

UNIVERSITÄT GREIFSWALD

Wissen lockt. Seit 1456



EXPERIMENTELLE PHYSIK 3 QUANTENPHYSIK UND RELATIVITÄT

LEHRAMT FÜR GYMNASIEN

Michael Himpel
Universität Greifswald
<https://physik.uni-greifswald.de/lehramt-exphy/>
himpel@physik.uni-greifswald.de

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung	7
1	Vorwort	7
2	Zielgruppen	7
3	Mathematische Grundlagen	7
3.1	Trigonometrische Funktionen	8
3.2	Komplexe Zahlen	8
3.3	Differentialrechnung	9
3.4	Integralrechnung	9
3.5	Differentialgleichungen	10
II	Entwicklung der Atommodelle	11
4	Historische Atommodelle	11
5	Daltonsches Atommodell	11
6	Thomsonsches Atommodell	12
7	Rutherfordsches Atommodell	13
III	Der Weg zur Quantenphysik	15
8	Widersprüche der klassischen Physik	15
9	Wellenbeschreibung des Lichtes als EM-Welle	15
9.1	Hohlraumstrahlung	16
9.2	Planck'sche Strahlungsformel	17
9.3	Reyleigh-Jeans-Gesetz als Grenzfall	18
9.4	Wien'sches Verschiebungsgesetz	19
9.5	Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz	20
9.6	Spektrum von Leuchtmitteln	21
10	Photoelektrischer Effekt	22
11	Röntgenstrahlung	23
11.1	Bremsstrahlung	24
11.2	Charakteristische Röntgenstrahlung	25
12	Compton-Effekt	25
13	Zusammenfassung: Welle-Teilchen Dualismus	26
14	de Broglie Wellenlänge	26
14.1	Materiewellen und Wellenfunktionen	27
14.2	Wellenpakete	27
14.3	statistische Deutung der Wellenfunktion	29

15 Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation	30
15.1 Casimir-Effekt	31
15.2 Auseinanderlaufen des Wellenpaketes	32
16 Alternative Deutungen der Quantentheorie	33
IV Quantenphysik	35
17 Bohrsches Atommodell	35
18 Quantisierung des Drehimpulses	38
19 Atomspektren	38
20 Stabilität der Atome	39
21 Franck-Hertz-Versuch	40
22 Schrödingergleichung	41
23 Anwendungen der stationären Schrödingergleichung	43
23.1 Teilchen im Kastenpotential I	43
23.2 Teilchen vor Potentialstufe	45
23.3 Tunneleffekt	45
23.4 Harmonischer Oszillator	47
23.5 zweidimensionales Kastenpotential	47
23.6 SGL mit kugelsymmetrischem Potential	48
24 SGL für das Wasserstoffatom	50
25 Messprozess in der Quantenmechanik	51
26 Exkurs: Operatoren in der Quantenmechanik	51
26.1 Dirac-Schreibweise	53
27 Quantenobjekte in der Schule	54
V Relativität	55
28 Einführung	55
28.1 Ätherhypothese	55
28.2 Lorentz-Transformation	56
29 Spezielle Relativitätstheorie	60
29.1 Addition von Geschwindigkeiten	60
29.2 Zeitdilatation	61
29.3 Längenkontraktion	62
29.4 Energie-Impuls-Beziehung	63
29.5 Minkowski-Diagramm	66
29.6 Relativistischer Dopplereffekt	67

30 Allgemeine Relativitätstheorie	69
30.1 Das Äquivalenzprinzip	69
30.2 Bewegungsgleichung/Geodätengleichung	70
30.3 Materiefreie Feldgleichungen	71
30.4 Schwarzschild-Metrik	71
30.5 Gravitative Rotverschiebung	73
30.6 Fall in ein schwarzes Loch	74
VI Exotisches	77
30.7 Einstein-Rosen-Brücke	77
30.8 Warp-Antrieb	78
30.9 Zeitreisen	78
30.9.1 Zeitreisen in die Vergangenheit	79
30.9.2 Zeitreisen in die Zukunft	79
30.10 Dunkle Materie	79
30.11 Hawking-Strahlung	80
30.12 Verschränkung und Quantenteleportation	81
30.12.1 EPR-Paradoxon	81
30.12.2 Teleportation	82

Einleitung

ABSCHNITT 1

Vorwort

Dieses Skript enthält die wesentlichen Inhalte der Vorlesung über Experimentelle Physik 3 (Quantenphysik und Relativität) für das Lehramt Physik, wie sie an der Universität Greifswald stattfindet. Ich gebe mir dabei Mühe, die Rechenwege so ausführlich wie möglich darzustellen. Die Rechnungen sollten also für alle mit grundlegendem Mathematikwissen aus den Einführungsveranstaltungen nachvollziehbar sein.¹

Mit schwarzer Linie hervorgehobene Textbereiche stellen Ergänzungen, Zahlenbeispiele oder praktische Anwendungen des Lehrstoffes dar.

Blaue Textbereiche enthalten zentrale Aussagen, die unbedingt bekannt sein sollen.

Der Teil zur Relativitätstheorie ist etwas ausführlicher als wohl in vielen Vorlesungsreihen zur Thematik üblich. Dies wurde bewusst so umgesetzt, um vornehmlich auf Interessen der Schüler eingehen zu können. Es zeigt sich, dass die SuS ein großes Interesse an Begriffen wie Raumkrümmung, Schwarzen Löchern, oder gar Phänomenen wie Wurmlöchern und Zeitreisen haben. Die zukünftigen LehrerInnen sollen wenigstens grundlegend in die Lage versetzt werden, zu solchen Thematiken fundierte Aussagen zu treffen.

Dieses Skript unterliegt ständiger Weiterentwicklung und Anpassung. Ich freue mich sehr über meldungen von Rechen- oder Rechtschreibfehlern an mich!

ABSCHNITT 2

Zielgruppen

Die Vorlesung richtet sich zunächst nur an Studierende des Lehramt Physik für Gymnasien.

ABSCHNITT 3

Mathematische Grundlagen

Es zeigt sich immer wieder, dass oft die fehlenden mathematischen Kenntnisse ein deutliches Hindernis darstellen um die physikalischen Inhalte tatsächlich zu verstehen. Während des Studiums sollte man bei jeder Rechnung, die man nicht nachvollziehen kann, sofort das entsprechende Thema nacharbeiten um nicht wichtige "Aha"-Effekte zu verpassen. Um dieses Nacharbeiten, was natürlich sehr zeitintensiv ist, so weit wie möglich zu reduzieren, habe ich eine Sammlung von Rechnungen zusammengestellt die hoffentlich die mathematischen Vorkenntnisse abdecken. Kursteilnehmer die bei diesen Aufgaben Probleme haben müssen so schnell wie möglich (am besten vor Beginn des Semesters)

TEIL

I

1. Vorwort
2. Zielgruppen
3. Math. Vorkenntnisse
 - 3.1. Trigonometrie
 - 3.2. Komplexe Zahlen
 - 3.3. Differentialrechnung
 - 3.4. Integralrechnung
 - 3.5. Differentialgleichungen

¹ Manchmal sind kurze Rechenhilfen oder sonstige Hinweise als Notiz an den Rand gestellt.

diese Wissenslücken schließen! Dazu gehört nicht nur das Lesen der Beispiele in diesem Text, sondern unbedingt auch das eigenständige Lösen entsprechender Aufgaben. Es gibt also zu jedem Problem eine Aufgabe mit vollständiger Lösung und Lösungsweg und noch einige Übungsaufgaben ohne Lösungsweg.

ABSCHNITT 3.1

Trigonometrische Funktionen

Grundlagen:

- $\sin(\pi/4) = ?$
- $\sin(\pi/2) = ?$
- $\cos(\pi/4) = ?$
- $\cos(\pi/2) = ?$
- ...
- $\frac{\partial}{\partial x} \sin(x), \frac{\partial}{\partial x} \cos(x)$
- geläufige Umformungen: $\sin^2(x) = ?$, $\cos^2(x) = ?$, $\tan^2(x) = ?$, $\sin(x) \cdot \cos(x) = ?$, ...

ABSCHNITT 3.2

Komplexe Zahlen

Wir benötigen komplexe Zahlen in diesem Semester zur Darstellung von Wellenfunktionen in der Quantenphysik. Zentraler Punkt, um das zu verinnerlichen ist das Verständnis der eulerschen Formel:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \tag{3.1}$$

Diese kann man nutzen, um die Darstellung komplexer Zahlen zu transformieren ($a+ib$ in $A \cdot e^{i\varphi}$ und umgekehrt). Dabei ist der Radialteil A gegeben durch $A = |a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und der Phasenwinkel φ kann durch $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$ bestimmt werden.²

² Bitte immer im Bogenmaß rechnen!

Exponentialform von $c = 12 + i\sqrt{2}$ bestimmen:

$$A = \sqrt{12^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{146}$$

$$\varphi = \text{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right) \approx 0.1173$$

Damit gilt: $c = 12 + i\sqrt{2} = \sqrt{146} \cdot e^{i \cdot 0.1173}$

Exponentialform von $y = \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ bestimmen.

Realteil von $y = 10 \cdot e^{-\frac{i}{2}\pi}$ bestimmen.

Radialteil/Betrag von $\Psi = 32 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 10i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ bestimmen.

Bestimmen sie die komplex-konjugierte Zahl C_1^* zu: $C_1 = 3 - i \cdot \sqrt{2}$

Bestimmen sie die komplex-konjugierte Zahl C_2^* zu: $C_2 = 3e^{-i \cdot \sqrt{2}}$

ABSCHNITT 3.3

Differentialrechnung

Das Ableiten von Funktionen muss (nicht erst seit dem 3. Semester) zum Handwerkszeug gehören. Die Produktregel, Kettenregel und partielles Ableiten sollten geübt werden bis es leicht anwendbare Formalismen sind. Hier ein paar Übungen komplexerer Beispiele um wieder alles aufzufrischen:

$\frac{dg}{dx}$ von $g(x) = e^{3x-3} \cdot \ln(x^2)$ bestimmen.

Das Vorgehen ist immer das gleiche: Man analysiert zuerst die "äußeren" Strukturen und geht Schritt für Schritt weiter in die "inneren" Strukturen. Als äußerste Struktur sieht man hier ein Produkt zweier Funktionen die von der gesuchten Variable x abhängen. Also muss man zuerst die Produktregel anwenden:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d(e^{3x-3})}{dx} \cdot \ln(x^2) + (e^{3x-3}) \cdot \frac{d(\ln(x^2))}{dx}$$

Jede der Funktionen, die nun abgeleitet werden müssen, sind selbst wieder "irgendwelche" Funktionen von x . Also muss man mit der Kettenregel weiter zur Variable vordringen. Die Ableitung von e^x ist e^x , die Ableitung des Logarithmus $\ln(x)$ ist $1/x$.

$$\frac{dg}{dx} = e^{3x-3} \cdot \frac{d(3x-3)}{dx} \cdot \ln(x^2) + (e^{3x-3}) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx^2}{dx}$$

Diese Schritte führen wir jetzt aus und sehen, dass danach keine Verkettungen mehr übrig sind. Das Ergebnis lautet dann nach Kürzen und Ausklammern:

$$\frac{dg}{dx} = e^{3x-3} \cdot 3 \cdot \ln(x^2) + (e^{3x-3}) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = e^{3x-3} \cdot \left(3 \ln(x^2) + \frac{2}{x} \right)$$

$\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ von $\zeta(x) = \frac{(1-e^{3x-3})}{3\sqrt{y} \cdot e^{x^2}}$ bestimmen.

$\frac{d\omega}{dk}$ von $\omega(k) = \cos(kx - \varphi) \cdot \sqrt{\sin(kx - \varphi)}$ bestimmen.

ABSCHNITT 3.4

Integralrechnung

Die Integralrechnung ist prinzipiell schwieriger als die rein formale Differentiation. Man ist zum Teil nicht in der Lage, analytische Lösungen für Integrale zu finden und muss numerische Methoden anwenden. In dieser Vorlesung sind aber nur grundlegende Integrale nötig um den Themen zu folgen. Oft haben wir es mit kugelsymmetrischen Problemen zu tun (wie schon in der Vorlesung zur Mechanik oder Elektrodynamik). Deswegen führen die Aussagen oft zu Integralen der Form $\int_{r=r_0}^{\infty} f(r) dr$. Es sollten die Methoden der Substitution und der partiellen Integration bekannt sein (Abi-Stoff Mathematik!).

$$\int_{r=r_0}^{\infty} e^{-3r} dr$$

$$\int_{r=r_0}^{\infty} x \cdot e^{-2r} dr$$

$$\int_{r=0}^{\pi} \cos^2(r \cdot t) dr$$

ABSCHNITT 3.5

Differentialgleichungen

Wir werden in diesem Semester viel mit Differentialgleichungen arbeiten. Das kreative Lösen komplizierter Gleichungen geht jedoch über unseren Rahmen der Vorlesung hinaus. Dennoch ist es nötig, einfache DGL durch Einsetzen von gegebenen Lösungen oder Ansätzen (*e*-Funktion!) zu analysieren:

Was lernen wir über die Funktion $\omega(k)$ wenn man in die Schwingungsdifferentialgleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$ einen harmonischen Lösungsansatz $x = x_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$ einsetzt? Zunächst bilden wir die geforderte Ableitung der linken Seite der DGL:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= x_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \cdot \omega \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= x_0 \omega \cdot (-1) \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) \cdot \omega = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi_0) \end{aligned}$$

Nun kann man x und $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ in die DGL einsetzen:

$$-x_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi_0) + \frac{k}{m} \cdot x_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$$

Jetzt kann man durch Kürzen und Umstellen die gesuchte Beziehung zwischen ω und k finden:

$$\begin{aligned} -\cancel{x_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi_0)} + \frac{k}{m} \cdot \cancel{x_0 \sin(\omega t - \varphi_0)} &= 0 \\ \omega(k) &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + E \cdot \Psi(x) = 0$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi(r) = e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$ diese DGL löst. Was ergibt sich für E ?

Entwicklung der Atommodelle

It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you.

Ernest Rutherford

- 4. Historische Atommodelle
- 5. Daltonsches Atommodell
- 6. Thomsonsches Atommodell
- 7. Rutherfordsches Atommodell

ABSCHNITT 4

Historische Atommodelle

Erste Hinweise auf Gedanken zur Atomvorstellung finden sich in Griechenland bei den Gelehrten Leukipp (440 v. Chr.) und Demokrit (460-370 v. Chr.). Sie lehrten bereits, dass alle Körper aus "unendlich kleinen", raumfüllenden, unteilbaren Partikeln bestehen. Außerhalb dieser *Atome* (von $\alpha\tau\omicron\mu\omicron\zeta$ = unteilbar) solle nur leerer Raum existieren. Die charakteristischen Eigenschaften von Materie sollen demnach durch die verschiedenen Anordnungen gleicher oder ungleicher Atome realisiert werden. Diese Anschauung ist schon bemerkenswert nah an modernen Vorstellungen über den Materieaufbau. Zum erste mal werden hier die Eigenschaften eines makroskopischen Körpers durch die Anordnung seiner Bestandteile bestimmt.

Platon (427-347 v. Chr.) beschreibt Atome als mathematische Raumformen wie Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder oder Würfel.

Aristoteles (384-322 v. Chr.) lehnte hingegen den Atomismus ab. Die Vorstellung eines leeren Raumes zwischen den Atomen widersprach seinem Weltbild.

Erst bei Epikur (341-271 v. Chr.) wurde die Vorstellung Demokrits wiederbelebt. Zusätzlich wurde nun den Atomen eine Masse/Schwere zugeschrieben. Während der gesellschaftlichen Vorherrschaft der christlichen Kirche in Europa gerieten alle diese Modelle in Vergessenheit, da sie dem Schöpfungsgedanken widersprachen. Erst im 17. Jhd. bekamen mit der Entwicklung der Chemie die Thesen wieder Beachtung. Erst ab dem 19. Jhd. gab es mit der "gaskinetischen Theorie"¹ von Claudius, Maxwell und Boltzmann (siehe Experimentelle Physik 1 - Wärme) wieder substantielle Fortschritte bei der Beschreibung der elementaren Materiebausteine.

