

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
INSTITUT FÜR PHYSIK

**Absorption und Streuung von Licht an
geladenen Staubteilchen**

MASTERARBEIT

vorgelegt von: Elena Thiessen
geboren am 12. Januar 1987 in Moskau

erster Gutachter: PD Dr. Franz X. Bronold
zweiter Gutachter: Prof. Dr. André Melzer

Greifswald, 23. August 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Mie-Streuung	7
1.1 Elektromagnetische Welle	7
1.2 Lösung der Vektorwellengleichung	9
1.2.1 Einführung der Vektorkugelfunktionen	11
1.2.2 Lösung der skalaren Wellengleichung in Kugelkoordinaten	12
1.3 Entwicklung elektromagnetischer Wellen in Vektorkugelfunktionen	14
1.3.1 Streuung am homogenen Staubteilchen	16
1.3.2 Streuung am beschichteten Staubteilchen	19
1.4 Streu-, Absorptions- und Extinktionseffizienz	21
1.5 Streuung an negativ geladenen Staubteilchen	25
1.5.1 Beschreibung der zusätzlichen Elektronen	25
1.5.2 Modifizierung der dielektrischen Funktion	27
2 Extinktionseffizienz negativ geladener Staubteilchen	31
2.1 Homogene Staubteilchen	31
2.1.1 Ungeladene Staubteilchen	32
2.1.2 Geladene Staubteilchen	38
2.2 Staubteilchen mit dielektrischem Kern und Mantel	43
2.2.1 Kernmaterialien	43
2.2.2 Entwicklung des Extinktionsquerschnittes	45
2.2.3 Extinktionseffizienz für verschiedene Radienverhältnisse	47
2.2.4 Verschiebung der anomalen Resonanzen	56
2.2.5 Analyse der Schalenresonanz	66
2.3 Geladene Hohlkugel	74
2.4 Metallische Kerne	77
2.4.1 Kernmaterialien	78

2.4.2	Diskussion der Extinktionseffizienz	80
2.4.3	Mutterresonanzen des Mantelmaterials	83
	Literaturverzeichnis	90

Einleitung

Kleine geladene Staubteilchen im Plasma sind in der uns umgebenden Welt allgegenwärtig. Sie kommen im interstellaren Medium, im Schweif von Kometen, in der planetaren Magnetosphäre und auch in der unteren Erdatmosphäre vor. Sie bestehen hauptsächlich aus Kohlenstoff oder Silikaten und ihre Größenordnung liegt im mikro- und submikrometer Bereich [1]. So sind die Ringe des Saturns ein kollektives Phänomen des staubigen Plasmas, siehe Abb. 1 (links).

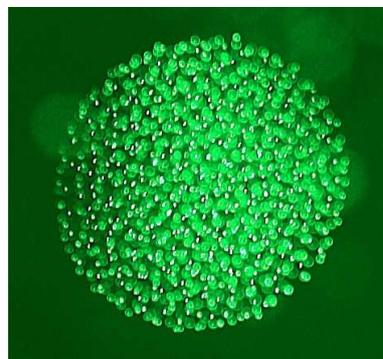
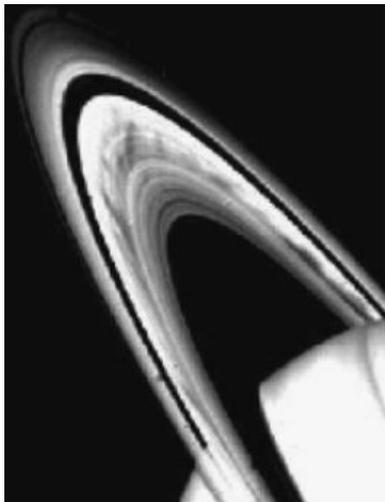


Abbildung 1: Saturnringe, ein Phänomen des staubigen Plasmas im interplanetarischen Raum (links), reproduziert nach [1]. Yukawaball, ein System negativ geladenen Staubteilchen im Laborplasma (rechts), reproduziert aus [2]

Auf der Erde wird Plasma sowohl in der Industrie als auch in der Forschung verwendet. Dabei spielen Staubteilchen eine unterschiedliche Rolle. Während sie in den Prozessplasmen oft als Kontamination gelten, werden die mit ihnen verbundenen Phänomene in Laborplasmen erforscht. Ein Forschungsthema im Gebiet der staubigen Plasmen ist die Kristallisation von mikrometer großen Staubpartikeln zu sogenannte Plasma-Kristallen [3], siehe auch Abb. 1. Die kugelförmigen

Teilchen, zumeist aus Plastik, laden sich im Plasma negativ auf. Denn die im Vergleich zu den Ionen viel leichteren und somit mobileren Elektronen treffen zuerst auf die Stauboberfläche. Die resultierende Oberflächenladung entspricht dem stationären Zustand bei dem aufgrund des sog. Floating-Potentials des Teilchens der Ladungsfluss der Elektronen und Ionen zur Oberfläche ausgeglichen ist. Befinden sich im Plasma viele Staubteilchen, die eine große Anzahl von Elektronen binden, so wird die Quasineutralität des Plasmas gestört [4]. Um diesen Effekt zu quantifizieren, muss die Oberflächenladungsdichte der Staubteilchen gemessen werden. In den Plasma-Kristallen ist die Kopplung der negativ aufgeladenen Staubteilchen untereinander, ebenso wie die Kopplung an externe elektromagnetische Felder von ihrer Oberflächenladungsdichte bestimmt. Daher ist für die Analyse der Plasma-Kristalle, ebenso wie für die Erforschung anderer kollektiver Phänomene der Staubteilchen und in vielen anderen Bereichen der staubigen Plasmen die Ermittlung der Oberflächenladungsdichte unerlässlich.

Die konventionellen Methoden zur Ladungsmessung der Staubteilchen basieren auf der Ausnutzung von Kräftegleichgewichten im Plasma [5],[6], dazu werden jedoch Plasmaparameter gebraucht, die nicht ausreichend genau gemessen werden können. So bestimmte zum Beispiel Carstensen et al. [7] mit der phasen aufgelösten Resonanzmethode die Ladung von Melamin-Formeldehyd-Kugeln. Die negativ geladenen Teilchen befinden sich dazu in der Plasmarandschicht, wo ein Gleichgewicht zwischen der Gravitationskraft und der elektrischen Kraft herrscht, vgl. Abb. 2 (rechts). Aufgrund des parabolischen Profils des Randschichtpotentials kann die Bewegung der Teilchen mittels eines gedämpften harmonischen Oszillators beschrieben werden. Durch das Anlegen eines externen harmonischen Feldes werden die Teilchen zu Schwingung angeregt. Die Eigenfrequenz der Bewegung wird aus der Phasendifferenz des Anregungssignals und der Oszillation der Teilchen gewonnen. Das Quadrat der Eigenfrequenz ist proportional zu dem Ladung-zu-Masse-Verhältnis. Dieses Verfahren erlaubt somit eine sehr genaue Messung der relativen Ladungsdichte. Um jedoch die absolute Ladung des Staubpartikels zu bestimmen, wird die Plasmaladungsdichte am Ort des Teilchens benötigt. Ihre Bestimmung mittels einer Langmuir-Sonde ist dabei mit einem Fehler von 20% behaftet.

Eine optische Messung der Oberflächenladungsdichte der Staubteilchen, wie sie Heinisch et al. [8], [9] vorschlagen, benötigt im Gegensatz dazu keine Plasmaparameter. Die Oberflächenladung wird dabei aus der Streuung des infraroten Lichts an den negativ geladenen Staubteilchen im Plasma gewonnen. Dazu muss die Extink-

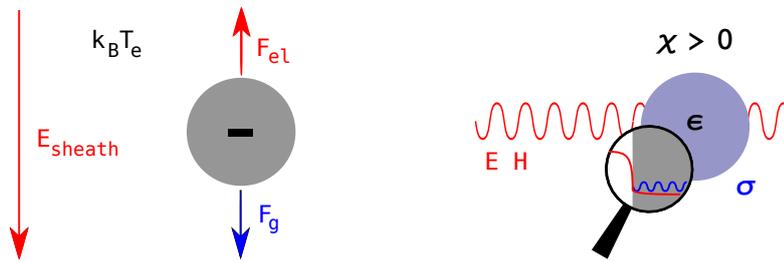


Abbildung 2: Konventionelle Art der Ladungsmessung von Staubteilchen im Randschichtpotential (E_{sheath}) mittels des Kräftegleichgewichts zwischen der elektrischen Kraft und der Gravitationskraft (links). Optische Bestimmung der Staubteilchenladung durch Messung der Extinktionseffizienz, übernommen nach Kommunikation von Heinisch.

tionseffizienz in Abhängigkeit der Wellenlänge gemessen werden. Die Lichtstreuung an Staubpartikeln, beschrieben durch die Mie-Theorie [10], wird bereits seit langem zur Bestimmung der Teilchengröße verwendet [11]. Weist das Material der Staubteilchen eine starke transversal optische Phononresonanz auf, so kommt es im Bereich der anomalen Resonanzen [12] zu einer Blauverschiebung des Extinktionsmaximums aufgrund zusätzlicher negativer Ladungen. Es stellt sich heraus, dass vor allem mikro- und submikrometer große Teilchen aus Aluminiumoxid und Bleisulfid eine Blauverschiebung aufweisen, die in einem für die Messung geeignetem Größenbereich liegt. Die Elektronenaffinität beider Materialien ist positiv, sodass die zusätzlichen Elektronen aus dem Plasma im Leitungsband gebunden werden. Für mikrometer große Teilchen können sie mit einer homogenen Volumenladungsdichte beschrieben werden. Sie ist proportional zu der hervorgerufenen Leitfähigkeit, die die Polarisierbarkeit des Materials und somit die Lichtstreuung beeinflusst. Eine höhere Volumenladungsdichte führt über die Leitfähigkeit zu einer größeren Blauverschiebung des Extinktionsmaximums. Unterschiedlich große Staubteilchen werden in der Regel unter gleichen Plasmabedingungen dieselbe Oberflächenladungsdichte erreichen, sodass Teilchen mit kleinerem Radius, im submikrometer Bereich, eine höhere Bulkladungsdichte und somit eine größere Blauverschiebung aufweisen [8].

In Experimenten werden vor allem mikrometergroße Staubteilchen verwendet. Um auch ihre Ladung optisch messen zu können, muss die Sensitivität des Extinktionsmaximums auf zusätzliche Ladungen optimiert werden. Eine Methode wie dies bei konstanter Oberflächenladungsdichte und Teilchenradius erreicht werden kann, wird in dieser Arbeit vorgestellt. Im Hinblick auf submikrometergroße Teilchen bedeutet eine Erhöhung der Blauverschiebung des Extinktionsma-

ximums, dass sich die Größenordnung der Oberflächenladung, die mittels der optischen Messung nachweisbar ist, verkleinert. Dazu werden in die Aluminiumoxid- und Bleisulfid-Staubteilchen dielektrische oder metallische Kerne eingefügt. Die verwendeten Materialien weisen eine negative Elektronenaffinität auf, sodass die zusätzlichen Elektronen der aufgeladenen Staubteilchen in der Schale eingeschlossen sind. Besonders bei sehr dünnen Schalen übersteigt die Volumenladungsdichte und somit die Leitfähigkeit des beschichteten Staubteilchens die der Vollkugeln um bis zu drei Größenordnungen. Es wird untersucht, wie sich die höhere Leitfähigkeit auf das durch die Beschichtung veränderte Extinktionsspektrum des Staubteilchens auswirkt. Die Beschichtung ermöglicht es die anomalen Resonanzen der Kern- und Mantelmaterialien mittels des Radienverhältnisses zu verschieben. Hinzu kommt, dass durch die Beschichtung eine zusätzliche Schalenresonanz entsteht, die zum einen einen weiteren Wellenzahlbereich erschließt, der durch die verwendeten Materialien nicht zugänglich ist und zum anderen auch für mikrometergroße Teilchen eine für Messungen geeignete Blauverschiebung zeigt, die mit normalen Staubteilchen nicht erreicht wird.

Die Verwendung von Staubteilchen mit Metallkernen birgt zusätzlich den Vorteil, dass dadurch die Masse der Staubteilchen kontrolliert werden kann. Dies ist erweitert die Verwendung von Aluminiumoxid- und Bleisulfid-Staubteilchen als minimal invasive elektrische Sonden, wie sie von Heinisch et al. [8] vorschlagen wird. Die ins Plasma injizierten Staubteilchen laden sich entsprechend der Plasmaparameter negativ auf, sodass aus der Messung ihrer Ladung und der gleichzeitigen Messung des Kräftegleichgewichts zwischen der elektrischen Kraft und der Gravitationskraft auf die Elektronendichte und Temperatur geschlossen werden kann. Durch die Variation der Teilchenmasse mittels unterschiedlich großer Metallkerne verändert sich Gravitationskraft und somit die Gleichgewichtsposition des Staubkorns im Randschichtpotential. Dies erlaubt eine höhenaufgelöste Messung der lokalen Randschichtparameter. Eine genaue Kenntnis der Plasmaparameter ist sowohl für Labor- als auch Industrieplasmen von enormem Interesse.

Die durch zusätzliche Ladung bedingte Blauverschiebung des Extinktionsspektrums wurde für geladene Nanostäbe aus Gold bereits gemessen [13]. Die in dieser Masterarbeit vorgestellten Ergebnisse der Lichtstreuung an beschichteten Staubteilchen führen die Arbeit von Heinisch et al. weiter. Die Blauverschiebung der Extinktionsmaxima der anomalen Resonanzen wird mittels der Beschichtung vergrößert. Dies ermöglicht zum einen die Bestimmung der Oberflächenladung mikrometergroßer Teilchen, zum anderen findet die Blauverschiebung für submikrome-

tergroße beschichtete Teilchen im Vergleich zu homogenen Teilchen schon bei um zwei Größenordnungen kleineren Oberflächenladungsdichten statt. Zusammen mit der Erschließung neuer Wellenzahlbereiche sind die Ergebnisse viel versprechend um im Experiment realisiert zu werden.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Kapitel. Im ersten Kapitel wird die Lichtstreuung mittels der Mie-Theorie beschrieben. Dabei wird die Vektorwellengleichung in verschiedenen Bereichen des betrachteten Systems gelöst. Mittels der Randbedingungen an den Grenzflächen ergeben sich Streukoeffizienten, die sowohl für die Vollkugel als auch die beschichtete Kugel angegeben werden. Die Messgröße um den Einfluss der Oberflächenladung auf die Lichtstreuung zu studieren ist die Extinktionseffizienz. Ihr funktionaler Zusammenhang mit den Streukoeffizienten wird hergeleitet. Anschließend wird die Berechnung der Leitfähigkeit, die durch die zusätzliche Ladung bedingt ist, vorgestellt. Sie geht über die Polarisierbarkeit in die Streukoeffizienten ein.

Im zweiten Kapitel wird der Einfluss zusätzlicher Ladungen auf das Extinktionseffizienzspektrum beschichteter Teilchen untersucht. Die gefundenen Blauverschiebungen der Maxima werden mit denen der entsprechenden Vollkugeln verglichen. Daher werden zu Anfang des Kapitels die Ergebnisse von Heinisch et al. [8] für Aluminiumoxid- und Bleisulfid-Vollkugeln vorgestellt. Im nächsten Schritt werden beschichtete Kugeln mit einem dielektrischen Kern und einem Mantel aus Aluminiumoxid oder Bleisulfid betrachtet. Dazu wird zunächst das Extinktionseffizienzspektrum in Abhängigkeit des Radienverhältnisses zwischen Kern und Kugel untersucht. Anschließend werden die gefundenen Effekte auf ihre Blauverschiebung aufgrund der Oberflächenladung analysiert. Als nächstes werden Resonanzeffekte von Hohlkugeln aus Aluminiumoxid und Bleisulfid betrachtet. Und zuletzt erfolgt eine Untersuchung beschichteter Staubteilchen mit einem metallischen Kern.

Kapitel 1

Mie-Streuung

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der Wechselwirkung zwischen Licht und einem sphärischen Staubteilchen vorgestellt. Das Licht wird mittels der klassischen Elektrodynamik durch eine elektromagnetische Welle beschrieben. Das Teilchen befindet sich dabei in einem homogenen, nicht absorbierendem Medium mit reellem Brechungsindex. Es wird nur die elastische Lichtstreuung betrachtet, bei der die Wellenlänge des einfallenden und des gestreuten Lichts identisch sind. Ausgehend von einem neutralen, homogenen, isotropen Staubteilchen, werden die Ergebnisse dann auf ein beschichtetes und geladenes Staubteilchen übertragen. Die Beschreibung der Streuung von elektromagnetischen Wellen an sphärischen Teilchen wird Gustav Mie [10] zugesprochen. Er leitete die Streukoeffizienten ab, mit deren Hilfe man die Streuung vollständig charakterisieren kann. Das einfallende Licht regt die Ladungen des Teilchens zu Oszillationen an, es kommt dann zur Absorption des Lichts oder auch zur Emission elektromagnetischer Wellen durch die beschleunigten Ladungen. Das elektromagnetische Feld im Außenraum setzt sich aus dem einfallenden und dem gestreuten Feld zusammen. Dieses muss an der Grenzfläche mittels der Randbedingungen mit dem elektromagnetischen Feld im Innenraum des Staubteilchens verknüpft werden. Die Darstellung der Mie-Theorie richtet sich vor allem nach dem Buch von Bohren und Huffmann [14].

1.1 Elektromagnetische Welle

Um die Lichtstreuung an einem sphärischen Teilchen zu untersuchen, wird eine makroskopische Beschreibung mittels der Theorie der klassischen Elektrodynamik

gewählt. Demnach wird Licht durch eine elektromagnetische Welle beschrieben, welche den makroskopischen Maxwell-Gleichungen [14]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{\text{F}}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_{\text{F}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

genügt. Die homogenen Gleichungen stellen Forderungen an die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Flussdichte \vec{B} . Der Einfluss des Stromes (\vec{J}) und der Ladung (ρ) in der Materie werden durch die beiden inhomogenen Gleichungen beschrieben. Dazu werden beide Größen in gebundene und freie Anteile (ρ_{F} , \vec{J}_{F}) aufgespalten. Die gebundene Ladung geht durch die Polarisation \vec{P} in die Definition der elektrischen Flussdichte

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.2)$$

ein. Die Magnetisierung \vec{M} berücksichtigt die gebundenen Ströme und trägt zur magnetischen Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1.3)$$

bei. Dabei sind dem Vakuum die elektrische Feldkonstanten ϵ_0 und die magnetische Feldkonstante μ_0 zugeordnet. Die Polarisation der gebundenen Ladungen

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_{\text{e}} \vec{E}. \quad (1.4)$$

ist die Antwort der Materie auf die Störung mittels eines elektrischen Feldes. Den funktionalen Zusammenhang zwischen den beiden Größen beschreibt die elektrische Suszeptibilität χ . In ähnlicher Weise ist die Magnetisierung

$$\vec{M} = \chi_{\text{m}} \vec{H} \quad (1.5)$$

die Reaktion gebundener Ströme auf die magnetische Feldstärke. Die Antwortfunktion ist diesem Fall die magnetische Suszeptibilität χ_{m} . Wird diese Beziehung in die entsprechende Materialgleichung (1.3) eingesetzt

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_{\text{m}} \vec{H} \quad (1.6)$$

so lässt sich die magnetische Permeabilität μ definieren

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \vec{H} \iff \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (1.7)$$

Der freie Anteil des Stroms ist nach dem Ohmschen Gesetz

$$\vec{J}_F = \sigma \vec{E} \quad (1.8)$$

mittels der elektrischen Leitfähigkeit σ mit der elektrischen Feldstärke verbunden.

Es ist üblich die reellen, bezüglich der Zeit harmonischen elektrischen und magnetischen Felder $\vec{F} = \vec{A} \cos(\omega t) + \vec{B} \sin(\omega t)$ mittels des komplexen Ausdruckes

$$\vec{F}_c = \vec{C} e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \vec{C} = \vec{A} + i\vec{B} \quad (1.9)$$

darzustellen. Im Argument der Exponentialfunktion steht die Winkelgeschwindigkeit ω und die Zeit t . Physikalische Bedeutung hat weiterhin nur der Realteil dieser komplexen Größe $\text{Re}(\vec{F}_c) = \vec{F}$. Im Weiteren wird die komplexe Darstellung der Felder verwendet, ohne dies in der Regel zu kennzeichnen.

Mit der komplexen Schreibweise (1.9) und den Gl. (1.4), (1.5), (1.8) lassen sich die Maxwell-Gleichungen (1.1) in die Form

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0, \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \mu \vec{H}, \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \epsilon \vec{E} \quad (1.13)$$

bringen, wobei die komplexe Permeabilität

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) + i\frac{\sigma}{\omega} \quad (1.14)$$

definiert wurde. Dies ist der Ausgangspunkt der Beschreibung des Streuprozesses.

1.2 Lösung der Vektorwellengleichung

Durch die Wechselwirkung des einfallenden Lichts mit der Materie des beschichteten Staubteilchens werden sowohl im Kern als auch im Mantel elektromagnetische

Felder (\vec{E}, \vec{H}) angeregt. Die entsprechenden Größen werden für den Kernbereich mit dem Index 1, für den Mantelbereich mit dem Index 2 und für das Medium mit Index 3 gekennzeichnet, siehe Abb. 1.1.

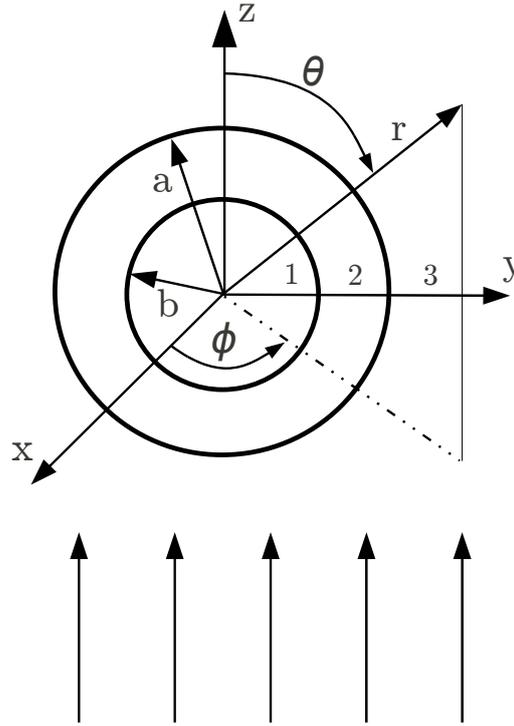


Abbildung 1.1: Schema zur Lichtstreuung an einer beschichteten Kugel mit dem Gesamtradius a und dem Kernradius b . Die in positive z -Richtung einfallende elektromagnetische Welle muss im Kern (1), dem Mantel (2) und dem Medium (3) die Maxwell-Gleichungen (1.10)–(1.13) erfüllen. Statt der kartesischen Koordinaten x, y, z sind die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ besser zur Beschreibung des Streuprozesses geeignet.

Das elektromagnetische Feld im Medium

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_i + \vec{E}_s \quad \text{und} \quad \vec{H}_3 = \vec{H}_i + \vec{H}_s \quad (1.15)$$

entsteht aus der Überlagerung der einfallenden elektromagnetischen Welle \vec{E}_i, \vec{H}_i und der gestreuten elektromagnetischen Welle \vec{E}_s, \vec{H}_s . Die einfallende Welle wird mittels ebener harmonischer Felder

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{H}_i = \vec{H}_0 e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad (1.16)$$

mit dem Wellenvektor \vec{k}_3 und der Amplitude \vec{E}_0 bzw. \vec{H}_0 beschrieben. Dies bedeu-

tet jedoch keine Einschränkung der Resultate, da jede Welle mittels Fouriertransformation in solche zerlegt werden kann.

Die elektromagnetischen Felder des Kerns, Mantels und Mediums müssen in ihrem jeweiligen Bereich die Maxwell-Gleichungen (1.10)-(1.13) erfüllen. Aus welchen sich die Vektorwellengleichungen

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad (1.17)$$

für die Felder herleiten lassen. Dazu wird die Rotation der inhomogenen Maxwell-Gleichungen gebildet und die Ausdrücke mittels der Vektoridentität

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \vec{A})}_{\equiv \nabla^2 \vec{A}} \quad (1.18)$$

und unter Ausnutzung der homogenen Maxwell-Gleichungen umgeformt.

1.2.1 Einführung der Vektorkugelfunktionen

Die Vektorwellengleichungen (1.17) können nur bezüglich eines kartesischen Koordinatensystem komponentenweise betrachtet werden [15]. Für die Feldkomponenten ergibt sich dann die skalare Wellengleichung

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (1.19)$$

wobei ψ ist beliebiges skalares Feld ist. Um die Vektorwellengleichung für das Streuproblem zu lösen, bieten sich Kugelkoordinaten an, vgl. Abb. 1.1. Dazu werden die sogenannten Vektorkugelfunktionen

$$\vec{M} = \nabla \times \vec{c} \psi \quad \text{und} \quad \vec{N} = \frac{\nabla \times \vec{M}}{k} \quad (1.20)$$

mittels einem zunächst beliebigen Vektor \vec{c} und einer skalaren Wellenfunktion ψ konstruiert. Genügt ψ der skalaren Wellengleichung (1.19), so sind \vec{M} und \vec{N} Lösungen der Vektorwellengleichungen

$$\nabla^2 \vec{M} + k^2 \vec{M} = \nabla \times [\vec{c} (\nabla^2 \psi + k^2 \psi)] = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 \vec{N} + k^2 \vec{N} = 0. \quad (1.21)$$

Außerdem sind beide Vektorkugelfunktionen divergenzfrei und lassen sich durch

$$\nabla \times \vec{N} = k\vec{M} \quad (1.22)$$

und Gl. (1.20) in einander überführen. Eben diese Eigenschaften werden durch die Maxwell-Gleichungen von elektromagnetischen Feldern gefordert, sodass die Entwicklung des elektrischen Feldes

$$\vec{E} = -\sum_n^{\infty} (A_n \vec{N}_n + B_n \vec{M}_n) \quad (1.23)$$

und des magnetischen Feldes

$$\vec{H} = -\frac{k}{i\omega\mu} \sum_n^{\infty} (A_n \vec{M}_n + B_n \vec{N}_n) \quad (1.24)$$

nach \vec{M} und \vec{N} möglich ist. Die Lösung der Vektorwellengleichung hat sich auf die Bestimmung von ψ , als Lösung der skalaren Wellengleichung und auf die Wahl des Vektors \vec{c} verschoben. Ist ein kugelsymmetrisches Problem zu lösen, wird

$$\vec{c} = r\hat{e}_r \quad (1.25)$$

gewählt. Dadurch gilt $\vec{r} \cdot \vec{M} = 0$ und ist \vec{M} tangential zur Kugeloberfläche.

1.2.2 Lösung der skalaren Wellengleichung in Kugelkoordinaten

Es wird nun die skalare Wellengleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (1.26)$$

in Kugelkoordinaten r, θ, ϕ zu lösen sein. Für den Separationsansatz wird die Wellenfunktion $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ als Produkt von Funktionen einer Veränderlichen aufgefasst. Wird dies in die Wellengleichung (1.26) eingesetzt, zerfällt sie in

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0, \quad (1.29)$$

mit den Separationskonstanten m und n . Die Gleichung (1.27) wird durch

$$\Phi_e = \cos(m\phi) \quad \text{und} \quad \Phi_o = \sin(m\phi) \quad (1.30)$$

erfüllt. Alle linear unabhängigen Lösungen werden durch die positiven Werte von m generiert. Die Eindeutigkeit der Lösung wird durch ganzzahlige m -Werte garantiert. Die Gleichung (1.28) lässt sich auf die allgemeine Legendre-Gleichung zurückführen, die durch assoziierte Legendre-Polynome $P_n^m(\cos\theta)$ des Grades n und der Ordnung m mit $n = m, m+1, \dots$ erfüllt wird. Die Radialkomponente, siehe Gl. (1.29), genügt der Besselschen Differentialgleichung

$$\rho \frac{dZ}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \left[\rho^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0, \quad (1.31)$$

was durch die Einführung der dimensionslosen Variable $\rho = kr$ und der Funktion $Z = R\sqrt{\rho}$ deutlich wird. Ihre Lösungen sind die sphärischen Bessel-Funktionen erster Gattung

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho), \quad (1.32)$$

zweiter Gattung

$$y_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{n+\frac{1}{2}}(\rho), \quad (1.33)$$

auch Neumann-Funktionen genannt, und ihre Linearkombinationen zu sphärischen Bessel-Funktionen dritter Gattung

$$h_n^{(1,2)}(\rho) = j_n(\rho) \pm iy_n(\rho), \quad (1.34)$$

die als Hankel-Funktionen bezeichnet werden. Somit sind die skalaren Felder

$$\psi_{emn} = \cos(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(kr) \quad \text{und} \quad \psi_{omn} = \sin(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \quad (1.35)$$

wobei $z_n(kr)$ für eine der Bessel-Funktionen (1.32)–(1.34) steht, die gesuchten Lösung der skalaren Wellengleichung (1.26). Damit ist mit den Vektorkugelfunktionen

$$\begin{aligned}\vec{M}_{emn} &= \nabla \times (\vec{r}\psi_{emn}), & \vec{M}_{omn} &= \nabla \times (\vec{r}\psi_{omn}), \\ \vec{N}_{emn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{emn}}{k}, & \vec{N}_{omn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{omn}}{k}\end{aligned}\quad (1.36)$$

auch die Vektorwellengleichung (1.21) gelöst. Werden die Rotationsoperationen ausgeführt, so erhält man

$$\vec{M}_{emn} = \frac{-m}{\sin\theta} \sin(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (1.37)$$

$$\vec{M}_{omn} = \frac{m}{\sin\theta} \cos(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_{emn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \cos(m\phi) n(n+1) P_n^m(\cos\theta) \hat{\mathbf{e}}_r + \cos(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\cos\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad - m \sin(m\phi) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\phi,\end{aligned}\quad (1.39)$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_{omn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \sin(m\phi) n(n+1) P_n^m(\cos\theta) \hat{\mathbf{e}}_r + \sin(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\cos\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad + m \cos(m\phi) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\phi.\end{aligned}\quad (1.40)$$

1.3 Entwicklung elektromagnetischer Wellen in Vektorkugelfunktionen

Es gilt nun die elektromagnetischen Wellen des betrachteten Streuproblems in Vektorkugelfunktionen zu entwickeln. Dazu wird zunächst der einfachere Fall der Streuung an einem homogenen Staubteilchen betrachtet, um dann mit ähnlichen Überlegungen das beschichtete Staubteilchen zu behandeln. Die Entwicklung der einfallenden elektromagnetischen Welle ist bei beiden System identisch.

Einfallende elektromagnetische Welle

Die einfallende ebene Welle, siehe Gl. (1.16), wird in den Vektorkugelfunktionen, wie in Gl. (1.23) vorgeschlagen wurde, entwickelt. Ihre Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ wird

im Weiteren nicht mitgeführt, kann jedoch jederzeit als Faktor ergänzt werden.

Die elektromagnetische Welle \vec{H}_i ,

$$\vec{E}_i = E_0 e^{ik_3 r \cos \theta} \hat{\mathbf{e}}_x \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{e}}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (1.41)$$

ist in x -Richtung polarisiert und breitet sich in positive z -Richtung aus, siehe Abb. 1.1. Es ist ausreichend die Entwicklung des elektrischen Feldes nach Vektorkugelfunktionen

$$\vec{E}_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (B_{emn} \vec{M}_{emn} + B_{omn} \vec{M}_{omn} + A_{emn} \vec{N}_{emn} + A_{omn} \vec{N}_{omn}) \quad (1.42)$$

zu betrachten und die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten B_{emn} , B_{omn} , A_{emn} , A_{omn} zu bestimmen. Denn sind diese bekannt, kann die Entwicklung des magnetischen Feldes mithilfe der Gl. (1.11) sofort angegeben werden. Es lässt sich zeigen, dass die Vektorkugelfunktionen jeweils orthogonal zueinander sind. So zum Beispiel das Paar $(\vec{M}_{emn}, \vec{M}_{omn})$, denn

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{M}_{em'n'} \cdot \vec{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad \text{für alle} \quad m, m', n, n', \quad (1.43)$$

wegen der Orthogonalität der Funktionen $\cos(m\phi)$ und $\sin(m'\phi)$ für alle m, m' . Die sich daraus ergebenden Bestimmungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten haben die gleiche Struktur. So ist zum Beispiel

$$B_{emn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{E}_i \cdot \vec{M}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\vec{M}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi}. \quad (1.44)$$

Das Ausführen der Integrale für A_{omn} und B_{emn} führt auf $A_{omn} = B_{emn} = 0$ für alle m und n . Die anderen beiden Koeffizienten sind nur für $m = 1$ ungleich Null, sodass sich die Entwicklung der einfallenden elektrischen Welle nach Gl. (1.42) auf

$$\vec{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(B_{o1n} \vec{M}_{o1n}^{(1)} + A_{e1n} \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) \quad (1.45)$$

reduziert. Der Superskript (1) signalisiert, dass für die Radiusabhängigkeit die Bessel-Funktionen $j_n(kr)$ verwendet werden, da diese genau wie die ebene Welle im Ursprung stetig ist, vlg. Abb. 1.2. Das Auswerten der Integrale für die übrigen

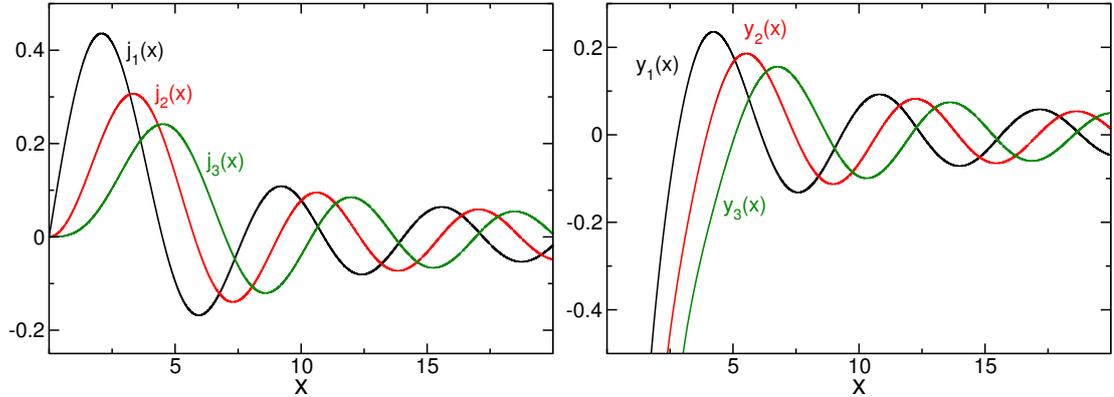


Abbildung 1.2: Bessel-Funktionen erster Gattung j_n (links) und zweiter Gattung y_n (rechts) für $n = 1, 2, 3$.

