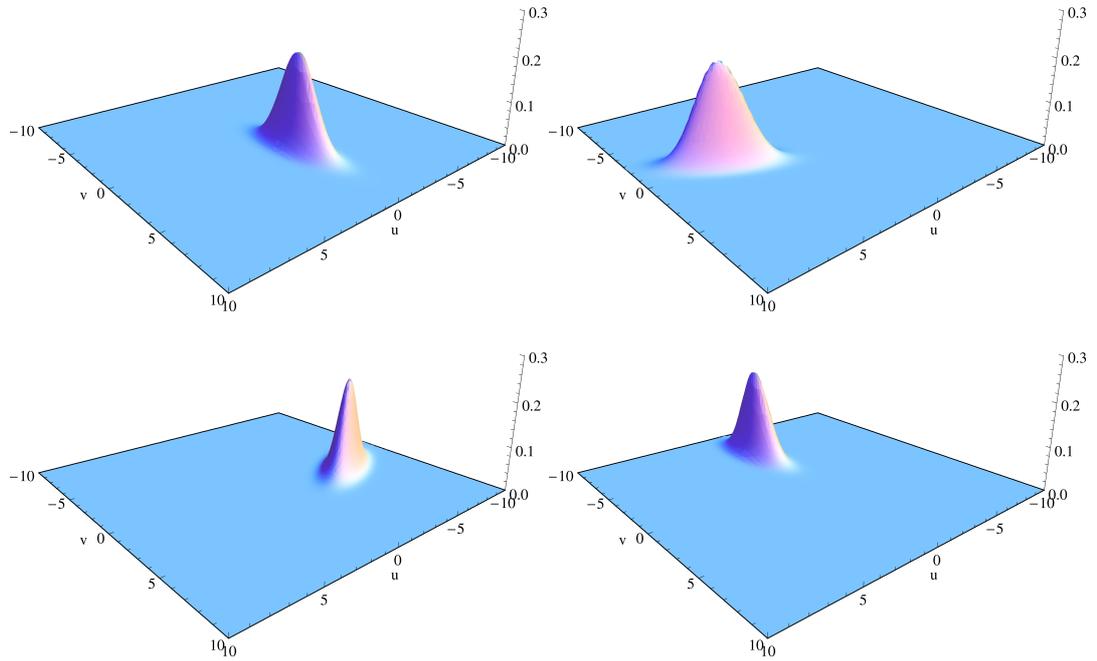


Abbildung 3.2: Zeitentwicklung eines gequetschten Zustandes mit  $\sigma = 0, 2$ ,  $l = 0, 5$ ,  $\omega = \omega_0 = 1$  und  $A = 5$  zu den Zeiten  $t = 0$  (links-oben),  $t = 2\pi/(3\omega)$  (rechts-oben),  $t = 4\pi/(3\omega)$  (links-unten) und  $t = 2\pi/\omega$  (rechts-unten).

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit haben wir den quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft unter Verwendung der Husimi-Darstellung gelöst. Das eingangs formulierte Ziel ist damit erreicht. Der besondere Vorteil unserer Behandlung – etwa im Vergleich zu einem direkten Zugang über die Ortswellenfunktion – besteht in der weitgehenden Übertragung des klassischen Phasenraumkonzepts auf ein getriebenes quantenmechanisches System. Im Ergebnis wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Phasenraum zeitlich propagiert. Die Behandlung reiner und gemischter Zustände ist dabei von gleicher Schwierigkeit.

Die vorgestellten Ergebnisse werfen die Frage auf, inwieweit unsere Vorgehensweise auf andere Fragestellungen übertragbar ist. Betrachten wir zum Beispiel den parametrisch getriebenen Oszillator mit zeitabhängiger Frequenz. Hier ist eine unmittelbare Übertragung unseres Konzepts nicht möglich, da für dieses Modell kohärente Zustände unter Zeitentwicklung nicht kohärent bleiben. Trotzdem sollte es möglich sein, eine verallgemeinerte Bewegungsgleichung für die Phasenraumverteilung abzuleiten und zu lösen.