In den folgenden Abschnitten sollen die bedeutendsten Atomvorstellungen der Moderne, zusammen mit den wichtigsten Erkenntnissen daraus, kurz vorgestellt werden.

ABSCHNITT 5

Daltonsches Atommodell

John Dalton (1766-1844) erkannte durch seine Analysen, dass das Masseverhältnis bei Stoffverbindungen immer konstant und eindeutig ist. So bestehen zum Beispiel 100g H_2O aus den Anteilen 11.1g H_2 und 88.9g O_2 . Das Massenverhältnis beträgt also

¹Hierbei geht es etwa um die Modellvorstellung von Luft als Ansammlung eigenständiger Atome/Moleküle. Der kinetische Temperaturbegriff wird definiert, Formulierung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung usw.

immer 1:8. Zentrale Aussage seiner Veröffentlichung dazu im Jahr 1808 lautet: Das Wesen chemischer Umwandlung besteht in der Vereinigung oder Trennung von Atomen. Außerdem stellte er die folgenden Postulate auf:

Daltonsches Atommodell

- Alle elementaren Stoffe bestehen aus kleinsten Teilchen, die man chemisch nicht weiter zerlegen kann.
- Alle Atome desselben Elementes sind in Qualität, Größe und Masse gleich. Sie unterscheiden sich aber in diesen Eigenschaften von den Atomen anderer Elemente.
- Wenn chemische Elemente eine Verbindung eingehen, so vereinigen sich immer Atome der beteiligten Elemente, die zueinander in einem ganzzahligen Mengenverhältnis stehen.

In dieser (veralteten) Sichtweise kann man also das Masseverhältnis von Wasser (2 H + 1 O) auch darstellen als

$$\frac{m(2H)}{m(O)} = \frac{2}{\underbrace{16}_{\text{Gewichte in Einheiten von } m_H}} = \frac{1}{8} = \frac{11.1}{88.9} \tag{5.1}$$

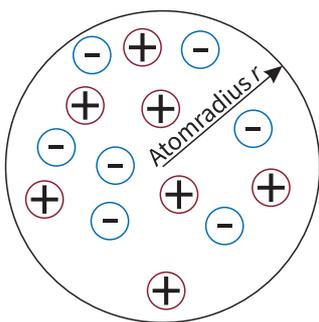
Aus heutiger Sicht würde man dieses Massenverhältnis etwas anders betrachten. Die Masseneinheit ist heutzutage nicht mehr auf das Wasserstoffatom bezogen, sondern auf das ¹²C Isotop des Kohlenstoffatoms:

Atomare Masseneinheit

$$1 \text{ AME} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \tag{5.2}$$

ABSCHNITT 6

Thomsonsches Atommodell



Durch eigene Experimente und Experimente von Forschungskollegen kam Joseph John Thomson im Jahr 1898 zu wichtigen Schlussfolgerungen. Es schien so, also ob neutrale Atome stets aus $-Z \cdot e$ negativen Ladungen und $Z \cdot e$ positiven Ladungen bestehen. Es lag nun nahe, diese Ladungen gleichmäßig über das Atomvolumen zu verteilen wie es in Abbildung 1 skizziert ist. Wegen dieser homogenen Verteilung wird das Modell auch "Rosinenkuchen" genannt. Die Ladungsträgerdichte $\rho_{e,p}$ für die Elektronen und Protonen beträgt demnach für ein kugelförmiges Atomvolumen

$$\rho_{e,p} = \pm \frac{Ze}{V_{\text{Atom}}} = \pm \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{Atom}}^3} \tag{6.1}$$

Abb. 1. Die gleichmäßige Verteilung von positiven und negativen Ladungen im Atom gemäß Rosinenkuchenmodell.

Um ein Gefühl für die Größenordnung dieser Dichte zu bekommen, setzen wir testweise die Zahlenwerte für die einfachsten Atome Wasserstoff und Helium ein. Die Gleichung 6.1 liefert dann für Wasserstoff

$$\rho_{p,H} = \frac{1e}{\frac{4}{3}\pi(25 \cdot 10^{-15} \text{ m})^3} \approx 2 \cdot 10^{21} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

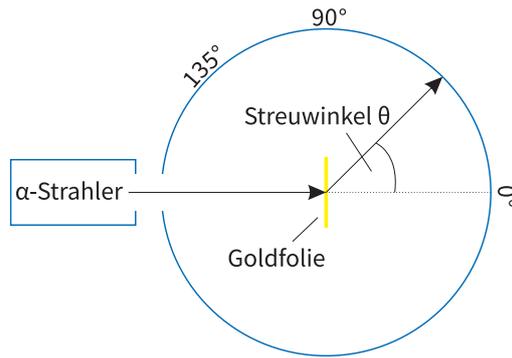


Abb. 2. Die α -Teilchen durchdringen zwar die Goldfolie, ändern aber ihre Ausbreitungsrichtung. Die Verteilung der Richtungsänderungen kann man durch den Detektorschirm untersuchen.

und für Helium

$$\rho_{p,He} = \frac{2e}{\frac{4}{3}\pi(31 \cdot 10^{-15} \text{ m})^3} \approx 2.5 \cdot 10^{21} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

. Diese Dichten der positiven Ladungsträger (heute wissen wir, dass es sich um Protonen handelt) erscheint zunächst riesig – Es wird sich aber in den folgenden Rutherford'schen Streuexperimenten zeigen, dass die Dichten deutlich zu klein sind um bestimmte Beobachtungen zu erklären.

ABSCHNITT 7

Rutherford'sches Atommodell

Ernest Rutherford experimentierte zum Ende des 19. Jahrhunderts mit α -Teilchen, die auf eine dünne Goldfolie (ca. $10 \mu\text{m}$) treffen. Die *alpha*-Teilchen, also positiv geladene Heliumkerne, konnte man damals aus einer Probe des Elements Radon gewinnen, dass durch atomare Zerfallsprozesse selbstständig diese Teilchen ausstößt. Durchgeführt wurden die dazugehörigen Experimente durch Rutherfords Mitarbeiter Geiger und Marsden. Das berühmte *Rutherford'sche Streuexperiment* läuft dabei wie folgt ab: Die Radon-Probe emittiert ständig die gewünschten α -Teilchen. Mithilfe einer Blende geht man sicher, dass die Teilchen den gewünschten Punkt auf der Goldfolie treffen. Beim Auftreffen der geladenen Teilchen beobachtet man nun teils sehr starke Ablenkungen der α -Teilchen - fast bis hin zur Reflektion. Falls die Ladungen in den Goldatomen gleichmäßig verteilt wären, wie es das Rosinenkuchenmodell von Thomson suggeriert, dürften solch drastische Ablenkungen nicht möglich sein.

Interessant und lehrreich ist nun zunächst die "falsche" Erwartung des Versuchsausganges durch Auswertung des Rosinenkuchenmodells zu beschreiben. Wir haben es hier nämlich mit einem sehr bekannten Problem aus der Mathematik zu tun – dem *Random Walk*. Die Goldfolie ist zwar nur einige Mikrometer dünn, aber dennoch befinden sich hier etwa $5 \cdot 10^4$ Goldatome im Weg des Alphateilchens. Es ist also nach dem Rosinenkuchenmodell zu erwarten, dass das Geschoss auf dem Weg durch die Goldfolie sehr viele Stöße hintereinander mit jeweils einer kleinen zufälligen Richtungsänderung erfährt. Vereinfacht stellen wir uns gemäß Abbildung 3a vor, dass der Teilchenstrahl in x -Richtung auf die Hindernisse trifft. Die Frage ist nun, wie groß der Versatz in y -Richtung nach einer bestimmten Anzahl an Wechselwirkungen ist. Die Schrittweite soll dabei Δy heißen. Die Mathematik liefert uns die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die-

sen abschließenden Versatz y nach dem kompletten Durchgang durch die Goldfolie in Form der Verteilungsfunktion

$$P(y) = \text{const} \cdot e^{-\frac{y^2}{m \cdot \Delta y^2}}. \tag{7.1}$$

Hierbei ist m die Anzahl der Stöße. Die Form der Verteilungsfunktion ist in Abbildung 3b dargestellt. Für Zahlenwerte, die zum Rutherford-Versuch passen, erhält man eine Halbwertsbreite von nur etwa 1.8° für die Ablenkung der Alphateilchen. Da dieser Winkel sehr klein ist, ist also nach dem Rosinenkuchenmodell nahezu keine Ablenkung der Alphateilchen zu erwarten – fast alle sollten die Goldfolie auf gerader Linie durchdringen.

Die tatsächlich beobachtete Verteilung der Teilchen auf dem Detektorschirm ist deutlich breiter als das man es durch einen Random-Walk in Verbindung mit dem Rosinenkuchenmodell erklären könnte². Daher muss nun an dieser Stelle das Modell an die Beobachtung angepasst werden, so wie es immer in der Physik passiert wenn neue Experimente im Widerspruch zu den gültigen Modellen stehen. Die Anpassungen werden nun zum Rutherford'schen Atommodell führen, das schon sehr nah an der modernen Atomvorstellung liegt. Dieses Modell gründet auf den folgenden Annahmen:

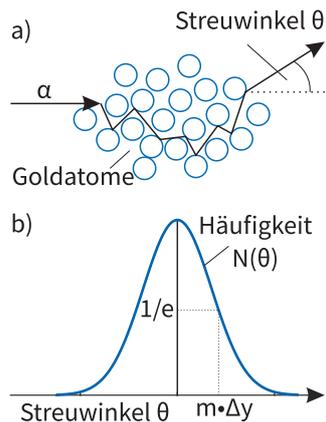


Abb. 3. (a) α -Teilchen durchdringen die Goldfolie in einzelnen Schritten, analog zum Random-Walk. (b) Verteilungsfunktion eines Random-Walk Vorganges.

Rutherford'sches Atommodell

- Die positiven Ladungen des Atoms sind in einem sehr kleinen Volumen im Kern komprimiert.
- Dieser Atomkern vereinigt nahezu die gesamte Masse des Atoms (abzüglich der leichten Elektronen).

Wenn man die Schlussfolgerungen des Rutherford'schen Atommodells berücksichtigt, dann muss man nun die Streuprozesse auf andere Weise berechnen. Die Elektronen spielen durch ihre geringe Masse für die Streuung keine wesentliche Rolle. Das Problem kann also auf einen elektrostatischen Prozess zwischen Alphateilchen (He^{2+}) und positiv geladenem Atomkern reduziert werden. Auf die Herleitung der Streuwinkel wird hier zwar verzichtet, kann aber etwa bei [DEMTRÖDER 3] nachvollzogen werden. Als Ergebnis erhält man eine Abhängigkeit der Teilchenzahl N vom Streuwinkel θ in der Form

Rutherford'sche Streuformel

$$N(\theta) = \text{const} \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{7.2}$$

Diese Streuformel deckt sich sehr gut mit den Messergebnissen, wie man in Abbildung 4 erkennen kann. Auch die beobachteten großen Streuwinkel sogar über 120° sind nun erklärbar. Diese großen Streuwinkel, die fast einer Reflektion entsprechen, kann man sich so erklären: Das Alphateilchen trifft in einigen Fällen (fast) frontal auf einen Atomkern. Da der Atomkern im Falle von Gold deutlich massereicher als das Alphateilchen ist, findet gemäß Impuls- und Energieerhaltung die starke Richtungsänderung statt. Übrigens sind die abstoßenden Coulombkräfte so groß, dass es bei der Wechselwirkung durch elektrostatische Kräfte bleibt - es findet also keine "Berührung" von Alphateilchen und Atomkern statt, obwohl man dennoch ganz allgemein von einem Stoßprozess spricht.

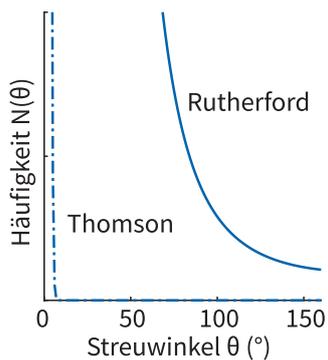


Abb. 4. Winkelverteilung beim Rutherford'schen Streuversuch. Die tatsächlichen Messwerte passen nicht zum Rosinenkuchenmodell, sehr wohl aber zum Rutherford'schen Atommodell.

²Rutherford selbst sagte dazu: "Das ist so unwahrscheinlich, als ob man mit einer Pistole auf einen Wattebausch schießt und die Kugel zurückprallt."

Der Weg zur Quantenphysik

TEIL

III

Die Wirklichkeit, von der wir sprechen können, ist nie die Wirklichkeit an sich, sondern [...] eine von uns gestaltete Wirklichkeit.

Werner Heisenberg, *Ordnung der Wirklichkeit*,
Piper (1989)

ABSCHNITT 8

Widersprüche der klassischen Physik

Um die Jahrhundertwende gibt es mehr und mehr experimentelle Befunde, die nicht mehr mit den gültigen Modellen der Physik zu erklären sind. Einige dieser Effekte oder Beobachtungen sind etwa die Ultraviolett-Katastrophe, der Photoelektrische Effekt, der Compton-Effekt, das Vorhandensein stabiler Atome und der Franck-Hertz-Versuch. Diese und weitere Beobachtungen machen nun nach und nach Grundlegende Änderungen der Physik nötig. Die Physik etwa bis zu diesem Punkt wird als *klassische Physik* bezeichnet – als Abgrenzung zur Quantenphysik und zur relativistischen Physik.

- 8. Wid. der klass. Physik
- 9. Lichte als EM-Welle
- 9.1. Hohlraumstrahlung
- 9.2. Planck'sche Strahlung
- 9.4. Verschiebungsgesetz
- 9.5. Stefan-Boltzmann Gesetz
- 9.6. Leuchtmittelspektrum
- 10. Photoelektrischer Effekt
- 11. Röntgenstrahlung
- 11.1. Bremsstrahlung
- 11.2. Charakt. Strahlung
- 12. Compton Effekt
- 13. W.-T.-Dualismus
- 14. de Broglie Wellenlänge
- 14.1. Materiewellen und Wfkt.
- 14.2. Wellenpakete
- 14.3. stat. Deutung der Wfkt.
- 15. Unbestimmtheitsrelation
- 15.1. Casimir-Effekt
- 15.2. Auseinanderlaufen des Wellenpaketes
- 16. Alt. Deutungen der QP

ABSCHNITT 9

Wellenbeschreibung des Lichtes als EM-Welle

im Rahmen der klassischen Physik gibt es bisher zwei mögliche Wege, die Lichtausbreitung zu beschreiben: Die Teilchen- und die Wellenhypothese. Die Teilchenhypothese geht auf Isaac Newton im 18. Jhd. zurück. Mit ihr lassen sich die geradlinige Ausbreitung (geometrische Optik) und auch Brechungsphänomene gut erklären.

Die Wellenhypothese scheint sich dann aber bis ins 20. Jhd. durchzusetzen. Nach der Formulierung von Huygens Wellentheorie gabe es viele Beobachtungen die die Wellennatur von Licht zu bestätigen scheinen. Interferenz und Beugung etwa sind typische Wellenphänomene und können auch bei Licht beobachtet werden. Nach der Entdeckung der Elektromagnetischen (EM) Wellen durch Heinrich Hertz gab es weiteren Vorschub für die Wellentheorie. Später wurde sogar das Licht als Spezialfall der Elektromagnetischen Wellen mit $\lambda = 400 \text{ nm} \dots 700 \text{ nm}$ identifiziert und das Wellenmodell wurde weithin als gültig akzeptiert. Wir fassen hier nocheinmal zusammen, wie das Lichts als EM-Welle mathematisch beschrieben werden kann. Die Welle besteht, wie der Name schon sagt, aus einem elektrischen (\vec{E}) und einem magnetischem (\vec{B}) Feld. Beide Feldstärkevektoren stehen bei einer ungestörten Welle senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (Licht ist eine Transversalwelle!). In reeler Darstellung wird die elektrische Feldstärke sich zeitlich und räumlich gemäß

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A} \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (9.1)$$

ausbreiten. Die zeitliche Änderung findet mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ statt. Der Wellenzahlvektor \vec{k} beschreibt die Geschwindigkeit und Richtung der räumlichen Ausbreitung. Bei elektromagnetischen Wellen sind \vec{k} und ω über die Dispersionsrelation $\omega(k) = \vec{c} \cdot \vec{k}$ bzw. $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ miteinander verbunden. Hier haben wir also schon c als Ausbreitungsgeschwindigkeit/Lichtgeschwindigkeit festgelegt.