Koeffizienten ergibt

$$B_{o1n} = i^n E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad \text{und} \quad A_{e1n} = -i E_0 i^n \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (1.46)$$

Damit ist die Entwicklung der einfallenden elektromagnetischen Welle in den Vektorkugelfunktionen abgeschlossen, sie wird durch das elektrische Feld

$$\vec{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\vec{M}_{o1n}^{(1)} - i \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) \quad \text{mit} \quad E_n = E_0 i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (1.47)$$

und das magnetische Feld

$$\vec{H}_i = \frac{-k_3}{\omega \mu_3} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\vec{M}_{e1n}^{(1)} + i \vec{N}_{o1n}^{(1)} \right) \quad (1.48)$$

beschrieben. Die Entwicklung des magnetischen Feldes wird nach Gl. (1.11) aus Rotation des elektrischen Feldes erhalten.

1.3.1 Streuung am homogenen Staubteilchen

Um die Streuung an einem homogenen Staubteilchen zu betrachten, wird in Abb. 1.1 der Gesamtradius (a) des Teilchens und des Kerns (b) gleichgesetzt und der Innenbereich mit dem Index 1 adressiert. Die Entwicklung des gestreuten und des inneren elektromagnetischen Feldes erfolgt auf die gleiche Art und Weise, wie die Entwicklung des einfallenden elektromagnetischen Feldes.

Das äußere elektromagnetische Feld (\vec{E}_3, \vec{H}_3) ergibt sich nach Gl. (1.15) aus dem einfallenden (\vec{E}_i, \vec{H}_i) und dem gestreuten (\vec{E}_s, \vec{H}_s) Feld. Es muss zusammen

mit dem inneren Feld der Kugel (\vec{E}_1, \vec{H}_1) die Randbedingung [14]

$$\left(\vec{E}_i + \vec{E}_s - \vec{E}_1\right) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \left(\vec{H}_i + \vec{H}_s - \vec{H}_1\right) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \quad (1.49)$$

an der Oberfläche des Staubteilchens erfüllen. Aufgrund dieser Forderung, der im vorhergehenden Abschnitt ausgeführten Entwicklung des einfallenden elektromagnetischen Feldes und der Orthogonalität der Vektorkugelfunktionen verschwinden alle Koeffizienten für $m \neq 1$ [14]. Ebenso gilt weiterhin $A_{omn} = B_{emn} = 0$ für alle m und n .

In der Entwicklung des inneren Feldes

$$\vec{E}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(c_n \vec{M}_{o1n}^{(1)} - i d_n \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right), \quad (1.50)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{-k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(d_n \vec{M}_{e1n}^{(1)} + i c_n \vec{N}_{o1n}^{(1)} \right) \quad (1.51)$$

wird zur Beschreibung der Radialabhängigkeit die Bessel-Funktionen erster Gattung $j_n(k_1 r)$ in den Vektorkugelfunktionen verwendet, da das Feld im Ursprung endlich ist. Dabei ist k_1 die Wellenzahl der elektromagnetischen Welle im Inneren der Kugel. Die Koeffizienten c_n und d_n bestimmen die Amplitude der Partialwellen, sie werden im nächsten Abschnitt aus der Randbedingung (1.49) berechnet.

Für die Beschreibung des gestreuten Feldes müssen die Bessel-Funktionen erster und zweiter Gattung verwendet werden, da sie im Außenraum beide wohldefiniert sind. Ihre Linearkombinationen ergeben die Hankel-Funktionen $h_n^{(1)}(x)$ und $h_n^{(2)}(x)$, siehe Gl. (1.34). Welche dieser Funktionen zur Beschreibung der radialen Abhängigkeit in den Vektorkugelfunktionen verwendet wird, erschließt sich aus ihrem asymptotischen Verhalten

$$h_n^{(1)}(k_3 r) \propto \frac{-i^n e^{ik_3 r}}{ik_3 r} \quad \text{und} \quad h_n^{(2)}(k_3 r) \propto -\frac{i^n e^{-ik_3 r}}{ik_3 r} \quad (1.52)$$

für $k_3 r \gg n^2$. Die Hankel-Funktion $h_n^{(1)}(k_3 r)$ stellt somit eine ausgehende und $h_n^{(2)}(k_3 r)$ eine ankommende Welle dar. Da es physikalisch sinnvoll ist, die gestreute Welle als eine ausgehende Welle zu beschreiben, wird $h_n^{(1)}(k_3 r)$ in der Entwicklung des gestreuten Feldes

$$\vec{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(i a_n \vec{N}_{e1n}^{(3)} - b_n \vec{M}_{o1n}^{(3)} \right), \quad (1.53)$$

$$\vec{H}_s = \frac{k_3}{\omega\mu_3} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(i b_n \vec{N}_{o1n}^{(3)} + a_n \vec{M}_{e1n}^{(3)} \right) \quad (1.54)$$

verwendet, was durch den Superskript (3) verdeutlicht wird. Die Ausdrücke für die Streukoeffizienten a_n und b_n ergeben sich aus der Randbedingung (1.49).

Bestimmung der Streukoeffizienten

Um den Streuprozess vollständig zu beschreiben, müssen nun die Koeffizienten des inneren Feldes c_n und d_n , siehe Gln. (1.50) und (1.51), und die Streukoeffizienten des gestreuten Feldes a_n und b_n , siehe Gln. (1.53) und (1.54), mittels der Randbedingung (1.49) bestimmt werden. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} j_n(m_1 x) c_n + h_n^{(1)}(x) b_n &= j_n(x), \\ \mu [m_1 x j_n(m_1 x)]' c_n + \mu_1 [x h_n^{(1)}(x)]' b_n &= \mu_1 [x j_n(x)]', \\ \mu m_1 j_n(m_1 x) d_n + \mu_1 h_n^{(1)}(x) a_n &= \mu_1 j_n(x), \\ [m_1 x j_n(m_1 x)]' d_n + m_1 [x h_n^{(1)}(x)]' a_n &= m_1 [x j_n(x)]'. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Die Ableitung wird jeweils nach dem Argument der Funktion ausgeführt,

$$m_1 = \frac{k_1}{k_3} = \frac{N_1}{N_3} \quad (1.56)$$

ist das Verhältnis des Brechungsindex des Teilchens (N_1) zu dem des Mediums (N) und der Größenparameter

$$x = k_3 a = \frac{2\pi N_3 a}{\lambda} \quad (1.57)$$

gibt das Verhältnis des Radius des Teilchens a zu der Wellenlänge des eingestrahnten Lichts λ an. Das Gleichungssystem lässt sich nach den gesuchten Koeffizienten des inneren Feldes

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\mu_1 j_n(x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [x j_n(x)]'}{\mu_1 j_n(m_1 x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x) [m_1 x j_n(m_1 x)]'}, \\ d_n &= \frac{\mu_1 m_1 j_n(x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 m_1 h_n^{(1)}(x) [x j_n(x)]'}{\mu m_1^2 j_n(m_1 x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [m_1 x j_n(m_1 x)]'} \end{aligned} \quad (1.58)$$

und des gestreuten Feldes

$$a_n = \frac{\mu m_1^2 j_n(m_1 x) [x j_n(x)]' - \mu_1 j_n(x) [m_1 x j_n(m_1 x)]'}{\mu m_1^2 j_n(m_1 x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [m_1 x j_n(m_1 x)]'},$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(m_1 x) [x j_n(x)]' - \mu j_n(x) [m_1 x j_n(m_1 x)]'}{\mu_1 j_n(m_1 x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x) [m_1 x j_n(m_1 x)]'}$$
(1.59)

aufflösen. Um die Koeffizienten kompakter darzustellen

$$a_n = \frac{m_1 \psi_n(m_1 x) \psi_n'(x) - \psi_n(x) \psi_n'(m_1 x)}{m_1 \psi_n(m_1 x) \xi_n'(x) - \xi(x) \psi_n'(m_1 x)},$$
(1.60)

$$b_n = \frac{\psi_n(m_1 x) \psi_n'(x) - m_1 \psi_n(x) \psi_n'(m_1 x)}{\psi_n(m_1 x) \xi_n'(x) - m_1 \xi(x) \psi_n'(m_1 x)},$$
(1.61)

$$c_n = \frac{m_1 \psi_n(x) \xi_n'(x) - m_1 \xi_n(x) \psi_n'(x)}{\psi_n(m_1 x) \xi_n'(x) - m_1 \xi(x) \psi_n'(m_1 x)},$$
(1.62)

$$d_n = \frac{m_1 \psi_n(x) \xi_n'(x) - m_1 \xi_n(x) \psi_n'(x)}{m_1 \psi_n(m_1 x) \xi_n'(x) - \xi(x) \psi_n'(m_1 x)}$$
(1.63)

werden die Riccati-Bessel-Funktionen

$$\psi_n(x) = x j_n(x) \quad \text{und} \quad \xi_n(x) = x h_n^{(1)}(x)$$
(1.64)

eingeführt. Damit sind die elektromagnetischen Felder, welche die Vektorwellengleichung im Medium und im Inneren der Vollkugel lösen, gefunden.

1.3.2 Streuung am beschichteten Staubteilchen

Die Herangehensweise für die Streuung an einem beschichteten Teilchen ist sehr ähnlich. Die beschichtete Kugel besteht aus einem Kern mit dem Radius b , vgl. Abb. 1.1. In diesem Bereich wird das elektromagnetische Feld (E_1, H_1) , wie das der Vollkugel nach Gln. (1.50) und (1.51) mit den entsprechenden Koeffizienten, siehe Gln. (1.62) und (1.63), beschrieben. Hinzu kommt der Mantelbereich der Dicke $(a - b)$, wobei a der Gesamtradius der Kugel ist. In dieser Schale wird durch das einfallende Licht, das elektromagnetische Feld (E_2, H_2) angeregt. Um dieses

ebenfalls in Vektorkugelfunktionen zu entwickeln

$$\vec{E}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[f_n \vec{M}_{o1n}^{(1)} - i g_n \vec{N}_{e1n}^{(1)} + v_n \vec{M}_{o1n}^{(2)} - i w_n \vec{N}_{e1n}^{(2)} \right], \quad (1.65)$$

$$\vec{H}_2 = \frac{-k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[g_n \vec{M}_{e1n}^{(1)} + i f_n \vec{N}_{o1n}^{(1)} + w_n \vec{M}_{e1n}^{(2)} + i v_n \vec{N}_{o1n}^{(2)} \right] \quad (1.66)$$

müssen sowohl die Besselschen Funktionen erster als auch zweiter Gattung zur Beschreibung der Radiusabhängigkeit verwendet werden, da sie in diesem Bereich endlich sind. Auf ihre Verwendung in den Vektorkugelfunktionen wird durch die Superskripte (1) und (2) hingewiesen.

Durch das Einfügen eines Kerns in die Kugel entsteht bei $r = b$ eine zusätzliche Grenzfläche, an der die Felder des Kerns und des Mantels die Randbedingung

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \quad \text{und} \quad \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \quad (1.67)$$

erfüllen müssen. An der Stelle $r = a$ befindet sich weiterhin die Grenzfläche zwischen Medium und Teilchen. Die dortige Randbedingung

$$\left(\vec{E}_s + \vec{E}_i - \vec{E}_2 \right) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0, \quad \left(\vec{H}_s + \vec{H}_i - \vec{H}_2 \right) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \quad (1.68)$$

gilt nun für das elektromagnetischen Feld der Schale und des umgebenden Mediums. Mittels des aus den Randbedingungen resultierenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_n m_1 \psi_n(m_2 x) - v_n m_1 \chi_n(m_2 x) - c_n m_2 \psi_n(m_1 x) &= 0, \\ w_n m_1 \chi'_n(m_2 x) - g_n m_1 \psi'_n(m_2 x) + d_n m_2 \psi'_n(m_1 x) &= 0, \\ v_n m_1 \mu_1 \chi'_n(m_2 x) - f_n \mu_1 \psi'_n(m_2 x) + c_n \mu_2 \psi'_n(m_1 x) &= 0, \\ g_n m_1 \mu_1 \psi_n(m_2 x) - w_n \mu_1 \chi_n(m_2 x) - d_n \mu_2 \psi_n(m_1 x) &= 0, \\ m_2 \psi'_n(y) - a_n m_2 \psi'_n(y) - g_n \psi'_n(m_2 y) + w_n \chi'_n(m_2 y) &= 0, \\ m_2 b_n \psi_n(y) - m_2 \psi_n(y) + f_n \psi_n(m_2 y) - v_n \chi_n(m_2 y) &= 0, \\ \mu_2 \psi_n(y) - a_n \mu_2 \chi_n(y) - g_n \mu \psi_n(m_2 y) + w_n \mu \chi_n(m_2 y) &= 0, \\ b_n \mu_2 \chi'_n(y) - \mu_2 \psi'_n(y) + f_n \mu \psi_n(m_2 y) - v_n \mu \chi'_n(m_2 y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

mit 8 Unbekannten lassen sich alle Streukoeffizienten bestimmen. Dabei sind m_1 und m_2 die Brechungsindizes des Kerns und des Mantels relativ zum Medium, $x = kb$ und $y = ka$ sind die Größenparameter des Kerns und des Mantels und μ, μ_1, μ_2 sind die Permeabilitäten des Mediums, des Kerns und des Mantels, die im Wei-

teren jedoch gleichgesetzt werden. Zudem wurden die Riccati-Bessel-Funktionen $\chi_n(x) = -xy_n(x)$ verwendet. Die aus Gleichung (1.69) ermittelten Koeffizienten des gestreuten Feldes

$$a_n = \frac{\psi_n(y) [\psi'_n(m_2y) - A_n \chi'_n(m_2y)] - m_2 \psi'_n(y) [\psi_n(m_2y) - A_n \chi_n(m_2y)]}{\xi_n(y) [\psi'_n(m_2y) - A_n \chi'_n(m_2y)] - m_2 \xi'_n(y) [\psi_n(m_2y) - A_n \chi_n(m_2y)]}, \quad (1.70)$$

$$b_n = \frac{m_2 \psi_n(y) [\psi'_n(m_2y) - B_n \chi'_n(m_2y)] - \psi'_n(y) [\psi_n(m_2y) - B_n \chi_n(m_2y)]}{m_2 \xi_n(y) [\psi'_n(m_2y) - B_n \chi'_n(m_2y)] - \xi'_n(y) [\psi_n(m_2y) - B_n \chi_n(m_2y)]} \quad (1.71)$$

mit

$$A_n = \frac{m_2 \psi_n(m_2x) \psi'_n(m_1x) - m_1 \psi'_n(m_2x) \psi_n(m_1x)}{m_2 \chi_n(m_2x) \psi'_n(m_1x) - m_1 \chi'_n(m_2x) \psi_n(m_1x)}, \quad (1.72)$$

$$B_n = \frac{m_2 \psi_n(m_1x) \psi'_n(m_2x) - m_1 \psi'_n(m_2x) \psi_n(m_1x)}{m_2 \chi'_n(m_2x) \psi_n(m_1x) - m_1 \psi'_n(m_1x) \chi_n(m_2x)} \quad (1.73)$$

bestimmen die im Folgendem betrachteten charakteristischen Größen des Streuprozesses. Die Richtigkeit dieser Koeffizienten kann überprüft werden, indem für den relativen Brechungsindex des Kerns und der Schale $m_2 = m_1$ angenommen wird, die Koeffizienten gehen dann in die einer Vollkugel mit dem Radius a über. Dieselbe Form nehmen sie an, wenn der Kernradius Null gesetzt wird. Besteht der Mantel aus dem Material des Mediums, so gilt für den relativen Brechungsindex der Schale $m_2 = 1$ und die Koeffizienten entsprechen der einer Vollkugel mit dem Radius b .

Die Entwicklung der elektromagnetischen Felder ist mit der Bestimmung der Streukoeffizienten abgeschlossen. Sind die Brechungsindizes der verwendeten Materialien bekannt, so können die elektrischen und magnetischen Felder in jedem Punkt des Raumes ausgerechnet werden.

1.4 Streu-, Absorptions- und Extinktionseffizienz

Aus den nun bekannten elektromagnetischen Feldern, lassen sich weitere den Streuprozess charakterisierenden Größen ableiten, die experimentell gut zugänglich sind. So zeigt sich der Einfluss der Oberflächenladungsdichte von Staubteilchen auf die Lichtstreuung in der Verschiebung des Streueffizienzmaximums. Diese experimentell zugängliche Größe und die mit ihr eng verbundene Streu- und Absorptionseffizienz hängen von den Streukoeffizienten a_n und b_n ab, die im Abschnitt 1.3.1 für

ein homogenes und im Abschnitt 1.3.2 für ein beschichtetes Staubteilchen angegeben werden. Die Effizienzen berechnen sich durch Normierung der entsprechenden Streu-, Absorptions- und Extinktionsquerschnitte auf die Fläche eines Kreises mit dem Radius des Staubteilchens. Daher werden zunächst die Ausdrücke für die Querschnitte hergeleitet und abschließend die Formeln für die entsprechenden Effizienzen angegeben. Die Darstellung in diesem Abschnitt richtet sich nach Stratton, Kapitel 9.26 [15]

Bei der Wechselwirkung der einfallenden Welle mit einem Staubteilchen kann es zur Streuung und zur Absorption kommen. Die Extinktion fasst diese beiden Effekte zusammen. Der Extinktionsquerschnitt als Summe aus dem Absorptions- und Streuquerschnitt ist definiert, als das Verhältnis der absorbierten und gestreuten Energie pro Sekunde zu dem Energiefluss der auftreffenden Welle pro Einheitsfläche. Die Richtung und den Betrag der Energieflussdichte einer elektromagnetischen Welle gibt der instantane Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{bzw.} \quad \text{Re}(\vec{S}) = \text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{H}) \quad (1.74)$$

an. Der Poynting-Vektor variiert jedoch stark mit der Zeit, sodass die Messinstrumente nicht folgen können und der über eine Periode gemittelte Poynting-Vektor

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad \text{bzw.} \quad \text{Re}(\langle \vec{S} \rangle) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (1.75)$$

die messbare Größe ist [15]. Der Superskript * zeigt an, dass die Größe komplex konjugiert wird. Die Energie, die durch eine geschlossene Oberfläche A fließt, wird mittels des Oberflächenintegrals

$$W = - \int_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA \quad (1.76)$$

berechnet, wobei \hat{n} der nach außen zeigende Normalenvektor der Fläche ist. Das Minuszeichen ist Konvention, sodass $W > 0$ einen Energieeintrag in das betrachtete Volumen bedeutet. Um den Streu- und Extinktionsquerschnitt zu berechnen, muss also der Poynting-Vektor $\langle \vec{S} \rangle$ über eine imaginäre Oberfläche, die die Kugel umschließt, integriert werden. Diese wird sehr groß gewählt, damit das asymptotische Verhalten der Bessel-Funktionen im Fernfeld verwendet werden kann. Aufgrund des Skalarprodukts mit dem Normalenvektor der Oberfläche ist nur der

Radialanteil des Poyntings-Vektors

$$\langle S \rangle_R = \frac{1}{2} (E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \quad (1.77)$$

relevant. Das Feld außerhalb der Kugel setzt sich nach Gl. (1.15) aus der gestreuten und der einfallenden elektromagnetischen Welle zusammen, sodass man für den Poynting-Vektor

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_R = & \underbrace{\frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{i\phi}^* - E_{i\phi} H_{i\theta}^*)}_i + \underbrace{\frac{1}{2} (E_{r\theta} H_{r\phi}^* - E_{r\phi} H_{r\theta}^*)}_{ii} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{r\phi}^* + E_{r\theta} H_{i\phi}^* - E_{i\phi} H_{r\theta}^* - E_{r\phi} H_{i\theta}^*)}_{iii} \quad (1.78) \end{aligned}$$

erhält. Die Integration des Poynting-Vektors über die Oberfläche der imaginären Kugel

$$W_a = -\text{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle S_R \rangle R^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad (1.79)$$

gibt die vom eingeschlossenen Volumen absorbierte Energie an. Der erste Summand (*i*) der Gl. (1.78) entspricht dem einfallenden Energiefluss. Besitzt das Medium keine Leitfähigkeit $\sigma_3 = 0$, ergibt die Integration von (*i*) über die imaginäre Kugeloberfläche Null. Mittels der Integration des zweiten Summanden (*ii*)

$$W_s = \frac{1}{2} \text{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_{r\theta} H_{r\phi}^* - E_{r\phi} H_{r\theta}^*) R^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad (1.80)$$

erhält man die gestreute Energie. Um die Energiebilanz zu erfüllen, muss der dritte Term (*iii*) der Gl. (1.78)

$$W_t = -\frac{1}{2} \text{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_{i\theta} H_{r\phi}^* + E_{r\theta} H_{i\phi}^* - E_{i\phi} H_{r\theta}^* - E_{r\phi} H_{i\theta}^*) R^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad (1.81)$$

der Summe aus der gestreuten und der absorbierten Energie $W_a + W_s$ entsprechen. W_t bezeichnet die Energie um die aufgrund der Extinktion die einfallende Energie gemindert wird.

Nach Auswertung der Integrale Gl. (1.80) und (1.81) sind die gestreute Energie

$$W_s = \pi \frac{E_0^2}{k_3^2} \sqrt{\frac{\epsilon_3}{\mu_3}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (1.82)$$

und die Extinktionsenergie

$$W_t = \pi \frac{E_0^2}{k_3^2} \sqrt{\frac{\epsilon_3}{\mu_3}} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n + b_n) \quad (1.83)$$

Funktionen der Streuamplituden a_n, b_n . Die Größen mit dem Index 3 beschreiben das Medium, dabei ist k_3 der Wellenvektor nach Gl. (1.17), ϵ_3 die dielektrische Funktion nach Gl. (1.14) mit $\sigma_3 = 0$ und μ_3 die magnetische Permeabilität, siehe Gl. (1.7). Die Streu- und Extinktionsquerschnitte geben das Verhältniss zwischen $W_{s,t}$ und dem einfallenden Energiefluss pro Einheitsfläche

$$\langle S \rangle_z = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_3}{\mu_3}} \quad (1.84)$$

an. Werden die entsprechenden Querschnitte auf die Kreisfläche πa^2 , wobei a der Radius des Teilchens ist, normiert, so erhält man die Extinktionseffizienz

$$Q_s = \frac{2}{k_3^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (1.85)$$

die Streueffizienz

$$Q_t = \frac{2}{k_3^2 a^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n + b_n) \quad (1.86)$$

und die Absorptionseffizienz

$$Q_a = Q_t - Q_s \quad (1.87)$$

als die Differenz der beiden Größen. Diese Ausdrücke gelten sowohl für die Vollkugel als auch für die beschichtete Kugel. Die Information über das betrachtete Teilchen ist in den Streukoeffizienten a_n und b_n enthalten.

In diesem Abschnitt wurde die Mie-Theorie, die den Streuprozess von Licht an sphärischen Teilchen beschreibt, dargestellt. Dazu wurden die Felder in Vektorkugelfunktionen entwickelt und aus den Randbedingungen an den Grenzflächen die Streukoeffizienten gewonnen. Diese beschreiben den Streuprozess vollständig und gehen in die messbaren Größen ein, wie zum Beispiel in die Extinktionseffizienz, die in dieser Arbeit bei der Auswertung der Streuung an geladenen Staubteilchen betrachtet wird.

1.5 Streuung an negativ geladenen Staubteilchen

Die Mie-Theorie beschreibt den Streuprozess an ungeladenen sphärischen Teilchen. Im betrachteten Kontext der Staubteilchen im Plasma werden die Teilchen durch die Plasmaelektronen negativ aufgeladen. Daher wird nun ein Modell von Heinisch et al. [8] vorgestellt, welches den Einfluss dieser zusätzlichen Elektronen auf die Lichtstreuung berücksichtigt. Ihre Arbeit bezieht sich auf homogene Staubteilchen, die Resultate können jedoch leicht auf ein beschichtetes Staubteilchen übertragen werden.

1.5.1 Beschreibung der zusätzlichen Elektronen

Die Charakterisierung der zusätzlichen Elektronen des homogenen Staubteilchens ist vom Teilchenmaterial abhängig, sodass zwischen Materialien mit positiver und negativer Elektronenaffinität

$$\chi = E_{\text{Vakuum}} - E_{\text{Leitungsband}} \quad (1.88)$$

unterschieden werden muss. Sie ist definiert als die Differenz zwischen dem Energielevel des Vakuums (E_{Vakuum}) und dem energetischen Minimum des Leitungsbandes ($E_{\text{Leitungsband}}$), vgl. Abb. 1.3. Das Vorzeichen der Elektronenaffinität bestimmt, wo sich die zusätzlichen Elektronen ansammeln. Für $\chi < 0$ und somit $E_{\text{Leitungsband}} > E_{\text{Vakuum}}$ werden die Elektronen im Bildpotential eingefangen. Das Potential wird durch eine Oberflächenmode verursacht, die durch ein transversal optisches Phonon bedingt ist. Die zusätzlichen Ladungen an der Oberfläche bilden einen Elektronenfilm, welches ein zweidimensionales Elektronengas darstellt

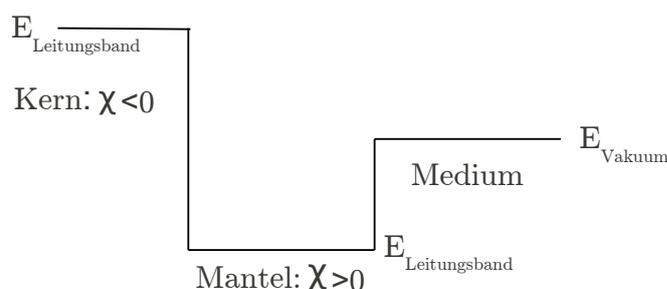


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung der Energieverhältnisse zwischen Medium und Staubteilchen

und führen somit zu einer Oberflächenleitfähigkeit σ_s . Sie vermittelt den Zusammenhang zwischen dem Oberflächenstrom \vec{K} und der parallelen Komponente des elektrischen Feldes [16]

$$\vec{K} = \sigma_s \vec{E}_{||}. \quad (1.89)$$

Dieser geht durch die Randbedingungen für das elektromagnetische Feld

$$\left(\vec{E}_i + \vec{E}_s - \vec{E}_1\right) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \quad \text{und} \quad \left(\vec{H}_i + \vec{H}_s - \vec{H}_1\right) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \vec{K} \quad (1.90)$$

in die Berechnung der Streukoeffizienten ein.

Ist die Elektronenaffinität positiv, so akkumulieren die zusätzlichen Elektronen im Leitungsband. Sie bilden eine Raumladung [17], die im dielektrischem Material abgeschirmt wird. Ihre Ausbreitung ist jedoch typischerweise größer als ein Mikrometer, sodass für die betrachteten mikro- und submikrometer großen Staubteilchen eine homogene Verteilung der Elektronen im Volumen angenommen werden kann. Die zusätzlichen Elektronen führen zu einer Leitfähigkeit σ_b im Teilchenvolumen, welche durch Streuung am longitudinal optischen Phonon gemindert wird. Die Leitfähigkeit trägt zur Polarisierbarkeit α des Staubteilchens bei und verändert somit seinen Brechungsindex $N_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ zu

$$N_1 = \sqrt{\epsilon_1 + \alpha}. \quad (1.91)$$

Der veränderte Brechungsindex geht nach Gln. (1.60) und (1.61) in die Berechnung der Streukoeffizienten ein und beeinflusst somit die Extinktionseffizienz, vgl. Gl. (1.85).

Heinisch et al. untersuchten wie sich die Aufladung des Staubteilchens im Plasma auf die Extinktionseffizienz auswirkt. Sie stellten eine Verschiebung der Position des Extinktionsmaximums in Abhängigkeit der zusätzlichen Elektronen fest. Diese war für Materialien mit $\chi > 0$ deutlich ausgeprägter als für Materialien mit $\chi < 0$, sodass im Weiteren nur die Berechnung der Polarisierbarkeit α vorgestellt wird.

1.5.2 Modifizierung der dielektrischen Funktion

Das Ansammeln der Plasmaelektronen im Volumen des Staubteilchens führt zu einer zusätzlichen Polarisierbarkeit des Materials [8]

$$\alpha = \frac{4\pi i \sigma_b}{\omega}, \quad (1.92)$$

wobei ω die Kreisfrequenz des eingestrahlten Lichts ist und σ_b die Leitfähigkeit beschreibt. Die Leitfähigkeit ist im Vergleich zum freien Elektronengas durch die Streuung der Elektronen an longitudinal optischen Phononen gemindert. Zur Berechnung der Leitfähigkeit wird der Ansatz

$$\sigma_b(\omega) = \frac{e^2 n_b}{m_e^*} \frac{i}{\omega + M(\omega)} \quad (1.93)$$

verwendet, wobei e die Elektronenladung, n_b die Elektronendichte im Volumen des Staubteilchens und m_e^* die effektive Elektronenmasse im Leitungsband sind. Die sog. Memory-Funktion $M(\omega)$ trägt der Elektron-Phonon-Kopplung Rechnung [18]. Zur Beschreibung der Wechselwirkung der zusätzlichen Elektronen im Volumen des Teilchens mit den longitudinal optischen Phononen wird der Hamiltonian

$$H = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} + \hbar \omega_{\text{LO}} \sum_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \frac{M}{|q|} c_{\vec{k}+\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}} (a_{\vec{q}} + a_{-\vec{q}}) \quad (1.94)$$

mit $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e^*}$ und $M = \sqrt{2\pi e^2 \hbar \omega_{\text{LO}}} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0} \right)$.

verwendet [19]. Dabei ist der erste Term die Summe über die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $c_{\vec{k}}^\dagger, c_{\vec{k}}$ der Elektronen mit den entsprechenden Energien $\epsilon_{\vec{k}}$. Der zweite Term ist die Summe über die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\vec{q}}^\dagger, a_{\vec{q}}$ der Phononen, deren Energie mittels des Einsteinmodells beschreiben wird, wobei ω_{LO} die longitudinal optische Phononfrequenz ist. Der dritte Term beschreibt die Elektron-Phonon-Kopplung, wobei in die Kopplungskonstante M die statische dielektrische Konstante ϵ_0 und die dielektrische Konstante ϵ_∞ für

Frequenzen $\omega \rightarrow \infty$ eingeht. Für die Memory-Funktion ergibt sich damit [8]

$$M(\omega) = \frac{4e^2 \sqrt{m_e^* \omega_{\text{LO}} \delta} (\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon_0^{-1})}{2(3\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\nu} \frac{j(-\bar{\nu} - j(\bar{\nu}))}{\bar{\nu}(\bar{\nu} - \nu - i0^+)}$$

mit
$$j(\nu) = \frac{e^\delta}{e^\delta - 1} e^{-\frac{\delta}{2}(\nu+1)} |\nu + 1| K_1 \left(\frac{\delta}{2} |\nu + 1| \right) + \frac{1}{e^\delta - 1} e^{-\frac{\delta}{2}(\nu-1)} |\nu - 1| K_1 \left(\frac{\delta}{2} |\nu - 1| \right), \quad (1.95)$$

wobei $\delta = \frac{k_B}{T} \hbar \omega_{\text{LO}}$ mit der Boltzmann-Konstante k_B und der Temperatur T , $\nu = \frac{\omega}{\omega_{\text{LO}}}$ und $K_1(x)$ die modifizierte Bessel-Funktion ist.