Ein anderes Beispiel sind offene Quantensysteme, in denen Dissipation über Ankopplung an harmonische Oszillatoren eingeführt wird. Für diesen Fall ist eine Phasenraumbeschreibung der Zeitentwicklung reduzierter Dichtematrizen von Teilsystemen vorstellbar.

## *4 Zusammenfassung und Ausblick*

# A Dichteoperatoren

In der klassischen Mechanik ist der Zustand eines Systems bestimmt, wenn die Werte aller Positionen und Impulse der Teilchen bekannt sind. Der Zustand des Systems kann dann zu jeder späteren Zeit mit Sicherheit vorhergesagt werden. In der Quantenmechanik muss der Begriff der maximalen Kenntnis über ein System neu definiert werden, da nicht alle physikalischen Observablen gleichzeitig scharf gemessen werden können. Ein quantenmechanisches System kann durch einen Zustandsvektor  $|\Psi\rangle$  beschrieben werden. Meßwerte ergeben sich als Erwartungswerte entsprechender Operatoren. Die Grenze der präzisen Messungen ist durch die Heisenbergsche Unschärferelation gegeben.

Oft ist jedoch der Zustandsvektor eines Systems nicht genau bekannt. Wegen dieser unvollständigen Information müssen die Methoden der statistischen Mechanik angewandt werden. Kann unser Wissen über das System durch einen einzelnen Zustandsvektor beschrieben werden, spricht man von reinen Zuständen. Findet man das System mit Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots$  in verschiedenen reinen Zuständen  $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, \dots$ , spricht man von gemischten Zuständen.

Zur Beschreibung gemischter Zustände ist es sinnvoll einen Dichteoperator

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (\text{A.1})$$

einzuführen. Die Summe ist über alle im Gemisch auftretenden Zustände zu nehmen. Da die  $p_i$  Wahrscheinlichkeiten sind, gilt

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_i p_i^2 \leq 1. \quad (\text{A.2})$$

Offensichtlich erhalten wir einen reinen Zustand, wenn alle  $p_i$  bis auf einen verschwinden.

Durch die Wahl einer vollständigen und orthonormierten Basis  $|\varphi_n\rangle$  mit

$$\sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn} \quad (\text{A.3})$$

ergibt sich die Spur des Dichteoperators zu:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\rho) &= \sum_n \sum_i p_i \langle \varphi_n | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \varphi_n \rangle = \sum_n \sum_i p_i \langle \Psi_i | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \Psi_i \rangle \\ &= \sum_i p_i \langle \Psi_i | \Psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Für das Quadrat des Dichteoperators erhalten wir

$$\rho^2 = \sum_i \sum_j p_i p_j |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j| \neq \rho. \quad (\text{A.5})$$

## A Dichteoperatoren

Für reine Zustände gilt offenbar  $\rho^2 = \rho$ . Eine weitere wichtige Eigenschaft von Dichteoperatoren ist ihre Hermitizität:

$$\rho^\dagger = \left( \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \right)^\dagger = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| = \rho. \quad (\text{A.6})$$