Die Intensität einer solchen Welle kann man durch

$$I = c \cdot \epsilon_0 E^2 \tag{9.2}$$

ermitteln. Die Intensität entspricht einer bestimmten Leistung pro bestrahlter Flächeneinheit. Der Energietransport durch eine Elektromagnetische Welle wird durch den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{9.3}$$

beschrieben. An diesem Kreuzprodukt erkennt man erneut, dass die Energie in transversaler Richtung senkrecht zum elektrischen und magnetischen Feld transportiert wird. Die transportierte Energie hat eine Dichte von

$$\omega_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2 + c^2 B^2). \tag{9.4}$$

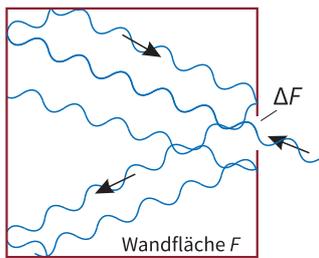
Der Begriff "Dichte" wird in diesem Semester noch verschieden gebraucht werden. Er bezieht sich manchmal auf eine Volumen (wie etwa die Massendichte $\rho = m/V$), manchmal auf eine Fläche oder auch auf Frequenzbereiche. Eine kurze Einheitenrechnung zeigt, auf welche Größe sich der Begriff Dichte hier bezieht:

$$[\omega_{em}] = \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{VAs}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Es handelt sich also um eine Energie pro Raumvolumen.

ABSCHNITT 9.1

Hohlraumstrahlung



Als erstes Beispiel, bei dem die Wellenbeschreibung nicht zu den durchgeführten Messungen passt, wird hier die Beschreibung der Hohlraumstrahlung gezeigt. Das gedankliche Modell des "Hohlraum" ist zweckmäßig um einen idealen Strahlungsabsorber zu beschreiben. Wie in Abbildung 5 gezeigt, muss die Fläche ΔF der Eintrittsöffnung sehr klein im Vergleich zur Wandfläche F sein, damit die einfallende Strahlung absorbiert wird. Das Modell dieses idealen Absorbers wird gewählt, weil ein Objekt mit idealer Absorption auch einer Emitter von Strahlung ist. Mit welcher Stärke Strahlung von Körpern, abhängig von Temperatur, bei bestimmten Frequenzen emittiert wird ist nun die Fragestellung die beantwortet werden soll.

| Herleitung! (Demtröder Bd.2 7.29-7.39)

In diesem Hohlraum können, wir wenden noch das Wellenmodell des Lichtes an, nur bestimmte Wellenlängen untergebracht werden – nämlich vielfache der halben Wellenlänge. Passende Wellenlängen werden dann *Moden* dieses Hohlraumes genannt. Ein kleiner Modenbereich $d\nu$ hat dann eine räumliche Energiedichte von

Rayleigh-Jeans Gesetz

$$\omega_\nu(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T d\nu. \tag{9.5}$$

Abb. 5. Modell des Hohlraumes. Die Strahlung tritt durch eine kleine Öffnung ein, und gibt durch viele Reflektionen/Absorbtionen die Energie nahezu vollständig ab bevor die Austrittsöffnung erreicht wird.

Man spricht hier oft auch von einer spektralen Energiedichte. Man erkennt leicht, dass die abgestrahlte Energie eines Körpers also quadratisch mit der abgestrahlten Frequenz zunimmt. Wenn man jetzt herausfinden möchte, wie viel Energie denn ein Körper insgesamt über den gesamten Frequenzbereich abstrahlt, muss man also über ν integrieren.

$$\Delta\omega_\nu(\nu) = \int_0^\infty \omega_\nu(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \int_0^\infty \nu^2 d\nu \quad (9.6)$$

Das Integral über ν^2 nimmt aber offenbar unendlich große Werte an. Dieses Verhalten, dass fälschlicherweise unendlich große Strahlungsenergien bei hohen Frequenzen vorher-sagt, nennt man auch *Ultraviolett-Katastrophe*. Für niedrige Frequenzbereiche allerdings stimmt das Reyleigh-Jeans Gesetz aus Gleichung 9.5 sehr gut mit den Messungen überein. Das Rätsel um die Ultraviolett-Katastrophe wurde erst durch die Quantenhypothese von Max Plack aufgelöst.

ABSCHNITT 9.2

Planck'sche Strahlungsformel

Um eine zutreffende Formulierung der Strahlung eines idealen Hohlraumes (oder auch schwarzen Körpers) zu formulieren, nutzte Max Planck einen neuartigen Ansatz. Auch er betrachtete die Moden in einem Hohlraum. Doch statt jeder dieser Moden die kontinuierliche Energie $k_B T$ zuzuordnen, postulierte er jeweils diskrete Energien die von der jeweiligen Frequenz abhängen sollten. Die Energie einer solchen Mode wäre dann

$$W_\nu = n \cdot h \cdot \nu, \quad (9.7)$$

mit dem *Planckschen Wirkungsquantum* $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js. Die kleinste Modeneinheit mit $n = 1$ wird *Photon* genannt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mode die Energie W_ν hat, beträgt analog zur Thermodynamik

$$p(W_\nu) = \frac{e^{-\frac{W}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{W}{k_B T}}}. \quad (9.8)$$

Die Exponentialfunktion nennt man auch Boltzmann-Faktor. Um die mittlere Energie pro Mode zu bestimmen, berechnet man nun das erste Moment³ der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\bar{W}_\nu = \sum_{n=0}^\infty W_\nu \cdot p(W_\nu) = \frac{\sum n h \nu \cdot e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}{\sum e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}, \quad (9.9)$$

welches durch Methoden aus der Analyse von Folgen und Reihen noch weiter vereinfacht werden kann. Schließlich kann man durch Vereinfachung des Terms 9.9 zeigen, dass die mittlere Modenenergie

$$\bar{W}_\nu = \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \nu}{k_B T}} - 1} \quad (9.10)$$

beträgt. Wenn wir jetzt in Gleichung 9.5 statt der mittleren Energie $k_B T$ pro Mode den Ausdruck 9.10 einsetzen, erhalten wir die Plancksche Strahlungsformel

³In der Statistik nutzt man sogenannte "Momente" um Eigenschaften von Verteilungen zu berechnen. Das erste Moment entspricht dabei in etwa dem aus der Schule bekannten Mittelwert. Das erste Moment einer Verteilung berechnet man durch $m_1 = \int x \cdot p(x) dx$ bzw. $m_1 = \sum x \cdot p(x) = \bar{x}$.

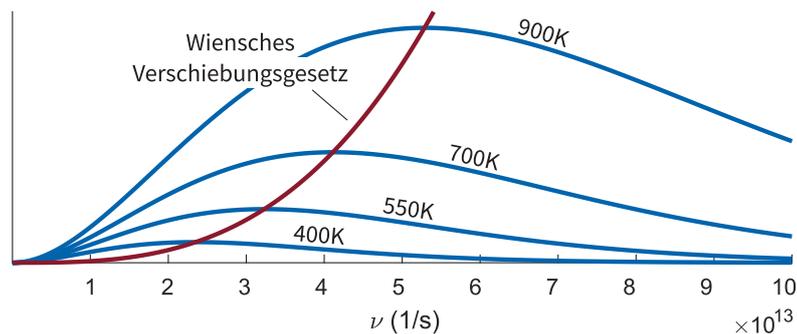


Abb. 6. (blaue Linien) Planck-Verteilung für verschiedene Temperaturen. (rote Linie) Das Wiensche Verschiebungsgesetz entspricht den Maxima der Planck-Verteilungen.

Planck'sche Strahlungsformel

$$\omega_\nu(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (9.11)$$

Durch die Exponentialfunktion im Nenner wird die Energiedichte nun für große Frequenzen unendlich klein, wodurch die Ultraviolett-Katastrophe nicht mehr auftritt. Die Energiedichteverteilung in Abbildung 6 ermöglicht nun weitere Analysen. Wir werden uns die Maxima der jeweiligen Funktionen sowie den gesamten Energieinhalt der Verteilungen im Folgenden noch genauer ansehen.

ABSCHNITT 9.3

Reyleigh-Jeans-Gesetz als Grenzfall

Wenn man bestehende physikalische Gesetze erweitert um neue Phänomene mit einzubeziehen, ist es sehr elegant wenn man die bis dato gültigen Gesetze als Grenzfälle herleiten kann. So ist es hier beispielsweise auch möglich das schon bekannte Reyleigh-Jeans Gesetz als Grenzfall für kleine Frequenzen aus der Planck-Verteilung herzuleiten. Abbildung 6 deutet schon an, dass dies möglich sein könnte. Für den Frequenzbereich, in dem der Grenzfall gültig sein soll, gilt $h\nu \ll k_B T$. Den Faktor $\exp(h\nu/k_B T)$ kann man in diesem Fall (der Exponent wird durch $h\nu \ll k_B T$ sehr klein) in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T} \quad (9.12)$$

Damit wird dann aus der Planckverteilung durch einsetzen der Näherung

$$\omega_\nu(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\cancel{1 + \frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (9.13)$$

direkt wieder das Reyleigh-Jeans Gesetz hergeleitet. Es bildet also den Grenzfall der Planck-Verteilung für kleine Frequenzen bzw. große Wellenlängen.

ABSCHNITT 9.4

Wien'sches Verschiebungsgesetz

Die Planck-Verteilungen in Abbildung 6 haben ihre Maxima bei verschiedenen Wellenlängen, abhängig von der gegebenen Temperatur T . Im Umkehrschluss wäre es also möglich, aus der Kenntnis dieses Maximums die Temperatur des strahlenden Objektes zu bestimmen. Das Maximum der Verteilung findet man durch

$$\frac{d}{d\nu} \omega_\nu(\nu) = \frac{d}{d\nu} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = 0. \quad (9.14)$$

Das Ableiten ergibt:

$$0 = \frac{24\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} - \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \cdot \frac{h}{k_B T}}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)^2} \quad (9.15)$$

Durch Kürzen

$$0 = \frac{324\pi h\nu^2}{\cancel{c^3}} \frac{1}{\cancel{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}} - \frac{8\pi h\nu^3}{\cancel{c^3}} \frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \cdot \frac{h}{k_B T}}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)^2} \quad (9.16)$$

und Ersetzen von $h\nu/k_B T = x$ folgt schließlich

$$x = 3 - 3e^{-x} \quad (9.17)$$

Diese Gleichung kann man nun numerisch lösen und erhält für die Frequenz, bei der die maximale Energiedichte eines schwarzen Körpers abgestrahlt wird:

Wien'sches Verschiebungsgesetz

$$\nu_{\max} = 5.873 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{Ks}} \cdot T \quad (9.18)$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2.897 \cdot 10^{-3} \text{ mK}}{T} \quad (9.19)$$

Bitte beachten: Die Temperatur T muss natürlich in Kelvin (statt Celsius) in die Gleichungen 9.18 und 9.19 eingesetzt werden, wie man auch leicht durch Kontrolle der Einheiten erkennt:

$$\frac{1}{\text{Ks}} \cdot \text{K} = \text{s} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{mK}}{\text{K}} = \text{m}$$

Das Wien'sche Gesetz lässt es nun zu, durch Analyse des Spektrums eines strahlenden Körpers dessen Temperatur zu bestimmen.

Die Sonne strahlt bei der Wellenlänge von $\lambda_{\max} = 480 \text{ nm}$ die meiste Energie ab. Gemäß Gleichung 9.19 kann man also auf eine Oberflächentemperatur der Sonne von $T = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{ mK} / 480 \text{ nm} \approx 6000 \text{ K}$. Es gibt für Versuche an der Schule vielfältige Möglichkeiten, das Sonnenspektrum (bzw. dann dessen Maximum) zu erfassen.

Außer der konkreten Berechnungsvorschrift sei noch erwähnt, dass das Wien'sche Gesetz ganz grundlegend – ohne direkt auf die Zahlenwerte einzugehen – einen linearen Zusammenhang zwischen Temperatur des Körpers und spektralem Maximum ν_{\max} bzw. λ_{\max} angibt. Man kann diesen Zusammenhang dann also auch für bekannte Verhältnisse

von Temperatur und spektralem Maximum gemäß

$$\frac{\nu_{\max}(T_1)}{T_1} = \text{const.} = \frac{\nu_{\max}(T_2)}{T_2} \quad (9.20)$$

$$\lambda_{\max}(T_1) \cdot T_1 = \text{const.} = \lambda_{\max}(T_2) \cdot T_2 \quad (9.21)$$

nutzen.

ABSCHNITT 9.5

Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz

Wir haben bereits die Lage des Maximums der spektralen Energiedichte ω_ν untersucht. Nun wollen wir noch Erkenntnisse aus der insgesamt abgestrahlten Energie eines Körpers erhalten. Dazu müssen wir also über alle Frequenzen ν in ω_ν integrieren. Das Integral

$$\omega(T) = \int_{\nu=0}^{\infty} \omega_\nu(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (9.22)$$

kann man durch Substitution von $x = h\nu/k_B T$ vereinfachen. Das Differential $d\nu$ muss dabei ebenfalls substituiert werden gemäß $dx/d\nu = h/(k_B T)$. Dann nimmt das Integral die Form

$$\omega(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_{x=0}^{\infty} \frac{\overbrace{x^3}^{=\nu^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \overbrace{dx \cdot \frac{k_B T}{h}}{=d\nu}}{e^x - 1} \quad (9.23)$$

an. Die Faktoren kann man vor das Integral ziehen

$$\omega(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (9.24)$$

und das übrige bestimmte Integral kann man durch Nachlesen in Tabellenwerken lösen. Dieses ergibt $\pi^4/15$. Schließlich ist unser Ergebnis

$$\omega(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} \cdot T^4. \quad (9.25)$$

Statt der Energiedichte wollen wir nun die insgesamt abgegebene Strahlungsleistung betrachten. Diese ist definiert als

$$\frac{dW}{dt} = \omega(T) \cdot \frac{c}{4}. \quad (9.26)$$

Damit finden wir nun letztendlich den gesuchten Ausdruck für die pro Zeiteinheit abgegebene Strahlungsenergie eines schwarzen Körpers:

Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \cdot T^4 = \sigma_{SB} \cdot T^4 \quad (9.27)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma_{SB} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$. Hierbei handelt es sich um die gesamte Strahlungsleistung, die ein idealer Strahler in den Raum abstrahlt, also für den vollen Raumwinkel $\Omega = 4\pi$.

ABSCHNITT 9.6

Spektrum von Leuchtmitteln

Das Spektrum einer Strahlungsquelle ist auch im Alltag von enormer Bedeutung. Vor der Nutzung von Energiesparlampen oder LED-Leuchten wurden im Wesentlichen Glühlampen/Halogenlampen verwendet. Letztere haben ein Strahlungsspektrum, dass dem eines schwarzen Körpers sehr ähnlich ist und gut das natürliche Sonnenlicht ersetzt. Durch die Prozesse bei der Lichterzeugung von LEDs bzw. Gasentladungslampen (Energiesparlampen) wird kein kontinuierliches Schwarzkörperspektrum erzeugt (Abb. 7 oben), sondern gewisse Bereiche sind besonders ausgeprägt (Abb. 7 unten). Dies führt zu einem unnatürlichem Licht, dass sogar Einfluss auf Schlafverhalten und Konzentrationsfähigkeit haben kann. Höherwertige LED-Lichtquellen können aber ein recht gutes Spektrum wiedergeben (Abb. 7 mitte), so dass dieses Licht vom Menschen als "natürlich" wahrgenommen wird.

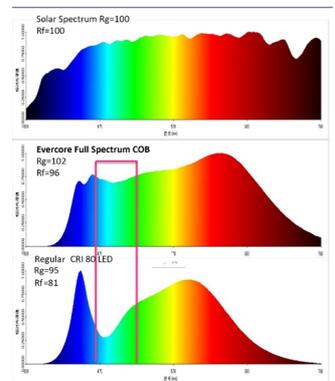


Abb. 7. (oben) Spektrum der Sonnenstrahlung. (mitte) Spektrum einer *full-spectrum* LED-Lampe. (unten) Spektrum einer günstigen LED-Lampe.