Durch den angegebenen Ausdruck für die Leitfähigkeit findet die zusätzliche Elektronendichte (n_b) mittels des modifizierten Brechungsindex, siehe Gl. (1.91), Eingang in die Streukoeffizienten, und beeinflussen somit die Extinktionseffizienz nach Gl. (1.86). Zusätzliche Elektronen führen zu einer Verschiebung des Extinktionseffizienzmaximums zu höheren Wellenzahlen, sodass eine optische Messung der Elektronendichte des Staubteilchens möglich wird [8]. Um diesen Effekt für verschiedene Staubteilchengrößen zu vergleichen, wird die Oberflächenladungsdichte (n_s) konstant gehalten. Dies ist bei der Aufladung von Staubteilchen im Plasma sinnvoll, da sich für unterschiedliche Teilchengrößen bei gleichen Plasmaparametern dieselbe Oberflächenladungsdichte einstellen wird. Heinisch et al. stellten fest, dass die Verschiebung des Extinktionsmaximums für gleiche Oberflächenladungsdichten bei kleinen Teilchenradien a sehr viel ausgeprägter ist. Da die Memory-Funktion unabhängig von der Dichte der Elektronen im Staubteilchenvolumen ist, siehe Gl. (1.95), ist die Leitfähigkeit nach Gl. (1.92) proportional zu n_b . Kleinere Staubteilchen weisen bei gleicher Oberflächenladungsdichte eine höhere Dichte der Elektronen im Volumen auf, da

$$n_b = \frac{3n_s}{a}. \quad (1.96)$$

Dies führt zu einer größeren Leitfähigkeit und resultiert in einer größeren Verschiebung des Extinktionsmaximums. Vor allem submikrometer große Staubteilchen zeigen eine für ein Experiment adäquate Blauverschiebung des Extinktionsmaximums. Da in Laborplasmen vor allem mikrometer große Staubteilchen verwendet werden, ist es von Interesse auch für größere Staubteilchen eine gut messbare Verschiebung des Extinktionsmaximums zu erreichen. Dazu werden in dieser Arbeit beschichtete Teilchen verwendet, deren Kern- und Mantelmaterialien so gewählt

werden, dass die Bulkelektronendichte im Vergleich zum homogenen Staubteilchen erhöht wird. Dies wird durch die Verwendung von Kernmaterialien mit negativer Elektronenaffinität erreicht, siehe Abb. 1.3. Als Mantelmaterialien werden weiterhin Aluminiumoxid und Bleisulfid verwendet, die eine positive Elektronenaffinität aufweisen. Dadurch werden die zusätzlichen Elektronen in der Schale akkumuliert und dringen nicht in den Kern ein. Die Bulkelektronendichte des beschichteten Teilchens

$$n_b = \frac{3n_s a^2}{a^3 - b^3}, \quad (1.97)$$

mit dem Kernradius b , ist somit größer als die des homogenen Staubteilchens.

Inwieweit sich dies auf die Verschiebung des Extinktionseffizienzmaximums auswirkt und welche weitere nützliche Effekte eine Beschichtung im Hinblick auf die optische Ladungsmessung von Staubteilchen oder deren Einsatz als elektrische Sonde bringt, wird im nächsten Kapitel untersucht.

Kapitel 2

Extinktionseffizienz negativ geladener Staubteilchen

In diesem Kapitel wird das Extinktionsverhalten der beschichteten Staubteilchen auf den Einfluss zusätzlicher negativer Teilchenladungen hin analysiert. Es wird ausgelotet, inwieweit beschichtete Staubteilchen sich für eine optische Messung der Oberflächenladungsdichte und zum Einsatz als minimal invasive elektrische Sonde im Plasmakontext eignen. Unter der gleichen Fragestellung untersuchte Heinisch et al. [9], [8] homogene Staubteilchen. Sie zeigten, dass die zusätzliche Oberflächenladung bedingt durch die Aufladung der Staubteilchen im Plasma zu einer Verschiebung des Extinktionseffizienzmaximums führt. Aufbauend auf ihre Arbeit werden zunächst ihre Ergebnisse für die homogenen Staubteilchen dargestellt. Dieselben Materialien werden als Mäntel für die im Weiteren untersuchten beschichteten Staubteilchen verwendet, sodass die Vollkugel als Referenz für die Effekte des beschichteten Staubteilchens herangezogen wird. Es wird untersucht, inwieweit sich die Verschiebung des Extinktionseffizienzmaximums auch bei einem beschichteten Staubteilchen zeigt und welche Vorteile sie gegenüber dem homogenen Staubteilchen bietet. Als Kerne werden Dielektrika und Edelmetalle verwendet, zusätzlich wird die Hohlkugel betrachtet.

2.1 Homogene Staubteilchen

Am Anfang werden die Ergebnisse von Heinisch et al. zu homogenen, geladenen Staubteilchen vorgestellt. Die Vollkugel ist ein Spezialfall der beschichteten Kugel mit dem Kernradius b für $b \rightarrow 0$. Die Streukoeffizienten reduzieren sich in

diesem Grenzfall zu denen einer Vollkugel, deren Inneres aus dem Mantelmaterial der beschichteten Kugel besteht, vgl. Abschnitt 1.3.2. Die Ergebnisse für das homogene Staubteilchen ergeben sich daher ganz natürlich aus den aufgestellten Berechnungen zum beschichteten Staubteilchen.

2.1.1 Ungeladene Staubteilchen

In diesem Abschnitt wird zunächst das ungeladene Staubteilchen betrachtet, um sich mit dem Extinktionseffizienzspektrum der verwendeten Materialien vertraut zu machen und die auftretenden Resonanzeffekte zu studieren.

Beschreibung der Materialien

Heinisch et al. zeigten in ihrer Analyse verschiedener homogener Staubteilchen, dass vor allem Aluminiumoxid (Al_2O_3) und Bleisulfid (PbS) eine starke Verschiebung des Extinktionseffizienzmaximums in Abhängigkeit ihrer Oberflächenladungsdichte aufweisen. Um deren Extinktionseffizienzspektrum aus den Streuamplituden zu berechnen, werden ihre dielektrischen Funktionen benötigt.

Die dielektrische Funktion des PbS wird mittels des klassischen Lorentzoszillators

$$\epsilon' = \epsilon_\infty + \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)(1 - v^2)}{(1 - v^2)^2 + g^2 v^2} \quad \text{und} \quad \epsilon'' = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)gv}{(1 - v^2)^2 + g^2 v^2} \quad (2.1)$$

modelliert [20]. Dabei ist $v = \frac{\nu}{\nu_0}$ das Verhältnis der Frequenz des eingestrahlt Lichts ν zur transversal optischen Phononfrequenz ν_0 , durch $g = \frac{\gamma}{\nu_0}$ ist die Dämpfungskonstante γ auf die Phononfrequenz normiert, ϵ_∞ ist der Grenzwert der dielektrischen Funktion für Frequenzen viel höher als ν_0 an und ϵ_0 der Grenzwert der dielektrischen Funktion bei Frequenzen viel niedriger als ν_0 . Die verwendeten Parameter für PbS sind in Tabelle 2.1 aufgelistet. Die dielektrische Funktion

	ϵ_∞	ϵ_0	$\nu_0[\text{cm}^{-1}]$	$\gamma[\text{cm}^{-1}]$
PbS	16.81	150	71	15
Al_2O_3	3	9	—	—

Tabelle 2.1: Parameter für die dielektrische Funktion von PbS [21] und Al_2O_3 [22]

von Al_2O_3 wurde aus tabellierten Werten entnommen [23], zusätzlich benötigte Parameter sind in Tabelle 2.1 aufgeführt.

Die dielektrische Funktion $\epsilon_1 = \epsilon'_1 + i\epsilon''_1$ und der Brechungsindex $N_1 = n_1 + ik_1$ der Materialien, sind im oberen Panel der Abb. 2.1 dargestellt. In der weiteren Dis-

kussion des homogenen Staubteilchens wird der Index 1 ausgespart, wenn deutlich wird, dass die Größen sich auf das Teilchenmaterial beziehen. Die dielektrische Funktion und der Brechungsindex sind bei nicht magnetischen Medien, wie nur sie hier betrachtet werden, über

$$\begin{aligned}
 N^2 &= \epsilon, \\
 \epsilon' &= n^2 + k^2, \\
 \epsilon'' &= 2nk, \\
 n &= \sqrt{\frac{\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon'}{2}}, \\
 k &= \sqrt{\frac{\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon'}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

miteinander verknüpft [14]. Al_2O_3 weist zwei transversale optische Phononreso-

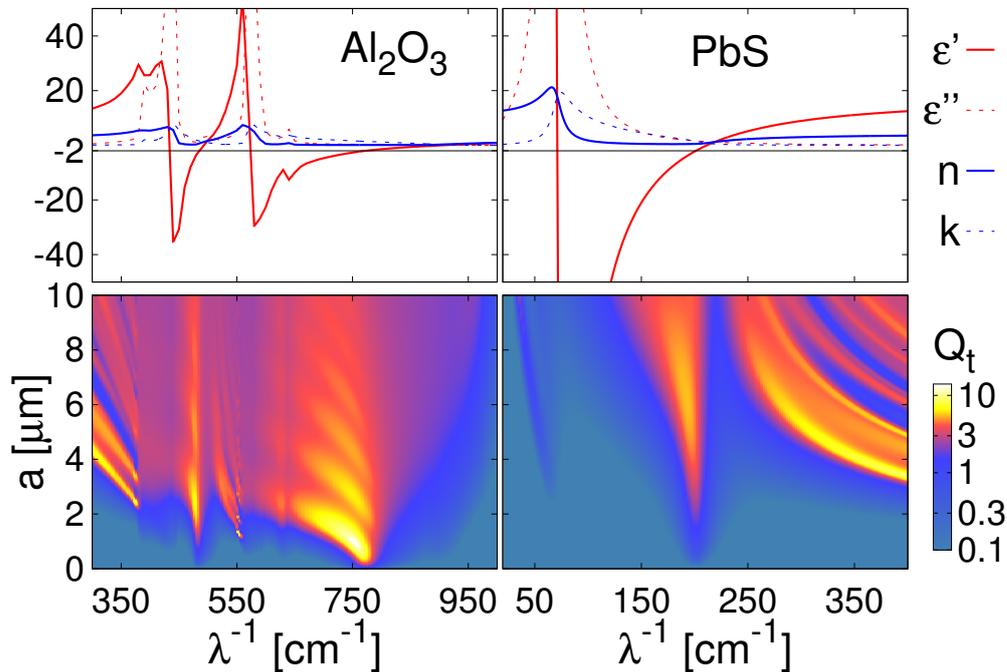


Abbildung 2.1: Oberes Panel: dielektrische Funktion $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ und Brechungsindex $N = n + ik$. Unteres Panel: Konturplot der Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit des Teilchenradius a und der Wellenzahl λ^{-1} für Al_2O_3 (links) und PbS (rechts) nach Gl. (1.86).

nanzen auf, sie liegen bei Wellenzahlen $\lambda_1^{-1} = 434 \text{ cm}^{-1}$ und $\lambda_2^{-1} = 573 \text{ cm}^{-1}$ und dominieren die dielektrische Funktion im betrachteten Wellenzahlbereich. Für

kleine Wellenzahlen nähert sich der Realteil der dielektrischen Funktion ϵ' dem Grenzwert $\epsilon_0 = 9$ an, während der Imaginärteil ϵ'' verschwindet. Dies spiegelt sich ebenfalls im Brechungsindex wieder, der nach Gl. (2.2) dabei konstante Werte annimmt. Für hohe Wellenzahlen strebt ϵ' gegen $\epsilon_\infty = 3$, dieser Bereich wird in der Abbildung jedoch nicht mehr dargestellt. Wie aus Tabelle 2.1 zu entnehmen ist, besitzt PbS, vgl. Abb. 2.1 (rechts), nur ein transversal optisches Phonon bei $\lambda^{-1} = 71 \text{ cm}^{-1}$. ϵ' nimmt für Wellenzahlen $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ den Wert $\epsilon_0 = 150$ an, was außerhalb des Wertebereichs der Abbildung liegt. Für $\lambda^{-1} \rightarrow \infty$ wird ϵ' den Wert $\epsilon_\infty = 16.81$ annehmen. ϵ'' verschwindet für beide Grenzfälle, siehe Gl. (2.1).

Beschreibung der Streueffekte

Im unteren Panel der Abb. 2.1 ist der Konturplot der Extinktionseffizienz Q_t nach Gl. (1.86) gezeigt, der sowohl von der Wellenzahl (λ^{-1}) als auch vom Teilchenradius (a) abhängt. Die Staubteilchen werden dabei durchgehend in einem Medium mit dem Brechungsindex $N_3 = 1$ betrachtet, sodass nach Gl. (1.56) der relative Brechungsindex m mit dem Brechungsindex des Teilchens N zusammenfällt. In dem dargestellten Wellenzahlbereich sind deutlich unterschiedliche Arten von Resonanzen zu erkennen. Eine sehr gute Zusammenfassung der abgebildeten Streueffekte und die Analyse ihrer Sensitivität auf externe Ladungen findet man bei Heinisch et al. [9].

Die Resonanz unterhalb der ersten transversalen optischen Phononresonanz des Al_2O_3 ($\lambda^{-1} < \lambda_{TO}^1 = 432 \text{ cm}^{-1}$) wird als die gewöhnliche optische Resonanz bezeichnet [24]. Sie tritt bei kleinen Größenparametern $x \lesssim 1$ auf, wenn der Realteil der dielektrischen Funktion im Vergleich zum Imaginärteil groß ist $\epsilon' \gg \epsilon''$ und $\epsilon'' \ll 1$ gilt. Im Spektrum der Extinktionseffizienz des PbS ist diese Resonanz sehr schwach ausgeprägt. Sie wird aufgrund des zu großen Imaginärteils der dielektrischen Funktion $\epsilon'' \geq 1$ in diesem Wellenzahlbereich unterdrückt. Die Resonanzen lassen sich durch intrinsische elektrische und magnetische Moden des Teilchens erklären, die man sich als stehende Wellen innerhalb der Kugel vorstellen kann. Diese können verstärkt werden, wenn das einfallende Licht die entsprechenden Eigenfrequenzen trifft. Die Eigenfrequenzen berechnen sich aus den Nullstellen des Nenners der Streukoeffizienten a_n und b_n . So ist die stärkste und gleichzeitig unterste Resonanz durch b_1 hervorgerufen.

Die Resonanzen, die bei PbS bei Wellenzahlen $\lambda^{-1} > 250 \text{ cm}^{-1}$ auftreten, zeigen eine regelmäßige Interferenzstruktur aus breiten Minima und Maxima. Wobei

die großen Extrema von einer feineren, unregelmäßigen Abfolge von Minima und Maxima kleinerer Linienbreite, Rippel genannt, überlagert werden. Diese korrespondieren zu der resonanten Anregung einzelner Partialwellen und somit zu den Minima im Nenner der Streukoeffizienten a_n und b_n . Die Interferenzstruktur der Extinktionseffizienz lässt sich aus dem asymptotischen Verhalten der Streukoeffizienten a_n , Gl. (1.60), und b_n , Gl. (1.61), herleiten [14]. Entwickelt man ihre Zähler für den Größenparameter $x \gg n^2$ mit $|mx| \gg n^2$ und nutzt das asymptotischen Verhalten der Riccati-Bessel-Funktionen

$$\psi_n(\rho) \propto \sin\left(\rho - n\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.3)$$

aus, so erhält man

$$\frac{(m-1)\sin(x - n\pi/2)\cos(mx - n\pi/2) + m\sin(x(m-1))}{x} \quad (2.4)$$

für den Zähler von a_n und

$$\frac{(1-m)\sin(x - n\pi/2)\cos(mx - n\pi/2) + \sin(x(m-1))}{mx}. \quad (2.5)$$

für den Zähler von b_n . Beide Ausdrücke haben den gleichen von n unabhängigen Term $\sin(x(m-1))$, der für die Interferenzstruktur verantwortlich ist. Auch Al_2O_3 weist diese Resonanzen auf, jedoch bei Wellenzahlen $\lambda^{-1} > 1000 \text{ cm}^{-1}$. Die Interferenz- und Rippelstruktur sind die typischen Resonanzerscheinungen der Mie-Streuung.

Anomale Resonanzen

Im Spektrum des Al_2O_3 um $\lambda^{-1} \approx 490 \text{ cm}^{-1}$ und im Bereich $600 \text{ cm}^{-1} < \lambda^{-1} < 800 \text{ cm}^{-1}$ und im Spektrum des PbS um $\lambda^{-1} \approx 200 \text{ cm}^{-1}$ treten Resonanzen auf, die von Tribelsky et al. [12], [25] als anomale Resonanzen charakterisiert wurden. In diesen Bereichen gilt für die dielektrische Funktion $\epsilon' < 0$ und $\epsilon'' \ll 1$, sodass transversale Oberflächenmoden angeregt werden können. Im Dielektrikum werden sie durch transversale optische Phononen verursacht. Die verschiedenen Ordnungen der angeregten Oberflächenmoden lassen sich für Al_2O_3 in der Abb. 2.1 (links) deutlich unterscheiden. Bei PbS prägen sie sich erst für Teilchen mit Radius $a > 10 \mu\text{m}$ aus und sind durch $\epsilon'' > 1$ an den Resonanzstellen gedämpft.

Heinisch et al. [9] untersuchten das Extinktionseffizienzspektrum geladener

Staubteilchen. Nur die anomalen Resonanzen zeigten eine signifikante Blauverschiebung in Abhängigkeit der zusätzlichen Ladung. In diesem Wellenzahlbereich ist eine optische Messung der Ladungsdichte der Staubteilchen möglich, sodass bei der Untersuchung des Extinktionseffizienzspektrums der beschichteten Staubteilchen ebenfalls die anomalen Resonanzen betrachtet werden.

Entwicklung der Extinktionseffizienz

Die anomalen Resonanzen finden im Bereich der dielektischen Funktion statt, der durch $\epsilon' < 0$ und $\epsilon'' \ll 1$ charakterisiert ist. Den exakten Ausdrücken für die Streukoeffizienten a_n , siehe Gl. (1.60), und b_n , siehe Gl. (1.61) ist nicht zu entnehmen, welche Bedingung die dielektrische Funktion an der Resonanzstelle erfüllt. Da vor allem Staubteilchen mit Radien im Mikro- und Submikrometerbereich betrachtet werden, werden die Streukoeffizienten nach kleinem Größenparameter $x \ll 1$ entwickelt. Auf eine ähnliche Art und Weise werden im Abschnitt 2.2.2 die Streukoeffizienten des beschichteten Staubteilchens entwickelt. Für die Rechnung ist es sinnvoll die Koeffizienten in die Form

$$a_n = \frac{F_n^a}{F_a^n + iG_n^a} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } F_n^a &= m\psi_n(mx)\psi_n'(x) - \psi_n(x)\psi_n'(mx), \\ G_n^a &= \chi_n(x)\psi_n'(mx) - m\chi_n'(x)\psi_n(mx) \end{aligned} \quad (2.7)$$

und

$$b_n = \frac{F_n^b}{F_b^n + iG_n^b} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } F_n^b &= \psi_n(mx)\psi_n'(x) - m\psi_n(x)\psi_n'(mx), \\ G_n^b &= m\chi_n(n)\psi_n'(mx) - \chi_n'(x)\psi_n(mx) \end{aligned} \quad (2.9)$$

zu bringen [26]. Mit der Entwicklung der Bessel-Funktionen [15]

$$\begin{aligned} j_n(x) &= 2^n \frac{n!}{(2n+1)!} x^n \left(1 - \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+3)} x^2 + \mathcal{O}(x^4) \right), \\ y_n(x) &= -\frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{x^{n+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) \quad \text{für } x \ll 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 F_n^a &= \frac{m^n 2^{2n} n! (n+1)!}{(2n+1)!^2} x^{2n+1} (m^2 - 1 + \mathcal{O}(x^2)), \\
 G_n^a &= \frac{m^n}{2n+1} (n+1 + nm^2) + \mathcal{O}(x^2), \\
 F_n^b &= \mathcal{O}(x^{2n+3}), \\
 G_n^b &= \frac{m^{2n+1}}{2n+1} (2n+1) + \mathcal{O}(x^2).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Nun wird im Nenner der Gln. (2.6) und (2.8) $F_n^{a,b}$ aufgrund der hohen Ordnung in x gegenüber $G_n^{a,b}$ vernachlässigt. Man erhält

$$a_1 = -i \frac{2m^2 - 1}{3m^2 + 2} x^3, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 0, \tag{2.12}$$

indem nur Ordnungen kleinergleich 3 berücksichtigt werden. In dieser Näherung trägt a_1 zur Extinktionseffizienz

$$Q_t = \frac{12\epsilon''}{(\epsilon' + 2)^2 + \epsilon''^2} x \tag{2.13}$$

bei. Dieser Ausdruck beschreibt die Rayleigh-Streuung, wobei das Teilchen ein elektrisches Dipolfeld [15] emittiert. Das Maximum von Q_t liegt bei der Frequenz, für die

$$\epsilon'(\omega) = -2 \tag{2.14}$$

und $\epsilon''(\omega) \ll 1$ gilt. In welchem Bereich diese Näherung die exakte Position des Maximums gut wiedergibt, zeigt Abb. 2.2. Dort ist jeweils für Al_2O_3 (links) und

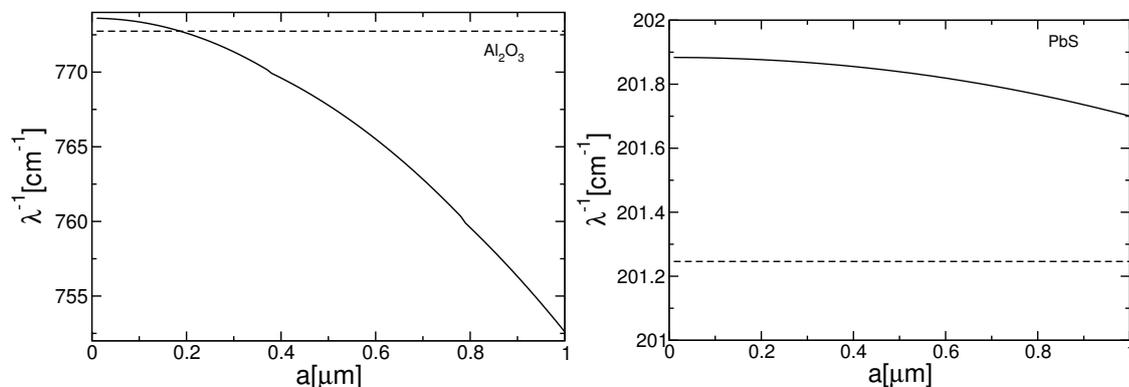


Abbildung 2.2: Position des Extinktionseffizienzmaximums in Abhängigkeit des Teilchenradius für Al_2O_3 (links) und PbS (rechts), errechnet mittels der exakten Gl. (1.87) (gestrichelt) und aus $\epsilon'(\omega) = -2$ (durchgezogen).

PbS (rechts) die exakte Position (durchgezogene Linie) des Extinktionseffizienzmaximums und die durch $\epsilon'(\omega) = -2$ nach Gl. (2.13) genäherte Lage des Maximums (gestrichelte Linie) für Radien der Staubteilchen von bis zu $a = 1 \mu\text{m}$ dargestellt. Für Al_2O_3 ist die Abweichung der Näherung von der exakten Rechnung im Vergleich zu PbS viel größer. Dies liegt daran, dass die Position des Maximums für Al_2O_3 bei höheren Wellenzahlen liegt als bei PbS und somit sich die Größenparameter unterscheiden. Für PbS ist daher diese einfache Näherung auch für mikrometer große Teilchen gut geeignet das Maximum des Extinktionseffizienzspektrums zu bestimmen, während sich für Al_2O_3 bei einer Teilchengröße $a = 1 \mu\text{m}$ eine Abweichung von $\Delta\lambda \approx 20 \text{ cm}^{-1}$ ergibt. Die Verschiebung der Resonanzstelle in Abhängigkeit des Teilchenradius ist auch im Konturplot der Extinktionseffizienz, siehe Abb. 2.1 (unteres Panel) erkennen. Betrachtet man die Resonanzen der untersten Oberflächenmode für Al_2O_3 , so zeigt die Resonanzposition für größere Teilchenradien eine starke Rotverschiebung. Im Gegensatz dazu verlaufen die anomalen Resonanzen des PbS relativ steil. Um die Lage der anomalen Resonanzen von Al_2O_3 besser annähern zu können, müssen bei der Entwicklung der Streukoeffizienten höhere Ordnung des Größenparameters mitgenommen werden, siehe Heinisch [8]. Da jedoch vor allem submikrometergroße Staubteilchen untersucht werden, werden auch die Streukoeffizienten des beschichteten Staubteilchens nur bis zur dritten Ordnung im Größenparameter entwickelt.

Bisher wurde das Extinktionsverhalten neutraler, homogener Staubteilchen betrachtet. Heinisch et al. folgend wurde die Extinktionseffizienz nach kleinem Größenparameter entwickelt um die Lage der anomalen Resonanzen zu bestimmen.

2.1.2 Geladene Staubteilchen

Als nächstes wird die Lichtstreuung an geladenen, homogenen Al_2O_3 - und PbS-Staubteilchen betrachtet. Um im Plasma die zusätzliche Ladung des Staubteilchens durch eine optische Messung bestimmen zu können, müssen diese zur einer Verschiebung der anomalen Resonanzen in der Extinktionseffizienz führen. Das Modell, welches den Einfluss der zusätzlichen Elektronen auf die Streuamplituden beschreibt, wurde im Abschnitt 1.5 entwickelt. Die zusätzlichen Elektronen sammeln sich aufgrund der positiven Elektronenaffinität der betrachteten Materialien, vgl. Tabelle 2.2, im Leitungsband des Staubteilchens an. Die Volumendichte n_b der Überschusselektronen führt mittels der Volumenleitfähigkeit σ_b zu einer zusätzlichen Polarisierbarkeit α . Diese beeinflusst die dielektrische Funktion und

geht damit in den Brechungsindex

$$m_\alpha = \sqrt{\epsilon + \alpha} \quad (2.15)$$

ein. Für die Berechnung der Volumenleitfähigkeit werden die effektive Masse der

	$m_e^*[m_0]$	$\chi[\text{eV}]$	$\nu_{\text{LO}}[\text{cm}^{-1}]$
PbS	0.175 [27]	> 4.6 [28]	212 [21]
Al ₂ O ₃	0.4 [29]	> 3.3 [30]	807 [22]

Tabelle 2.2: Materialparameter zur Berechnung der Volumenleitfähigkeit des Al₂O₃ und PbS.

Elektronen im Leitungsband m_e^* und die longitudinale optische Phononfrequenz ν_{LO} benötigt. Diese Parameter sind in Tabelle 2.1 für die verwendeten Materialien aufgeführt. Im Weiteren wird die Leitfähigkeit immer für eine Temperatur von $T = 300\text{K}$ berechnet.

Im exakten Ausdruck der Streuamplituden Gln. (1.60) und (1.61) muss aufgrund der zusätzlichen Elektronen der Brechungsindex nach Gl. (2.15) modifiziert werden

$$a_n^\alpha = \frac{m_\alpha \psi_n(m_\alpha x) \psi'_n(x) - \psi_n(x) \psi'_n(m_\alpha x)}{m_\alpha \psi_n(m_\alpha x) \xi'_n(x) - \xi(x) \psi'_n(m_\alpha x)}, \quad (2.16)$$

$$b_n^\alpha = \frac{\psi_n(m_\alpha x) \psi'_n(x) - m_\alpha \psi_n(x) \psi'_n(m_\alpha x)}{\psi_n(m_\alpha x) \xi'_n(x) - m_\alpha \xi(x) \psi'_n(m_\alpha x)}. \quad (2.17)$$

$$(2.18)$$

Damit ergibt sich die Extinktionseffizienz eines geladenen Staubteilchens wieder nach Gl. (1.86)

$$Q_t = \frac{2}{k_3^2 b^2} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n^\alpha + b_n^\alpha) \quad (2.19)$$

Betrachtet man den genäherten Ausdruck für die Extinktionseffizienz Gl. (2.13), so gilt nun aufgrund der zusätzlichen Leitfähigkeit

$$Q_t = \frac{12(\epsilon'' + \alpha'')}{(\epsilon' + \alpha' + 2)^2 + (\epsilon'' + \alpha'')^2} x, \quad (2.20)$$

sodass die Lage des Maximums durch

$$\epsilon' + \alpha' + 2 = 0 \quad (2.21)$$

bestimmt wird. Eine hohe Verschiebung des Extinktionsmaximums in Abhängigkeit der zusätzlichen Ladung wird zum einen durch einen großen Realteil der Polarisierbarkeit α' zum anderen durch eine flache Steigung des Realteils der dielektrischen Funktion ϵ' in der Nähe der Resonanzstelle erreicht.

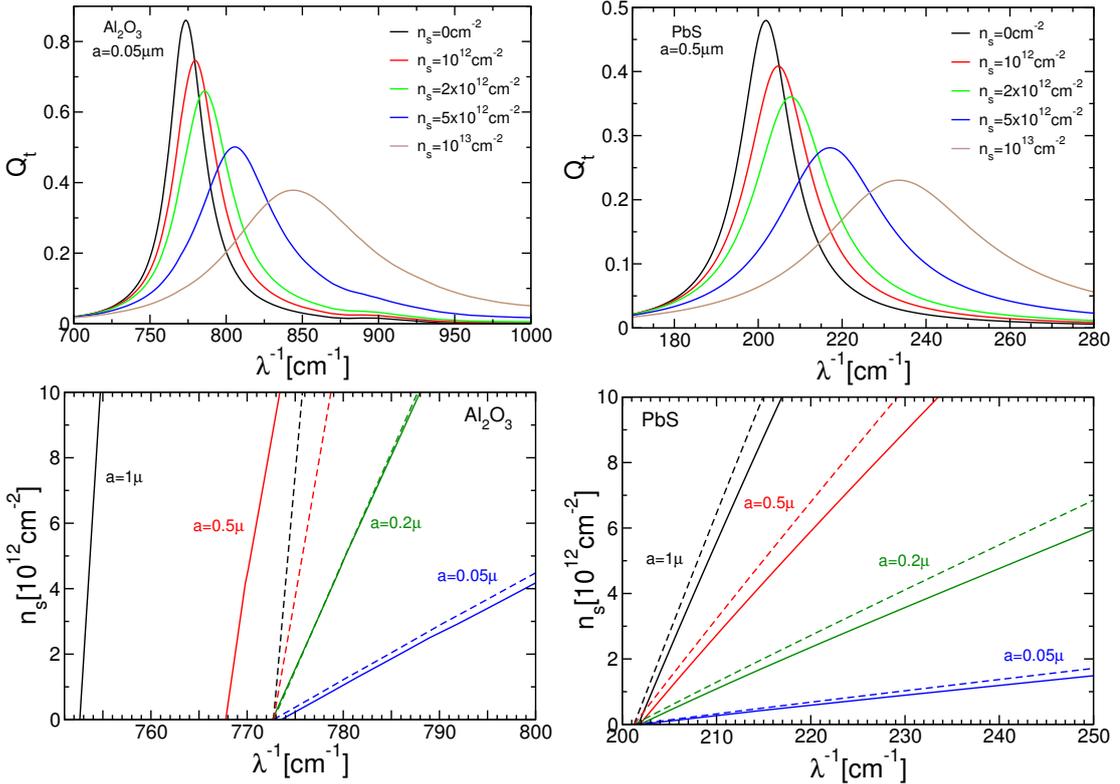


Abbildung 2.3: Verschiebung der anomalen Resonanzen der Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für Al $_2$ O $_3$ (links) und PbS (rechts). Oben: Q_t -Spektrum für festen Teilchenradius $a = 0.05 \mu\text{m}$. Unten: Position des Maximums der Extinktionseffizienz nach Gl. (2.19) (durchgezogen) und Gl. (2.21) (gestrichelt) für ausgewählte Radien.

