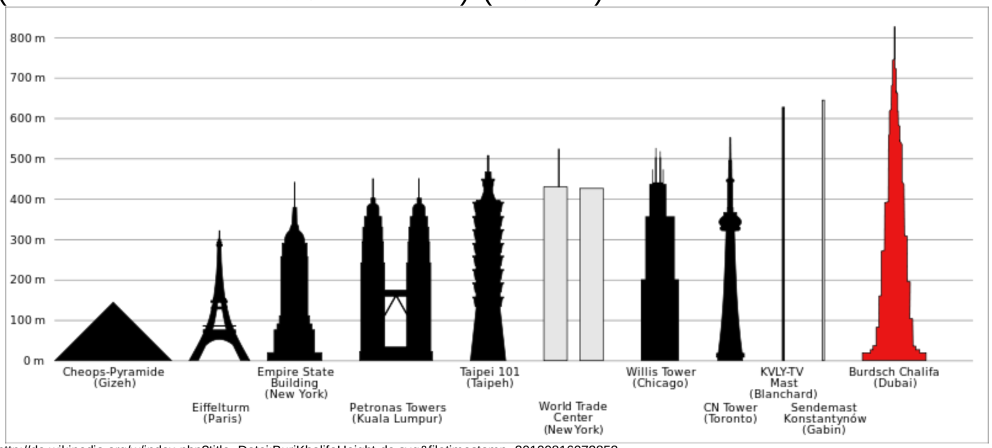
Physik 2019/2020

Blatt 9

56) Ein Astronaut fällt in Richtung Weltraum. Bestimmen Sie die Beschleunigung, die der Astronaut bei einem Abstand von 1.911×10^4 km von der Erdoberfläche erlebt! (Hinweis: Erdradius 6.371×10^3 km) (0.613 m/s^2)

57) Bestimmen Sie die durch die Gravitation verursachte Anziehung zwischen zwei 100 kg schweren Kugeln. Der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kugeln beträgt 1 m. (6.67×10^{-7} N)

58) Um wie viel Prozent ändert sich Ihre Gewichtskraft, wenn Sie zum Dach des höchsten Gebäudes der Erde steigen (Burj Khalifa in Dubai, 828 m)? (Hinweis: Erdradius 6.371×10^3 km) (99.97 %)



http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:BurjKhalifaHeight-de.svg&filetimestamp=20100816072853

59) Die mittlere Entfernung zwischen Erde und Sonne ist 149.6×10^6 km. Bestimmen Sie den Abstand zwischen Sonne und Venus. Die jeweiligen Umlaufperioden sind bei der Erde 365.256 Tage, und bei der Venus 224,701 Tage (Hinweis: die Einheit „Tag" bezieht sich auf Tage auf der Erde). (108.2×10^6 km)

60) Bestimmen Sie die Masse der Sonne. Nutzen Sie dazu die Umlaufdauer der Erde (3.156×10^7 s), und ihren Abstand von der Sonne (1.496×10^{11} m). (1.99×10^{30} kg)

61) Der erste funktionstüchtige geostationäre Satellit war Syncom II (Synchronous Orbit Communications Satellite), der im Juli 1963 begann in den Weltraum geschossen wurde. Ein geostationärer Satellit ist ein Satellit der sich von der Erdeoberfläche aus gesehen nicht bewegt, d.h. die Umlaufzeit beträgt 1 Tag.
(a) Bestimmen Sie die Höhe des Satelliten oberhalb der Erdoberfläche, bitte auch in Vielfachen des Erdradius (3.59×10^4 km).
(b) Bestimmen Sie die Umlaufgeschwindigkeit des Satelliten! (11074 km/h)

62) Bestimmen Sie die Arbeit, die notwendig ist, einen Satelliten von einer kreisförmigen Umlaufbahn (Radius $R_i = 2\ R_{Erde}$) mit einem größeren Radius ($R_f = 3\ R_{Erde}$) zu bringen! (Hinweis: die Radien sind alle in Bezug auf den Erdmittelpunkt gegeben). Diskutieren Sie, ob, und wie sich potentielle und kinetische Energie ändern! (5.2×10^9 J) Wieviel l Benzin sind dafür notwendig, wenn der Brennwert des Benzins 37 MJ/l sind?

63) **Bonusaufgabe Taylorreihe**. Die Idee einer Taylor-Reihe ist die einfache Formel

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots. \qquad (1)$$

Meistens werden wir Terme nur bis zur zweiten Ordnung beibehalten, und daher reduziert sich der Taylorreihen-Algorithmus auf die Frage: Welche drei Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 sollten wir verwenden, um die Funktion $f(x)$ am besten zu approximieren? Betrachten wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit den Fall, wenn wir am Verhalten der Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x = 0$ interessiert sind. Aber wir kennen die Funktion $f(x)$ bereits. Alles, was wir tun müssen, ist, ihren Wert bei $x = 0$ zu finden, um den ersten Koeffizienten a_0 zu finden. Als nächstes leiten wir Gleichung (1) auf beiden Seiten nach x ab. Wir erhalten jetzt die Gleichung

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots. \qquad (2)$$

Wenn wir jetzt wieder $x = 0$ setzen, bleibt $a_1 = f'(0)$ übrig. Wir können dasselbe Spiel weiterspielen und diesmal die zweite Ableitung bestimmen. Das Ergebnis ist

$$f''(x) = 2a_2 + \cdots. \qquad (3)$$

was zu $a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$ führt. Dieselbe grundlegende Analyse kann beliebig oft durchgeführt werden, wenn man an Termen höherer Ordnung interessiert ist. Meistens werden wir mit folgendem Ausdruck zufrieden sein

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \cdots. \qquad (4)$$

Das Symbol ≈ beschreibt die Tatsache, dass in der Nachbarschaft des Punktes x die linke und rechte Seite der Gleichung *ungefähr* gleich sind. Das Fazit dieser kleinen Analyse ist, dass, wenn wir einen einfachen quadratischen Ersatz für die uns interessierende Funktion finden möchten, wir nur den Wert der Funktion und ihrer ersten beiden Ableitungen an dem Punkt kennen müssen, um den wir entwickeln. Zum Beispiel ist die Taylorreihe der Funktion $\cos(x)$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots. \qquad (5)$$

Zeichnen Sie die Funktion $\cos(x)$, und außerdem die Taylorreihe bis zur (a) nullten, (b) zweiten und (c) vierten Ordnung, d.h. berechnen Sie die Taylorreihe bis zu (a) dem x^0-Summanden, (b) bis zu dem x^2-Summanden und (c) bis zu dem x^4 Summanden. Nun betrachten Sie die Abweichung der Taylor-Entwicklung von der tatsächlichen Funktion $\cos(x)$! Zeigen Sie, dass für $x < 0.925$ (entspricht etwa 53°) der relative Fehler bei der Entwicklung von $\cos(x)$ bis zur zweiten Ordnung kleiner als 5 % ist! Zeigen Sie weiterhin, dass bei Entwicklungen bis zur vierten Ordnung der relative Fehler für $x < 1.38$ (entspricht 79°) kleiner als 5 % ist.