Photoelektrischer Effekt

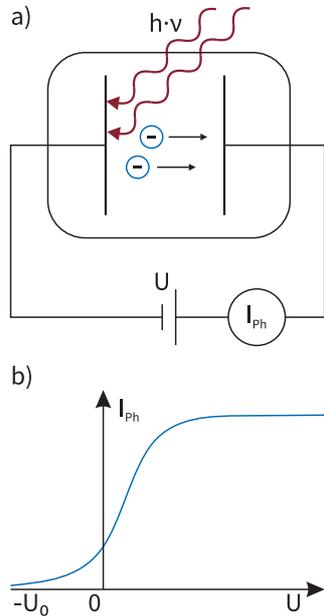


Abb. 8. (a) Schematische Versuchsanordnung zur Messung des Photoeffektes. Bei überschreiten einer bestimmten Lichtwellenlänge kann man einen Photostrom I_{Ph} messen. (b) Verlauf des Photostroms abhängig von der Spannungsdifferenz aus a).

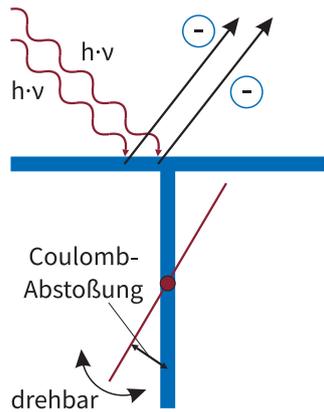


Abb. 9. Das Elektrometer beruht auf dem Prinzip der sich abstoßenden Ladungen. Wenn Platte und Zeiger elektrische Ladung tragen, ergibt sich ein Zeigerausschlag.

Die Strahlungsphänomene waren nach Entdeckung der Planck-Verteilung der Schwarzkörperstrahlung weitgehend verstanden und erklärbar. Dann aber mehrten sich Experimente, die auf einen Teilchencharakter von Licht hindeuteten. Eines der prominentesten Beispiele ist ein Experiment von Lennard, das im Jahr 1902 durchgeführt wurde. Dabei wurde eine Metallplatte dem Licht einer bekannten Wellenlänge ausgesetzt. In Abbildung 8a ist die Versuchsanordnung skizziert. Die beiden Elektroden sind mit einer variablen Spannungsdifferenz verbunden und befinden sich im Vakuum, damit die Elektronen nicht durch Luft behindert werden. Je nach Frequenz und Intensität des einfallenden Lichtes und angelegter Spannung kann man nun einen Photostrom I_{Ph} messen. Der Verlauf des Photostromes in Abhängigkeit der Beschleunigungsspannung U ist in Abbildung 8b gezeigt. Man erkennt folgende wichtige Tatsachen: Bereits bei negativer Vorspannung $-U_0$ beginnt ein Photostrom zu fließen. Die Elektronen werden durch diese negative Spannung eigentlich "abgestoßen", treffen aber offenbar trotzdem auf die Elektrode. Außerdem geht der Photostrom bei einer bestimmten Spannung in einen Sättigungsbereich über.

Die Schlussfolgerungen von Lennard lauten gemäß diesen und weiteren Beobachtungen wie folgt:

- Die kinetische Energie $\frac{m_e v_e^2}{2}$, mit der die Elektronen die Elektrode verlassen, ist nur von der Frequenz ν des einfallenden Lichtes abhängig und nicht von dessen Intensität.
- Die Zahl der Photoelektronen ist proportional zur Intensität des Lichtes.
- Es gibt keine (messbare) Verzögerung zwischen Lichteinfall und Elektronenaustritt.
- Für die kinetische Energie der Elektronen muss gelten: $E_{kin} \geq e \cdot U_0$

Ähnliche Beobachtungen wurden auch von Hallwachs mithilfe eines Elektrometers gemacht. Dies ist ein einfach aufgebautes Gerät gemäß Abbildung 9, das Ladungen anzeigen kann. Durch Bestrahlung der Platte mit Licht wurde diese offenbar (durch einen Zeigerausschlag angezeigt) aufgeladen. Einzig mögliche Schlussfolgerung war dann, dass Elektronen die Platte verlassen haben müssen.

Diese Beobachtungen konnten mit den gegenwärtigen Modellen nicht erklärt werden. Im Wellenmodell des Lichtes sollte eine hohe Intensität auch mehr Energie an die Elektronen übertragen. Außerdem würde sich die Energie des Lichtes auf alle bestrahlten Elektronen verteilen, was zu deutlich seltenerer Elektronenemission führen müsste. Dies ist aber offenbar nicht der Fall. Die Erklärung dieser Phänomene wurde in einer Veröffentlichung von Albert Einstein im Jahr 1905 durch die "Lichtquantenhypothese" geliefert. Für diese erhielt Einstein im Jahr 1921 den Nobelpreis. Das Modell besagt, dass jedes Photon mit der Energie $E = h \cdot \nu$ diese vollständig an genau ein Elektron abgibt. Die Energiebilanz der Photonenenergie E_{Ph} zusammen mit der kinetischen Energie der Elektronen $E_{kin,e}$ und der spezifischen Austrittsarbeit W_A ergibt dann

Photoelektrischer Effekt

$$E_{kin} = -e \cdot U_0 = h \cdot \nu - W_A. \quad (10.1)$$

In Abbildung 10 ist dieser Zusammenhang gezeigt. Der lineare Zusammenhang der Messwerte $E_{kin} = C \cdot \nu$ ist gut zu erkennen. Auch lässt sich durch Analyse der Messwerte nun die Austrittsarbeit der Elektronen bestimmen – dies entspricht genau dem Abschnitt der y -Achse unterhalb des Nulldurchgangs wie in Abbildung 10 gezeigt.

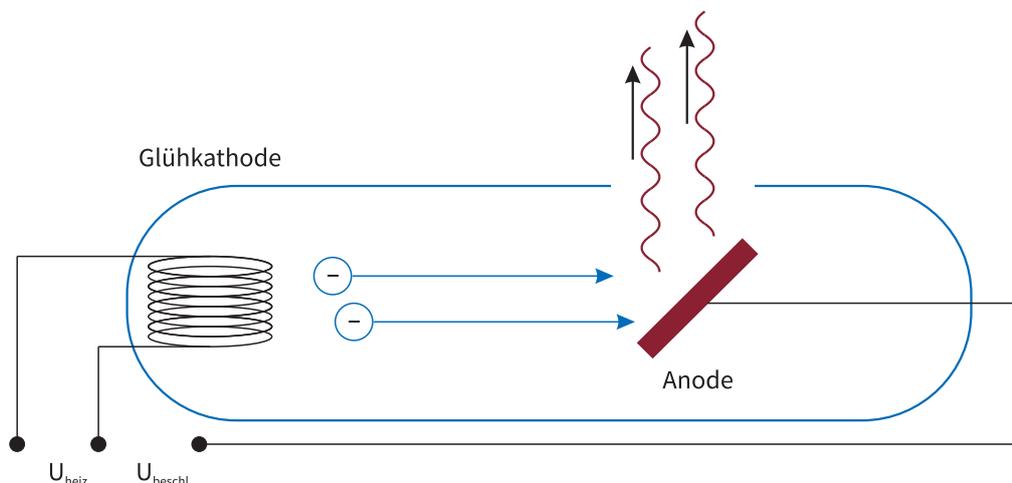


Abb. 11. Röntgenröhre zur Erzeugung von Röntgenstrahlung.

ABSCHNITT 11

Röntgenstrahlung

Den soeben vorgestellten Effekt gibt es im Prinzip auch in umgekehrter Richtung. Die grundlegenden Ursachen sind zwar verschieden, aber grob betrachtet ist es auch möglich durch Beschuss einer Probe mit Elektronen die entsprechenden Lichtquanten zu erzeugen. Wir werden aber sehen, dass die Prozesse anderer Natur sind und eben nicht nur die Photonen mit Energie $E_{ph} = h\nu = E_{kin} + W_A$ erzeugen. Schon 1895 wurde dieser Effekt von Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923) entdeckt. Als er eine Gasentladungsröhre mit hohen Spannungen (schnellen Elektronen) betrieb, wies er eine bisher unbekannte Art von Strahlung nach die von der Anode ausging. Diese unbekannte Strahlung konnte Gewebe und Holz durchdringen. Er nannte diese Strahlung *X-Rays*. Ihm zu Ehren wird die Strahlung im deutschsprachigen Raum heutzutage *Röntgenstrahlung* genannt.

Röntgenstrahlung wird üblicherweise mit einer Röntgenröhre erzeugt (siehe Abbildung 11). Es handelt sich dabei um ein evakuiertes Glasgefäß mit einer Kathode und Anode. Die Kathode sendet durch Glühemission Elektronen aus wenn sie von einem Strom durchflossen wird. Die Elektronen schweben zunächst in einer Art "Wolke" im Raum nahe der Kathode. Wird nun zwischen Kathode und Anode eine hohe Spannung (im kV Bereich!) angelegt, werden die Elektronen stark zur Anode hin beschleunigt. Sie nehmen bei Durchlaufen der Potentialdifferenz die kinetische Energie $E_{kin} = e \cdot U$ auf. Durch die hohe Spannung können dies Energien im keV oder MeV-Bereich sein.³ Wenn die Elektronen mit hoher Energie auf die Anode treffen, werden auf zwei unterschiedliche Arten Röntgenstrahlung erzeugt. Wir werden diese beiden Strahlungstypen als *Bremssstrahlung* und als *charakteristische Röntgenstrahlung* bezeichnen. In welchem Bereich die Strahlungsenergien liegen ist außerdem namensgebend für die Strahlung: Strahlung mit einer Energie < 10 keV wird weiche Röntgenstrahlung genannt, bei einer Energie > 10 keV spricht man von harter Röntgenstrahlung.

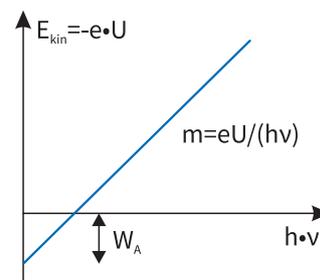


Abb. 10. Die Grafik zeigt den Zusammenhang von Gleichung 10.1. Aus der Steigung der Kurve lässt sich beispielsweise das Planck'sche Wirkungsquantum h bestimmen.

³ Die Einheit eV wird in der Vorlesung das Joule als Maß für die Energie mehr und mehr verdrängen. Die Umrechnung zwischen eV und J ist einfach: Man kann sich das e aus eV direkt als eine Multiplikationsangabe mit der Elektronenladung e vorstellen. Möchte man aus eV die SI-Einheit Joule erhalten, muss man also mit e multiplizieren:

$$[eV] = \frac{[J]}{e} \quad (11.1)$$

$$[J] = [eV] \cdot e \quad (11.2)$$

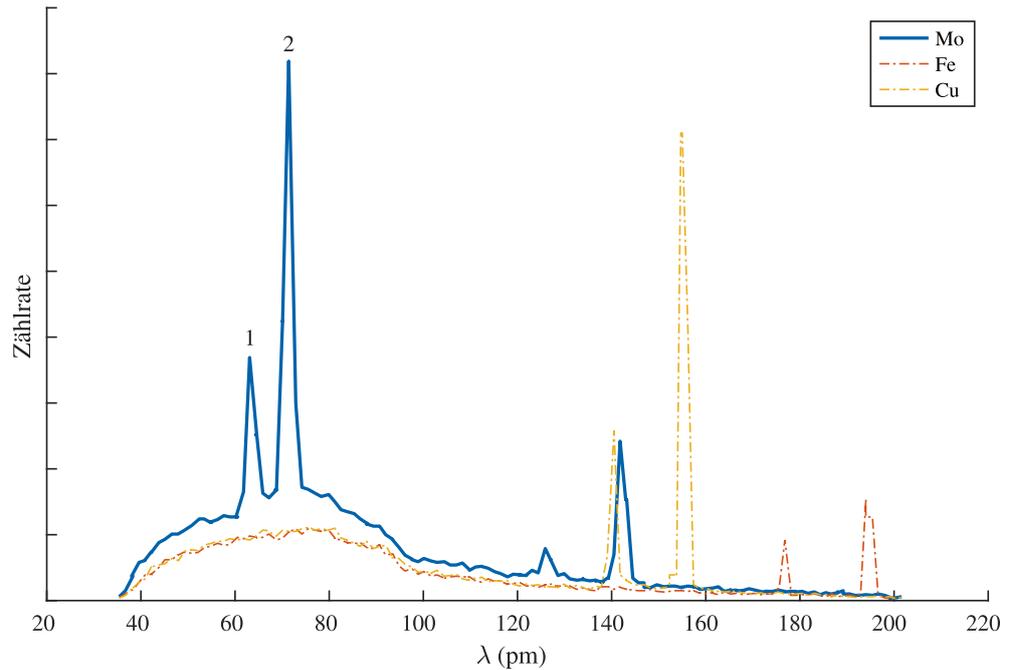


Abb. 12. Röntgenspektren verschiedener Anoden (Molybdän, Eisen und Kupfer). Die markierten Peaks zeigen die K_α (2) und K_β (1)-Linien. [1]

ABSCHNITT 11.1

Bremsstrahlung

Die (Röntgen-)Bremsstrahlung entsteht durch die Abbremsung der Elektronen im Anodenmaterial. Wie beim Rutherford'schen Streuversuch handelt es sich wieder um eine Wechselwirkung durch Coulomb-Kräfte statt durch Stöße fester Körper. Die negativ geladenen Elektronen dringen also mit $E_{\text{kin},1}$ in den Atomverbund des Anodenmaterials ein und werden durch die Anwesenheit von als fest angenommenen (weil im Kristallgitter und sehr schwer) Atomkernen umgelenkt. Bei diesen Richtungsänderungen strahlt das Elektron jeweils gemäß den Maxwellgleichungen Energie ab und hat nach dem Stoß nur noch die Energie $E_{\text{kin},2}$. Es verliert also bei jedem Stoß die Energie

$$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},1} - E_{\text{kin},2} = h \cdot \nu \quad (11.3)$$

,die dann in Form eines Photons mit der Energie $E_{P_h} = h \cdot \nu$ abgestrahlt wird. Weil die Konstellationen dieser Coulomb-Stöße immer zufällig sind – mal wird das Elektron stark beschleunigt, mal weniger stark – ergibt sich aus den so erzeugten Photonen ein kontinuierliches Spektrum wie die glatte Kurve in Abbildung 12 zeigt. Die größtmögliche Frequenz bzw. Energie ist dabei durch die Beschleunigungsspannung gegeben. In diesem Fall würde dann also ein Elektron mit der Energie $E_{\text{kin}} = e \cdot U$ seine gesamte Energie bei einem Stoß verlieren und abstrahlen. Das führt zu einer maximal möglichen Frequenz von $\nu_{\text{Brems,max}} = \frac{e \cdot U}{h}$.

ABSCHNITT 11.2

Charakteristische Röntgenstrahlung

Es gibt noch eine zweite Möglichkeit, wie die schnellen Elektronen ihre Energie an die Anodenatome abgeben können – dafür müssen wir allerdings etwas im Stoff vorgreifen. Die Elektronen der Hülle der Anodenatome befinden sich demnach auf diskreten Energieniveaus E_n , deren Lage für die Atomart spezifisch ist. Es ist nun möglich, dass das anfliegende Elektron seine Energie dazu nutzt, um eines der Hüllenelektronen eines Anodenatoms auf ein höheres Energieniveau anzuheben. Das Atom befindet sich dann insgesamt in einem angeregten Zustand ($A \rightarrow A^*$). Diesen Anregungsprozess kann man schreiben als

$$e^-(E_{\text{kin},1}) + A \rightarrow A^* + e^-(E_{\text{kin},2}). \quad (11.4)$$

Dieser Zustand ist aber nicht stabil, sondern nach einer kurzen Zeit wird sich wieder der energetisch günstigste Zustand (“Grundzustand”) herstellen. Diese “Abregung” läuft nach dem Schema

$$A^*(E_i) \rightarrow A(E_k) + h\nu_{ik} \quad (11.5)$$

ab. Dabei ist die Energiebilanz mit der des anregenden Elektrons verbunden über

$$E_i - E_k = E_{\text{kin},1} - E_{\text{kin},2}. \quad (11.6)$$

Es können also nur Photonen durch diesen Prozess emittiert werden, deren Energie genau zu einer möglichen Differenz von Energieniveaus in der Atomhülle der Anodenatome passt. Daher besteht das charakteristische Röntgenspektrum auch aus diskreten Peaks anstelle einer kontinuierlichen Verteilung wie in Abbildung 12 gut zu sehen ist. Da die Energiedifferenzen $E_i - E_k$ für jede Atomart unterschiedlich sind, kann man also durch Kenntnis der Peakpositionen im Röntgenspektrum das Anodenmaterial bestimmen.