Abbildung 2.3 zeigt im oberen Panel das Verhalten der Extinktionseffizienz unter Einfluss ausgewählter Oberflächenelektronendichten n_s für Al $_2$ O $_3$ - und PbS-Staubteilchen mit dem Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$. Die betrachteten Oberflächenladungsdichten liegen im Größenbereich zwischen 10^{12} cm^{-2} und 10^{13} cm^{-2} . Im Vergleich zum ungeladenen Staubteilchen (schwarze Linie) verschiebt sich das Maximum bei beiden Materialien zu höheren Wellenzahlen. Die Nullstelle liegt nach Gl. (2.21) bei der Wellenzahl für die

$$\epsilon' = -\alpha' - 2 \quad (2.22)$$

gilt. Der Realteil der Polarisierbarkeit α' ist nach Abb. 2.4 negativ, sodass die

Nullstelle zu größeren Werten von ϵ' verschoben wird. Da der Verlauf von $\epsilon'(\lambda^{-1})$,

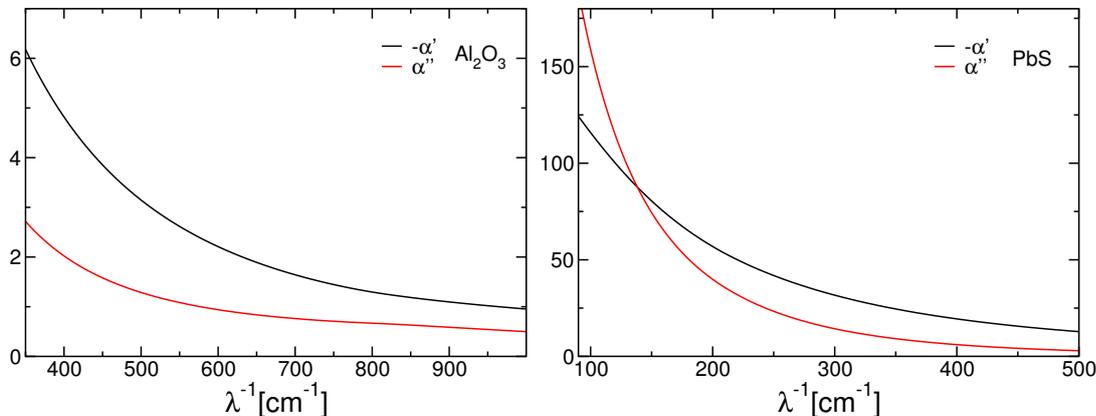


Abbildung 2.4: Leitfähigkeit $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ der Al_2O_3 - und PbS -Staubteilchen mit Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ für die Oberflächenladungsdichte $n_s = 10^{13} \text{cm}^{-2}$.

wie in Abb. 2.1 gezeigt, in der Nähe der Nullstelle monoton steigend ist, verschiebt sich die Resonanz zu größeren Wellenzahlen. Mit zunehmender Ladung wird die Verschiebung größer, der Grund ist die Proportionalität zwischen der Leitfähigkeit und der Oberflächenlektronendichte, siehe Abschnitt 1.5. Im Vergleich der beiden Materialien zeigt sich, dass PbS eine viel größere Sensitivität auf zusätzliche Ladungen aufweist als Al_2O_3 . Dies liegt zum einen daran, dass die anomale Resonanz des PbS bei kleineren Wellenzahlen auftritt, bei denen die Leitfähigkeit nach Abb. 2.4 größer ist. Zum anderen an der kleineren effektiven Elektronenmasse im Leitungsband des PbS , siehe Tabelle 2.2. Sie bewirkt eine größere Mobilität der Elektronen und geht als Proportionalitätsfaktor in die Memory-Funktion ein, vgl. Gl. (1.95).

Um die Verschiebung des Extinktionseffizienzmaximums für verschiedene Teilchenradien zu vergleichen, wird die Oberflächenladungsdichte konstant gehalten. Dies ist im Zusammenhang der Aufladung von Staubteilchen im Plasma ein sinnvoll, da sich bei gleichen Plasmaparametern für unterschiedlich große Teilchen in der Regel die gleiche Oberflächenladungsdichte n_s einstellen wird. Sie hängt durch $n_b = 3n_s/a$ mit der Volumenelektronendichte n_b zusammen, die in die Berechnung der Polarisierbarkeit eingeht. Die Radiusabhängigkeit der Blauverschiebung aufgrund der Oberflächenladungsdichte ist im unteren Panel der Abb. 2.3 zu sehen. Dort ist die Lage des Extinktionseffizienzmaximums in Abhängigkeit der Oberflächenlektronendichte für ausgewählte Teilchengrößen aufgetragen. Die Position der Resonanz wurde zum einen aus der exakten Berechnung der Extinktionseffizienz nach Gl. (2.19) ermittelt, zum anderen aus den Nullstellen der Gl. (2.21). Die

Steigung der Kurven ist ein Maß für die Sensitivität der anomalen Resonanz auf zusätzliche Ladungen. Für kleine Radien der Staubteilchen $a \leq 0.2 \mu\text{m}$ verlaufen die Kurven flacher als für größere Teilchen, d.h. die Verschiebung der Resonanz für dieselbe Oberflächenladungsdichte ist für kleine Teilchen deutlich ausgeprägter. Dies liegt an der inversen Proportionalität zwischen der Leitfähigkeit und dem Radius der Staubteilchen

$$\alpha' \propto n_b \propto n_s \propto \frac{1}{a}. \quad (2.23)$$

Somit sind besonders submikrometergroße Teilchen dazu geeignet, ihre Ladungsdichte mittels einer optischen Messungen zu bestimmen.

Die Näherung für kleinen Größenparameter gibt die Lage der Maxima für die dargestellten Teilchengrößen gut wieder. Wie erwartet ist die verwendete Näherung für Teilchen aus Al_2O_3 mit dem Radius $a = 1 \mu\text{m}$ nicht so gut, wie für PbS Vollkugeln, vgl. Abschnitt 2.1.1. Der Einfluss der Oberflächenelektronendichte wird jedoch als Tendenz gut wiedergegeben, da die beiden Geraden nur parallel verschoben sind. Obwohl die Näherung der Maximumsposition bei ungeladenen PbS-Staubteilchen sehr gut ist, vgl. Abb. 2.2, wird der Einfluss der Ladung schlechter wiedergegeben als für Al_2O_3 . Im Gegensatz zu Al_2O_3 kann für PbS der Imaginärteil der Leitfähigkeit α'' nicht als konstant in der Nähe der anomalen Resonanz angesehen werden, vgl. Abb. 2.4 (rechts). Die Näherung der Extinktionseffizienz für kleine Größenparameter Gl. (2.13) kann daher nicht als Lorentzkurve betrachtet und das Maximum nicht nach Gl. (2.21) bestimmt werden. Dennoch gibt dieser Ausdruck die Blauverschiebung sehr gut wieder, falls das Maximum numerisch ermittelt wird. Die Übereinstimmung mit der exakten Rechnung ist in Abb. ?? dargestellt.

In diesem Abschnitt wurden die homogenen Staubteilchen aus Al_2O_3 und PbS als Vorbereitung für die beschichteten Staubteilchen ausführlich diskutiert. Beide Materialien weisen eine Blauverschiebung ihrer anomalen Resonanzen in Abhängigkeit der Oberflächenelektronendichte auf, welche bei submikrometergroßen Teilchen besonders ausgeprägt ist. Es wird im Weiteren untersucht, ob mittels beschichtete Staubteilchen deren Mantel aus PbS und Al_2O_3 besteht, eine größere Blauverschiebung erreicht werden kann. Dies hätte den Vorteil, dass auch die Oberflächenladung mikrometergroßer Staubteilchen mittels einer optischen Messung zugänglich wäre. Außerdem wären mithilfe submikrometergroßer Staubteilchen als elektrische Sonde auch kleinere Oberflächenladungsdichten des Plasmas messbar.

2.2 Staubteilchen mit dielektrischem Kern und Mantel

Als erstes werden beschichtete Staubteilchen mit Kernen aus Dielektrika betrachtet. Dazu wird das Extinktionseffizienzspektrum der ungeladenen beschichteten Staubteilchen auf Resonanzen untersucht. Im nächsten Schritt wird der Einfluss zusätzlicher Ladung auf die charakteristischen Erscheinungen im Spektrum analysiert.

2.2.1 Kernmaterialien

Die Wahl der dielektrischen Kerne ist durch die Anforderungen an das Vorzeichen der Elektronenaffinität eingeschränkt, siehe Kapitel 1.5. In dieser Arbeit werden als Kernmaterialien Calciumoxid (CaO), Magnesiumoxid (MgO) und Lithiumfluorid (LiF) verwendet. Ihre dielektrischen Funktionen $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ werden im Modell des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\begin{aligned}\epsilon' &= \epsilon_\infty + \sum_{j=1}^m \frac{f_j \omega_j^2 (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_j^2 \omega^2}, \\ \epsilon'' &= \sum_{j=1}^m \frac{f_j \omega_j^2 \Gamma_j \omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_j^2 \omega^2}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

beschrieben. Weist das Material mehrere Resonanzfrequenzen ω_j auf, so wird über diese, gewichtet mit der jeweiligen Oszillatorstärke f_j , summiert. Die Dämpfung ist durch $\Gamma_j = 2\pi\gamma_j$ gegeben und ϵ_∞ ist der Grenzwert der dielektrischen Funktion bei hohe Frequenzen. Tabelle 2.3 gibt die für die dielektrische Funktion benötigten Materialparameter an.

	ϵ_∞	ν_1/cm^{-1}	f_1	γ_1/cm^{-1}	ν_2/cm^{-1}	f_2	γ_2/cm^{-1}
CaO	3.3856	298	9	32	—	—	—
MgO	3.01	401	6.6	7.619	640	0.045	102.4
LiF	1.9	306	6.8	18.36	503	0.11	90.54

Tabelle 2.3: Materialparameter für die dielektrischen Kerne, MgO und LiF [31] und CaO [32]

Die dielektrische Funktion aller drei Materialien ist durch die ausgeprägte transversale optische Phononresonanz bestimmt. MgO und LiF werden zwar durch ein Zwei-Oszillatormodell beschreiben, jedoch sind die jeweils bei höheren Wellen-

zahlen liegenden Resonanzen aufgrund der geringen Oszillatorstärke und der starken Dämpfung kaum ausgeprägt, vgl. dazu das obere Panel der Abb. 2.5. Dort ist

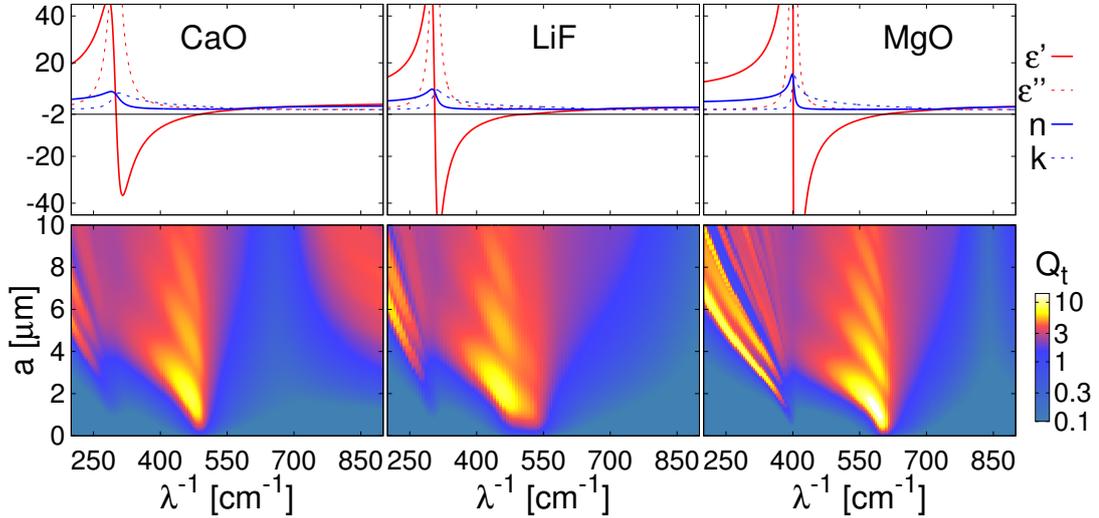


Abbildung 2.5: Oberes Panel: dielektrische Funktion $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ der verwendeten Kernmaterialien. Unteres Panel: Konturplot der Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} und des Teilchenradius a .

die dielektrische Funktion $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ und der Brechungsindex $m = n + ik$ für die drei Kernmaterialien darstellt. Im unteren Panel ist die Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} und der Teilchengröße a für die drei Materialien gezeigt. Alle drei weisen aufgrund der starken transversalen optischen Phononresonanz anomale Streuung auf. Es sind deutlich die verschiedenen Ordnungen der angeregten Oberflächenmoden zu erkennen. Bei MgO sind die Resonanzen besonders scharf und zahlreich ausgeprägt, was am kleinen Imaginärteil der dielektrischen Funktion ($\epsilon'' \approx 0.3$) an der Resonanzstelle liegt. Die anderen Materialien weisen an der Resonanzstelle höhere Werte des Imaginärteils der dielektrischen Funktion auf. Zusätzlich werden die Resonanzen des LiF durch das zweite Phonon gestört. Die unterste Resonanz wird bei allen Materialien durch den Streukoeffizienten a_1 hervorgerufen, vgl. Abschnitt 2.1.1. Die resonante Anregung erfolgt für kleine Größenparameter an der Stelle $\epsilon' + 2 = 0$, vgl. Gl. (2.21). Die Wellenzahl bei der diese Gleichung erfüllt ist, ist im oberen Panel durch den Schnittpunkt zwischen der Geraden $y = -2$ und der Kurve für ϵ' gekennzeichnet.

In Bezug auf die unterste Resonanz, die allein in den weiteren Untersuchungen betrachtet wird, unterscheiden sich die Materialien im Wesentlichen nur in der Lage der Resonanz. Daher wird auf die explizite Darstellung aller drei Kerne verzichtet und exemplarisch CaO ausführlich besprochen. Die charakteristischen Effekte der

Beschichtung werden dann auf die anderen Kerne übertragen und miteinander verglichen.

2.2.2 Entwicklung des Extinktionsquerschnittes

Nachdem die Kern- und Mantelmaterialien vorgestellt wurden, soll im nächsten Kapitel das Extinktionseffizienzspektrum der beschichteten Staubteilchen analysiert werden. Da jedoch den Ausdrücken für die Streuamplituden des beschichteten Teilchens nach Gln. (1.70) und (1.71) nicht anzusehen ist, wie genau sich die Beschichtung auswirkt, wird eine Entwicklung der Extinktionseffizienz nach kleinen Größenparametern $y = ka$ und $x = kb$ durchgeführt, wobei a der Gesamtradius und b der Kernradius des Staubteilchens sind. Beachte, dass nun y der Größenparameter des Teilchens und x der Größenparameter des Kerns ist. Folgend der entsprechenden Entwicklung im vorherigen Abschnitt trägt für kleine Größenparameter nur a_n zur Extinktionseffizienz in der Nähe der anomalen Resonanzen bei. Für die Entwicklung ist es sinnvoll a_n in die Form

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{F^y + G_\chi^y A_n}{F^y + iG^y + G_\chi^y A_n + iA_n F_\chi^y} \\
 \text{mit } F^y &= m_2 \psi(m_2 y) \psi'(y) - \psi(y) \psi'(m_2 y), \\
 G_\chi^y &= \chi'(m_2 y) \psi(y) - m_2 \psi'(y) \chi(m_2 y), \\
 G^y &= \chi(y) \psi'(m_2 y) - m \chi'(y) \psi(m_2 y), \\
 F_\chi^y &= m_2 \chi(m_2 y) \chi'(y) - \chi(y) \chi'(m_2 y)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

zu bringen, wobei m_1 der Brechungsindex des Kerns und m_2 der Brechungsindex des Mantels ist. Die Funktionen G_n^y, F_n^y sind identisch zu G_n^a, F_n^a , die bei der Entwicklung des Streukoeffizienten für eine Vollkugel $a_1 = \frac{F_n^a}{F_n^a + iG_n^a}$ vorkommen, siehe Gl. (2.11). Der Streukoeffizient des beschichteten Staubteilchens besteht damit aus Anteilen der Vollkugel zuzüglich Termen, die durch das Einfügen eines Kerns entstehen. Die Funktionen in Gl. (2.25) werden mithilfe des asymptotischen Verhaltens der Besselfunktionen, siehe Gl. (2.10), für $x \ll 1$ und $y \ll 1$ entwickelt:

$$\begin{aligned}
 G_\chi^y &= -\frac{1}{2n+1} \frac{1}{m_2^{n+1}} \left(n + m_2^2 (n+1) \right), \\
 F_\chi^y &= \frac{n(2n)!^2}{2^{2n} y^{2n+1} n!^2 m_2^{n+1}} \left(1 - m_2^2 \right), \\
 A_n &= \frac{2^{2n} n! (n+1)! x^{2n+1} m_2^{2n+1}}{(2n+1)! (2n)!} \left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{m_2^2 (n+1) + n m_1^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Die Näherungen für G_n^y, F_n^y entsprechen den Entwicklungen von G_n^a, F_n^a in Gl. (2.11), wobei die Bezeichnung des Größenparameters von x zu y geändert werden muss. Damit ergibt sich für den Streukoeffizienten des beschichteten Staubteilchens

$$a_1 = \frac{F^c}{F^c + iG^c},$$

$$\text{mit } F^c = \frac{2}{3}(m_2^2 - 1)y^3 + \frac{2}{3}(1 + 2m_2^2) \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2m_2^2 + m_2} \right) x^3, \quad (2.27)$$

$$G^c = (m_2^2 + 2) + 2(m_2^2 - 1) \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2m_2^2 + m_2} \right) \frac{x^3}{y^3},$$

für $x \ll 1$ und $y \ll 1$. Wird, wie im Fall der Vollkugel aufgrund der höheren Ordnung im Größenparameter, F^c gegenüber G^c im Nenner von a_1 vernachlässigt, so reduziert sich

$$a_1 = \frac{F^c}{iG^c} \quad (2.28)$$

für die Grenzfälle $m_2 = m_1, m_2 = 1$ und $b = 0$, wobei b der Kernradius ist, zu der entsprechenden Entwicklung für den Streukoeffizienten des homogenen Teilchens nach Gl. (2.12). Eine ähnliche Überlegung zur Überprüfung der beschichteten Streukoeffizienten wurde in Abschnitt 1.3.2 durchgeführt. Es wird eine weitere Näherung vorgenommen, um eine Lorenzkurve zu erhalten, die es erlaubt die Maxima der Extinktionseffizienz einfacher zu bestimmen. Im Ausdruck $F^c = f' + if''$ wird der Imaginärteil f'' vernachlässigt, weil in der Nähe der Resonanzen für die Imaginärteile der dielektrischen Funktion $\epsilon_1'' \ll 1, \epsilon_2'' \ll 1$ gilt. Mit $G^c = g' + ig''$ erhält man für die Extinktionseffizienz des beschichteten Staubteilchens

$$Q_t = \frac{6}{y^2} \text{Re}(a_1), \quad \text{wobei } \text{Re}(a_1) = -\frac{f'g''}{g'^2 + g''^2}, \quad (2.29)$$

mit

$$g' = (\epsilon_2' + 2) + 2f^3 \frac{(\epsilon_2' - 1) [(\epsilon_1' - \epsilon_2')(c + 2\epsilon_2') + (\epsilon_1'' - \epsilon_2'')(\epsilon_1'' + 2\epsilon_2'')]}{(\epsilon_1' + 2\epsilon_2')^2 + (\epsilon_1'' + 2\epsilon_2'')^2}$$

$$+ 2f^3 \frac{\epsilon_2'' [(\epsilon_1' - \epsilon_2')(\epsilon_1'' + 2\epsilon_2'') - (\epsilon_1'' - \epsilon_2'')(\epsilon_1' + 2\epsilon_2')]}{(\epsilon_1' + 2\epsilon_2')^2 + (\epsilon_1'' + 2\epsilon_2'')^2} \quad (2.30)$$

und

$$\begin{aligned}
 g'' = \epsilon_2'' + 2f^3 \frac{(\epsilon_2' - 1)[(\epsilon_1'' - \epsilon_2'')(\epsilon_1' + 2\epsilon_2') - (\epsilon_1' - \epsilon_2')(\epsilon_1'' + 2\epsilon_2'')]}{(\epsilon_1' + 2\epsilon_2')^2 + (\epsilon_1'' + 2\epsilon_2'')^2} \\
 + 2f^3 \frac{\epsilon_2''[(\epsilon_1' - \epsilon_2')(\epsilon_1' + 2\epsilon_2') + (\epsilon_1'' - \epsilon_2'')(\epsilon_1'' + 2\epsilon_2'')]}{(\epsilon_1' + 2\epsilon_2')^2 + (\epsilon_1'' + 2\epsilon_2'')^2},
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

dabei ist $f = \frac{x}{y} = \frac{b}{a}$, das Verhältnis des Kernradius zum Gesamtradius der Kugel. Der Übergang zwischen den Brechungsindices und den entsprechenden dielektrischen Funktionen erfolgt mit $m^2 = \epsilon$, siehe Gl. (2.2). Sind $f'g''$ und g'' in der Nähe der Resonanzen konstant, so korrespondieren die Maxima der Extinktionseffizienz zu den Nullstellen von g' . Dies ist die gleiche Argumentation wie bei der Näherung der Extinktionseffizienz des homogenen Staubteilchens, siehe Gl. (2.13). Es ist nicht möglich dem Ausdruck für g' die Nullstellen sofort anzusehen, er kann jedoch für bestimmte Verhältnisse der dielektrischen Funktionen weiter genähert und somit in eine einfachere Form überführt werden. Die jeweils ersten Summanden $(\epsilon_2' + 2)$ und ϵ_2'' von g' und g'' sind die selben, wie sie im Nenner des Streukoeffizienten a_1 des homogenen Staubteilchens, siehe Gl. (2.13), vorkommen. Die jeweils zweiten Summanden berücksichtigen die Beschichtung, in ihnen sind die Real- und Imaginärteile der Kern- und Mantelmaterialien miteinander verknüpft. Die Größen g' und g'' können daher in gewissen Maßen als der Real- und Imaginärteil der beschichteten Kugel angesehen werden. Damit helfen sie zu verstehen, wie sich die Beschichtung auf die dielektrische Funktion des Kerns auswirkt und sind somit ein hilfreiches Werkzeug bei der Untersuchung der Extinktionseffizienz der beschichteten Staubteilchen.

2.2.3 Extinktionseffizienz für verschiedene Radienverhältnisse

Es wird nun die Extinktionseffizienz neutraler, beschichteter Staubteilchen studiert. Um die unterschiedlichen Resonanzphänomene, die eine Beschichtung hervorruft zu untersuchen, wird das Verhältnis zwischen Kern- und Teilchenradius variiert. Es werden charakteristische Signaturen im Spektrum der Extinktionseffizienz identifiziert und anschließend ihre Verschiebung in Abhängigkeit zusätzlicher Oberflächenladung analysiert. Im Zentrum der Untersuchung stehen dabei die Möglichkeiten durch eine Beschichtung die optische Ladungsmessung von Staubteilchen zu verbessern. Als Materialien werden in diesem Abschnitt beispielhaft

CaO im Kern und Al_2O_3 im Mantel verwendet. Beschichtete Staubteilchen werden im Weiteren mit der Schreibweise Kern/Mantel adressiert.

In den Abbildungen 2.6 und 2.7 ist die Extinktionseffizienz eines $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens für verschiedene Verhältnisse $f = \frac{b}{a}$ zwischen Kernradius b und Teilchenradius a dargestellt. Bei der Beschreibung der Abbildungen wird die horizontale Abfolge der Bilder als Panel bezeichnet, die Nummerierung erfolgt dabei von oben nach unten. Die Spalten der Abbildung beziehen sich jeweils auf ein festes Radienverhältnis. Das erste Panel zeigt den Konturplot der Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit des Radius des Staubteilchens a und der Wellenzahl λ^{-1} . Das zweite Panel stellt das Extinktionseffizienzspektrum für einen festen Teilchenradius $a = 0.05 \mu\text{m}$ dar. Im dritten Panel ist der Verlauf der Funktionen g' nach Gl. (2.30) und g'' nach Gl. (2.31) abgebildet. Diese Funktionen können als so etwas wie die dielektrische Funktion des beschichteten Staubteilchens interpretiert werden, die sich aus den Beiträgen der dielektrischen Funktionen des Kern- und Mantelmateri- als zusammensetzt. Das vierte Panel zeigt die dielektrische Funktionen $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ des CaO und Al_2O_3 .

Die Konturplots (erstes Panel) geben einen ersten Eindruck über die Auswirkung einer Beschichtung des CaO-Staubteilchens. Für das Radienverhältnis $f = 0.99$ gleicht der Konturplot stark dem des homogenen CaO-Teilchens, vgl. Abb. 2.5 (unten links). Mit kleiner werden des Radienverhältnisses treten starke Veränderungen im Extinktionsverhalten auf. So ähnelt die Abbildung der Extinktionseffizienz für $f = 0.8$ mehr dem Konturplot des Al_2O_3 -Staubteilchens, vgl. Abb. 2.1 (unteres Panel links) als dem des CaO-Teilchens. Ab dem Radienverhältnis $f = 0.35$ ist der Konturplot mit dem des Al_2O_3 -Staubteilchens fast identisch. Die Extinktionseffizienz des $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens wird also im Bereich $f = 0.99$ bis $f = 0.8$ vom Kernmaterial und im Bereich $f = 0.8$ bis $f = 0.01$ vom Mantelmaterial dominiert. Eine dünne Beschichtung hat viel stärkeren Einfluss auf die Extinktionseffizienz, als das Einfügen eines kleinen Kerns in ein homogenes Staubteilchen. Denn der im Vergleich zum Gesamtradius kleine Kern bewirkt im Inneren des Teilchens nur eine kleine Störung des elektromagnetischen Feldes. Während die einfallende elektromagnetische Welle auch mit einem dünnen Mantel wechselwirken muss. Im Folgenden werden die Veränderungen der Extinktionseffizienz in Abhängigkeit des Radienverhältnisses ausführlich diskutiert.

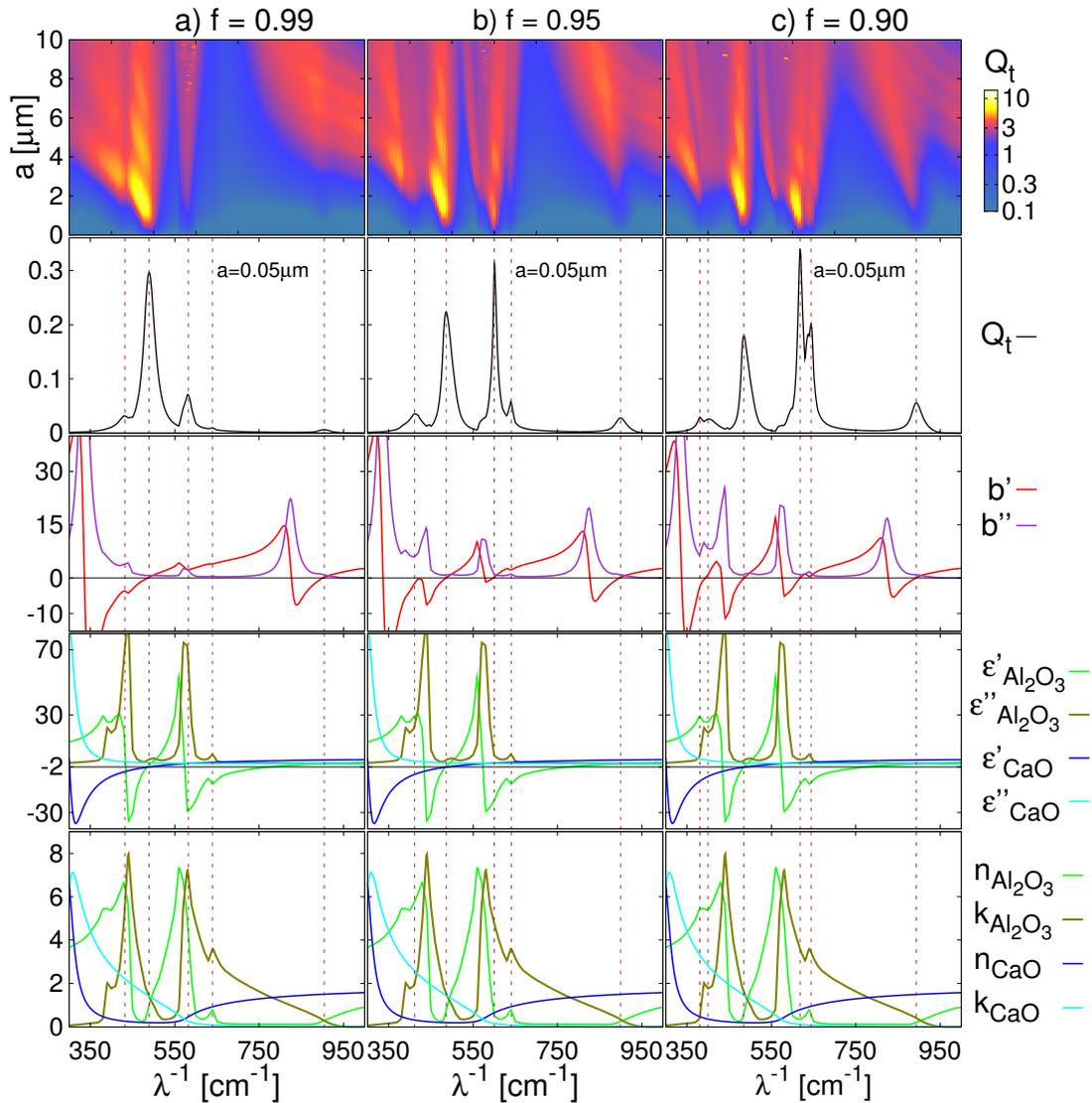


Abbildung 2.6: Untersuchung eines beschichteten CaO(Kern)/Al₂O₃(Mantel)-Staubteilchens für verschiedene Verhältnisse des Kern- zu Teilchenradius $f = \frac{b}{a}$. Erstes Panel: Konturplot der Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} und dem Teilchenradius a . Zweites Panel: Extinktionseffizienzspektrum für einen festen Teilchenradius $a = 0.05 \mu\text{m}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl. Drittes Panel: g' und g'' nach Gln. (2.30) und (2.31). Viertes Panel: dielektrische Funktionen $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ des CaO und Al₂O₃

a) Radienverhältnis $f = 0.99$

In der ersten Spalte a) beträgt das Radienverhältnis von Kern zum Staubteilchen $f = 0.99$. Der Konturplot (erstes Panel) ähnelt stark dem des homogenen CaO-Staubteilchens, vgl. Abb. 2.5 (unten links). Die anomalen Resonanzen treten bei gleichen Wellenzahlen $\lambda_1^{-1} \approx 500 \text{ cm}^{-1}$ auf wie bei der Vollkugel. Die Ähnlichkeit spiegelt sich ebenfalls im Extinktionseffizienzspektrum (zweites Panel) wieder, daher wird im Folgenden diese Resonanz als **CaO-Mutterresonanz (A)** bezeichnet. Das Extinktionsmaximum korrespondiert zu einer Nullstelle der Funktion g' bei dieser Wellenzahl (drittes Panel) und liegt für submikrometergroße Teilchen weiterhin etwa bei $\epsilon'_{\text{CaO}} = -2$ (viertes Panel). Der qualitative Verlauf der Funktionen g' und g'' (drittes Panel) ähnelt stark den entsprechenden Größen der dielektrischen Funktion $\epsilon'_{\text{CaO}} + 2$ und ϵ''_{CaO} . Die anomalen Resonanzen der homogenen Staubteilchen aus CaO, LiF und MgO zeigen nur eine relativ kleine Blauverschiebung in Abhängigkeit zusätzlicher Ladung [8], [9]. Durch Steigerung der Blauverschiebung aufgrund einer Beschichtung mit PbS oder Al_2O_3 kann auch die Oberflächenladungsdichte dieser Materialien optisch gemessen werden. Ob dies möglich ist, wird im nächsten Abschnitt untersucht.

Mit der Beschichtung treten drei neue Effekte bei Wellenzahlen $\lambda_1^{-1} = 434 \text{ cm}^{-1}$, $\lambda_2^{-1} = 573 \text{ cm}^{-1}$ und $\lambda_3^{-1} = 900 \text{ cm}^{-1}$ in der Extinktionseffizienz auf. Die ersten beiden Wellenzahlen λ_1^{-1} und λ_2^{-1} korrespondieren zu denen der Al_2O_3 -Phononen, vgl. viertes Panel. An der Stelle λ_3^{-1} weisen die dielektrischen Funktionen sowohl des CaO als auch des Al_2O_3 keine Besonderheiten auf. Das neue Maximum entsteht aus dem Zusammenwirken beider Materialien aufgrund der Beschichtung. Daher wird es im Weiteren als **Schalenresonanz (B)** bezeichnet.

Das *erste Al_2O_3 -Phonon* bei $\lambda_1^{-1} = 434 \text{ cm}^{-1}$ verursacht für Teilchen mit $a > 2 \mu\text{m}$ eine scharfe Linie geringerer Amplitude in allen Ordnungen der CaO-Resonanzen, vgl. Konturplot im ersten Panel. Die Resonanzen wird an dieser Stelle durch eine Erhöhung der Dämpfung unterdrückt.

Das *zweite Al_2O_3 -Phonon* bei $\lambda_2^{-1} = 573 \text{ cm}^{-1}$ bewirkt eine zusätzliche Extinktion im Wellenzahlbereich, indem CaO keinen Effekt zeigt, vgl. Konturplot (erstes Panel). Auch im Extinktionseffizienzspektrum kleiner Staubteilchen (zweites Panel) kommt es bei dieser Wellenzahl zu einem relativen Maximum. Um diese Signatur zu verstehen, muss die Auswirkung der Phononresonanz auf die dielektrische Funktion des Staubteilchens betrachtet werden (drittes Panel). Die durch das Phonon bedingten Extrema in $\epsilon'_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ und $\epsilon''_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ wirken sich auf den Verlauf

der Funktionen g' und g'' aus. In der Funktion g' kommt es an der Stelle zu einem lokalen Minimum, während g'' ein lokales Maximum aufweist. Da die Funktionen g' und g'' den Verlauf der Extinktionseffizienz nach Gl. (2.29) entscheidend prägen, entsteht so die entsprechende Signatur.