Mit Hilfe von Dichteoperatoren kann der Erwartungswert eines beliebigen Operators durch Spurbildung berechnet werden:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \sum_i p_i \langle \Psi_i | \hat{A} | \Psi_i \rangle = \sum_n \sum_i p_i \langle \Psi_i | \hat{A} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \Psi_i \rangle \\ &= \sum_n \sum_i p_i \langle \varphi_n | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \hat{A} | \varphi_n \rangle = \sum_n \langle \varphi_n | \rho \hat{A} | \varphi_n \rangle \\ &= \text{Sp}(\rho \hat{A}). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Bei der Berechnung von Erwartungswerten von Operatorprodukten können die Operatoren unter der Spur zyklisch vertauscht werden:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \hat{B} \rangle &= \sum_i p_i \langle \Psi_i | \hat{A} \hat{B} | \Psi_i \rangle = \sum_n \sum_i p_i \langle \Psi_i | \hat{A} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \hat{B} | \Psi_i \rangle \\ &= \sum_n \sum_i p_i \langle \varphi_n | \hat{B} | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \hat{A} | \varphi_n \rangle = \sum_n \langle \varphi_n | \hat{B} \rho \hat{A} | \varphi_n \rangle \\ &= \text{Sp}(\hat{B} \rho \hat{A}) = \text{Sp}(\rho \hat{A} \hat{B}) = \text{Sp}(\hat{A} \hat{B} \rho). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Die Zeitentwicklung des Dichteoperators kann mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung durch die sogenannte von-Neumann-Gleichung ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho &= \frac{d}{dt} \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| = \sum_i p_i \left( \frac{d}{dt} |\Psi_i\rangle \right) \langle \Psi_i| + \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \left( \frac{d}{dt} \langle \Psi_i| \right) \\ &= \sum_i p_i \frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| - \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi_i| \hat{H} = \frac{1}{i\hbar} (\hat{H} \rho - \rho \hat{H}) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \rho]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Diese Gleichung ist das Analogon zur Liouville-Gleichung der klassischen statistischen Mechanik.

Dichteoperatoren liefern also eine vollständige statistische Beschreibung quantenmechanischer Systeme. Vorteilhaft ist, dass Erwartungswerte durch Spurbildung über den Dichteoperator ausgedrückt werden können.

## B Zerlegung der Eins mittels kohärenter Zustände

Wir zeigen zunächst für beliebiges  $m, n \in \mathbb{N}_0$ , dass für das Skalarprodukt  $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$  gilt, wobei  $|m\rangle$  und  $|n\rangle$  Besetzungszustände sind:

$$\langle m|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle m|\alpha\rangle \langle \alpha|n\rangle d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha^*)^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} d\alpha. \quad (\text{B.1})$$

Durch Einführen von Polarkoordinaten  $\alpha = re^{i\varphi}$ , d. h.  $d\alpha = r dr d\varphi$  folgt:

$$\begin{aligned} \langle m|n\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} \frac{r^{m+n+1}}{\sqrt{m!n!}} dr \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-m)} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} \frac{r^{m+n+1}}{\sqrt{m!n!}} dr \cdot 2\pi \delta_{mn} \\ &= \delta_{mn} \frac{2}{m!} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2m+1} dr. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Unter Ausnutzung von

$$\int_0^\infty e^{-ar^2} r dr = \frac{1}{-2a} e^{-ar^2} \Big|_{r=0}^\infty = \frac{1}{2a} \quad (\text{B.3})$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \langle m|n\rangle &= \delta_{mn} \frac{2}{m!} \left( \frac{\partial^m}{\partial(-a)^m} \int_0^\infty e^{-ar^2} r dr \right) \Big|_{a=1} = \delta_{mn} \frac{2}{m!} \cdot \frac{1}{2} m! \\ &= \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Aus dieser Eigenschaft folgt sofort die gewünschte Zerlegung (3.3).



# Danksagung

Ein abschließendes Wort des Dankes möchte ich allen widmen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Das betrifft zunächst Herrn Prof. Dr. H. Fehske für die Vergabe und die Betreuung dieser Arbeit, die ich als sehr angenehm empfand. Besonderen Dank schulde ich Herrn Dr. A. Alvermann, der jederzeit ein offenes Ohr für meine Fragen und Probleme hatte und durch seine engagierte Betreuung und stete Hilfsbereitschaft sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Einen Dank auch an die Mitarbeiter der gesamten Arbeitsgruppe, die mir bei der Bewältigung vieler kleiner Probleme geholfen haben. Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern danken, die mir durch ihre Unterstützung das Studium und diese Arbeit ermöglichten und sie mit Anteilnahme verfolgt haben.



# Erklärung

Ich, Daniel Pagel, versichere, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe. Die Stellen, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, habe ich in jedem Falle durch Angaben der Quelle, auch der Sekundärliteratur, als Entlehnung kenntlich gemacht.

Greifswald, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Pagel, Daniel