Die Untersuchung eines Materials durch Analyse der charakteristischen Röntgenstrahlung wird auch Röntgenemissionsspektroskopie (XES) genannt. Man damit beispielsweise Unreinheiten in Materialien detektieren.

ABSCHNITT 12

Compton-Effekt

Die Entdeckung der Röntgenstrahlung führte nun zu neuen experimentellen Möglichkeiten. Arthur Holly Compton (1892-1962) untersuchte die Wechselwirkung harter Röntgenstrahlung mit einem Festkörper. Im Wellenmodell des Lichtes würde man erwarten, dass die einfallende Lichtwelle die Elektronen des Targetmaterials in Schwingung versetzt und dann wieder (abgeschwächt) mit gleicher Frequenz das Target verlässt. Beobachtet wurde aber eine Verringerung der Frequenz beim ausgetretenen Licht. Für das Experiment und dessen Erklärung wurde Compton 1927 der Nobelpreis verliehen. Für die Erklärung muss man annehmen, dass sich das Licht als Teilchen verhält. Um die üblichen Rechnungen der Kinematik für Stöße zu benutzen, benötigt man die Angabe eines Impulses für die Photonen. Der bekannte Impuls $p = m \cdot v$ ergibt hierbei keinen Sinn, da die Masse des Photons $m_{ph} = 0$ sein muss. Man kann aber über die Energie eine Impulsbeschreibung herleiten, allerdings muss man hierfür die relativistische Beschreibung (Vorgriff!) verwenden. Die relativistische Energie berechnet sich nach

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (12.1)$$

Da das Photon keine Ruhemasse m hat, folgt daraus $E = p \cdot c$. Mit der bekannten Gleichung $E = h\nu$ kann man also den Impuls eines Photons bestimmen durch

Impuls des Photons

$$E = p \cdot c = h\nu \rightarrow p = \frac{h\nu}{c} = \frac{2\pi}{2\pi} \frac{h}{\underbrace{\lambda}_{\lambda=c/\nu}} = \hbar k. \quad (12.2)$$

Die Konstante \hbar wird noch oft verwendet und errechnet sich durch $\hbar = h/(2\pi)$. Wenn man dem Photon nun also diesen Impuls zuordnet, kann man das Experiment von Compton als Stoß (direkt und elastisch!) eines Photons mit Impuls $p_{Ph} = \hbar k$ und einem ruhenden Elektron mit schwacher Atombindung ($E_B \ll h\nu_{Ph}$) beschreiben wie es in Abbildung 13 skizziert ist. Der Stoßprozess ist dann

$$h \cdot \nu_0 \Big|_{vor} + e^- \Big|_{E_{kin}=0} \rightarrow h \cdot \nu_s \Big|_{nach} + e^- \Big|_{E_{kin}} \quad (12.3)$$

Nachdem man diesen Stoßprozess durch relativistische Energie- und Impulserhaltung betrachtet hat, findet man die Relation

Compton-Effekt

$$\Delta\lambda = \lambda_s - \lambda_0 = 2\lambda_C \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (12.4)$$

mit der Compton-Wellenlänge λ_C des Elektrons

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0c} \quad (12.5)$$

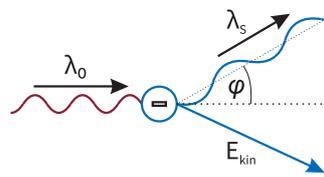


Abb. 13. Energie- und Impulsbilanz bei der Compton-Streuung. Die Beobachtung lässt sich nur erklären, wenn dem Photon Teilcheneigenschaften zugeordnet werden.

ABSCHNITT 13

Zusammenfassung: Welle-Teilchen Dualismus

Wir haben in den letzten Kapiteln das Licht sowohl als Teilchen- als auch als Welle kennengelernt. Für die Erklärung einiger Beobachtungen (Photoeffekt, Compton-Effekt) war es nötig, dem Licht Teilcheneigenschaften zuzuordnen. Diese Teilcheneigenschaften wiederum hängen von typischen Welleneigenschaften wie Frequenz oder Wellenlänge ab. Dieser sogenannte Welle-Teilchen-Dualismus ist ein wesentliches Element wenn man sich mit Lichtphänomenen beschäftigt. Licht ist also nicht Welle oder Teilchen, sondern sowohl Welle als auch Teilchen. Eine wirklich vollständige Beschreibung von Licht wird erst im Rahmen der Quantenelektrodynamik (QED) möglich, die aber über die Grundlagen im Studium hinausgeht.

ABSCHNITT 14

de Broglie Wellenlänge

Nachdem es sich für Licht als sinnvoll erwiesen hat, einem vermeintlichen Wellenobjekt Teilcheneigenschaften zuzuschreiben, wurde auch der umgekehrte Weg beschritten. 1924 schlug Louis de Broglie (1892-1987) vor, die Impulsbeschreibung von Licht $p = \hbar k$ auch auf Teilchen wie Elektronen, Atome und Neutronen anzuwenden. Da diese Teilchen eine bekannte Masse haben, kann man über

$$p = m \cdot v = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_{dB}} \quad (14.1)$$

jedem Teilchen die de Broglie-Wellenlänge

de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_{\text{kin}}}} \quad (14.2)$$

zuordnen. Durch den sehr kleinen Zahlenwert von h erkennt man leicht, dass es sich dabei um sehr kleine Wellenlängen bzw. sehr große Frequenzen handelt. Das macht es experimentell schwierig, Wellenphänomene zu beobachten. Für diese neuartige Idee erhielt de Broglie 1929 den Nobelpreis.

Um ein Interferenzmuster eines Elektronenstrahles (m_e) durch einen Einzelspaltversuch zu beobachten, dürfte der Spalt nur einige Nanometer (oder weniger) breit sein!

Erst 1929 wurde eine erfolgreiche experimentelle Bestätigung durch Davisson und Germer möglich. Dabei wurde die Elektronenbeugung an einem MgO-Kristall nachgewiesen. Dabei stellt also ein Elektronenstrahl die einfallende Welle dar und der MgO-Kristall wirkt als Beugungsgitter. Später konnten auch Beugungseffekte neutraler Atome nachgewiesen werden.

ABSCHNITT 14.1

Materiewellen und Wellenfunktionen

Louis de Broglie hat vorhergesagt, dass man Teilchen immer auch Welleneigenschaften zuordnen kann. Als konsequente Weiterentwicklung muss man sich nun auch fragen, ob diese Teilchen nicht auch durch eine Wellenfunktion beschrieben werden können statt durch eine Massepunkts-Bewegung. Ein direkter Ansatz wäre es, statt der üblichen Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = C \cdot e^{i(\omega t - kx)} \quad (14.3)$$

die Kreisfrequenz ω und die Wellenzahl k durch $E = h\nu = \hbar\omega$ und $p = \hbar k$ zu ersetzen. Dies führt zur Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = C \cdot e^{i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)} = C \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}, \quad (14.4)$$

die nun durch Parameter festgelegt, die typische Teilcheneigenschaften darstellen (E , p). Es gibt aber ein grundlegendes Problem mit dieser einfachen Formulierung: Die Wellenfunktion 14.4 ist nicht lokalisiert, wie man es von einem Teilchen erwarten kann. Diese Welle breitet sich im ganzen Raum aus, was der kinetischen Beschreibung einer Teilchenbahn widerspricht. Im folgenden Abschnitt betrachten wir aber eine Möglichkeit, ψ so zu modifizieren, dass der Teilchencharakter besser berücksichtigt wird.

ABSCHNITT 14.2

Wellenpakete

Statt von einer ebenen Welle ausgehend die Wellenfunktion für ein Teilchen zu formulieren, soll nun das Modell der Wellenpakete besprochen werden. Grundlage dafür ist die Überlagerung von mehreren harmonischen Wellen mit jeweils verschiedenen Frequenzen und/oder Amplituden. Einfaches Beispiel hierfür ist die sogenannte "Schwebung" aus Abbildung 14. Dabei werden zwei Wellen gleicher Amplitude, aber unterschiedlicher Frequenz miteinander addiert. Die entstehende Welle besitzt eine Hüllkurve, in der das Signal dann mit der Frequenz $f_{\text{Res}} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ oszilliert. Die Hüllkurve selbst hat die

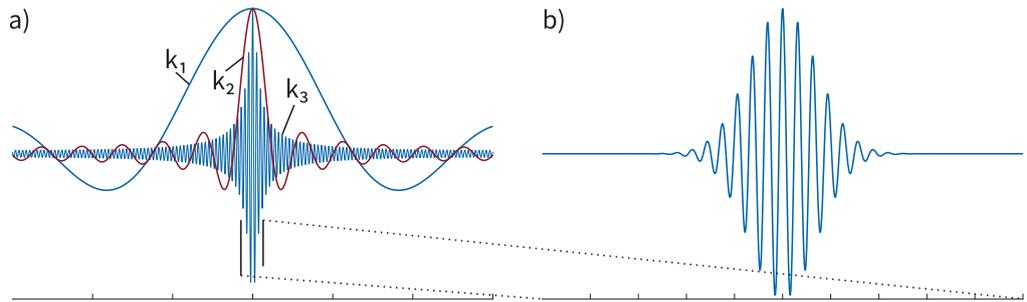


Abb. 15. a) Der Verlauf der Summation mit zunehmendem Bereich für k . Der Summationsbereich nimmt von k_1 bis k_3 zu und offenbar schränkt sich der Raumbereich der Welle dadurch immer mehr ein. b) Für unendliche Summation folgt schließlich das gesuchte Wellenpaket.

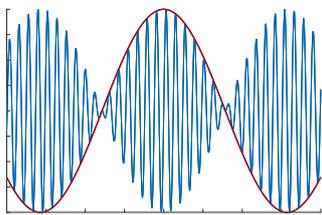


Abb. 14. Überlagerung zweier Wellenfunktionen resultiert in einer Schwebung.

⁴ Für alle Werte von x finden sich für alle Zeiten die "normalen" Amplituden. Schöner wäre es, wenn die Amplituden nur bei bestimmten (x,t) -Kombinationen relevant wären.

⁵ Dies tut man auch in der Elektrotechnik, wo man etwa durch Überlagerung von verschiedenen Sinus-Schwingungen ein Rechtecksignal oder eine Sägezahnspannung erzeugt.

Frequenz $f_{\text{Hüll}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$. Diese überlagerte Welle ist aber noch immer unendlich im Raum ausge dehnt.⁴ Man kann die Wellenfunktion aber tatsächlich auf einen bestimmten Raumbereich begrenzen, indem man auf geschickte Art und Weise unendlich viele Funktionen verschiedener Frequenzen überlagert.⁵ Hierfür schreiben wir zunächst die Wellenfunktion mit einer Amplitude $C(k)$, die nun die Stärke der aufgeprägten Wellenfunktionen repräsentieren soll. Ohne Begründung oder Herleitung wählen wir hier die folgende Zusammenstellung: Es sollen zur ursprünglichen Wellenfunktion mit Frequenz ω_0 und Wellenzahl k_0 noch weitere Wellen addiert werden, die

- eine Gauss-verteilte Amplitude $C(k)$ haben
- Wellenzahlen im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ aufweisen.

Daraus ergibt sich das Integral

$$\psi(x, t) = C_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{a}{2}\right)^2 (k-k_0)^2} e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} dk \quad (14.5)$$

mit der Amplitudenfunktion

$$C(k) = C_0 \cdot e^{-\left(\frac{a}{2}\right)^2 (k-k_0)^2} \quad (14.6)$$

Das Integral ist analytisch lösbar und ergibt für den Zeitpunkt $t = 0$ die Wellenfunktion

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \cdot e^{-x^2/a^2} e^{ik_0 x} \quad (14.7)$$

Diese Wellenfunktion ist in Abbildung 15b dargestellt. Abbildung 15a soll veranschaulichen, wie der Weg zu einer lokalisierten Welle erfolgt. Mit zunehmender Breite des Integrationsbereiches aus Gleichung 14.5 werden die größeren Amplituden auf einen immer engeren Raumbereich konzentriert. So sieht man also bei stetiger Zunahme von k_1 über k_2 zu k_3 , wie die Ausläufer in den Randbereichen sich außerdem mehr und mehr abflachen. Für einen unendlichen Integrationsbereich zeigt sich dann das fertige Wellenpaket in Abbildung 15b. Zu einem gegebenen Zeitpunkt t ist demnach die Amplitude der Wellenfunktion auf einen bestimmten Ort beschränkt und wir haben somit die gesuchte Lokalisierung des Teilchens erreicht. Das Maximum dieser Funktion befindet sich (Rechnung erspare ich uns hier) immer bei $\frac{d\omega}{dk} \cdot t$. Dies ist genau die Definition der Gruppengeschwindigkeit einer Welle. Diese Gruppengeschwindigkeit ist über

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v_T \quad (14.8)$$

als Teilchengeschwindigkeit v_T identifizierbar.⁶ Damit bewegt sich also das Maximum der Wellenfunktion mit der Geschwindigkeit $v_T \cdot t$ im Raum fort. Ein solches Wellenpaket kann also sowohl für Welleneigenschaften (es ist ja schließlich eine Wellenfunktion mit Frequenz und Wellenlänge) als auch für die Beschreibung der Teilcheneigenschaften (Ort, Impuls, Geschwindigkeit) genutzt werden.

⁶ Zur Erinnerung: $\omega = E/\hbar = p^2/(2m\hbar) = (\hbar k^2)/(2m)$

Wir haben damit das Problem der Lokalisierung der Wellenfunktion gelöst, aber es bleiben noch immer Unstimmigkeiten bei der Interpretation der Wellenfunktion als Teilchenbeschreibung:

- ψ kann komplexe Werte annehmen. Dafür ist keine physikalisch sinnvolle Interpretation möglich.
- Die Wellenfunktion läuft mit der Zeit auseinander (siehe Übungsaufgabe!), ein echtes Teilchen aber behält natürlich seine Lokalisation bei.

Eine Möglichkeit, die Wellenfunktion eines Teilchens physikalisch sinnvoll zu interpretieren ist die folgende, gemeinhin auch als “Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation” bezeichnete Variante.

ABSCHNITT 14.3

statistische Deutung der Wellenfunktion

Um 1926 wurde von Max Born vorgeschlagen, die Wellenfunktion ψ als eine Wahrscheinlichkeitsdichte zu interpretieren. Dabei solle das Quadrat der Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeit $W(x, t)$ dafür darstellen, dass sich ein Teilchen zur Zeit t in einem Ortsintervall x bis $x + dx$ aufhält:

Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation

$$W(x, t)dx = |\psi(x, t)|^2 dx \quad (14.9)$$

Damit diese Interpretation von $|\psi(x, t)|^2$ als Wahrscheinlichkeit sinnvoll ist, muss man dafür sorgen, dass für die Wahrscheinlichkeiten W auch das Intervall $0 \dots 1$ abgedeckt wird. Man könnte auch sagen, das Teilchen “muss sich irgendwo befinden”. Dieses Verhalten kann man mit der Normierung

Normierung der Wellenfunktion

$$\int_{x=-\infty}^{x=\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (14.10)$$

sicherstellen. Mit dieser Interpretation ergibt sich dann, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen im Zentrum des Wellenpaketes zu finden, am größten ist. Jedoch ist auch in einer kleinen Umgebung darum die Wahrscheinlichkeit nicht verschwindend klein - der Aufenthaltsort des Teilchens ist also in gewisser Weise “unscharf”...

Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation

Um die Unschärfe des Ortes in der Wellenfunktion näher zu untersuchen, betrachten wir nun die Wellenpakete mit den Gauss-Verteilten Amplituden gemäß Gleichung 14.6. Es ergibt sich also für das gesuchte Wellenpaket das Integral⁷ nach 14.5

⁷ Es wurde hier gleich etwas umgestellt...

$$\psi(x, t) = C_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 (k-k_0)^2} e^{i(kx-\omega t)} dk \quad (15.1)$$

, welches analytisch gelöst werden kann. Um die Normierung gleich vorwegzunehmen, setzt man nun $C_0 = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}}$ und erhält die Funktion bzw. die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Wellenpaket zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\text{Wellenfunktion :} \quad \psi(x, t) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}} \cdot e^{ik_0 x} \quad (15.2)$$

$$\text{Wahrscheinlichkeitsdichte :} \quad |\psi(x, t)|^2 = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \quad (15.3)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte wollen wir nun eingehender untersuchen. Für den gewählten Zeitpunkt $t = 0$ ist die Amplitude offenbar bei $x = 0$ maximal, weil dort die e -Funktion ihren größten Wert annimmt. Dies ist also der wahrscheinlichste Aufenthaltsort. An den Punkten $x_{1,2} = \pm \frac{a}{2}$ ist $|\psi|^2$ auf $1/\sqrt{e}$ abgesunken. Die "volle Breite" der Wellenfunktion wird nun üblicherweise genau mit diesen Werten $x_1 - x_2 = a = \Delta x$ definiert (siehe Abbildung 16 oben). Diese Differenz wird auch als Ortsunschärfe bezeichnet.

Wie sich die Verteilung der Wellenzahlen verhält, kann man durch ähnliche Überlegungen an der Amplitudenfunktion 14.6 untersuchen. Hier sinkt der Funktionswert von $|C(k)|^2$ bei den Grenzen $k_{1,2} = \pm \frac{1}{2a}$ auf den $1/\sqrt{e}$ -Teil ab. Die Breite der Verteilung ist dann $\Delta k = k_1 - k_2 = \frac{1}{a}$ (siehe Abbildung 16 unten). Über den Parameter a kann man nun die Ortsunschärfe und die Unschärfe der Wellenzahlen verbinden und erhält $\Delta x \cdot \Delta k = 1$. Durch die Impulsbeschreibung von de Broglie ($p = \hbar k$) kann man nun den Wellenzahlintervall Δk durch die Impulsunschärfe $\Delta p = \hbar \cdot \Delta k$ ersetzen und erhält so $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$. Man kann mathematisch beweisen, dass die hier gewählte Gauss-Verteilung für die Wellenzahlamplituden zum geringst-möglichen Produkt aus Δx und Δp führt. Somit folgt die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation:

Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (15.4)$$

Analog, wenn man ein Zeitintervall statt ein Ortsintervall betrachtet, folgt daraus die Unschärferelation für Energie und Zeit

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \quad (15.5)$$

Diese Ergebnisse stehen im starken Gegensatz zur klassischen deterministischen Physik. Die Relation 15.4 besagt, dass es nicht möglich ist den Impuls und den Ort eines Teilchens gleichzeitig exakt zu kennen. Durch das Produkt muss eine hohe Präzision des einen Wertes durch eine geringere Präzision des anderen Wertes erkaufte werden. Wenn man nun auch noch die zeitliche Entwicklung der Bewegung betrachtet, verstärken sich

die Auswirkungen noch: Ein unscharfer Impuls zur Zeit t_0 führt zu einer späteren Zeit t_1 zu einem großen Toleranzbereich in dem ein Teilchen anzutreffen ist. Die Energie-Zeit-Relation bedeutet außerdem, dass bei sehr kleinen Zeitintervallen die Energie eines Elementarteilchens in bestimmten Bereichen schwankt.⁸

Welche Konstante genau auf der rechten Seite der Ungleichung 15.4 steht, hängt von der Definition der Breite der Verteilungen ab. Wenn die Funktionen auf den $\frac{1}{e}$ -ten Teil abfallen sollen, folgt $\Delta x \cdot \Delta p \geq 4\hbar$. Wenn man die Breite bis zur ersten Nullstelle definiert, folgt $\Delta x \cdot \Delta p \geq h$.

ABSCHNITT 15.1

Casimir-Effekt

Wir haben soeben gelernt, dass auf sehr kurzen Zeitskalen auch im Vakuum Energie erzeugt und wieder vernichtet werden kann. Darauf beruht der sogenannte Casimir-Effekt, der eine gespenstisch anmutende Kraft zwischen zwei Objekten vorhersagt.

Man nimmt dafür an, dass aus den Vakuumfluktuationen für kurze Zeiten sogenannte virtuelle Teilchen geschaffen werden. Um die Gesetze der Energieerhaltung nicht zu verletzen, müssen diese Teilchen auch stets wieder vernichtet werden. Ein möglicher Prozess ist etwa die Entstehung von Teilchen- Antiteilchenpaaren für $\Delta t \approx \frac{\Delta E}{\hbar}$, die sich nach Entstehung durch Annihilation wieder vernichten. Meist werden bei diesem Prozess Photonen erzeugt, aber auch andere Teilchenarten sind möglich. Dieser Prozess ist nicht spekulativ, sondern kann direkt messtechnisch bestätigt werden (angeregte Atome springen wegen Vakuumfluktuationen auf Grundzustand). Schwieriger zu messen ist der nun folgestellte Casimir-Effekt: Eine Skizze zum Effekt ist in Abbildung 17 zu sehen. Die Platten mit der Fläche A seien hier sehr dicht beieinander. Der Casimir-Effekt beruht nun darauf, dass der Strahlungsdruck im Außenbereich der Platten größer ist als dazwischen und es so eine effektive Kraftwirkung zum Zentrum gibt. Die Vakuumenergie, die für alle Energiequanten entsteht kann man als

$$E_0 = \sum_k \hbar \cdot \omega_k \tag{15.6}$$

ausdrücken. Wir betrachten nun alles zunächst als eindimensionales Problem. Zwischen den Platten mit sehr geringem Abstand, können nur Photonen mit Wellenlängen existieren, deren Wellenlängen auch "exakt" zwischen die Platten mit Abstand L passen. Das ergibt eine Einschränkung für die Photonen-Wellenzahl⁹

$$L \cdot k = \nu\pi \rightarrow k = \frac{\nu\pi}{L} \quad ; \nu = 1, 2, 3, \dots \tag{15.7}$$

mit ν als Zählvariable für die möglichen Vielfachen der Wellenlänge. Innerhalb der Platten beträgt dann die Vakuumsenergie:

$$E_0 = \sum_k \hbar \cdot \omega_k = \sum_k \hbar \cdot c \cdot k = \frac{\pi\hbar c}{L} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \tag{15.8}$$

. Für den Bereich außerhalb der Platten gilt die Einschränkung für die Wellenzahlen nicht. Damit wird die Energie im Außenbereich zu

$$E_{\text{außen}} = \frac{\pi\hbar c}{L} \int_{\nu=0}^{\infty} \nu \cdot d\nu \tag{15.9}$$

⁸ Wir sehen hier auf einfache Weise die Auswirkungen der Quantenelektrodynamik (QED), die auch Energieschwankungen im Vakuum (auf kleinsten Zeitskalen) beschreibt – manchmal wird dieses Phänomen populär auch als Quantenschaum bezeichnet.

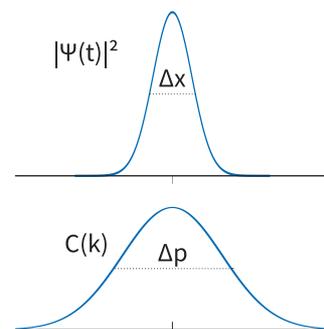


Abb. 16. (oben) Ortsunschärfe der Wellenfunktion eines Teilchens. (unten) Unschärfe der Wellenzahl bzw. des Impulses.

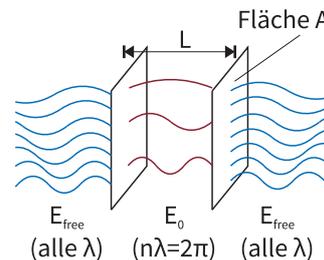


Abb. 17. Durch Vakuumfluktuation werden beim Casimir-Effekt nahe Platten zusammengedrückt.

⁹ Wir gehen von Wellenfunktionen aus. Damit die Randbedingungen zu den Platten passen, muss etwa eine Sinus-Funktion $\sin(k \cdot x)$ dort immer Null sein, dass führt zu $k \cdot x = \pi, 2\pi, \dots$

Die Energiedifferenz zwischen diesen beiden Termen beträgt dann

$$\Delta E = E_0 - E_{\text{aussen}} = \frac{\pi \hbar c}{L} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu - \int_{\nu=0}^{\infty} \nu \cdot d\nu \right) \quad (15.10)$$

Diesen Ausdruck kann man mit einer Summenformel analytisch auswerten und kommt zum Ergebnis

$$\Delta E = -\frac{\pi \hbar c}{12L} \rightarrow F = \frac{\partial \Delta E}{\partial L} = -\frac{\pi \hbar c}{12L^2}. \quad (15.11)$$

Wenn man nun die Betrachtungen im dreidimensionalen Raum macht, ändern sich einige nur die konstanten Zahlenwerte. Bezogen auf eine Fläche der Platten A erhält man also die tatsächlichen Aussagen für den 3D-Fall:

Casimir-Effekt

$$E_{\text{Cas}} = \frac{\pi^2 \hbar c}{720L^3} \cdot A \quad (15.12)$$

$$F_{\text{Cas}} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240L^4} \cdot A \quad (15.13)$$

Dies ist eine anziehende Kraft, die bewirkt dass die beiden Platten näher zusammengedrückt werden.

Beispiel: Zwei Metallplatten der Fläche $A = 1 \text{ cm}^2$ befinden sich in einem Abstand von $L = 1 \mu\text{m}$. Die wirkende Casimir-Kraft ist dann $F_{\text{Cas}} \approx 1.3 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

Diese vorhergesagte Kraft wurde experimentell im %-Bereich bestätigt. Meist wird die Kraft zwischen einer Kugel und einer Planfläche gemessen.

Die Casimir-Kraft hat starke Auswirkungen auf Technik im Nanometer-Maßstab. So bewirkt sie etwa das kleine Nanomechaniken "zusammenkleben". Durch diesen Effekt wird also sozusagen eine problematische Grenze für die Miniaturisierung von Technik geschaffen.

ABSCHNITT 15.2

Auseinanderlaufen des Wellenpaketes

Wie wir soeben gesehen haben, nimmt die Unsicherheit über die Position und den Impuls eines Teilchens mit der Zeit zu, falls man die Werte nicht ständig misst. Wie kann man dieses Phänomen quantitativ erfassen? Die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Teilchens kann man, wie bereits gezeigt, über die Gruppengeschwindigkeit der Wellenfunktion $v_T = v_g = \frac{p}{m}$ beschreiben. Durch die Unschärferelation kennen wir nun aber lediglich den Impuls mit einer gewissen Toleranz, nämlich $p \pm \Delta p$. Die Unschärfe der Geschwindigkeit folgt dann durch einsetzen:

$$\Delta v_g = \frac{1}{m} \Delta p = \frac{1}{m} \frac{\hbar}{\Delta x_0} \quad (15.14)$$

Hierbei ist Δx_0 die ursprüngliche Breite des Wellenpaketes. Der Weg-Zeit-Zusammenhang wird dann

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 + \Delta v_g \cdot t = \Delta x_0 + \frac{\hbar}{m \cdot \Delta x_0} \cdot t \quad (15.15)$$

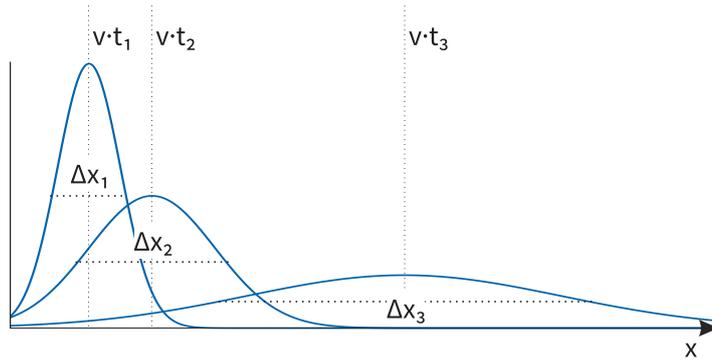


Abb. 18. Die Breite eines Wellenpaketes vergrößert sich bei fortschreitender Zeit. Die Fläche der Wellenfunktion bleibt erhalten.

Wie in Abbildung 18 gezeigt, nimmt die Breite des Wellenpaketes also mit der Zeit zu. Interessanterweise wird dieses Auseinanderlaufen des Wellenpaketes besonders stark, wenn die ursprüngliche Breite gering war.¹⁰

Obwohl die Breite des Wellenpaketes mit der Zeit zunimmt, ändert sich die gesamte Fläche jedoch nicht. Dies wird durch die Normierung (die auch die Zeitkoordinate mit einschließt) durch Gleichung 14.10 sichergestellt.

¹⁰ $\Delta v_g = \frac{\hbar}{m \cdot \Delta x_0}$ hängt indirekt proportional von Δx_0 ab.

ABSCHNITT 16

Alternative Deutungen der Quantentheorie

Dieser Abschnitt wird später noch ergänzt:

- Kopenhagener Deutung
- Viele-Welten Hypothese
- Dynamischer Kollaps

Quantenphysik

TEIL

IV

Der Grund dafür, daß unser fühlendes wahrnehmendes und denkendes Ich in unserem naturwissenschaftlichen Weltbild nirgends auftritt, kann leicht in fünf Worten ausgedrückt werden: Es ist selbst dieses Weltbild. Es ist mit dem Ganzen identisch und kann deshalb nicht als ein Teil darin enthalten sein.

Erwin Schrödinger, Geist und Materie, Zsolnay Verlag (1986)

Im vorherigen Kapitel wurden die Grundlagen für die moderne Beschreibung der Atome gelegt. Es fanden sich experimentelle Ergebnisse, die Teilchen einen Wellencharakter zuordnen. Ebenso zeigte sich, daß elektromagnetische Wellen auch Teilcheneigenschaften besitzen. Aus den gesammelten Erkenntnissen werden wir nun ein quantenphysikalisches Atommodell entwickeln. Dies erweitert die aktuell in der Gesellschaft allgemein verbreitete Vorstellung, die noch dem Rutherford'schen Atommodell entspringt: Ein Elektron (Teilchen!) kreist dabei um einen kleinen aber massereichen Atomkern (auch ein Teilchen!). Das modernere Modell wird auf Wellenfunktionen für die Elektronen und deren Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gegründet.