Die **Schalenresonanz (B)** tritt bei Wellenzahlen $\lambda_3^{-1} \approx 900 \text{ cm}^{-1}$ im Bereich der Interferenz- und Ripplestruktur auf. Dieses zusätzliche Extinktionsmaximum entsteht durch die Beschichtung. Es kann jedoch nicht auf ein besonderes Merkmal in den dielektrischen Funktionen der Materialien zurückgeführt werden. Die Signatur erscheint schon bei einer sehr dünnen Beschichtung und verschwindet erst bei einer sehr breiten Schale. Im Extinktionseffizienzspektrum der submikrometergroßen Teilchen (zweites Panel) äußert sich die Schalenresonanz ebenfalls durch ein lokales Maximum. An dieser Stelle weist die Funktion g' (drittes Panel) eine Nullstelle auf. Die Resonanz wird jedoch durch den Funktionswert $g'' \approx 1$ gedämpft. Links der Nullstelle um $\lambda^{-1} \approx 825 \text{ cm}^{-1}$ tritt in der Funktion $G^c = g' + ig''$ eine Resonanz an der Stelle $2\epsilon'_{\text{Al}_2\text{O}_3} + \epsilon'_{\text{CaO}} = 0$, vgl. Gln. (2.30) und (2.30), auf, was ebenfalls aus dem Zusammenwirken beider dielektrischen Funktionen resultiert. Dabei kommt es in der Funktion g' zu einem Vorzeichenwechsel, während die Funktion g'' einen symmetrischen Verlauf um die Polstelle zeigt. Die Position der Schalenresonanz liegt bei viel höheren Wellenzahlen, als die bisher untersuchten anomalen Resonanzen. Für eine optische Messung der Staubteilchenteilchenladung muss bisher die Wellenzahl des eingestrahelten Lichts $\lambda_{\text{PBS}}^{-1} \approx 200 \text{ cm}^{-1}$ oder $\lambda_{\text{Al}_2\text{O}_3}^{-1} \approx 770 \text{ cm}^{-1}$ für die jeweiligen Materialien betragen. Mithilfe der Schalenresonanz könnte der Wellenzahlbereich auf $\lambda_{\text{CaO/Al}_2\text{O}_3}^{-1} \approx 900 \text{ cm}^{-1}$ erweitert werden. Inwieweit diese Resonanz eine Blauverschiebung zeigt und somit für eine optische Messung geeignet ist, wird Abschnitt 2.2.5 ausführlich diskutiert.

b) Radienverhältnis $f = 0.95$

In der zweiten Spalte b) sind die selben physikalischen Größen für das Radienverhältnis $f = 0.95$ dargestellt. Die Extinktionseffizienz in Abhängigkeit des Teilchenradius und der Wellenzahl (erstes Panel) weist deutlich stärkeren Einfluss des Mantelmaterials auf als für $f = 0.99$. Die anomalen **CaO-Mutterresonanzen (A)** mit den entsprechenden Serien sind noch deutlich zu erkennen. Ihre Position hat sich nicht verändert, sie sind jedoch schmaler geworden. Im Extinktionseffizienzspektrum für $a = 0.05 \mu\text{m}$ (zweites Panel) zeigt sich, dass die Amplitude der CaO-Mutterresonanz abgenommen hat. Dies ist durch den Anstieg der Dämpfung

bedingt, welche zu den Funktionswerten von g'' (drittes Panel) korrespondiert. Durch den steigenden Einfluss des Mantelmaterials wird der Verlauf von g'' zunehmend durch $\epsilon''_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ beeinflusst. Die Position der CaO-Mutterresonanz und somit auch die Lage der Nullstelle von g' ändern sich nicht. Dies liegt daran, dass eine anomale Resonanz des homogenen Al_2O_3 -Staubteilchen bei einer ähnlichen Wellenzahl $\lambda_{\text{Al}_2\text{O}_3}^{-1} \approx 490 \text{ cm}^{-1}$ liegt und sich somit der Verlauf von g' an dieser Stelle kaum ändert. Die Folge ist, dass nicht klar unterschieden werden kann, bis zu welchem Radienverhältnis noch von einer CaO-Mutterresonanz gesprochen werden kann.

Die Auswirkung des ersten Al_2O_3 -Phonons bei $\lambda_1^{-1} = 434 \text{ cm}^{-1}$ auf den Konturplot der Extinktionseffizienz hat zugenommen. Die anfangs sehr schmale Linie geringer Amplitude ist breiter geworden. Im Extinktionseffizienzspektrum (zweites Panel) äußert sich das Phonon durch ein lokales Maximum geringer Amplitude. Die starke Ausprägung der Phononresonanz ist deutlich in den Funktionen g' und g'' in diesem Wellenzahlbereich zu erkennen, vgl. drittes Panel. Die zugehörigen relativen Extrema in der dielektrischen Funktion des Al_2O_3 prägen nun den Verlauf beider Funktionen.

Die durch das zweite Al_2O_3 -Phonon hervorgerufene Extinktion bei $\lambda_2^{-1} \approx 580 \text{ cm}^{-1}$ hat sich verbreitert. Die Amplitude hat zugenommen und es lassen sich ähnlich wie bei den anomalen Resonanzen zwei Resonanzordnungen unterscheiden, vgl. Konturplot im ersten Panel. Außerdem hat sich die Position der Resonanz zu höheren Wellenzahlen verschoben. Im Extinktionseffizienzspektrum (zweites Panel) ist die Zunahme der Amplitude und die Verschiebung der Lage der Resonanz ebenfalls deutlich zu sehen. Durch den verstärkten Einfluss des zweiten Al_2O_3 -Phonons hat sich in der Funktion g' (drittes Panel) bei der Wellenzahl der Resonanz eine Nullstelle herausgebildet. Das durch die starke Phononresonanz induzierte Maximum in der Extinktionseffizienz wird sich für kleinere Kerne weiter zu höheren Wellenzahlen verschieben, bis es die Position der anomalen Resonanz des homogenen Al_2O_3 -Staubteilchens erreicht hat. Daher wird diese Signatur im Weiteren als **Al_2O_3 -Mutterresonanz (C)** bezeichnet.

In der Extinktionseffizienz (erstes Panel) haben sich links und rechts von dieser Resonanz zwei weitere Effekte herausgebildet. Links des zweiten Phonons ist ein Bereich um $\lambda^{-1} \approx 550 \text{ cm}^{-1}$ in den Funktionen g' und g'' entstanden, der die Ausbildung gewöhnlicher optischer Resonanzen ermöglicht. Rechts des zweiten Phonons tritt das lokale Minimum in $\epsilon'_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ bei $\lambda^{-1} \approx 640 \text{ cm}^{-1}$ in Erscheinung, vgl. viertes Panel, was zu einer zusätzlichen Extinktion führt.

Die **Schalenresonanz (B)** im Bereich der Interferenzstruktur ist im Konturplot (erstes Panel) für $f = 0.95$ nun deutlich zu erkennen. Die Amplitude hat zugenommen, zudem hat eine Verschiebung der Resonanz zu kleineren Wellenzahlen stattgefunden. Beides ist ebenfalls dem Extinktionseffizienzspektrum (zweites Panel) zu entnehmen. Weiterhin korrespondiert die Maximumposition zu der Nullstelle von g' . Die Zunahme der Amplitude ist durch die Abnahme des Funktionswertes von g'' bei dieser Wellenzahl bedingt.

Radienverhältnisse von c) $f = 0.9$ bis f) $f = 0.01$

Durch die Verringerung des Kernanteils bilden sich die beschriebenen Resonanzen immer stärker aus, sodass bei der Beschreibung nur noch die wesentlichen Veränderungen angesprochen werden.

Die **Al₂O₃-Mutterresonanz (C)** hat sich bei einem Radiusverhältnis von $f = 0.9$ stark verbreitert und zu höheren Wellenzahlen hin verschoben. Sie weist im Konturplot (erstes Panel) eine Zweiteilung durch eine Linie geringerer Extinktionsamplitude auf. Dies ist auch im Extinktionseffizienzspektrum (zweites Panel) zu erkennen. Verursacht wird dies durch relative Extrema in der dielektrischen Funktion des Al₂O₃ bei dieser Wellenzahl. Die **Schalenresonanz** verschiebt sich weiterhin zu kleineren Wellenzahlen, wobei ihre Amplitude steigt.

In der Abbildung 2.7 wird die Untersuchung der Extinktionseffizienz für Radienverhältnisse $f = 0.8$ bis $f = 0.01$ fortgeführt, dazu sind dieselben physikalischen Größen wie Abb. 2.6 dargestellt.

Für d) $f = 0.8$ ist die **CaO-Mutterresonanz (A)** sehr schmal geworden, vgl. Konturplot im ersten Panel und ähnelt stark der anomalen Resonanz des Al₂O₃ bei dieser Wellenzahl. Es kann nicht unterschieden werden von welchem Material diese Resonanz hervorgerufen wird, sodass nicht mehr von einer CaO-Mutterresonanz gesprochen werden kann. Die **Al₂O₃-Mutterresonanz (C)** hat sich verbreitert. Durch die weitere Verschiebung zu höheren Wellenzahlen, liegt die Störung aufgrund der lokalen Extrema in $\epsilon'_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ und $\epsilon''_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ nun links des Resonanzstelle, vgl. Konturplot im ersten Panel. Dies ist ebenfalls im Extinktionseffizienzspektrum (zweites Panel) zu sehen. Einen guten Eindruck wie stark das Mantelmaterial die Extinktionseffizienz prägt, liefert der Vergleich der Verläufe von g' und g'' (drittes Panel) mit den dielektrischen Funktionen der Materialien (viertes Panel). Qualitativ werden g' und g'' in weiten Bereichen der dargestellten Wellenzahlen von Al₂O₃ dominiert. Die Ausprägung der CaO-Phononresonanz bei $\lambda^{-1} \approx 350\text{cm}^{-1}$ in den

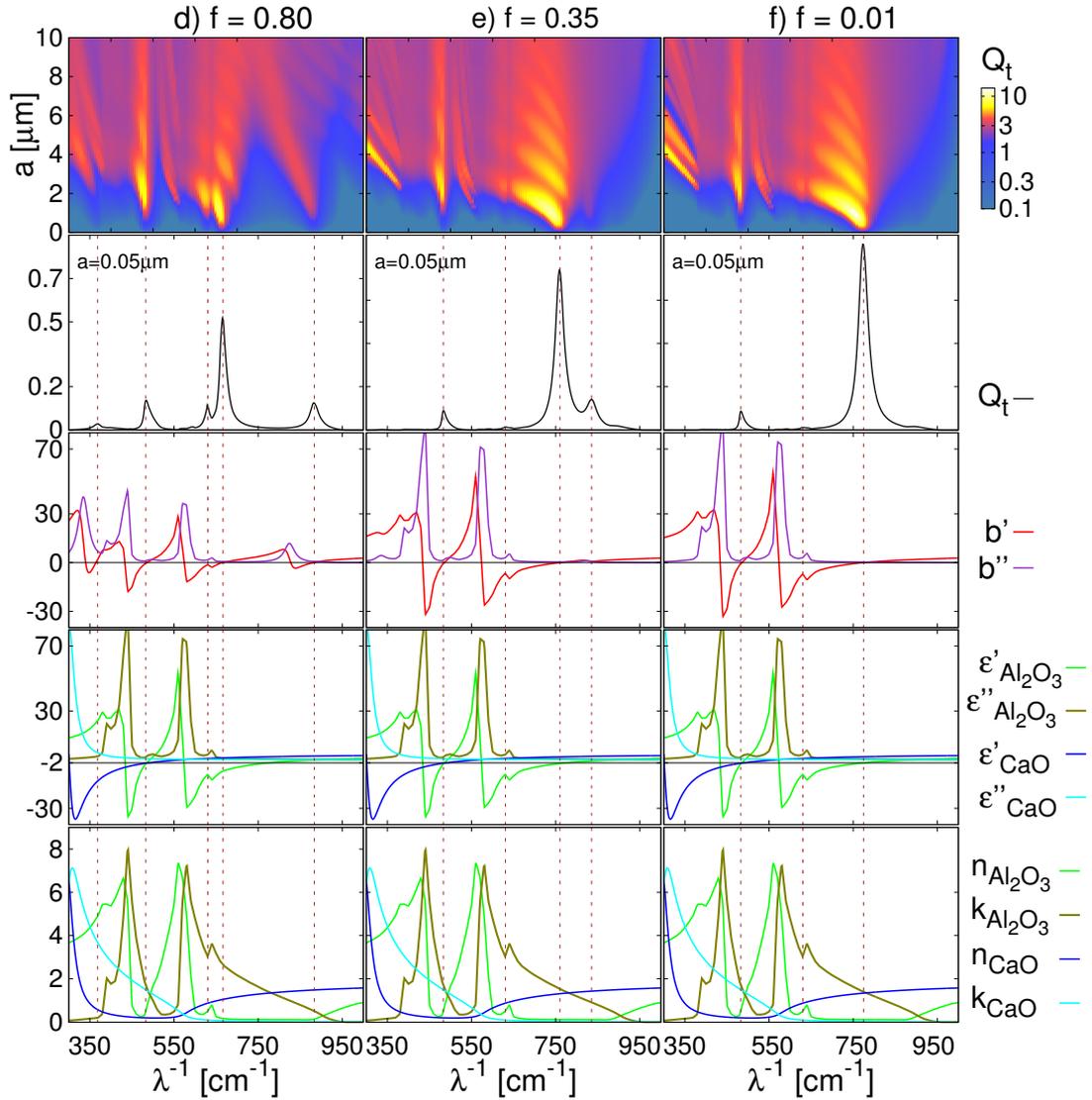


Abbildung 2.7: Untersuchung eines beschichteten CaO(Kern)/Al₂O₃(Mantel)-Staubteilchens für verschiedene Verhältnisse des Kern- zu Teilchenradius $f = \frac{b}{a}$. Erstes Panel: Konturplot der Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} und dem Teilchenradius a . Zweites Panel: Extinktionseffizienzspektrum für einen festen Teilchenradius $a = 0.05 \mu\text{m}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl. Drittes Panel: g' und g'' nach Gln. (2.30) und (2.31). Viertes Panel: dielektrische Funktionen $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ des CaO und Al₂O₃

Funktionen g' und g'' ist im Vergleich zum Radienverhältnis $f = 0.99$ stark zurückgegangen. Die Position der **Schalenresonanz (B)** verschiebt sich weiter zu kleineren Wellenzahlen. Die Amplitude nimmt für submikrometergroße Teilchen weiter zu, vgl. erstes und zweites Panel. Im Verlauf von g' und g'' (viertes panel) ist eine Dämpfung der Resonanz in der Nähe der Nullstelle, die zur Schalenresonanz korrespondiert, zu beobachten.

In der Spalte e) ist das Radienverhältnis $f = 0.35$ dargestellt. Der Konturplot weist, ebenfalls wie das Extinktionsspektrum nur noch leichte Unterschiede zu den entsprechenden Darstellungen eines homogenen Al_2O_3 -Staubteilchens auf. Zum einen ist die **Al_2O_3 -Mutterresonanz (C)** gegenüber der entsprechenden Position der anomalen Resonanz des homogenen Staubteilchens leicht zu kleineren Wellenzahlen verschoben und die Amplitude ist geringer, vgl erstes und zweites Panel. Zum anderen ist die **Schalenresonanz (B)** sowohl im Konturplot als auch im Extinktionseffizienzspektrum zu erkennen. Sie befinden sich nun in der Nähe der Al_2O_3 -Mutterresonanz.

Die Extinktionseffizienz des $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens für das Radienverhältnis f) $f = 0.01$ weist sowohl im Konturplot (erstes Panel) als auch in ihrem Spektrum (zweites Panel) keine Veränderungen im Vergleich zum homogenen Al_2O_3 -Staubteilchen auf. Die Verläufe der Funktionen g' und g'' gleichen exakt denen von $\epsilon'_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ und $\epsilon''_{\text{Al}_2\text{O}_3}$.

Zusammenfassung

Es wurde die Extinktionseffizienz eines beschichteten Staubteilchens am Beispiel der Materialkombination $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ für verschiedene Radienverhältnisse untersucht. Es zeigt sich, dass ein dünner Mantel einen viel größeren Effekt auf die Extinktionseffizienz hat als ein kleiner Kern, der sich kaum bemerkbar macht.

Deutlich ist zu erkennen, dass bei großen Radienverhältnissen im Bereich zwischen $f = 0.99$ und $f \approx 0.9$ das Kernmaterial das Extinktionsspektrum dominiert. In diesem Bereich kann eine auftretende Signatur deutlich der Mutterresonanz des Kernmaterials zugeordnet werden. Heinisch et al. [9], [8] zeigten, dass die Materialien, die hier als Kernmaterialien verwendet werden, nur für submikrometergroße Teilchen eine messbare Blauverschiebung in Abhängigkeit der zusätzlichen Ladung aufweisen, die weitaus geringer ist als die des PbS oder Al_2O_3 . Inwieweit es zu einer Vergrößerung der Blauverschiebung durch eine Beschichtung kommt, wird im nächsten Abschnitt analysiert. Dadurch kann eine Vergrößerung des Wellenzahl-

bereichs erreicht werden, in dem eine optische Messung der Ladungsdichte möglich ist.

Das Mantelmaterial dominiert die Extinktionseffizienz des beschichteten Staubteilchens für Radienverhältnisse von $f = 0.01$ bis $f \approx 0.8$. Es kommt zu einer Rotverschiebung der Mutterresonanzen des Mantelmaterials im Vergleich zum entsprechenden homogenen Staubteilchen. Wenn die Blauverschiebung aufgrund der zusätzlichen Oberflächenladung dabei konstant bleibt, könnte durch das Einfügen eines Kerns in ein homogenes Al_2O_3 -Staubteilchen der Wellenzahlbereich, in dem das eingestrahlte Licht für die optische Ladungsmessung liegen muss, variiert werden.

Es tritt auf Grund der Beschichtung nur ein neuer Effekt auf, die Schalenresonanz. Die übrigen Erscheinungen im Extinktionsspektrum entstehen durch die unterschiedlich starken Ausprägungen der dielektrischen Funktionen der verwendeten Materialien. Sie können immer auf entsprechende Besonderheiten in der jeweiligen dielektrischen Funktion zurückgeführt werden. Die besondere Schalenresonanz tritt im Vergleich zu den bisher betrachteten anomalen Resonanzen bei viel höheren Wellenzahlen auf. Liegt ihre Blauverschiebung aufgrund zusätzlicher Ladungen im messbaren Bereich, so führt die Schalenresonanz zu einem weiteren Wellenzahlbereich indem eine optische Ladungsmessung durchgeführt werden kann.

2.2.4 Verschiebung der anomalen Resonanzen

Wie bei der Diskussion der Extinktionseffizienz des beschichteten $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens festgestellt, gibt es ein Regimeübergang zwischen einem vom Kernmaterial zu einem vom Mantelmaterial dominierten Spektrum. Es wird nun untersucht, wie die entsprechenden Mutterresonanzen des Kerns und des Mantels auf zusätzliche negative Ladungsträger reagieren und inwieweit sie sich somit für eine optische Ladungsmessung eignen. Dazu wird die zusätzliche Elektronenkonzentration wie im Abschnitt 2.1.2 in eine Oberflächenelektronendichte n_s umgerechnet. Da im verwendeten Modell die Elektronen nur in die Schale eindringen, ergibt sich die Volumenelektronendichte

$$n_b = \frac{3n_s a^2}{a^3 - b^3}, \quad (2.32)$$

wobei a der Kern- und b der Gesamtradius des Staubteilchens ist.

In der Nähe der anomalen Resonanzen gilt für die Imaginärteile der dielektrischen Funktionen $\epsilon_1 \ll 1$ und $\epsilon_2 \ll 1$, wobei sich weiterhin der Index 1 auf

das Kern- und Index 2 auf das Mantelmaterial beziehen, vgl. Abb. 1.1. Damit ergibt sich für die Funktion nach Gl. (2.30), dessen Nullstellen wegen Gl. (2.29) zu Resonanzen der Extinktionseffizienz korrespondieren

$$g' = (\epsilon'_2 + \alpha' + 2) + 2f^3 \frac{(\epsilon'_2 + \alpha' - 1)(\epsilon'_1 - \epsilon'_2 - \alpha')}{(\epsilon'_1 + 2\epsilon'_2 + 2\alpha')}, \quad (2.33)$$

wobei α' der Realteil der Polarisierbarkeit ist, die durch die zusätzlichen Ladungsträger hervorgerufen wird, vgl. Abschnitt 2.1.2, und $f = \frac{b}{a}$ das Verhältnis zwischen dem Kernradius b und Gesamtradius a des beschichteten Staubteilchens. Als Nullstellen werden Wellenzahlen λ^{-1} bezeichnet, die

$$g' = (\epsilon'_2 + \alpha' + 2)(\epsilon'_1 + 2\epsilon'_2 + 2\alpha') + 2f^3(\epsilon'_2 + \alpha' - 1)(\epsilon'_1 - \epsilon'_2 - \alpha') = 0 \quad (2.34)$$

erfüllen.

Mutterresonanzen des Mantels

In der Abb. 2.8 ist die Extinktionseffizienz Q_t eines $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens mit Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ für ausgewählte Oberflächenladungsdichten n_s und für verschiedene Radienverhältnisse f dargestellt. Es werden Oberflächendichten im Bereich zwischen $n_s = 10^{12} \text{cm}^{-2}$ und $n_s = 10^{13} \text{cm}^{-2}$ betrachtet. Die Radienverhältnisse mit $f = 0.5$ (links) und $f = 0.01$ (rechts) wurden so gewählt, dass die Extinktionseffizienz durch die Al_2O_3 -Mutterresonanz bestimmt wird. Im

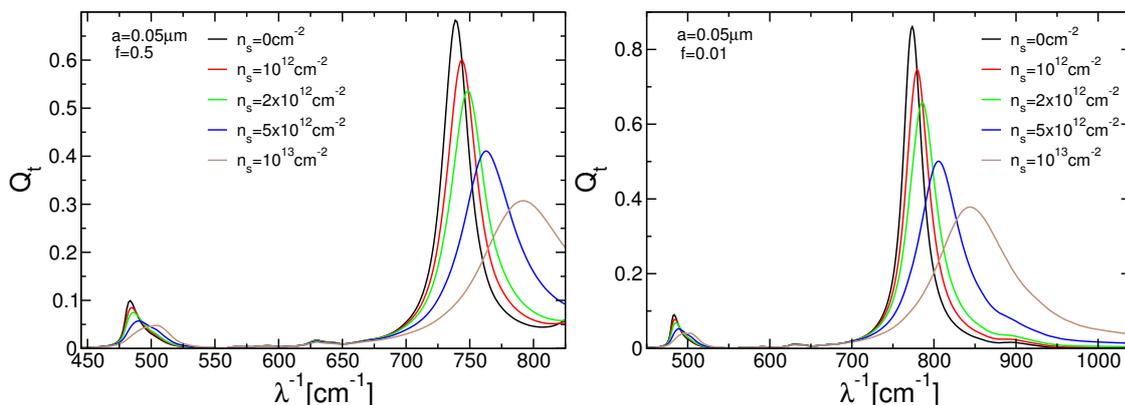


Abbildung 2.8: Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} von $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchen mit Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ und Radienverhältnissen $f = 0.5$ (links) und $f = 0.01$ (rechts) für verschiedene Oberflächenladungsdichten n_s

Vergleich der Radienverhältnisse sind zwei Dinge festzustellen. Zum einen ist die

Al₂O₃-Mutterresonanz für $f = 0.5$ um $\Delta\lambda^{-1} \approx 50 \text{ cm}^{-1}$ gegenüber der Lage der anomalen Resonanz eines homogenen Al₂O₃-Staubteilchens verschoben. Diese Rotverschiebung geht für kleinere Radienverhältnisse zurück, sodass die Position der Al₂O₃-Mutterresonanz für $f = 0.01$ mit der anomalen Resonanz des homogenen Al₂O₃-Staubteilchens identisch ist. Zum anderen kommt es bei beiden Radienverhältnissen zu einer Blauverschiebung der Al₂O₃-Mutterresonanz in Abhängigkeit zusätzlicher Oberflächenladungsdichte. Die Blauverschiebung wird mit abnehmendem Kernanteil größer und erreicht für $f = 0.01$ den Wert eines homogenen Al₂O₃-Staubteilchens, vgl. Abb. 2.3 (links oben). Mit steigendem Einfluss des Kerns kommt es bei einem neutralen Staubteilchen zu einer Rotverschiebung der Mutterresonanz des Mantels, die entsprechende Blauverschiebung aufgrund der zusätzlichen Ladung geht jedoch zurück. Mittels der Verwendung von beschichteten Staubteilchen lässt sich um den Preis der Sensitivität die Wellenzahl des benötigten Lichts, um eine optische Ladungsmessung durchzuführen, beeinflussen. Dies wird im Folgenden quantitativ für einen festen Teilchenradius und unterschiedliche Mantelmaterialien diskutiert.

In Abb. 2.9 wird die Position der anomalen Resonanz der CaO/Al₂O₃- (links) und MgO/PbS-Staubteilchen (rechts) für verschiedene Radienverhältnisse untersucht. Dabei werden die Radienverhältnisse so gewählt, dass die Maxima im Extinktionseffizienzspektrum den Mutterresonanzen der Mantelmaterialien zugeordnet werden können. Die Position des Extinktionsmaximums wird zum einen aus dem exakten Ausdruck für Q_t nach Gl. (2.19) ermittelt und zum anderen mithilfe der Nullstellen der Funktion g' nach Gl. (2.34). Der Radius des Staubteilchens wird nicht variiert und beträgt $a = 0.05 \mu\text{m}$ für das CaO/Al₂O₃-Teilchen und $a = 0.5 \mu\text{m}$ für das MgO/PbS-Teilchen. Für die Untersuchung der Al₂O₃-Mutterresonanzen (links) werden Radienverhältnisse zwischen $f = 0.8$ bis $f = 0$ betrachtet. Bei diesen dominiert Al₂O₃ das Extinktionsspektrum des beschichteten Staubteilchens und die Al₂O₃-Mutterresonanz lässt sich eindeutig identifizieren. Betrachtet man zunächst das ungeladene Staubteilchen ($n_s = 0$), so ist es möglich mithilfe eines CaO-Kerns im Inneren des Al₂O₃-Teilchens eine Rotverschiebung der Mutterresonanz um $\Delta\lambda^{-1} \approx 100 \text{ cm}^{-1}$ im Vergleich zum homogenen Staubteilchen zu erreichen. Die durch die Oberflächenladung hervorgerufene Blauverschiebung der Resonanz geht jedoch zurück. Dies spiegelt sich in der unterschiedlichen Steigung der Kurven wieder, die mit steigendem Radienverhältnis steiler verlaufen. Trotz der Verminderung der Blauverschiebung ist ihre Größenordnung weiterhin gut geeignet um durch eine optische Messung die Oberflächenladung der beschich-

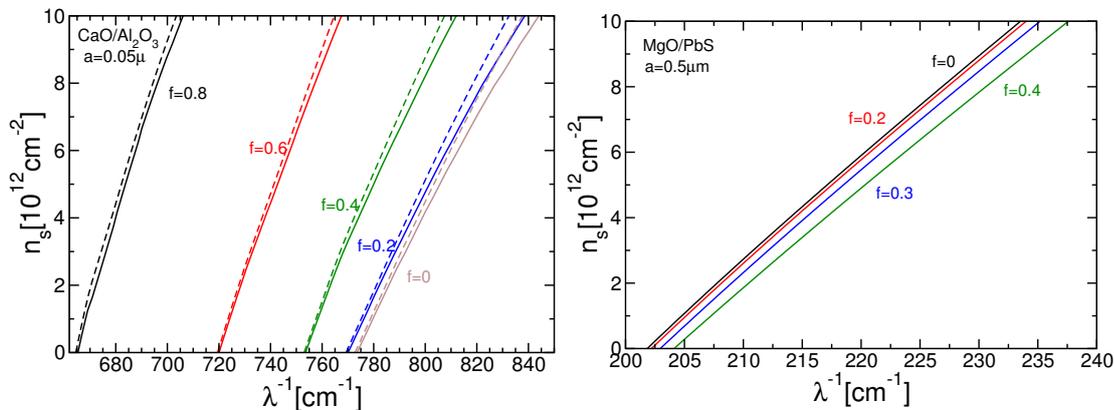


Abbildung 2.9: Position der Mantel-Resonanzen in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für CaO/Al₂O₃- (links) und MgO/PbS-Staubteilchen (rechts) mit festem Radius a für unterschiedliche Radienverhältnisse f , ermittelt nach Gl. (2.19) (durchgezogene Linie) und nach Gl. (2.34) (gestrichelte Linie).

teten Staubteilchen mit Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ zu bestimmen. Der Vorteil ist, dass durch Verwendung von beschichteten Staubteilchen mit unterschiedlichen Radienverhältnissen die für die Messung benötigte Wellenzahl des eingestrahnten Lichts im Bereich zwischen $\lambda^{-1} \approx 670 \text{ cm}^{-1}$ bis $\lambda^{-1} \approx 770 \text{ cm}^{-1}$ eingestellt werden kann.

Die PbS-Mutterresonanz, welche das Extinktionseffizienzspektrum der MgO/PbS-Staubteilchen (rechts) für Radienverhältnisse zwischen $f = 0$ und $f = 0.4$ dominiert, weist ein anderes Verhalten in Abhängigkeit von f auf. Für steigendes Radienverhältnis zeigt das ungeladene Staubteilchen eine ganz leichte Verschiebung der PbS-Mutterresonanz zu größeren Wellenzahlen. Die Sensitivität der Maximumposition auf Oberflächenladung nimmt ebenfalls ganz leicht zu. Dieser Effekt ist beim MgO-Kern im Vergleich zu anderen Kernmaterialien am stärksten ausgeprägt. Das Einfügen eines dielektrischen Kerns aus den betrachteten Materialien in ein PbS-Staubteilchen hat somit keinen negativen Einfluss auf die Blauverschiebung der PbS-Mutterresonanzen. Auch solche Staubteilchen eignen sich zur optischen Messung ihrer Oberflächenladungsdichte, wobei ihre Radien im Sub- und Mikrometerbereich liegen können.

Wie die Mutterresonanzen der Mantelmaterialien auf das Einfügen eines Kerns reagieren, wird durch die damit verbundenen Veränderung der gesamten dielektrischen Funktion des Staubteilchens bestimmt. Dies ist ein sehr materialspezifischer Prozess, es kommt dabei auf den genauen Verlauf der entsprechenden dielektrischen Funktionen an. Das Werkzeug zur seiner Analyse sind die Funktionen g' und g'' , siehe Gln. (2.30) und (2.31). Mithilfe dieser Funktionen wurde im Ab-

schnitt 2.2.3 gezeigt, wie die Rotverschiebung der Al_2O_3 -Mutterresonanz für Radienverhältnisse von $f = 0.01$ bis $f = 0.8$ zustande kommt. Die gleichen Überlegungen führen zur Erklärung warum Staubteilchen mit dielektrischem Kern und einem PbS-Mantel eine leichte Blauverschiebung der PbS-Mutterresonanzen im Bereich von $f = 0$ bis $f = 0.4$ aufweisen. Die entsprechenden Darstellungen werden hier jedoch ausgespart.

Während der Rotverschiebung der Al_2O_3 -Mutterresonanz durchläuft die entsprechenden Nullstelle von g' Wellenzahlbereiche, in denen sich die Steigung dieser Funktion in der Umgebung der Nullstelle ändert. Die Steigung wird für Wellenzahlen $\lambda^{-1} < \lambda_0^{-1}$ größer, wobei λ_0^{-1} die Resonanzposition des homogenen Staubteilchens ist. Damit sinkt die Verschiebung, die durch die zusätzliche Leitfähigkeit hervorgerufen wird. Dieser Effekt wurde in ähnlicher Form im Abschnitt 2.1.2 für ein homogenes Staubteilchen diskutiert. Die PbS-Mutterresonanzen werden beim größeren Kern zu höheren Wellenzahlen verschoben, in einen Bereich, wo die Funktion g' eine geringere Steigung aufweist, als an der Resonanzstelle des homogenen Staubteilchens. Zusammen mit der Zunahme der Volumenleitfähigkeit aufgrund des Kerns steigt die Blauverschiebung, die durch zusätzlichen Polarisierbarkeit verursacht wird.