- 17. Bohr'sches Atommodell
- 18. Drehimpulsquantelung
- 19. Atomspektren
- 20. Stabilität der Atome
- 21. Franck-Hertz-Versuch
- 22. Schrödingergleichung
- 23. Anw. der stat. SGL
- 23.1. Kastenpotential I
- 23.2. T. vor Potentialstufe
- 23.3. Tunneleffekt
- 23.4. Harm. Oszillator
- 23.5. 2D Kastenpotential
- 23.6. kugelsym. Potential
- 24. SGL für Wasserstoff
- 25. Messprozess in QP
- 26. QM Operatoren
- 26.1. Dirac-Schreibweise
- 27. Quanten in der Schule

ABSCHNITT 17

Bohr'sches Atommodell

Im Jahr 1913 veröffentlichte Nils Bohr sein "Planetenmodell des Atoms", für das er 1922 den Nobelpreis erhielt. Das Modell war das Ergebnis seiner Bemühungen, die Energieniveaus der Elektronen zu verstehen. Dabei war der Ausgangspunkt das Modell von Rutherford. Wenn ein Elektron als Teilchen um den Atomkern kreist, muss sich die Zentrifugalkraft gerade mit der Coulomb-Anziehung ausgleichen und es muss gelten

$$F_Z = F_C \quad (17.1)$$

$$-\frac{m_e v^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z \cdot e^2}{r^2} \quad (17.2)$$

$$r = \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \quad (17.3)$$

Problematisch beim Ausdruck für den Radius ist nun, dass dieser gemäß Wahl von v beliebige kontinuierliche Werte annehmen könnte. Die Beobachtungen der Atomspektren zeigten aber, dass Elektronen immer nur diskrete Energien zu haben scheinen. Die neue Idee von Bohr war es nun, das Elektron durch eine Materiewelle mit der de Broglie-Wellenlänge λ_D zu beschreiben. Diese soll dann eine stehende Welle sein, deren vielfache Wellenlänge $n \cdot \lambda_D$ genau dem Bahnumfang $2\pi r$ entsprechen muss. Diese Annahmen

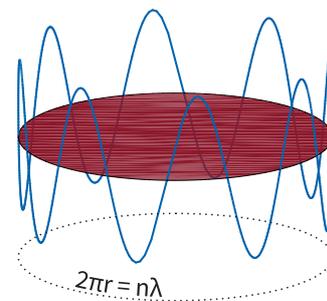


Abb. 19. zum Bohr'schen Atommodell: Der Bahnumfang muss das Vielfache der de-Broglie-Wellenlänge des Elektrons sein.

kann man nun in Gleichung 17.3 einsetzen:

$$\begin{aligned}\lambda_D &= \frac{h}{m \cdot v} \\ \rightarrow v &= \frac{h}{m \cdot \lambda_D} \\ 2\pi r &= n \cdot \lambda_D \quad ; n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

wird dann eingesetzt zu

Bohrscher Radius

$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e \cdot Z e^2} = \frac{n^2}{Z} a_0 \quad (17.4)$$

$$a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e \cdot e^2} = 5.2917 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (17.5)$$

wobei a_0 als erster Bohrscher Radius bezeichnet wird. Die möglichen Radien der Umlaufbahn sind nun nach Gleichung 17.4 nicht mehr kontinuierlich, sondern können abhängig von der Wahl für n nur noch diskrete Werte annehmen.

Das Wasserstoffatom besteht aus einem Elektron sowie einer positiven Kernladung ($Z = 1$). Für den niedrigsten energetischen Zustand ($n = 1$) folgt also, dass der Bahnradius des Elektrons

$$r = \frac{n^2}{Z} a_0 = \frac{1}{1} a_0 = a_0$$

genau dem Bohrschen Radius entspricht.

Mit der nun eingeführten Quantelung des Bahnradius bzw. der Bahngeschwindigkeit, folgt direkt auch die Quantelung der Energie des Elektrons. Diese setzt sich zusammen aus der kinetischen¹¹ und der potentiellen Energie E_{pot} im Coulombfeld des Kerns. Die potentielle Energie E_{pot} entspricht der bekannten Energie für ein Punktladungsfeld

$$E_{\text{pot}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (17.6)$$

und die kinetische Energie lässt sich aus Gleichung 17.2 herleiten:

$$-\frac{m_e v^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z \cdot e^2}{r^2} \quad | \cdot r \cdot \frac{1}{2} \quad (17.7)$$

$$\cancel{\frac{m_e v^2}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z \cdot e^2}{r} \quad (17.8)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} |E_{\text{pot}}| \quad (17.9)$$

Die Gesamtenergie E des Elektrons beträgt dann also

Energie im Bohrschen Atommodell

$$E_n = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_e e^2 \cdot Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -Ry^* \cdot \frac{Z^2}{n^2} \quad (17.10)$$

mit der Rydberg-Konstanten $Ry^* \approx 13.6 \text{ eV}$. Diese Energie entspricht gerade der Energie, die nötig ist um das Elektron (im Grundzustand) vom Atomkern vollständig

¹¹ Bahnsumlauf mit Geschwindigkeit v

zu lösen. Weil dabei ein Ion entsteht, nennt man diesen Vorgang auch Ionisierung bzw. E_n auch die Ionisierungsenergie.

Quantisierung des Drehimpulses

Dadurch, dass die Bahnradien durch die diskreten erlaubten Wellenlängen eingeschränkt wurden, sind auch nicht mehr alle Drehimpulse für das Elektron auf seiner Bahn erlaubt. Aus der Geschwindigkeit v_n

$$v_n = n \cdot \frac{h}{2\pi m_e r} \quad (18.1)$$

kann man durch Umstellen und Erweitern

Quantisierter Bahndrehimpuls

$$m_e \cdot r \cdot v = |l| = n \cdot \hbar \quad (18.2)$$

auch einen Ausdruck für den Drehimpuls herleiten. Diese Formulierung der Quantisierung ist äquivalent zu der Aussage $2\pi r = n \cdot \lambda_D$ aus dem vorigen Abschnitt.

Atomspektren

Die soeben hergeleiteten diskreten Energien der gebundenen Elektronen kann man direkt mit Experimenten beobachten. Schon 1859 entdeckten Kirchhoff und Bunsen, dass Atome nur Licht mit bestimmten Wellenlängen absorbieren oder emittieren können. Ein Versuchsaufbau zur Absorption von Licht ist in Abbildung 21 oben gezeigt. Eine Lichtquelle erzeugt Licht mit einem kontinuierlichen Spektrum. Dieses Licht wird durch einen Behälter mit atomarem Gas gelenkt. Dort kann dann das Licht möglicherweise mit den Gasatomen interagieren und ggf. absorbiert werden. Das wieder austretende Licht wird dann von einem Spektrometer (früher per Photoplatte wie in Abbildung 20) analysiert. Im Spektrum von Abbildung (21 unten) sieht man, dass offenbar bestimmte Wellenlängen der Lichtquelle vom Gas absorbiert wurden und die Absorptionszelle nicht verlassen konnten – deshalb wurde die Photoplatte an diesen Stellen nicht geschwärzt. Ein solches Linienspektrum ist charakteristisch für Atome die als Gas bzw. in verdampfter Form vorliegen. Das ist eine direkte Folge der diskreten, manchmal aber vielfältigen, Energiezustände in der Atomhülle. Die Eigenschaften von Atomspektren lassen sich in vereinfachter Form zusammenfassen als:

Eigenschaften von Atomspektren

- Absorbierte Wellenlängen können auch als Emission auftreten.
- Die Emissions-/Absorptionsspektren sind für jedes Atom charakteristisch und eindeutig.
- Spektrallinien sind nicht beliebig scharf, sondern haben eine “natürliche Linienbreite”.

TODO: Spektrometer / Eigenbau / Schulversuche zum Spektrum (Fraunhofersche Linien) / Anwendung Spektrometrie

Für die Linien in Atomspektren sind nicht nur die Energien E_n nach Gleichung 17.10 zuständig, sondern auch die möglichen Niveausprünge von E_k zu E_i . Die Energielücke

$$\Delta E = E_k - E_i = h \cdot \nu \quad (19.1)$$

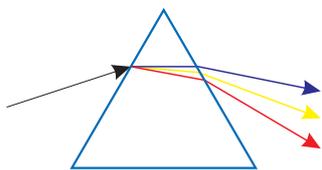


Abb. 20. Spektrometer: Man zerlegt das Licht mit einem Kristall/Prisma in seine Bestandteile und lenkt das Ergebnis auf eine Photoplatte um.

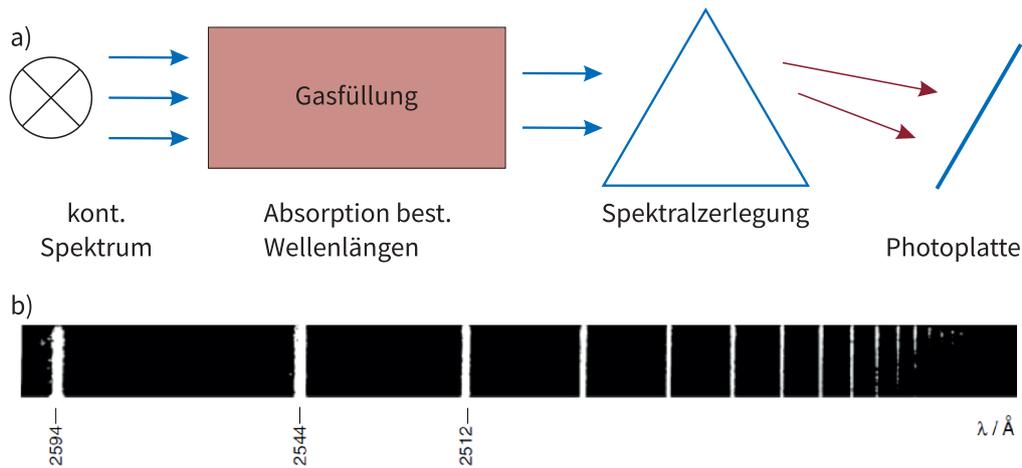


Abb. 21. Absorption von Licht findet nur bei bestimmten Wellenlängen statt. (oben) schematischer Versuchsaufbau (unten) Absorptionsspektrum auf einer Photoplatte

entspricht dann genau der möglichen Absorptions-/Emissionslinie des Atoms. Mit Gleichung 17.10 wird diese Differenz zu

Übergänge in der Elektronenhülle

$$\nu = \frac{Ry^*}{h} \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) \quad (19.2)$$

Man bezeichnet nun die Energiedifferenzen mit festen Ausgangsniveaus k als eine "Serie". Am einfachsten zu beobachten sind hier die sogenannte Lyman-Serie ($E_1 - E_i$) und die Balmer-Serie ($E_2 - E_i$), die beispielhaft in Abbildung 22 gezeigt sind.

Damit ergibt sich nun insgesamt schon ein befriedigendes Gebäude von Modellen und Experimenten. Die Atomspektren sind zunächst hinreichend gut verstanden und können auch berechnet werden. Es gibt aber noch ein bisher ignoriertes Problem beim Bohrschen Atommodell: Wie wir bereits bei der Röntgenstrahlung anerkannt haben, senden beschleunigte Ladungen elektromagnetische Wellen aus. Ein Elektron, das sich also auf einer Bahn um den Atomkern befindet (sog. Semi-Klassisches Modell), müsste ständig Energie verlieren und schließlich in den Kern stürzen. Dennoch ist das Bohrsche Modell, das dieses Problem schlicht ignoriert, sehr erfolgreich in der Beschreibung der Experimente. Es bleibt also die Frage: Warum gibt es überhaupt stabile Atome?

ABSCHNITT 20

Stabilität der Atome

Wir können die Frage nach stabilen Atomen durch Beschreibung des Elektrons mit der Wellenfunktion beantworten. Wir nehmen zunächst an, dass der mittlere Radius des Wasserstoffatoms, inklusive Elektronenhülle, r sei. Dann muss also die Ortsunsicherheit¹² $\Delta r \leq a$ sein, denn irgendwo im Bereich der Hülle muss sich das Elektron schließlich aufhalten. Nach der Unbestimmtheitsrelation folgt daraus die Unschärfe des Impulses mit $\Delta p_r \geq \frac{\hbar}{a}$. Nun können wir noch folgendes annehmen: Der Impuls p_r selbst muss also ebenfalls größer als $p_r \geq \frac{\hbar}{a}$ sein, denn sonst würde der Impuls ja genauer

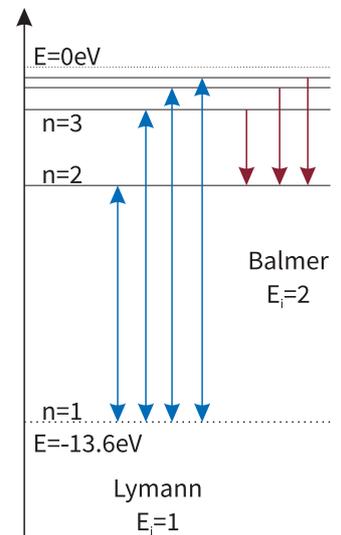


Abb. 22. Verschiedene mögliche Übergänge in den Zuständen des Wasserstoffatoms.

¹² Diesmal verwenden wir die Radialkoordinate r statt x .

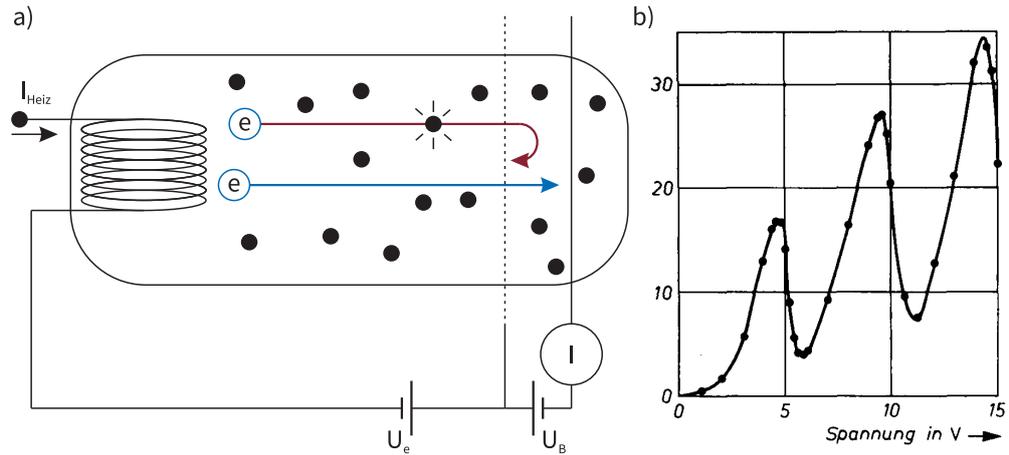


Abb. 23. a) Schematischer Aufbau des Franck-Hertz-Versuches. Elektronen werden in einer Röhre mit Hg-Dampf beschleunigt. Wenn die Elektronen die Anode erreichen, wird ein Strom gemessen. b) Gemessener Anodenstrom abhängig von der Beschleunigungsspannung.

bekannt sein als seine Unsicherheit. Für die kinetische Energie folgt dann

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m_e} \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} \geq \frac{\hbar^2}{2m_e a}. \quad (20.1)$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \geq \frac{\hbar^2}{2m_e a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (20.2)$$

Diese Funktion $E(a)$ nimmt für einen bestimmten Wert einen minimalen Wert an. Dieses Extremwertproblem kann man durch

$$\frac{dE}{da} = \frac{-\cancel{2}\hbar^2}{\cancel{2}m_e a^{\cancel{2}}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cancel{a}^{\cancel{2}}} = 0 \quad (20.3)$$

beschreiben. Diese Gleichung wird für den minimalen Atomradius

$$a_{\text{min}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \cdot \frac{\hbar^2}{m_e} = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} = a_0 \quad (20.4)$$

erfüllt. Dabei ist a_0 genau der Bohrsche Radius. Dort befindet sich das Elektron also in einem Energieminimum. Wenn es weiter Energie verlieren würde, würde die Bilanz der Unbestimmtheitsrelation zu einer ungünstigeren Energie führen.¹³

¹³ Die kinetische Energie würde stärker zunehmen als die potentielle Energie abnimmt.

ABSCHNITT 21

Franck-Hertz-Versuch

Der Franck-Hertz Versuch von 1914 ist nun auch der experimentelle Beweis, dass die Quantelung der Elektronenenergie bei Stoßprozessen eine enorme Bedeutung hat. Das Experiment kann man als Bestätigung des Bohrschen Atommodells auffassen.

Ursprüngliche Idee des Experimentes war es, die Ionisationsenergie der Quecksilberatome zu bestimmen. Dementsprechend wurde die Versuchsergebnisse von Franck und Hertz auch zunächst falsch interpretiert weil ihnen das Bohrsche Atommodell zu der Zeit nicht bekannt war.