Nicht nur das Radienverhältnis beeinflusst die Blauverschiebung des Extinktionseffizienzmaximums, sondern auch der Radius der Staubteilchen. Dies wird in Abb. 2.10 für $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ - (links) und MgO/PbS -Staubteilchen (rechts) untersucht. Es ist die Position des Maximums in Abhängigkeit der Oberflächenladungs-

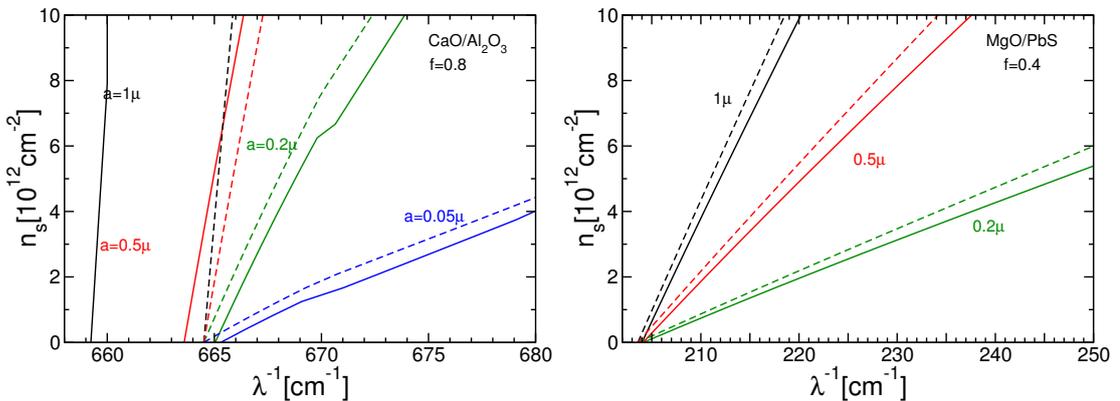


Abbildung 2.10: Position der Mantel-Resonanzen in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ - (links) und MgO/PbS -Staubteilchen (rechts) mit Radius a , ermittelt nach Gl. (2.19) (durchgezogene Linie) und nach Gl. (2.34) (gestrichelte Linie).

dichte n_s für ausgewählte Teilchenradien a dargestellt. Die Lage des Extinctionseffizienzmaximums wurde zum einen nach der exakten Rechnung Gl. (2.19) (durchgezogene Linie) und zum anderen aus der Nullstelle des genäherten Ausdrucks Gl. (2.34) (gestrichelte Linie) ermittelt. Die betrachteten Radienverhältnisse sind $f = 0.8$ und $f = 0.4$. Sie wurden so hoch gewählt, um die Auswirkungen des Kerns auf die Blauverschiebung auszuloten. Die Al_2O_3 -Mutterresonanzen zeigen beim beschichteten Staubteilchen, wie nach Abb. 2.9 (links) erwartet, weiterhin eine Blauverschiebung, die jedoch als die der anomalen Resonanzen des homogenen Al_2O_3 -Teilchens, vgl. Abb. 2.3 (links) ist. Dies gilt für alle Teilchenradien. Die Oberflächenladungsdichte der Staubteilchen mit Radius $a \leq 2 \mu\text{m}$ kann weiterhin durch eine optische bestimmt werden. Der zusätzliche Vorteil aufgrund der Beschichtung wurde bereits erläutert.

Die Blauverschiebung der PbS-Mutterresonanz des beschichteten Staubteilchens mit dielektrischem Kern weist keinen nennenswerten Unterschied zu der eines homogenen PbS-Teilchens auf. Auch das Maximum der Extinktionseffizienz beschichteter sub- und mikrometergroßer Staubteilchen zeigt eine wesentliche Verschiebung ihrer Position in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte, was eine optische Ladungsmessung ermöglicht.

Mutterresonanzen des Kernmaterials

Als nächstes werden Radienverhältnisse betrachtet bei denen das Kernmaterial das Extinktionseffizienzspektrum der beschichteten Staubteilchen dominiert. In der Abb. 2.11 ist die Extinktionseffizienz Q_t eines $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens mit Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ für ausgewählte Oberflächenladungsdichten n_s und für verschiedene Radienverhältnisse f dargestellt. Es werden Oberflächenladungsdichten im Bereich zwischen $n_s = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ bis $n_s = 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ betrachtet. Das Radienverhältnis beträgt $f = 0.99$ (links) und $f = 0.95$ (rechts), sodass das Extinktionseffizienzspektrum vom CaO-Kern dominiert wird. Die Dominanz des CaO äußert sich bei $f = 0.99$ durch die Ausbildung der anomalen Resonanz bei ähnlichen Wellenzahlen ($\lambda^{-1} \approx 500 \text{ cm}^{-1}$), bei denen sie auch im Extinktionseffizienzspektrum des homogenen CaO-Staubteilchens auftritt, vgl. Abb. 2.5 (links). Für diese Resonanz wurde im Abschnitt 2.2.3 der Begriff der CaO-Mutterresonanz eingeführt. Das lokale Extinktionsmaximum bei $\lambda^{-1} \approx 580 \text{ cm}^{-1}$ wird durch Al_2O_3 hervorgerufen. Mit zunehmender Oberflächenladungsdichte verschieben sich beide Maxima zu größeren Wellenzahlen. Diese Blauverschiebung ist für die CaO-Mutterresonanz viel ausgeprägter als für das Maximum bei $\lambda^{-1} \approx 580 \text{ cm}^{-1}$, sodass dieses nicht

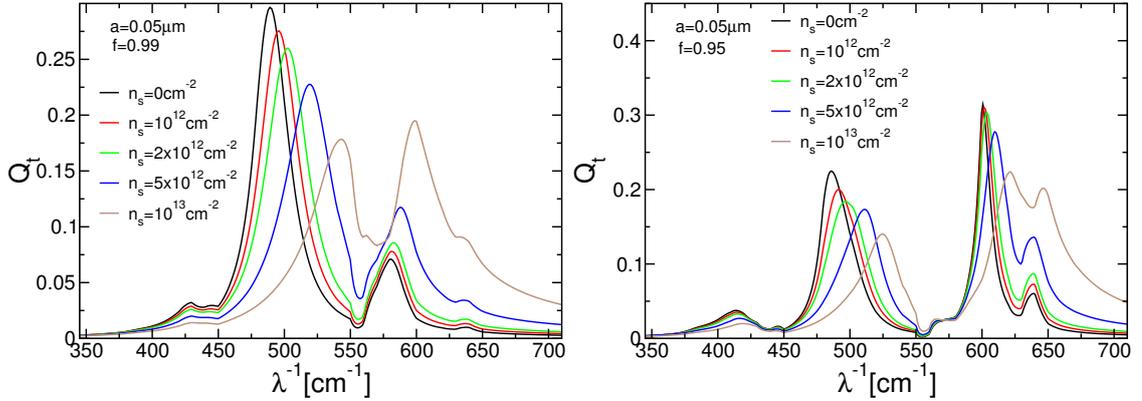


Abbildung 2.11: Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} eines $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens für Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ und Radienverhältnis $f = 0.99$ (links) und $f = 0.95$ (rechts) für verschiedene Oberflächenladungsdichten n_s

weiter betrachtet wird. Auch beim Radienverhältnis $f = 0.95$ (rechts) ist die CaO-Mutterresonanz deutlich zu erkennen. Die Lage der Resonanz ändert sich kaum, weil die anomalen Resonanzen des CaO und Al_2O_3 bei dieser Wellenlänge zusammenfallen, siehe Abschnitt 2.2.3. Die CaO-Mutterresonanz zeigt auch bei $f = 0.95$ eine Blauverschiebung in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte. Diese ist jedoch weniger stark ausgeprägt, als für einen größeren Kernradius und somit größeres Radienverhältnis. Dies liegt an der Volumendichte der zusätzlichen Elektronen, die für kleine Kerne abnimmt, vgl. (2.32) und dadurch die zusätzliche Polarisierbarkeit verringert.

Die Beschichtung neutraler Staubteilchen aus CaO, LiF oder MgO mit einem Al_2O_3 -Mantel bewirkt keine nennenswerte Verschiebung der Mutterresonanzen der Kerne. Werden diese jedoch mit PbS beschichtet, so kommt es zu einer Rotverschiebung der entsprechenden Mutterresonanzen. Bei festem Teilchenradius $a = 0.5 \mu\text{m}$ werden in Abb. 2.12 Materialkombinationen CaO/PbS (links), LiF/PbS (mitte) und MgO/PbS (rechts) für Radienverhältnisse $f = 0.99$ bis $f = 0.7$ untersucht. Die Position des Extinktionseffizienzmaximums ist in Abhängigkeit der Flächenelektronendichte dargestellt. Dabei wurde die Lage des Maximums aus dem exakten Ausdruck Gl. (2.19) (durchgezogene Linie) und aus den Nullstellen der Gl. (2.34) (gestrichelt) bestimmt. Alle Materialkombinationen zeigen für ein neutrales Staubteilchen ($n_s = 0$) eine Rotverschiebung der Resonanzstelle. Sie beträgt im Vergleich zu den entsprechenden anomalen Resonanzen der homogenen Staubteilchen etwas 100 cm^{-1} . Es ist damit möglich durch eine Beschichtung des Kerns

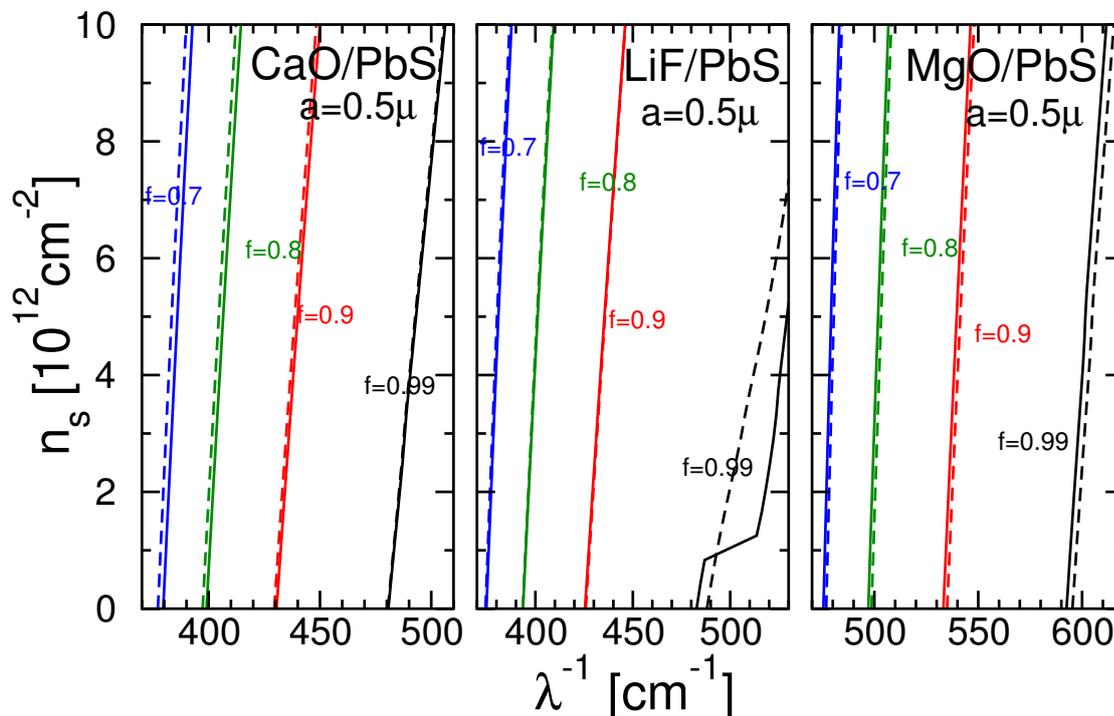


Abbildung 2.12: Position der Kern-Mutterresonanzen in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für Teilchenradius $a = 0.5 \mu\text{m}$ und verschiedene Radienverhältnisse f

die Resonanzstelle zu beeinflussen. Dabei geht jedoch die Blauverschiebung der Mutterresonanzen für kleinere Kernradien zurück. Dies spiegelt sich in den Steigungen der Kurven wieder, die für kleinere Werte von f steiler verlaufen. Im Falle der optischen Ladungsmessung muss daher für den konkreten Fall ein Kompromiss gefunden werden, zwischen dem benötigten Wellenzahlbereich, dem Teilchenradius und der Größenordnung der zu messenden Ladung. Am größten ist die Blauverschiebung bei einem dünnen Mantel, dort ist die entsprechende Volumendichte der zusätzlichen Elektronen am höchsten. Für dieselben Radienverhältnisse ist die Blauverschiebung der untersuchten Materialkombinationen sehr ähnlich. Die auftretenden Unterschiede, vor allem bei LiF für $f = 0.99$, beruhen auf der unterschiedlichen Steigung des jeweiligen Realteils der dielektrischen Funktion in der Nähe der Resonanz, vgl. die Diskussion in Abschnitt 2.1.2.

Die Blauverschiebung der Resonanz aufgrund zusätzlicher Ladung hängt nicht nur vom Radienverhältnis ab, sondern auch vom Radius der Staubteilchen. Im oberen Panel der Abb. 2.13 ist die Position des Extinktionseffizienzmaximums in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für ausgewählte Teilchenradien a dargestellt. Betrachtet werden dabei weiterhin die Materialkombinationen CaO/PbS

(links), LiF/PbS (mitte) und MgO/PbS (rechts). Das Radienverhältnis beträgt $f = 0.99$, bei diesem ist die Volumendichte der zusätzlichen Elektronen und somit die Polarisierbarkeit des Staubteilchens am größten. Die Lage des Extinktionsmaximums wurde zum einen aus dem exakten Ausdruck der Extinktionseffizienz nach Gl. (2.19), zum anderen aus den Nullstellen der Gl. (2.34) ermittelt. Es zeigt sich, dass bei gleicher Oberflächenladungsdichte die Verschiebung der Mutterresonanz des Kerns infolge der zusätzlichen Ladung für submikrometergroße Staubteilchen viel stärker ausgeprägt ist, als für größere Teilchen. Der Grund ist die inverse Abhängigkeit der Volumenladungsdichte vom Teilchenradius, siehe Gl. (2.23). Die dünn beschichteten Staubteilchen weisen eine viel größere Blauverschiebung des Extinktionsmaximums auf, als die homogenen Staubteilchen aus den betrachteten Kernmaterialien. Diese sind im unteren Panel der Abb. 2.13 dargestellt. Die homogenen Staubteilchen aus CaO, LiF und PbS wurden von Heinisch et al. untersucht. Diese Materialien weisen eine negative Elektronenaffinität auf, sodass die zusätzlichen Elektronen durch einen Oberflächenstrom in die Streukoeffizienten und somit in die Extinktionseffizienz Eingang finden [8], siehe Abschnitt [?]. Bei diesen homogenen Staubteilchen ist die Blauverschiebung des Extinktionsmaximums in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte schwach ausgeprägt, sodass eine optische Bestimmung ihrer Oberflächenladung kaum möglich ist. Werden die Materialien jedoch dünn mit PbS beschichtet, so erhöht sich die Blauverschiebung erheblich. Sie ist mit der Verschiebung der anomalen Resonanzen der homogenen PbS-Staubteilchen vergleichbar. Die Beschichtung ermöglicht es also die optische Ladungsmessung auch an mikro- und submikrometergroßen Staubteilchen durchzuführen.

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden die Mutterresonanzen der Kern- und Mantelmaterialien genau untersucht. Die Mutterresonanzen der Mantelmaterialien Al_2O_3 und PbS weisen genauso wie die entsprechenden homogenen Staubteilchen eine Blauverschiebung in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte auf. Die Al_2O_3 -Mutterresonanz erfährt eine Rotverschiebung in Abhängigkeit des Radienverhältnisses, sodass durch Einfügen eines dielektrischen Kerns der untersuchte Wellenzahlbereich kontrolliert werden kann. Die Mutterresonanzen der Kernmaterialien CaO, LiF und MgO zeigen bei hohen Radienverhältnissen eine viel höhere Sensitivität auf zusätzliche Ladungen als die anomalen Resonanzen der entsprechen-

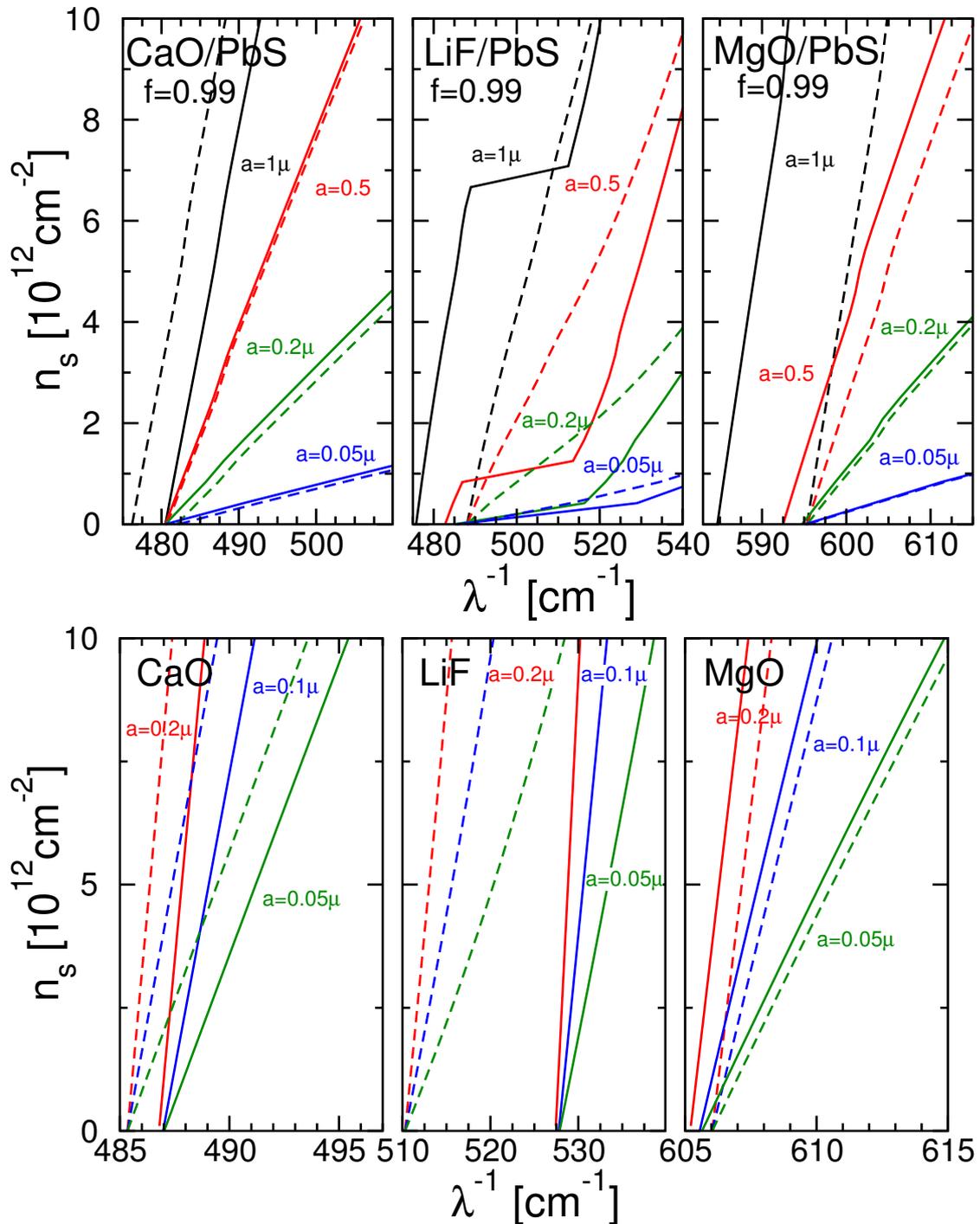


Abbildung 2.13: Oberes Panel: Position der Kern-Mutterresonanzen in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für dielektrische Staubteilchen. Ermittelt nach Gl. (2.19) (durchgezogene Linie) und nach Gl. (2.34) (gestrichelt) Unteres Panel: Position der anomalen Resonanzen in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für dielektrische homogene Staubteilchen für verschiedene Radien a [33].

den homogenen Staubteilchen. Zusätzlich werden mithilfe der Mutterresonanzen des Kerns der optischen Ladungsmessung ein neuer Wellenzahlbereich zwischen $\lambda = 400 \text{ cm}^{-1}$ bis $\lambda = 600 \text{ cm}^{-1}$ zugänglich gemacht. Dies gilt für Staubteilchen mit Radius $a < 0.5 \mu\text{m}$, vgl. Abb. 2.12.

2.2.5 Analyse der Schalenresonanz

Im Abschnitt 2.2.3 wurde die Extinktionseffizienz der neutralen, beschichteten CaO/Al₂O₃-Staubteilchen diskutiert. Im Extinktionsspektrum tritt bei hohen Wellenzahlen $\lambda^{-1} \approx 900 \text{ cm}^{-1}$ eine Schalenresonanz auf, die weder dem Kern- noch dem Mantelmaterial zugeordnet werden kann. Sie entsteht aus dem Zusammenwirken beider dielektrischen Funktionen. Zunächst wird untersucht, welche Materialkombinationen diese Schalenresonanz aufweisen, um danach ihre Sensitivität auf Oberflächenladungen zu analysieren.

Auftreten der Schalenresonanz

Aus den Berechnungen der Extinktionseffizienz zeigt sich, dass die Schalenresonanz bei dielektrischen Staubteilchen mit einem Al₂O₃-Mantel jedoch nicht bei Teilchen mit gleichem Kern und einem PbS-Mantel auftritt. Dies liegt an den jeweiligen Kombination der dielektrischen Funktionen. Um dies weiter zu analysieren, wird eine Bedingung aufgestellt, die die dielektrischen Funktionen für die Ausbildung einer Schalenresonanz erfüllen müssen.

Die Schalenresonanz liegt bei hohen Wellenzahlen ($\lambda^{-1} \approx 900$), bei denen die Imaginärteile der dielektrischen Funktionen des Kerns $\epsilon'_1 \ll 1$ und Mantels $\epsilon'_2 \ll 1$ vernachlässigt werden können. Damit erhält man für die Funktion nach Gl. (2.30), deren Nullstellen zu den Maxima der Extinktionseffizienz korrespondieren

$$g'_{\text{sr}} = (\epsilon'_2 + 2) + 2f^3 \frac{(\epsilon'_2 - 1)(\epsilon'_1 - \epsilon'_2)}{(\epsilon'_1 + 2\epsilon'_2)}, \quad (2.35)$$

wobei $\epsilon_1 = \epsilon'_1 + i\epsilon''_1$ die dielektrische Funktion des Kernmaterials und $\epsilon_2 = \epsilon'_2 + i\epsilon''_2$ die des Mantelmaterials ist. Dies ist dieselbe Näherung, wie sie schon im Abschnitt 2.2.4 für die Mutterresonanzen der Kern- und Mantelmaterialien vorgenommen wurde, vgl. Gl. (2.33) wobei $\alpha' = 0$ gilt. Zur Beschreibung der Schalenresonanz wird jedoch die Nullstelle in einem anderen Wellenzahlbereich ermittelt. Um dies deutlich zu machen, wird in Gl. (2.35) der Index β für Schalenresonanz verwendet. Wenn eine Schalenresonanz auftritt, gibt die Nullstelle der Funktion g'_{sr}

die Position der Resonanz gut wieder. Daher wird die Schalenresonanz vor allem durch die Realteile der dielektrischen Funktion bestimmt. Der exakte Verlauf von g' nach Gl. (2.30) wird mit dieser Näherung jedoch schlecht wiedergegeben. Die auftretende Divergenz an der Stelle $\epsilon'_1 + 2\epsilon'_2 = 0$, wird nicht mehr durch die Imaginärteile der dielektrischen Funktionen gedämpft, vgl. Abb. 2.6. Abhängig vom Radienverhältnis f und der Imaginärteile der dielektrischen Funktionen kann es dazu kommen, dass eine Nullstelle des genäherten Ausdrucks g'_{sr} nicht durch eine Schalenresonanz im Extinktionseffizienzspektrum realisiert wird. Es ist jedoch möglich eine notwendige Bedingung für das Auftreten der Schalenresonanz aufzustellen. Erfüllen die Realteile der dielektrischen Funktionen des Mantels und des Kerns die Gleichung $g'_{\text{sr}} = 0$ für ein beliebiges f , so bedarf es einer weiteren Untersuchung der konkreten Imaginärteile bei der entsprechenden Wellenzahl, um eine Aussage über das tatsächliche Auftreten der Schalenresonanz zu treffen. Wird dagegen $g'_{\text{sr}} = 0$ durch die Realteile der dielektrischen Funktionen nicht erfüllt, so tritt die Schalenresonanz definitiv nicht auf.

In der Abbildung 2.14 sind für ausgewählte Radienverhältnisse f die Paare $(\epsilon'_1 (\hat{=} \epsilon'_{\text{Kern}}), \epsilon'_2 (\hat{=} \epsilon'_{\text{Mantel}}))$ aufgetragen (durchgezogene Linie), die die Bedingung $g'_{\text{sr}} = 0$ erfüllen. Zusätzlich zeigt die Abbildung die Realteile der dielektrischen Funktionen der beschichteten Staubteilchen. Die Position der Schalenresonanz liegt bei Wellenzahlen $\lambda^{-1} > \lambda_0^{-1}$, wobei λ_0^{-1} die höchste Wellenzahl ist, bei der eine anomalen Resonanzen des jeweiligen beschichteten Staubteilchens auftritt. Daher wurden die Realteile der dielektrischen Funktionen nur für diesen Wellenzahlbereich dargestellt. An den Schnittpunkten der Nullstellen von g'_{sr} (durchgezogene Linie) mit den tatsächlichen Realteilen der dielektrischen Funktionen der beschichteten Staubteilchen ist die notwendige Bedingung $g'_{\text{sr}} = 0$ erfüllt. Bei der Wellenzahl, bei der die jeweilige Kombination $(\epsilon'_1, \epsilon'_2)$ eintritt, kann es zu einer Schalenresonanz kommen.

Die mit PbS beschichteten Staubteilchen erfüllen nicht die notwendige Bedingungen $g'_{\text{sr}} = 0$, daher weisen sie keine Schalenresonanz auf. Aus der Abbildung 2.14 ist zu erkennen, dass die Schalenresonanz bei Wellenzahlen auftritt bei denen zum einen für den Realteil der dielektrischen Funktion des Mantels $\epsilon'_{\text{Mantel}} < 0$ mit $|\epsilon'_{\text{Mantel}}| < 1$ gilt, zum anderen der Realteil der dielektrischen Funktion des Kerns positiv ist.

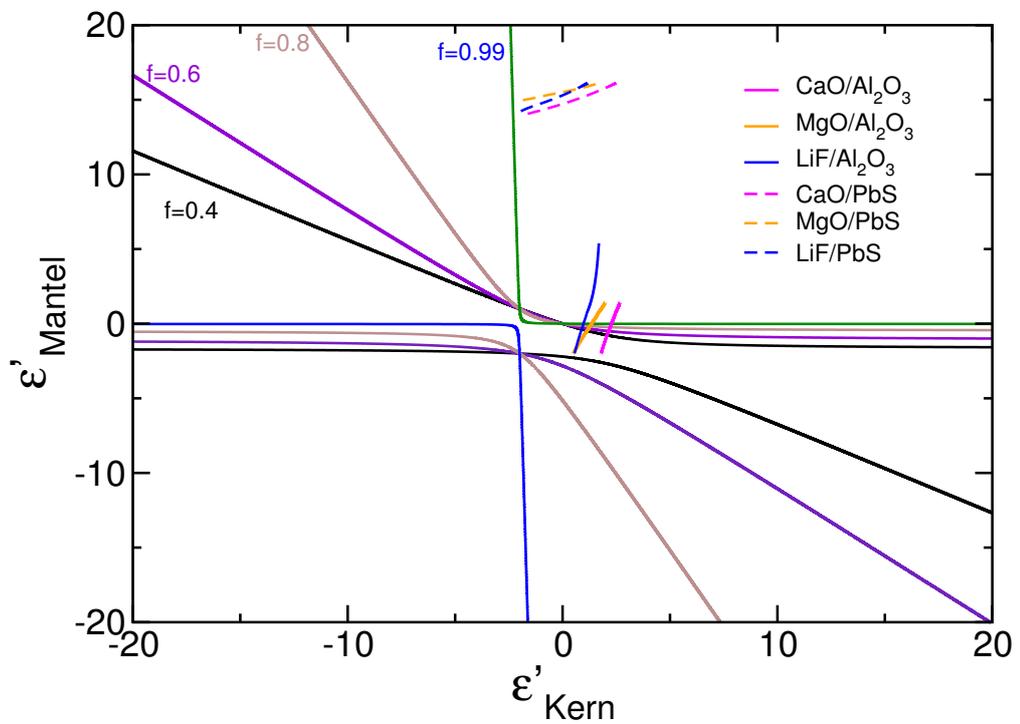


Abbildung 2.14: Kombinationen der Realteile ϵ' der dielektrischen Funktionen des Kern- und Mantelmaterials bei denen eine Schalenresonanz auftritt (durchgezogen) und die Realeile der dielektrischen Funktionen beschichteter, dielektrischer Staubteilchen

Blauverschiebung der Schalenresonanz

Im nächsten Schritt wird nun die Verschiebung der Schalenresonanz in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s untersucht. Um diese Verschiebung ebenfalls durch eine Näherung anzugeben, muss in der Funktion g'_{sr} der Einfluss der zusätzlichen Polarisierbarkeit $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ berücksichtigt werden. Dies führt analog zu Gl.(2.33) auf

$$g_{sr}^{\alpha} = (\epsilon'_2 + \alpha' + 2) + 2f^3 \frac{(\epsilon'_2 + \alpha' - 1)(\epsilon'_1 - \epsilon'_2 - \alpha')}{(\epsilon'_1 + 2\epsilon'_2 + 2\alpha')} \quad (2.36)$$

In Abbildung 2.15 wird die Extinktionseffizienz eines $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens für Radien $a = 0.2 \mu\text{m}$ (links) und $a = 0.05 \mu\text{m}$ (rechts) und für Radienverhältnisse $f = 0.95$ (oben) und $f = 0.9$ (unten) betrachtet. Der Extinktionsverlauf ist für Oberflächenladungsdichten im Bereich $n_s = 10^{11} \text{cm}^{-1}$ bis $n_s = 10^{12} \text{cm}^{-1}$ dargestellt. Sie sind damit eine um Größenordnung kleiner als die Oberflächenladungsdichten, die für die Diskussion der Mutterresonanzen der Kern- und Mantelmaterialien im vorherigen Abschnitt 2.2.4 betrachtet wurden. Die Schalenresonanz

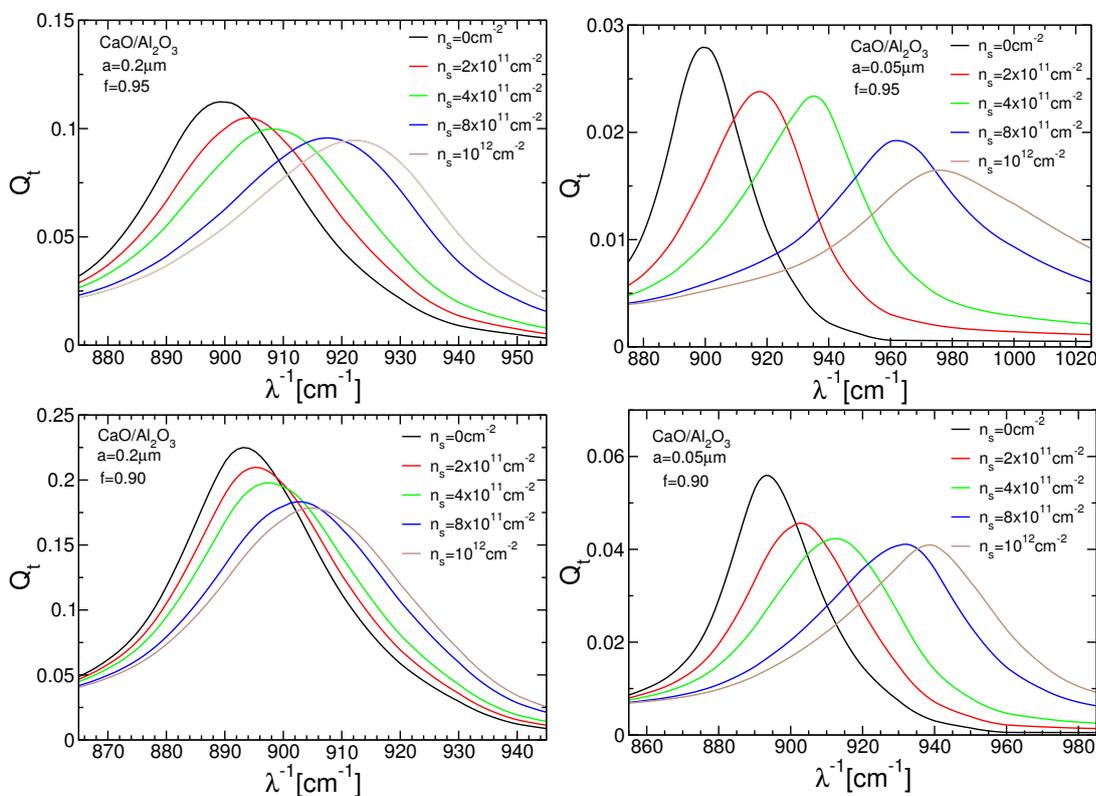


Abbildung 2.15: Schalenresonanz im Extinktionseffizienzspektrum $Q_t(\lambda^{-1})$ eines $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens für verschiedene Radien a und Radienverhältnisse f

liegt beim Radienverhältnis $f = 0.95$ für beiden Teilchenradien bei $\lambda^{-1} \approx 900 \text{ cm}^{-1}$ (oberes Panel). Für $f = 0.9$ verschiebt sich ihre Position leicht zu kleineren Wellenzahlen (unteres Panel). Die Schalenresonanz weist eine sehr hohe Blauverschiebung in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte auf. Sie ist deutlich größer als die Blauverschiebung der anomalen Resonanzen der homogenen Staubteilchen oder die der Mutterresonanzen der beschichteten Teilchen. Da die Schalenresonanz bei sehr hohen Wellenlängen auftritt, verlaufen dort die Realteile der dielektrischen Funktionen des Kerns und des Mantels sehr flach. Dies führt ebenfalls zu einer geringen Steigung der Funktion g'_{sr} in der Nähe der entsprechenden Nullstelle, sodass eine zusätzliche Leitfähigkeit eine große Verschiebung der Nullstelle bewirkt, siehe die Diskussion in Abschnitt 2.1.2. Wie schon bei den anomalen Resonanzen nimmt die Sensitivität der Resonanzposition auf die Oberflächenladungsdichte mit größerem Radius der Staubteilchen und mit größerem Radienverhältnis ab.

Inwieweit sich die Blauverschiebung der Schalenresonanz für abnehmende Radienverhältnisse verschlechtert, ist in Abb. 2.16 für ein $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchen mit dem Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ dargestellt. Die Position der Schalenresonanz ist in

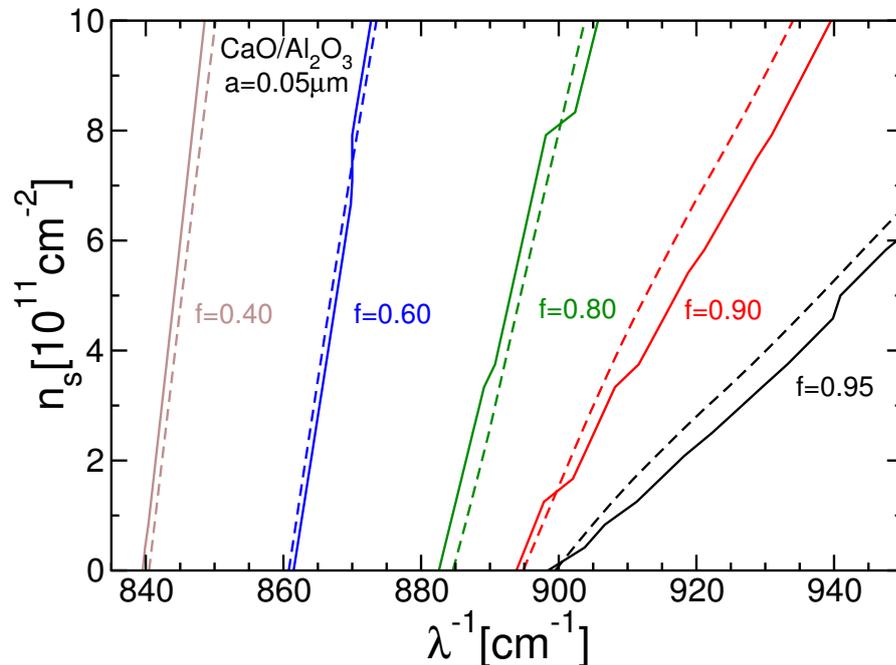


Abbildung 2.16: Position der Schalenresonanz im Extinktionseffizienzspektrum eines $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchens mit Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ in Abhängigkeit zusätzlicher Oberflächenladungsdichte n_s für ausgewählte Radienverhältnisse f .

Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte der Größenordnung $n_s = 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ bis $n_s = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ für Radienverhältnisse $f = 0.95$ bis $f = 0.4$ aufgetragen. Das

Extinktionsmaximum im betrachteten Wellenzahlbereich wurde mittels des exakten Ausdrucks für die Extinktionseffizienz, siehe Gl. (2.19), (durchgezogene Linie) und durch die Bestimmung der Nullstellen der Funktion g_{sr}^{α} (gestrichelt), siehe Gl. (2.36), ermittelt. Die vorgenommene Näherung beschreibt sehr gut die exakte Position der Schalenresonanz. Betrachtet man zunächst das neutrale Staubteilchen ($n_s = 0$), so kann mittels der Variation des Radienverhältnisses eine Rotverschiebung der Position der Schalenresonanz um $\Delta\lambda^{-1} \approx 50 \text{ cm}^{-1}$ erreicht werden. Für kleinere Radienverhältnisse verschlechtert sich jedoch die Blauverschiebung in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte. Dies kann aus der abnehmenden Steigung der Geraden für kleinere Werte von f abgelesen werden. Für das dargestellte Staubteilchen mit dem Radius $a = 0.05 \mu\text{m}$ ist ein Radienverhältnis zwischen $f = 0.95$ bis $f = 0.8$ zur Messung von Oberflächenladungsdichten in dem betrachteten Größenbereich geeignet.

Inwieweit sich die hohe Blauverschiebung auch auf andere Teilchenradien überträgt, wird in Abb. 2.17 untersucht. Dort ist die Position des Extinktionseffizienzmaximums in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für ausgewählte Radien der beschichteten Staubteilchen mit den Kernmaterialien CaO (links), LiF (mitte), MgO (rechts) und einem Al_2O_3 -Mantel dargestellt. Das Radienverhältnis beträgt $f = 0.95$. Zum einen wird die Lage der Schalenresonanz durch Bestimmung der Nullstellen von g_{sr}^{α} nach Gl. (2.36) (gestrichelt), zum anderen aus dem exakten Ausdruck für die Extinktionseffizienz nach Gl. (2.19) ermittelt. Die Bestimmung der Blauverschiebung der Schalenresonanz aus den Nullstellen von g'_{sr} stimmt gut mit der exakten Lage der Resonanz überein. Aufgrund der benötigten Interpolation der dielektrischen Funktion des Al_2O_3 zeigt der Kurvenverlauf der Blauverschiebung, welcher aus der Gl. (2.19) bestimmt wurde, (durchgezogen) kleine Sprungstellen. Bei allen drei Kernmaterialien ist eine sehr starke Verschiebung der Schalenresonanz in Abhängigkeit der zusätzlichen Ladung zu beobachten. Ihre Ausprägung unterscheidet sich kaum zwischen den verschiedenen Kernmaterialien. Die Blauverschiebung der Schalenresonanz ist für das betrachtete Radienverhältnis $f = 0.95$ für alle Teilchenradien im Vergleich zu den bisher untersuchten Blauverschiebungen der anomalen Resonanzen am größten.

Die hohe Sensitivität der Schalenresonanz auf zusätzliche Ladung wird in Abb. 2.18 an zwei Extremen illustriert. Es wird zum einen untersucht, wie groß der Radius des Staubteilchens sein kann, bei dem eine für eine optische Ladungsmessung geeignete Blauverschiebung der Schalenresonanz in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte auftritt. Dazu wird ein mikrometergroßes $\text{MgO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchen

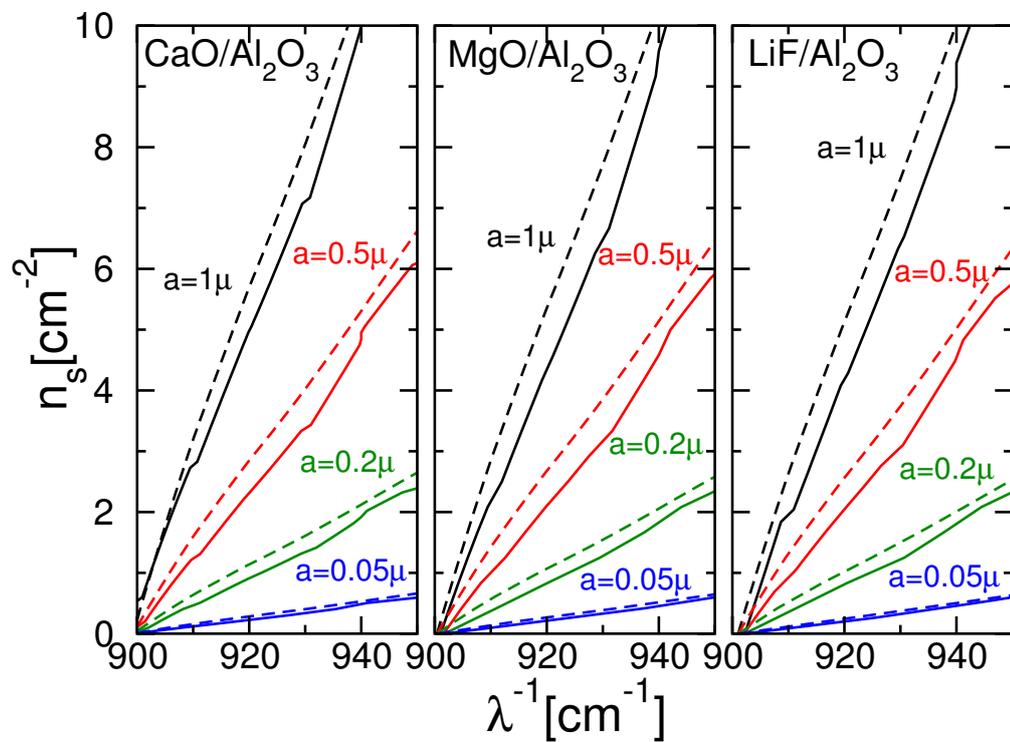


Abbildung 2.17: Position der Schalenresonanz im Extinktionseffizienzspektrum in Abhängigkeit zusätzlicher Oberflächenelektronendichten n_s für verschiedene Radien a der Staubteilchen mit einem CaO- (links), MgO- (mitte), und LiF-Kern (rechts) und einem Al₂O₃-Mantel bei einem Radienverhältnis $f = 0.95$.

mit dem Radienverhältnis $f = 0.95$ verwendet (links). Die dargestellten Radien

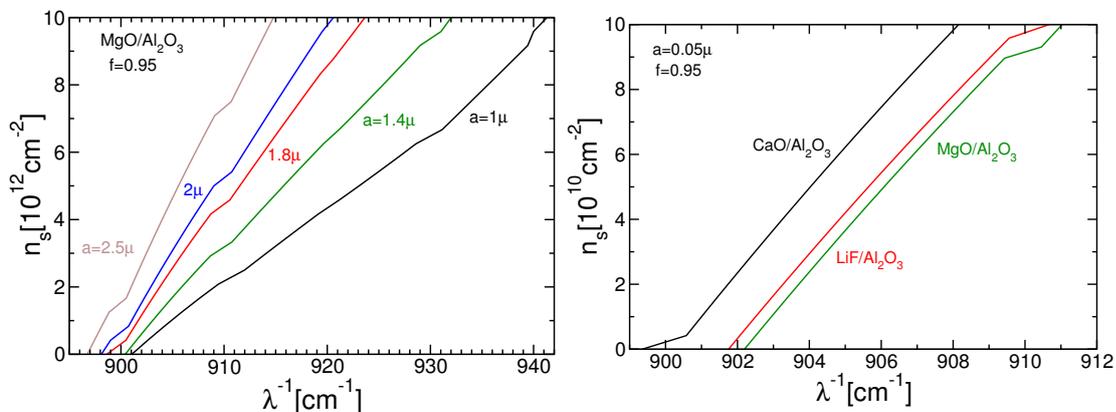


Abbildung 2.18: Position der Schalenresonanz im Extinktionseffizienzspektrum für mikrometergroße Staubteilchen mit dem Radius a (links) und für Staubteilchen mit $a = 0.05 \mu\text{m}$ (rechts) für das Radienverhältnis $f = 0.95$ in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s in verschiedenen Größenbereichen.

des Staubteilchens liegen zwischen $a = 1 \mu\text{m}$ bis $a = 2.5 \mu\text{m}$. Die Blauverschiebung nimmt wie erwartet mit der Größe der Staubteilchen ab. Sie ist jedoch sogar für den Radius $a = 2.5 \mu\text{m}$ in der selben Größenordnung wie die Blauverschiebung der anomalen Resonanz des homogenen PbS-Staubteilchens mit dem Radius $a = 1 \mu\text{m}$. Die Schalenresonanz erweist sich als eine viel versprechende Signatur in der Extinktionseffizienz dielektrischer Staubteilchen mit einem Al_2O_3 -Mantel, die es ermöglicht durch optische Messung ihrer Blauverschiebung die Oberflächenladungsdichte mikrometergroßer Staubteilchen zu bestimmen.

Zum anderen stellt sich die Frage, wie klein die Oberflächenladungsdichte werden kann, bei der es weiterhin zu einer Blauverschiebung der Schalenresonanz kommt, die durch eine optische Messung bestimmt werden kann. Da die Blauverschiebung für hohe Radienverhältnisse und kleine Teilchen am größten ist, beträgt der Radius des untersuchten Staubteilchens $a = 0.05 \mu\text{m}$ bei einem Radienverhältnis von $f = 0.95$, vgl. Abb. 2.18 (rechts). Es ist die Position der Schalenresonanz in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für Staubteilchen mit einem dielektrischen Kern aus CaO, MgO und LiF und einem Al_2O_3 -Mantel aufgetragen. Die Oberflächenladungsdichte wird im Bereich $n_s = 10^9 \text{ cm}^{-2}$ bis $n_s = 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ variiert und beträgt damit zwei Größenordnungen weniger als die vorher verwendeten Dichten bei der Untersuchung der anomalen Resonanzen. Die Blauverschiebung ist für alle Materialkombinationen sehr ähnlich und beträgt für $n_s = 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ gegenüber dem neutralen Staubteilchen $\Delta\lambda = 10 \text{ cm}^{-1}$. Damit könnte die Blau-

verschiebung der Schalenresonanz dazu benutzt werden auch geringe Oberflächenelektronendichten zumessen.

Zusammenfassung

Im Spektrum der Extinktionseffizienz beschichteter, dielektrischer Staubteilchen mit einem Al_2O_3 -Mantel ist eine Schalenresonanz aufgetreten, die sich nicht dem Kern- oder Mantelmaterial zuschreiben lässt. Sie entsteht aus der Kombination der dielektrischen Funktionen der Materialien. Zum einen erschließt die Schalenresonanz bei entsprechend gewähltem Radienverhältnis einen neuen Wellenzahlbereich zwischen $\lambda^{-1} = 850 \text{ cm}^{-1}$ und $\lambda^{-1} = 900 \text{ cm}^{-1}$, in dem eine optische Ladungsmessung möglich ist. Zum anderen liegt ihre Blauverschiebung aufgrund zusätzlicher Ladung sowohl für kleine Oberflächenelektronendichten, als auch für mikrometergroße Staubteilchen in einem für eine optische Ladungsmessung geeignetem Bereich.

2.3 Geladene Hohlkugel

Nachdem beschichtete Staubteilchen mit einem dielektrischen Kern und einem Al_2O_3 - und PbS-Mantel untersucht wurden, werden nun analog dazu Al_2O_3 - und PbS-Hohlkugeln betrachtet.

Das Extinktionseffizienzspektrum der PbS-Hohlkugel ähnelt stark dem des homogenen PbS-Staubteilchens. Es treten keine neuen Resonanzeffekte auf und die anomale Resonanz des PbS bleibt erhalten. Sie wird analog zum Abschnitt 2.2.3 als PbS-Mutterresonanz bezeichnet. Die Abbildung 2.19 zeigt die Extinktionseffizienz Q_t einer PbS-Hohlkugel für ein Teilchenradius $a = 0.2 \mu\text{m}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} für die Radienverhältnisse $f = 0.9$ (links) und $f = 0.6$ (rechts). Die exemplarisch verwendeten Oberflächenladungsdichten variieren von $n_s = 10^{11} \text{ cm}^{-1}$ bis $n_s = 10^{12} \text{ cm}^{-1}$. Die dargestellten Maxima in der Extinktionseffizienz entsprechen den PbS-Mutterresonanzen. Die neutrale Hohlkugel zeigt für hohe Radienverhältnisse eine Verschiebung der PbS-Mutterresonanz zu kleineren Wellenzahlen. Für $f = 0.9$ (links) beträgt sie $\Delta\lambda^{-1} \approx 40 \text{ cm}^{-1}$ gegenüber der Position der anomalen Resonanzen des homogenen PbS-Staubteilchens. Für kleinere Radienverhältnisse nimmt diese Rotverschiebung ab und ist für $f = 0.6$ vernachlässigbar (rechts). Die PbS-Mutterresonanz weist bei der Hohlkugel ebenso wie die anomale PbS-Resonanz eine Blauverschiebung in Abhängigkeit der zusätzlichen

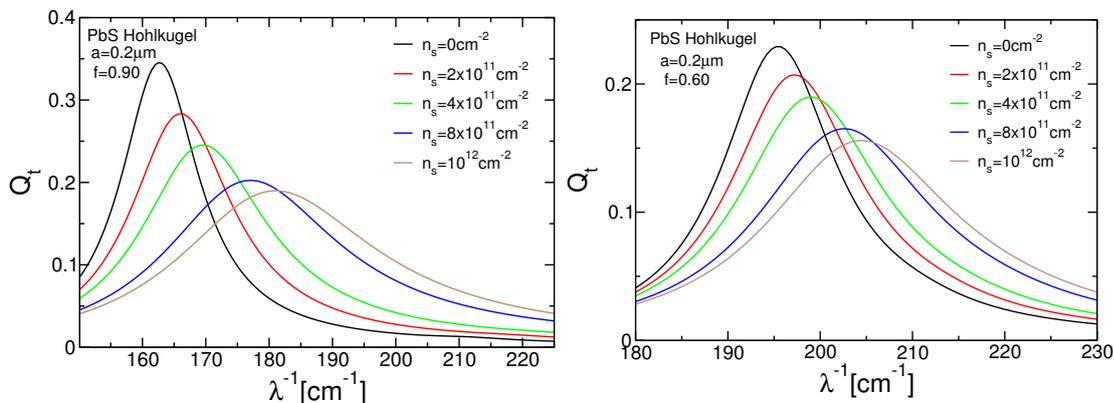


Abbildung 2.19: Extinktionseffizienz Q_t einer PbS-Hohlkugel mit Radius $a = 0.2 \mu\text{m}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} für verschiedene Radienverhältnisse f und ausgewählte Oberflächenladungsdichte n_s .

Ladung auf. Diese wird mit abnehmendem Radienverhältnis geringer, da mit kleinerem Radius die Volumendichte der zusätzlichen Ladungsträger kleiner wird, vgl. Gl. (2.2.4).

Eine detaillierte Untersuchung der Rot- und Blauverschiebung der PbS-Mutterresonanz in Abhängigkeit des Radienverhältnisses zeigt Abb. 2.20. Dort ist für einen festen Teilchenradius $a = 0.2 \mu\text{m}$ die Position der PbS-Mutterresonanz in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für verschiedene Radienverhältnisse f dargestellt (links). Die PbS-Mutterresonanz der neutralen PbS-Hohlkugel wird für $f = 0.90$

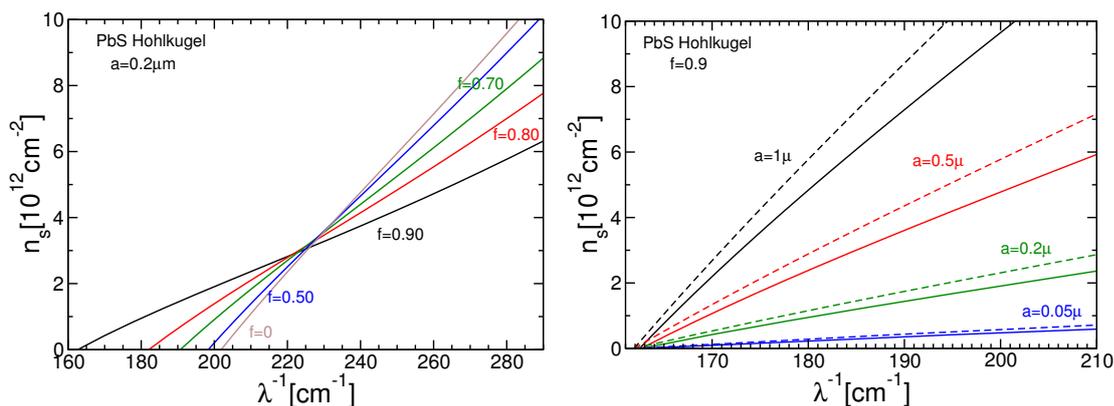


Abbildung 2.20: Position der PbS-Mutterresonanz in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für ausgewählte Radienverhältnisse f bei festem Teilchenradius $a = 0.2 \mu\text{m}$ (links) und für ausgewählte Teilchenradien a bei festem Radienverhältnis $f = 0.9$ (rechts).

um $\Delta\lambda^{-1} = 40 \text{ cm}^{-1}$ gegenüber der Position der anomalen PbS-Resonanz eines homogenen Staubteilchens ($f = 0$) zu kleineren Wellenzahlen verschoben und be-

wegt sich dann für kleinere Radienverhältnisse zu höheren Wellenzahlen, bis es für $f \approx 0.5$ die Position der anormalen PbS-Resonanz erreicht, wie schon der Abb. 2.19 zu entnehmen ist. Es ist zu beobachten, dass es zu einer Blauverschiebung der Resonanzstelle aufgrund der Oberflächenladungsdichte kommt. Die Verschiebung nimmt mit größerem Hohlraum erheblich zu und übersteigt die des homogenen PbS-Staubteilchens, vgl. die unterschiedlichen Steigungen der Geraden für $f = 0.9$ und $f = 0$. Die Sensitivität lässt sich durch einen mit Vakuum gefüllten Hohlraum erheblich steigern. Der Größe des Radienverhältnisses sind aufgrund der erforderlichen Stabilität der Kugel Grenzen gesetzt.

Für die Untersuchung der Blauverschiebung für unterschiedliche Teilchenradien wird daher das Radienverhältnis $f = 0.9$ gewählt, vgl. Abb. 2.20 (rechts). Dort ist die Position der PbS-Mutterresonanz im Extinktionseffizienzspektrum in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für verschiedene Teilchenradien a bei einem festen Radienverhältnis $f = 0.9$ dargestellt. Das Extinktionsmaximum wurde sowohl mittels des exakten Ausdrucks nach Gl. (2.19) ermittelt als auch durch Bestimmung der Nullstellen der Funktion g' , siehe Gl. (2.33). Die Blauverschiebung der PbS-Hohlkugel ist für alle Teilchenradien im Vergleich zum homogenen PbS-Staubteilchen größer. Sie liegt im Größenbereich der Blauverschiebung der Schalenresonanz dielektrischer, beschichteter Teilchen, sodass durch ihre optische Bestimmung die Oberflächenladungsdichte mikrometergroßer PbS-Hohlkugeln ermittelt werden kann. Ebenso können die Oberflächenladungsdichten von submikrometergroßen PbS-Hohlkugeln im Größenbereich $n_s \approx 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ optisch gemessen werden.

Im Extinktionseffizienzspektrum der Al_2O_3 -Hohlkugel tritt bei hohen Wellenzahlen ($\lambda^{-1} = 900 \text{ cm}^{-1}$) eine Schalenresonanz auf, welche schon für Al_2O_3 -Staubteilchen mit dielektrischem Kern beschrieben wurde, vgl. Abschnitt 2.2.5. Abbildung 2.21 zeigt die Position der Schalenresonanz in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s für ausgewählte Teilchengrößen bei einem Radienverhältnis von $f = 0.95$. Auch die Schalenresonanz der Al_2O_3 -Hohlkugel weist abhängig von der zusätzlichen Oberflächenladungsdichte eine Blauverschiebung auf. Ihre Sensitivität ist genauso stark ausgeprägt, wie die der Schalenresonanz dielektrischer Staubteilchen mit einem Al_2O_3 -Mantel. So weist die Schalenresonanz für ein Teilchenradius $a = 1 \mu\text{m}$ bei einer Oberflächenladungsdichte von $n_s = 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ eine Verschiebung ihrer Position um $\Delta\lambda^{-1} \approx 40 \text{ cm}^{-1}$ gegenüber $n_s = 0$ auf.

Hohlkugeln aus PbS und Al_2O_3 eignen sich sehr gut für Messungen der zusätzlichen Teilchenladung. Für der PbS-Hohlkugel ist es die PbS-Mutterresonanz und

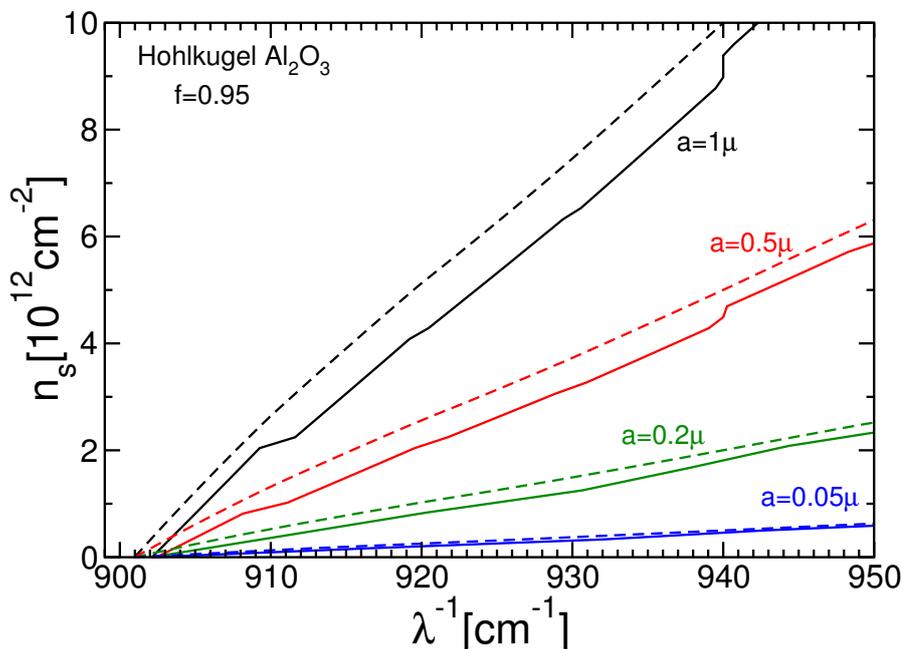


Abbildung 2.21: Position der Schalenresonanz einer Al_2O_3 -Hohlkugel in Abhängigkeit der Oberflächenladung n_s für verschiedene Teilchenradius a für festes Radienverhältnis $f = 0.95$.

für die Al_2O_3 -Hohlkugel die Schalenresonanz, deren Position eine hohe Sensitivität auf zusätzliche Ladungen aufweisen. Diese liegt im Bereich der Schalenresonanz der dielektrischen Staubteilchen, siehe Abschnitt 2.2.5, sodass die dort aufgestellten Überlegungen zur Ladungsmessung von mikrometergroßen Teilchen als auch zur Messung geringer Oberflächenladungsdichten der submikrometergroßen Teilchen auch hier gelten.

2.4 Metallische Kerne

Die optische Ladungsmessung von geladenen Staubteilchen im Plasma kann dazu verwendet werden, die lokalen Plasmaparameter der Randschicht zu bestimmen [8],[9]. Dazu werden Staubteilchen als minimal invasive elektrische Sonde verwendet. Sie werden in die Randschicht injiziert, um aus der gleichzeitigen Messung ihrer Oberflächenladungsdichte und des Kräftegleichgewichts zwischen elektrischer Kraft und Gravitationskraft die lokale Elektronendichte- und temperatur in der Randschicht zu ermitteln. Könnten hierbei Staubteilchen mit metallischen Kernen verwendet werden, so würde dies eine höhenaufgelöste Ausmessung der Randschicht ermöglichen. Durch unterschiedliche Radienverhältnisse kann das Gewicht

der Staubteilchen und somit die in der Randschicht erreichte Gleichgewichtsposition variiert werden. Die Voraussetzung ist, dass die Oberflächenladungsdichte von Staubteilchen mit einem metallischem Kern und einem PbS- oder Al₂O₃-Mantel einer optischen Messung zugänglich ist.

2.4.1 Kernmaterialien

Für die Metallkerne werden die Materialien Gold (Au), Silber (Ag) und Aluminium (Al) verwendet. Ihre dielektrischen Funktionen werden innerhalb des Drudemodells beschrieben [34]

$$\epsilon = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\omega_\tau} \quad \text{mit} \quad (2.37)$$

$$\epsilon' = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_\tau^2} \quad \text{und} \quad \epsilon'' = \epsilon_\infty + \frac{\omega_p^2\omega_\tau}{\omega^3 + \omega\omega_\tau^2}, \quad (2.38)$$

dabei ist ω_τ die Dämpfungsfrequenz und ω_p die Plasmafrequenz. Für den Grenzwert der dielektrischen Funktion für $\omega \rightarrow \infty$ gilt $\epsilon_\infty = 1$. Die entsprechenden Parameter für die verwendeten Metalle sind in Tabelle 2.4 aufgeführt. Die di-

	Al	Au	Ag
$\omega_\tau/\text{cm}^{-1}$	$6.47 \cdot 10^2$	$2.16 \cdot 10^2$	$1.45 \cdot 10^2$
ω_p/cm^{-1}	$1.19 \cdot 10^5$	$7.25 \cdot 10^4$	$7.25 \cdot 10^4$

Tabelle 2.4: Fitparameter der dielektrischen Funktionen, beschrieben im Drudemodell nach Gl. (2.37), für Al, Au und Ag [34].

elektrischen Funktionen nach Gl. (2.38) und die Brechungsindices, die sich nach Gl. (2.2) aus den dielektrischen Funktionen ergeben, sind im oberen Panel der Abbildung 2.22 dargestellt. Die optischen Konstanten der verwendeten Metalle nehmen im Infrarotbereich sehr hohe Werte an, der Verlauf der Funktionen ist monoton fallend. Die unterscheiden sich Metalle nur in der Größenordnung ihrer dielektrischen Funktionen.

Zum Vergleich ist im unteren Panel der Abb. 2.22 die Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} und des Teilchenradius a für Ag, das die niedrigste dielektrischen Funktionen aufweist, und Al, mit sehr hohen Werten in der dielektrischen Funktion, dargestellt. Die Extinktionseffizienz zeigt eine Interferenzstruktur auf, siehe Abschnitt 2.1.1. Das Verhalten der Extinktion beider Materialien weist eine große Ähnlichkeit auf, sodass im weiteren Verlauf nur Staubteilchen mit einem Ag-Kern im Detail analysiert werden.

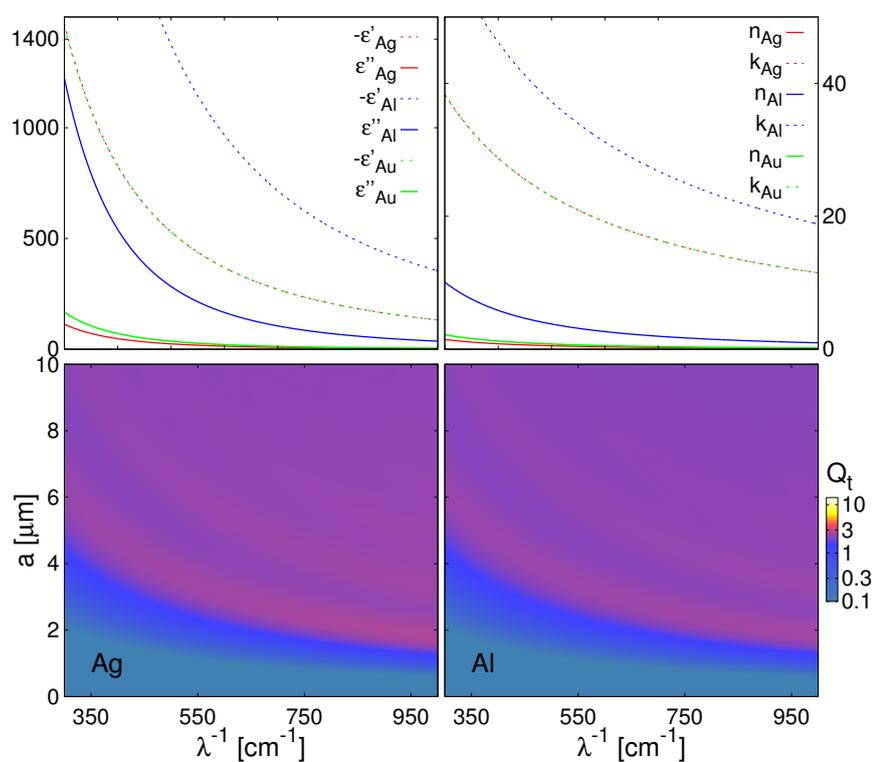


Abbildung 2.22: Oberes Panel: dielektrische Funktionen $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ (links) und die Brechungsindices $m = n + ik$ (rechts) von Ag, Al und Au. Unteres Panel: Konturplot der Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit vom Teilchenradius und der Wellenzahl λ^{-1} .

2.4.2 Diskussion der Extinktionseffizienz

Für die Betrachtung der Extinktionseffizienz Q_t beschichteter Staubteilchen mit metallischen Kernen, kann die Funktion g' , siehe Gl. (2.30), deren Nullstellen zu den Maximumpositionen von Q_t korrespondieren, weiter vereinfacht werden. Wegen der hohen dielektrischen Funktionen der verwendeten Metalle gilt $\epsilon'_{\text{Mantel}} \gg \epsilon'_{\text{Kern}}$ und $\epsilon''_{\text{Mantel}} \gg \epsilon''_{\text{Kern}}$, sodass man

$$g'_m = \epsilon'_2 + 2 + 2f^3(\epsilon'_2 - 1) = \epsilon'_2(1 + 2f^3) + 2(1 - f^3), \quad (2.39)$$

$$g''_m = \epsilon''_2 + 2f^3\epsilon''_2 = \epsilon''_2(1 + 2f^3) \quad (2.40)$$

erhält, wobei der Index 1 auf die dielektrische Funktion des Kerns und der Index 2 auf die des Mantels verweist und f das Verhältnis zwischen Kern- zu Teilchenradius ist. Diese Näherung gibt sehr gut den exakten Verlauf von g' wieder. Der Gl. (2.39) ist zu entnehmen, dass die Position des Extinktionsmaximums, die der Nullstelle von g'_m entspricht, unabhängig vom Material des Kerns geworden ist. Das Maximum befindet sich bei der Wellenzahl für die

$$\epsilon'_2 = \frac{2(f^3 - 1)}{1 + 2f^3} \quad (2.41)$$

gilt. Der Verlauf von g'_m wird für ein konstantes Radienverhältnis durch ϵ'_2 bestimmt. Ähnliches gilt für die Funktion g''_m , sie setzt sich aus ϵ''_2 und einem konstanten Faktor zusammensetzt. Es wird daher zu keinen neuen Signaturen in der Extinktionseffizienz kommen. Für kleine f geht der Einfluss der Beschichtung zurück und es gilt

$$g'_m \approx \epsilon'_2 + 2, \quad (2.42)$$

$$g''_m \approx \epsilon''_2. \quad (2.43)$$

Die Bedingung für die Resonanzstelle ist dann $\epsilon'_2 + 2 = 0$ und ist somit mit der Resonanzstelle des homogenen Staubteilchens aus dem Mantelmaterial identisch.

Mithilfe der Funktionen g'_m und g''_m wird nun die Extinktionseffizienz beschichteter Staubteilchen mit einem metallischen Kern und einem PbS- oder Al_2O_3 -Mantel in Abhängigkeit des Radienverhältnisses diskutiert. Beispielfhaft werden dabei Ag/ Al_2O_3 -Staubteilchen betrachtet. Im ersten Panel der Abb. 2.23 ist der Konturplot der Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit des Radius des Staubteilchens a und der Wellenzahl λ^{-1} dargestellt. Das Radienverhältnis nimmt dabei

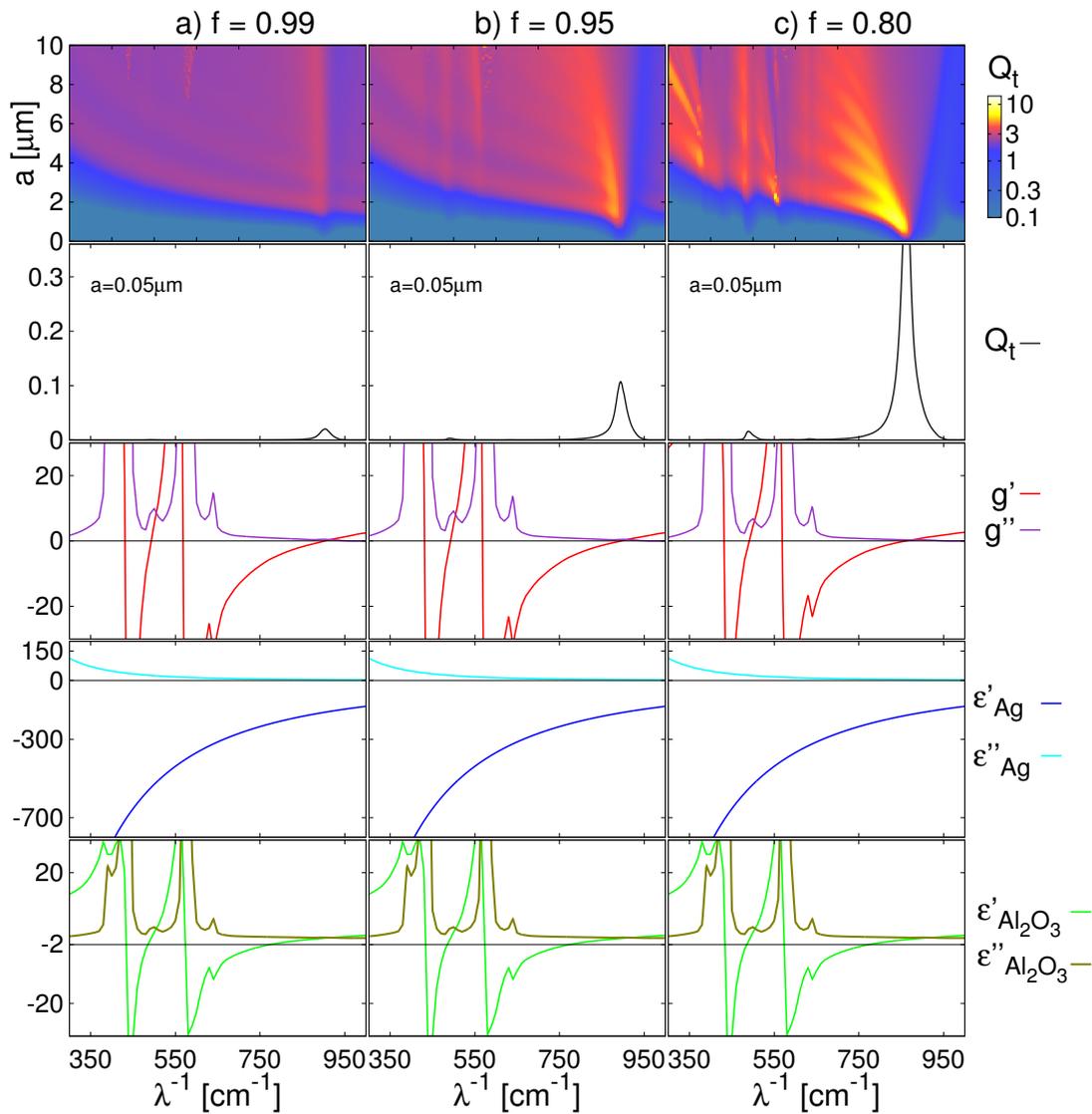


Abbildung 2.23: Erstes Panel: Konturplot der Extinktionseffizienz in Abhängigkeit des Radius a und der Wellenzahl λ^{-1} . Zweites Panel: Extinktionseffizienzspektrum für $a = 0.05 \mu\text{m}$. Drittes Panel: g'_m nach Gl. (2.39) und g''_m nach Gl. (2.40). Viertes Panel: dielektrische Funktion $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ von Ag. Fünftes Panel: dielektrische Funktion von Al_2O_3 .

von linker zur rechten Spalte ab. Im zweiten Panel ist das Spektrum der Extinktionseffizienz für den Teilchenradius $a = 0.05 \mu\text{m}$ zu sehen. Die Funktionen g'_m und g''_m nach Gln. (2.39) und (2.40) sind im dritten Panel aufgetragen. Das vierte Panel zeigt die dielektrische Funktion $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ für das Kernmaterial und das fünfte die entsprechenden Größen für das Mantelmaterial.

Der Konturplot der Extinktionseffizienz (oberes Panel) ähnelt für $f = 0.99$ stark dem des homogenen Ag-Teilchens, vgl. Abb. 2.22 (unten links). Bei $\lambda^{-1} \approx 900 \text{ cm}^{-1}$ tritt jedoch eine neue Signatur auf. Betrachtet man die Darstellung der Extinktionseffizienz für die Radienverhältnisse $f = 0.95$ und $f = 0.8$ im ersten Panel, so kann die Signatur mit der Al_2O_3 -Mantelresonanz identifiziert werden. Sie ist für große Radienverhältnisse zu hohen Wellenzahlen verschoben und wird sich für Staubteilchen mit kleinerem Kern der Position der anomalen Al_2O_3 -Resonanz $\lambda^{-1} \approx 770 \text{ cm}^{-1}$ annähern. Die Al_2O_3 -Mantelresonanz äußert sich im Extinktionseffizienzspektrum für $f = 0.99$ (zweites Panel) durch ein lokales Maximum geringer Amplitude. Das Maximum dieser Resonanz korrespondiert zu der Nullstelle von g'_m (drittes Panel). Betrachtet man den Verlauf der Funktionen g'_m und g''_m , so ähneln die beiden Kurven den dielektrischen Funktionen des Al_2O_3 , vgl. fünftes Panel. Unterschiede ergeben sich durch die zusätzlichen Faktoren in den Gln. (2.39) und (2.40), die die Beschichtung berücksichtigen. Dies bewirkt eine Verschiebung der Nullstelle von g'_m zu höheren Wellenzahlen. Auch die Funktion g''_m wird durch einen Faktor, der die Beschichtung berücksichtigt, modifiziert. Dies bewirkt für $f = 0.99$ eine starke Dämpfung an der Resonanzstelle, die jedoch für kleine Radienverhältnisse abnimmt. Die weiteren Veränderungen der Extinktionseffizienz in Abhängigkeit des Radienverhältnisses ergeben sich dadurch, dass der Einfluss der Beschichtung zurückgeht und die Signaturen des Al_2O_3 -Mantels sich immer deutlich ausprägen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Extinktionseffizienz keine Effekte aufgrund der Beschichtung zeigt, die nicht auf eine Besonderheit der dielektrischen Funktion des Mantels zurückgeführt werden können. Die Al_2O_3 -Mutterresonanz tritt schon bei einem Radienverhältnis $f = 0.99$ im Extinktionsspektrum auf. Ihre Position ist zu höheren Wellenzahlen verschoben und die Amplitude ist noch stark gedämpft. Mit kleinerem Kernanteil nähert sich die Al_2O_3 -Mutterresonanz der Position der anomalen Resonanz des homogenen Al_2O_3 -Staubteilchens an und erreicht dieselbe Amplitude. Die Näherung von g'_m zeigt, dass die die Position des Extinktionsmaximums unabhängig vom Kernmaterial wird, wenn die dielektrische Funktion des Kerns viel größer als die des Mantels ist. Die Lage der Mutterreso-

nanz des Mantels wird in diesem Fall nur vom Radienverhältnis beeinflusst, vgl. Gl. (2.41).

2.4.3 Mutterresonanzen des Mantelmaterials

Da gezeigt wurde, dass bei Staubteilchen mit metallischem Kern die Resonanzstelle unabhängig vom Kernmaterial ist, werden im Weiteren nur die Ergebnisse für Staubteilchen mit einem Silberkern ausgeführt. Sie können jedoch auf die anderen betrachteten Metalle übertragen werden.

In Abb. 2.24 ist die Extinktionseffizienz Q_t für Ag/Al₂O₃-Staubteilchen mit Radius $a = 0.2 \mu\text{m}$ (links) und $a = 0.05 \mu\text{m}$ (rechts) für die Radienverhältnisse $f = 0.99$ (oben) und $f = 0.9$ (unten) dargestellt. Das Maximum in der Extinktionseffizienz entspricht der Al₂O₃-Mutterresonanz. Es wird gezeigt, inwieweit sich die Lage dieser Resonanz in Abhängigkeit der Oberflächenelektronendichte im Bereich $n_s = 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ bis $n_s = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ ändert. Aufgrund der zusätzlichen Ladung kommt es zu einer Verschiebung der Al₂O₃-Mutterresonanz zu höheren Wellenlängen. Diese Blauverschiebung nimmt für größere Radien der Staubteilchen ab, wie im Vergleich zwischen $a = 0.2 \mu\text{m}$ (oberes Panel links) und $a = 0.05 \mu\text{m}$ (oberes Panel rechts) für dasselbe Radienverhältnis $f = 0.99$ zu sehen ist. Ebenso nimmt die Verschiebung für kleine Radienverhältnisse ab, vgl. dazu das Extinktionsspektrum eines Staubteilchens mit $a = 0.2 \mu\text{m}$ für $f = 0.99$ (oberes Panel links) und für $f = 0.95$ (unteres Panel rechts).

Die Blauverschiebung der Mutterresonanzen der Mantelmaterialien kann näherungsweise angegeben werden, indem in der Funktion g'_m nach Gl. (2.39) die Polarisierbarkeit $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ berücksichtigt wird. Die Blauverschiebung, die durch zusätzliche Ladungsträger verursacht wird, entspricht dann den Nullstellen von

$$g_m^\alpha = \epsilon'_2 + \alpha' + 2 + 2f^3(\epsilon'_2 - 1). \quad (2.44)$$

In Abb. 2.25 wird die Blauverschiebung der Al₂O₃-Mutterresonanzen der Ag/Al₂O₃-Staubteilchen (links) und die Blauverschiebung der PbS-Mutterresonanzen der Ag/PbS-Staubteilchen (rechts) für unterschiedliche Radien bei einem festen Radienverhältnis $f = 0.95$ untersucht. Es ist die Maximumsposition des Extinktionseffizienz in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s gezeigt. Die Resonanzstelle wurde zum einen aus dem exakten Ausdruck für die Extinktionseffizienz, siehe Gl. (2.19) und zum anderen durch die Bestimmung der Nullstellen der Funktion g_m^α nach Gl. (2.44). Die Näherung gibt die tatsächliche Resonanzposition gut

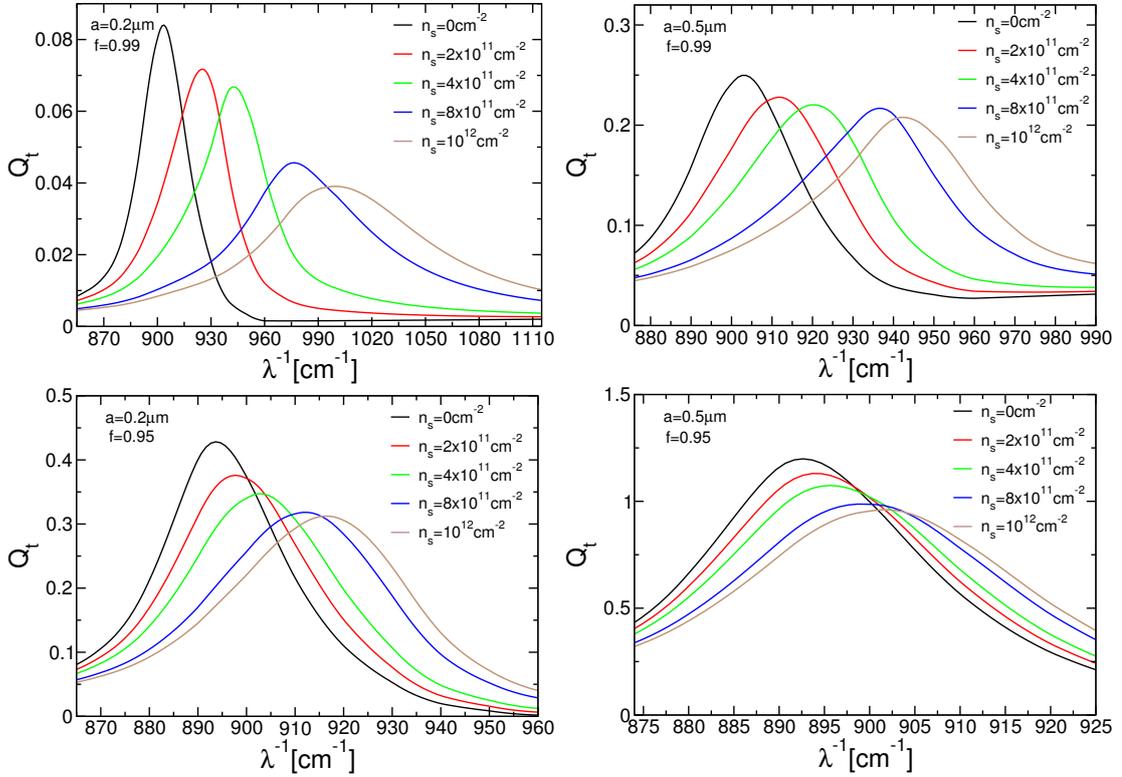


Abbildung 2.24: Extinktionseffizienz Q_t in Abhängigkeit der Wellenzahl λ^{-1} für $\text{Ag}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchen mit Radien $a = 0.2 \mu\text{m}$ (linke Spalte), $a = 0.5 \mu\text{m}$ (rechte Spalte) und Radienverhältnissen $f = 0.99$ (oberes Panel) und $f = 0.95$ (unteres Panel)

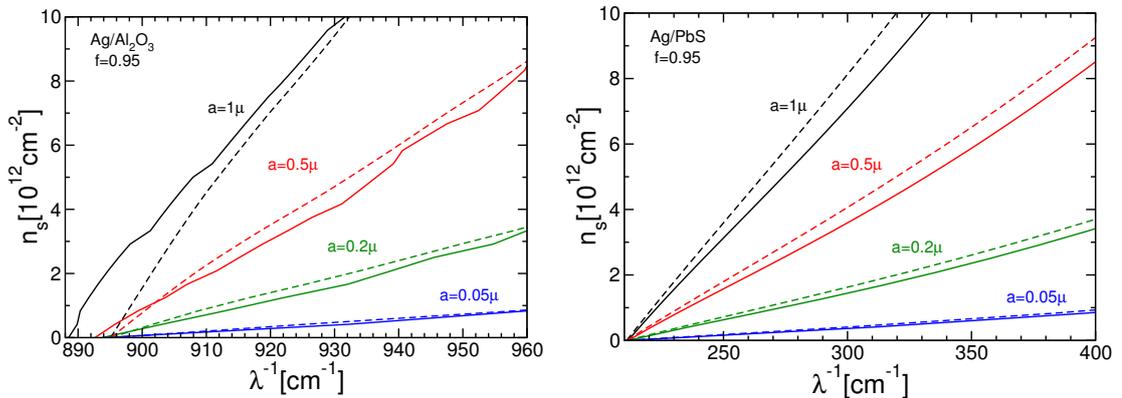


Abbildung 2.25: Position der Extinktionseffizienz von $\text{Ag}/\text{Al}_2\text{O}_3$ -Staubteilchen (links) und Ag/PbS -Staubteilchen (rechts) für ein Radienverhältnis $f = 0.95$ in Abhängigkeit der Oberflächenladungsdichte n_s bestimmt nach Gl. (2.19) (durchgezogene Linie) und nach Gl. (2.44) (gestrichelt)

wieder. Das Ag/Al₂O₃-Staubteilchen weist eine Blauverschiebung in Abhängigkeit der Oberflächenladung auf, die im Bereich der Schalenresonanz der dielektrischen Staubteilchen liegt. Es ist damit möglich ihre Oberflächenladungsdichte optisch zu messen. Sowohl für Staubteilchenradien im Sub- als auch Mikrometerbereich liegt die Blauverschiebung in einem messbaren Bereich. Eine weitaus größere Blauverschiebung zeigt das Ag/PbS-Staubteilchen. Es erlaubt die optische Ladungsmessung von mehrere mikrometergroßen Staubteilchen oder auch die Messung geringer Oberflächenladungsdichten von submikrometergroßen Teilchen.

Insgesamt ist die Oberflächenladung von Staubteilchen aus einem metallischen Kern und einem Al₂O₃- oder PbS-Mantel einer optischen Messung zugänglich, sodass diese Staubteilchen als minimal invasive elektrische Sonden in der Plasmaschicht verwendet werden können. Die Staubteilchen mit einem PbS-Mantel weisen die größte in dieser Arbeit gefundene Blauverschiebung auf. Da solche Teilchen im submikrometerbereich hergesellt wurden [35], könnte ihre optische Ladungsmessung in einem Experiment realisiert werden.

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, die optische Ladungsmessung geladener Staubteilchen im Plasma zu optimieren. Dieses Verfahren wurde von Heinisch et al. [8], [9] vorgeschlagen. Im Gegensatz zur konventionellen Ladungsmessung werden dabei keine Plasmaparameter, die nur mit einer hohen Fehlertoleranz messbar sind, benötigt. Bei der neuen Methode wird infrarotes Licht ins staubige Plasma eingestrahlt. Aus der Messung des Extinktionseffizienzspektrums lässt sich dann die Oberflächenladungsdichte der Staubteilchen bestimmen. Das Material der Teilchen muss dabei eine anomale Resonanz aufweisen, deren Position sich abhängig von der Ladungsdichte verschiebt. Haben die Materialien eine positive Elektronenaffinität, so werden die zusätzlichen Elektronen durch eine homogene Volumenelektronendichte beschrieben. Dazu proportional ist die entsprechende Volumenleitfähigkeit, die eine zusätzliche Polarisierbarkeit des Materials bewirkt. Diese verändert die dielektrische Funktion und geht damit in die Berechnung der Extinktionseffizienz ein. Es besteht ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Volumendichte der zusätzlichen Elektronen und der hervorgerufenen Blauverschiebung der Resonanz. Die Analyse von Heinisch et al. zeigte, dass dadurch vor allem die Ladung submikrometergroßer Staubteilchen aus Al_2O_3 und PbS optisch bestimmt werden kann. Für Staubteilchen mit Radien im Mikrometerbereich, wie sie in Experimenten oft verwendet werden, zeigt nur die anomale Resonanz des PbS eine geeignete Blauverschiebung.

In dieser Arbeit wurde untersucht, inwieweit die Oberflächenladungsdichten beschichteter Staubteilchen einer optischen Messung besser zugänglich sind. Die Materialien werden so gewählt, dass aufgrund ihrer Elektronenaffinitäten die zusätzlichen Elektronen im Schalenbereich eingeschlossen werden. Dies führt im Vergleich zu homogenen Staubteilchen zu einer Erhöhung der Volumendichte der zusätzlichen Ladungsträger.

Die Extinktionseffizienz der Staubteilchen mit dielektrischem Kern aus CaO, PbS oder LiF und einem Mantel aus Al_2O_3 und PbS zeigt in Abhängigkeit des

Radienverhältnisses verschiedene Resonanzeffekte. Bei kleinem Kernanteil dominieren die Mutterresonanzen der Mantelmaterialien. Für neutrale Staubteilchen mit einem Al_2O_3 -Mantel kommt es zu einer Rotverschiebung der Resonanzen in Abhängigkeit des Radienverhältnisses. Die Blauverschiebung aufgrund der zusätzlichen Ladung geht dabei zwar zurück, für submikrometergroße Teilchen ist sie jedoch weiterhin für eine optische Messung sehr gut geeignet. Der Wellenzahlbereich in dem die Verschiebung der Resonanzen stattfindet, kann somit durch Verwendung beschichteter Staubteilchen unterschiedlicher Radienverhältnisse eingestellt werden.

Die Mutterresonanzen der Kernmaterialien dominieren das Extinktionsverhalten bei großen Radienverhältnissen. Mittels einer Beschichtung mit PbS wird die ladungsinduzierte Blauverschiebung dieser Resonanzen im Vergleich zu entsprechenden homogenen Staubteilchen stark erhöht. Sie liegt damit im Bereich der Blauverschiebung der PbS-Resonanzen. Für beschichtete Staubteilchen mit einem CaO-, MgO- oder LiF-Kern und einem PbS-Mantel ist die optische Ladungsmessung bei großen Radienverhältnissen sowohl für Teilchenradien im sub- als auch im Mikrometerbereich möglich.

Durch die Beschichtung entsteht für Staubteilchen mit einem Al_2O_3 -Mantel eine Schalenresonanz, die nicht auf eine besondere Eigenschaft der jeweiligen dielektrischen Funktionen zurückgeführt werden kann. Sie wird durch das Zusammenwirken der dielektrischen Funktionen der Materialien hervorgerufen. Die Schalenresonanz liegt bei viel höheren Wellenlängen $\lambda^{-1} \approx 900 \text{ cm}^{-1}$ als die bisher untersuchten anomalen Resonanzen. Ihre Blauverschiebung aufgrund der zusätzlichen Ladungen ist für hohe Radienverhältnisse viel größer als die der anomalen Resonanzen der homogenen Staubteilchen. Die Schalenresonanz ermöglicht damit eine optische Ladungsmessung an Staubteilchen mit Radien im Mikrometerbereich. Zusätzlich können aufgrund der hohen Blauverschiebung Ladungsdichten von submikrometergroßen Staubteilchen gemessen werden, die um zwei Größenordnungen kleiner sind als die messbaren Oberflächenladungsdichten homogener Staubteilchen. Die Schalenresonanz tritt ebenfalls bei einer Al_2O_3 -Hohlkugel auf. Ihre Resonanzstelle und die Blauverschiebung sind in der gleichen Größenordnung wie bei der Schalenresonanz der dielektrischen, beschichteten Staubteilchen. Durch die Verwendung einer PbS-Hohlkugel wird die Blauverschiebung der PbS-Mutterresonanz stark erhöht. Auch ihre Blauverschiebung ist mit der der Schalenresonanz vergleichbar.

Wie Heinisch et al. [8], [9] vorschlagen, kann die optische Messung der Oberflächenladungsdichten von Staubteilchen dazu genutzt werden, Plasmaparameter der

Randschicht zu ermitteln. Dazu werden Staubteilchen als minimal invasive elektrische Sonde in die Randschicht des Plasmas injiziert. Aus der gleichzeitigen Messung des Kräftegleichgewichts zwischen der Gewichtskraft und der elektrischen Kraft, hervorgerufen durch das Randschichtpotential, und der Ladungsdichte mittels des optischen Verfahrens kann die Elektronentemperatur und -dichte ermittelt werden. Das Gewicht der Staubteilchen kann durch unterschiedlich große Metallkerne in einem Al_2O_3 - oder PbS-Teilchen variiert werden. Dies führt zu unterschiedlichen Gleichgewichtspositionen im Randschichtpotential, sodass die Randschichtparameter in Abhängigkeit der Höhe gemessen werden können. Die Blauverschiebung der Staubteilchen mit einem Metallkern und einem PbS-Mantel ist für hohe Radienverhältnisse besonders groß. Sie übersteigt die der Schalenresonanz. Dies ermöglicht die optische Messung von moderaten Oberflächenladungsdichten von mikrometergroßen Staubteilchen oder auch die Messung viel kleinerer Oberflächenladungsdichten bei submikrometergroßer Teilchen.

Im Modell zur Berechnung der Leitfähigkeit geht die sphärische Geometrie des Staubteilchens nicht ein. Dies ist für die hier betrachteten Teilchenradien gerechtfertigt, da sie größer als die De-Broglie-Wellenlänge der zusätzlichen Elektronen sind. Außerdem wurde nur die Elektron-Phonon-Streuung berücksichtigt. Diese ist bei der betrachteten Temperatur von 300 K der dominierende Streuprozess. Die Streuung an Fehlstellen des sphärischen Teilchens und die Elektron-Elektron-Streuung wurden nicht betrachtet. Dies könnte in einer genaueren Analyse der Volumenleitfähigkeit der zusätzlichen Ladungsträger nachgeholt werden, wenn die experimentellen Ergebnisse dies erfordern. Für das Experiment ist die Abschätzung der benötigten Lichtintensität und der Effekt der Aufheizung des Staubteilchens von Bedeutung. Wird zur optischen Ladungsmessung ein Dauerstrichlaser verwendet, so kann es durch Aufheizung des Staubteilchens zur Abdampfung der zusätzlichen Elektronen kommen. Dieser Effekt könnte durch den Einsatz eines PulsLasers minimiert werden

Die Resultate dieser Arbeit zeigen, dass eine optische Messung der Teilchenladung nicht unrealistisch ist.

Literaturverzeichnis

- [1] O. ISHIHARA, *J. Phys. D: Appl. Phys* **40**, R121 (2007).
- [2] A. MELZER, S. KÄDING, D. BLOCK, and A. PIEL, *Photonik International* **2**, 56 (2008).
- [3] D. A. MENDIS, *Plasma Sources Sci. Technol.* **11**, A219 (2002).
- [4] J. BERNDT, E. KOVAČEVIĆ, V. SELENIN, I. STEFANOVIĆ, and J. WINTER, *Plasma Sources Sci. Technol* **15**, 18 (2006).
- [5] S. A. KHRAPAK, S. V. RATYNSKAIA, A. V. ZOBNIN, A. D. USACHEV, V. V. YAROSHENKO, M. H. THOMA, M. KRETSCHMER, H. HOEFNER, G. E. MORFILL, O. F. PETROV, and V. E. FORTOV, *Phys. Rev. E* **72**, 016406 (2005).
- [6] E. B. TOMME, D. A. LAW, B. M. ANNARATONE, and J. E. ALLEN, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2518 (2000).
- [7] J. CARSTENSEN, H. JUNG, F. GREINER, and A. PIEL, *Phys. Plasmas* **18**, 033701 (2011).
- [8] R. L. HEINISCH, F. X. BRONOLD, and H. FEHSKE, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 243903 (2012).
- [9] R. L. HEINISCH, F. X. BRONOLD, and H. FEHSKE, *arXiv:1306.1328* .
- [10] G. MIE, *Ann. Phys. (Leipzig)* **25**, 377 (1908).
- [11] F. GREINER, J. CARSTENSEN, N. KÖHLER, I. PILCH, H. KETELSEN, S. KNIST, and A. PIEL, *Plasma Sources Sci. Technol.* **21**, 065005 (2012).
- [12] M. I. TRIBELSKY and B. S. LUK'YANCHUK, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 263902 (2006).

-
- [13] P. MULVANEY, J. PÉREZ-JUSTE, M. GIERSIG, L. M. LIZ-MARZÁN, and C. PECHARROMÁN, *Plasmonics* **1**, 61 (2006).
- [14] C. F. BOHREN and D. R. HUFFMAN, *Absorption and Scattering of Light by small particles*, Wiley, 1983.
- [15] J. A. STRATTON, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, 1941.
- [16] C. F. BOHREN and A. J. HUNT, *Can. J. Phys.* **55**, 1930 (1977).
- [17] R. L. HEINISCH, F. X. BRONOLD, and H. FEHSKE, *Phys. Rev. B* **85**, 075323 (2012).
- [18] W. GÖTZE and P. WÖLFLE, *Phys. Rev. B* **6**, 1226 (1972).
- [19] G. D. MAHAN, *Many-particle physics*, Plenum, 1990, p. 703-708.
- [20] M. BORN and K. HUANG, *Dynamical Theory of Crystal Lattices*, Oxford University Press, 1988.
- [21] R. GEICK, *Phys. Lett.* **10**, 51 (1964).
- [22] M. SCHUBERT, T. E. TIWALD, and C. M. HERZINGER, *Phys. Rev. B* **61**, 8187 (2000).
- [23] E. D. PALIK, *Handbook of Optical Constants of Solids II*, Academic, 1997.
- [24] H. C. VAN DER HULST, *Light scattering by small particles*, Wiley, 1957.
- [25] M. I. TRIBELSKY, *Europhys. Lett.* **94**, 14004 (2011).
- [26] B. S. LUK'YANCHUK, M. I. TRIBELSKY, V. TERNOVSKY, Z. B. WANG, M. H. HONG, L. P. SHI, and T. C. CHONG, *J. Opt. A* **9**, S294 (2007).
- [27] A. K. WALTON, T. S. MOSS, and B. ELLIS, *Proc. Phys. Soc.* **79**, 1065 (1962).
- [28] A. GOCALIŃSKA, M. SABA, F. QUOCHI, M. MARCEDDU, K. SZENDREI, J. GAO, M. A. LOI, M. YAREMA, R. SEYRKAMMER, W. HEISS, A. MURA, and G. BONGIOVANNI, *J. of Comp. Phys.* **1**, 1149 (2010).
- [29] T. V. PEREVALOV, A. V. SHAPOSHNIKOV, V. A. GRITSENKO, H. WONG, J. H. HAN, and C. W. KIM, *JETP Letters* **85**, 165 (2007).

- [30] E. BERSCH, S. RANGAN, R. A. BARTYNSKI, E. GARFUNKEL, and E. VESCOVO, *Phys. Rev. B* **78**, 085114 (2008).
- [31] J. R. JASPERSE, A. KAHAN, J. N. PLENDL, and S. S. MITRA, *Phys. Rev.* **146**, 526 (1966).
- [32] A. M. HOFMEISTER, E. KEPPEL, and A. K. SPECK, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **345**, 16 (2003).
- [33] NACH PERSÖNLICHER MITTEILUNG RAFAEL HEINISCH.
- [34] M. A. ORDAL, L. L. LONG, R. J. BELL, S. E. BELL, R. R. BELL, R. W. ALEXANDER, and C. A. WARD, *Appl. Opt.* **22**, 1099 (1983).
- [35] L. ZHANG, H. JING, G. BOISVERT, J. Z. HE, , and H. WANG, *ACS Nano* **6**, 3514 (2012).

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn PD Dr. Franz X. Bronold für die unermüdliche Unterstützung. Weiterhin möchte ich Rafael L. Heinisch danken, der mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand.

Außerdem bedanke ich mich herzlich bei meinen Kollegen, Freunden und Familie.