Der Versuch wurde von James Franck und Gustav Hertz durchgeführt und 1925 wurde ihnen dafür der Nobelpreis verliehen. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 23a skizziert. Es handelt sich um eine Elektronenröhre, die bei geringem Druck von $p \approx 10^{-2}$ mBar mit Quecksilberdampf gefüllt ist. Die Glühkathode K erzeugt bei angelegter Spannung eine Elektronenwolke im näheren Raumbereich. Zwischen der Kathode und einem Gitter G kann man eine variable Spannung U anlegen und so die Elektronen in Richtung des Gitters bis auf die Energie $e \cdot U$ beschleunigen. Außerdem liegt noch eine zweite Spannung ΔU zwischen der Anode und dem Gitter an. Diese Spannung wird als Filter benutzt und stößt Elektronen mit einer Energie $E_{\text{kin}} < e \cdot \Delta U$ wieder zurück. Das Experiment läuft nun ab, indem die Spannung langsam kontinuierlich erhöht wird und man ständig den Anodenstrom misst. Daraus ergibt sich dann die Messkurve, die in Abbildung 23b gezeigt ist. Man sieht, dass der Anodenstrom mit festen Abständen von 4.9 V regelmäßig zusammenbricht. Die Erklärung werden wir nun im Folgenden herleiten. Die auftretenden inelastischen Stöße der Elektronen mit den HG-Atomen kann man in der Form

$$e^- + Hg \rightarrow Hg^*(E_a) + e^- - \underbrace{\Delta E_{\text{kin}}}_{\approx E_a} \quad (21.1)$$

darstellen.¹⁴ Klassisch müsste man erwarten, dass beliebige Energieportionen E_a bei den Stößen aufgenommen werden - bis hin zur Ionisationsgrenze. Die Messung zeigt aber, dass offenbar immer schon weit vor der Ionisationsenergie von Quecksilber ($E_{Hg^*} = 11.4 \text{ eV}$) die Elektronen bei dem Erreichen von 4.9 eV ihre Energie abgeben. Wenn die Beschleunigungsspannung die Elektronen nur auf $< 4.9 \text{ eV}$ beschleunigt, finden keine Stöße statt. Wenn die Elektronen bei höheren Spannungen die Möglichkeit haben, nach einem Stoß (mit Verlust von $E_a = 4.0 \text{ eV}$) erneut die nötige Energie für einen weiteren Stoß aufzunehmen, dann sinkt der Anodenstrom erneut usw. Dieses Experiment zeigt also:

¹⁴ Es treten natürlich auch elastische Stöße auf. Der Einfluss auf E_{kin} ist aber durch den großen Massenunterschied der Stoßpartner zu vernachlässigen.

Franck-Hertz Versuch

Atome können ihre Energie nur in bestimmten diskreten Energiequanten aufnehmen.

Nach dem in der Röhre die Hg-Atome angeregt wurden, wird durch die folgenden Abregungsprozesse wieder ein Photon emittiert gemäß

$$Hg^* \rightarrow Hg + h \cdot \nu \quad (21.2)$$

Wenn man den Versuch mit Quecksilberdampf, wie im Original, durchführt liegt die Emission leider im unsichtbaren UV-Bereich ($\lambda = 253 \text{ nm}$). Für Schulen gibt es aber auch Demonstrationsexperimente die mit Neon als Füllgas arbeiten. Dabei findet (über Umwege) auch ein Abregungsprozess statt, der Photonen mit $\lambda = 500 \text{ nm}$ erzeugt.

ABSCHNITT 22

Schrödingergleichung

Die Indizien und Beweise für die Quantennatur der Materie und des Lichtes sind mittlerweile unwiderlegbar. Nur fehlt bis dato noch ein Mittel, um mit den als Wellenfunktion beschriebenen Teilchen auch tatsächlich Prozesse (Bewegung, Beugung, usw.) zu beschreiben. Für die klassische Physik mit Massepunkten und starren Körpern findet

man diese Beschreibung durch die Newtonsche Bewegungsgleichung $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F$. Das Äquivalent in der Quantenphysik wird Schrödingergleichung (kurz: SGL) genannt. Diese 1926 von Erwin Schrödinger postulierte Gleichung beschreibt statt einer Bahnkurve $\vec{r}(t)$ die zeitliche und räumliche Entwicklung einer Wellenfunktion $\psi(x, y, z, t)$. Wir erinnern uns, dass diese Wellenfunktion die allgemeine Form

$$\psi(x, t) = A \cdot e^{i(kx - \omega t)} = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(px - E_{\text{kin}}t)}$$

haben kann.¹⁵ Zunächst wollen wir die Annahme treffen, dass die Wellenfunktion “stationär” ist. Das bedeutet, die Wellenfunktion ψ besteht aus einem ortsabhängigen und einem zeitabhängigen Teil die beide voneinander trennbar sind. Wir nehmen also damit an, dass man $\psi(x, t)$ auch als $\psi(x) \cdot \psi(t)$ schreiben kann. Mit dem Zeitanteil $\psi(t) = e^{-i\omega t}$ wird dies also zu $\psi(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$.¹⁶ Wenn man das in die allgemeine Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

einsetzt, folgt

$$\frac{\partial^2(\psi(x) \cdot \psi(t))}{\partial x^2} = -k^2 \psi(x) \cdot \psi(t) = -\frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{kin}} \psi(x) \cdot \psi(t) \quad (22.1)$$

für die 2-fache partielle Ableitung nach x . Der Impuls wurde hier durch die Kombination von $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$ und $p = \hbar k$ ersetzt. Der Zeitanteil ist wegen der partiellen Ableitung als konstant zu behandeln. Analog folgt für die 2-fache partielle Zeitableitung

$$\frac{\partial^2(\psi(x) \cdot \psi(t))}{\partial t^2} = \frac{\partial^2(\psi(x) \cdot e^{-i\omega t})}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(x) \cdot \psi(t). \quad (22.2)$$

Die Gesamtenergie des Teilchens setzt sich zusammen aus der potentiellen Energie E_{pot} und der kinetischen Energie aus Gleichung 22.1 bzw. $E_{\text{kin}} = E - E_{\text{pot}}$. Damit wird Gleichung 22.1 zur stationären Schrödingergleichung:

Stationäre Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_{\text{pot}} \psi = E \psi \quad (22.3)$$

Anmerkung: Hier wurde stets nur ein eindimensionales Problem der Koordinate x behandelt. Die Gleichung gilt natürlich auch für eine dreidimensionale Wellenfunktion, wenn man statt der partiellen Ableitung nach x den Differentialoperator $\nabla \cdot \nabla = \Delta$ verwendet.¹⁷

Etwas komplizierter wird es, wenn wir auch die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion betrachten wollen. Dazu bilden wir zunächst mal die erste partielle Zeitableitung der Wellenfunktion:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t}) = -\frac{i}{\hbar} E_{\text{kin}} \psi \quad (22.4)$$

Man kann dies Umstellen um einen Ausdruck für $E_{\text{kin}} \psi$ zu erhalten:¹⁸

$$E_{\text{kin}} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (22.5)$$

Ziel ist es nun, diesen zeitabhängigen Ausdruck irgendwie mit der stationären Schrödingergleichung 22.3 zu verbinden. Für den Fall eines freien Teilchens, dass sich nicht in

¹⁵ Zur Vereinfachung der Rechnung lassen wir hier die Formulierung als Wellenpaket kurz beiseite.

¹⁶ Die Exponentenregel zeigt es direkt: $e^{i(kx - \omega t)}$ kann man zerlegen in $\frac{e^{ikx}}{e^{i\omega t}}$. Als Produkt kann man das auch schreiben als $e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t}$.

¹⁷ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

¹⁸ $i^{-1} = -i$

einem Potential befindet (also ist $E_{\text{pot}} = 0$), ist dies leicht möglich. Dann wird nämlich die SGL zu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 0 = E\psi = E_{\text{kin}}\psi, \quad (22.6)$$

weil die Gesamtenergie dann gleich der kinetischen Energie ist. Jetzt kann man das Ergebnis aus Gl. 22.5 direkt in der rechten Seite von Gl. 22.6 einsetzen und erhält die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein freies Teilchen:

Zeitabhängige Schrödingergleichung für $E_{\text{pot}} = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (22.7)$$

Was aber ist zu tun, wenn wir eine zeitabhängige Schrödingergleichung mit potentieller Energie betrachten? Für diesen Fall gibt es tatsächlich keine Herleitung. Erwin Schrödinger hat deshalb die Kombination der stationären und der potentialfreien SGL wie folgt postuliert:

Zeitabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_{\text{pot}}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (22.8)$$

Diese Gleichung ist die bis heute experimentell bestätigte Grundgleichung der Quantenmechanik. Obwohl ohne explizite Herleitung, gibt es bisher keinen Anhaltspunkt gegen dieses Postulat. Sie liefert das Gegenstück der Quantenmechanik zur Newtonschen Bewegungsgleichung in der klassischen Physik.

ABSCHNITT 23

Anwendungen der stationären Schrödingergleichung

Bevor nun verschiedene grundlegende Anwendungen der Schrödingergleichung gezeigt werden, soll noch einmal zusammengefasst werden womit man es hier eigentlich zu tun hat. In der klassischen Physik gilt das Prinzip des Determinismus. Wenn man Impuls und Ort eines Teilchens sowie die darauf wirkenden Kräfte kennt, kann man für alle Zeiten den Ablauf dessen Bewegung vorausberechnen – analytisch oder ggf. numerisch mit beliebiger Genauigkeit. Dieses Prinzip des Determinismus hat nun die Quantenphysik hinter sich gelassen. Die Bahn $\vec{r}(t)$ kann man nur noch innerhalb der Grenzen der Unschärferelation betrachten. Man kann nur noch Wahrscheinlichkeiten angeben, bei denen ein Teilchen zu einer Zeit zu finden ist. Zusätzlich beeinflusst die Kenntnis (also die Messung) des Ortes die Unschärfe selbst. Wir haben es also tatsächlich mit einer neuen Art von Physik zu tun, die nicht umsonst als “Quantenphysik” von der “klassischen Physik” abgegrenzt wird.

ABSCHNITT 23.1

Teilchen im Kastenpotential I

Als Beispiel für die Einführung in die Verwendung der SGL wird oft das Kastenpotential verwendet. Wir betrachten hierbei eine Wellenfunktion $\psi(x)$ (keine Zeitabhängigkeit!)

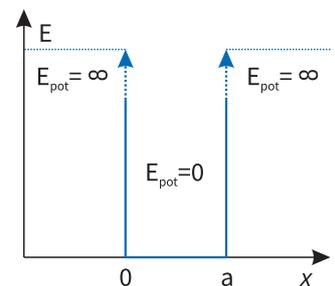


Abb. 24. Potentialkasten von $x = 0$ bis $x = a$. Die Wände des Potentialkastens sind “unendlich hoch”.

im Potential der Form

$$E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} \infty, & \forall x < 0 \\ 0, & \forall 0 < x < a \\ \infty, & \forall x > a \end{cases} \quad (23.1)$$

wie es auch in Abbildung 24 skizziert ist. Weil die potentielle Energie außerhalb des Potentials unendlich groß ist, können wir problemlos voraussetzen, dass die Wellenfunktion dort keine Amplituden haben darf ($\psi(x < 0$ und $x > a) = 0$). Wir werden nun erstmalig die Schrödingergleichung zur Beschreibung eines Systems verwenden. In diesem Kurs werden wir uns zunächst auf die stationäre Schrödingergleichung beschränken. Diese wird vornehmlich benutzt werden um zulässige Wellenfunktionen zu finden. Außerdem kann man die Energieniveaus dieser Wellenfunktionen berechnen. Das wollen wir für dieses Beispiel des Potentialtopfes nun sehr detailliert tun.

Die stationäre Schrödingergleichung (Gl. 22.3) lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_{\text{pot}} \psi = E \psi$$

Zunächst formen wir die SGL um:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E \psi \quad | \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \quad (23.2)$$

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E \psi \quad | k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (23.3)$$

$$0 = k^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (23.4)$$

Hier sieht man jetzt eine ganz normale Differentialgleichung, wie man sie schon aus der Mechanik von Schwingungen kennt. Die Lösung sollte einfach durch eine Wellengleichung möglich sein. Wir wählen

$$\psi(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) \quad (23.5)$$

als Ansatz, womit ganz allgemein alle möglichen Schwingungen eingeschlossen sind.¹⁹ Als nächstes muss man den Ansatz noch für das Gegebene Problem "zuschneiden" - also alle Randbedingungen berücksichtigen. Die gesuchte Wellenfunktion soll außerhalb des Bereiches $0 < x < a$ verschwinden. Damit die Wellenfunktion auch stetig in diese Bereiche übergeht, muss also auch an diesen Punkten selbst die Wellenfunktion = 0 sein:

$$\psi(0) = 0 \rightarrow \psi(0) = A \cdot \sin(0) + B \cdot \cos(0) \quad (23.6)$$

Dies ist nur zu erfüllen, wenn der Koeffizient $B = 0$ ist. Das heißt, den Kosinus-Term können wir aus der Lösung schon streichen weil er nicht den Randbedingungen genügen würde. Außerdem muss gelten:

$$\psi(a) = 0 \rightarrow \psi(a) = A \cdot \sin(k \cdot d) = 0 \quad (23.7)$$

Da der Sinus immer bei ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, muss nun also das k entsprechend für die Lösung dieser Gleichung sorgen. Das funktioniert nur, wenn $k \cdot d = \pi \cdot n$ ist. Dabei ist n eine natürliche Zahl größer oder gleich 1. Das führt zu

$$k_n = \frac{\pi}{d} \cdot n \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (23.8)$$

¹⁹Durch die Kombination von Sinus und Cosinus kann man über Additionstheoreme auch Phasenverschiebungen usw. mit Abdecken.

Ganz nach Vorschrift setzen wir nun die passende (also den Randbedingungen genügende) Funktion

$$\psi(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{d} \cdot nx\right) \tag{23.9}$$

in die Schrödingergleichung 23.2 ein. Das führt zu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 (A \cdot \sin(\frac{\pi}{d} \cdot nx))}{\partial x^2} = E \cdot A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{d} \cdot nx\right) \tag{23.10}$$

$$\cancel{\frac{\hbar^2}{2m}} \cdot \cancel{(-1)} \cdot \cancel{A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{d} \cdot nx\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{d} \cdot n\right)^2 = E \cdot \cancel{A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{d} \cdot nx\right)} \tag{23.11}$$

$$E = \left(\frac{\pi}{d} \cdot n\right)^2 \cdot \frac{\hbar^2}{2m} = n^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2} = n^2 \cdot E_1 \tag{23.12}$$

Die Energien des Elektrons in diesem unendlich hohen Potentialtopf ist also erneut nicht kontinuierlich, sondern kann nur in gequantelten Zuständen

Energieniveaus im (unendlich hohen) Potentialtopf

$$E_n = n^2 \cdot \frac{\hbar^2}{8ma^2} = n^2 \cdot E_1 \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \tag{23.13}$$

vorkommen. Dies deckt sich mit den Ergebnissen, wie sie beim Bohrschen Atommodell erhalten worden sind. Die Wellenfunktionen müssen, gemäß den Randbedingungen, also immer genau zwischen die Barrieren passen (in Abbildung 25 gezeigt). Mit abnehmender Wellenlänge erhöht sich dann entsprechend $E = h \cdot \nu / \lambda$ die Energie. Der niedrigste Zustand für $n = 1$ wird als Grundzustand bezeichnet.

ABSCHNITT 23.2

Teilchen vor Potentialstufe

Folgt später.

ABSCHNITT 23.3

Tunneleffekt

Für das Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf haben wir bereits gesehen wie man die Schrödingergleichung nutzen kann um Aussagen zu einer Problemstellung zu bekommen. Jetzt wollen wir einen komplizierteren Fall untersuchen. Die Ausgangssituation ist in Abbildung 26a skizziert. Eine Welle (bzw. ein Teilchen) soll mit Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ auf eine Potentialbarriere der Breite a und Höhe E_0 treffen. Die Potentialbarriere ist diesmal also endlich und man kann nicht direkt annehmen, dass die Wellenfunktion dort verschwindet. Um den Tunneleffekt nun genau zu untersuchen und zu beschreiben, müssen wir wieder entsprechende Lösungsansätze für die Schrödingergleichung machen, und die geltenden Randbedingungen anwenden. Es gilt, für die drei Bereiche I, II und III aus Abbildung 26a. Als Ansätze nutzen wir wieder einfache Wellenfunktionen - mit einer leichten Ergänzung. Um maximal flexibel in der Lösung zu sein (die Randbedingungen lassen dann später ggf. Terme wegfällen), lassen wir Lösungen der Form $A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$ zu, was auch reflektierte Wellen²⁰ erlaubt. Für die drei Bereiche nutzen wir also die

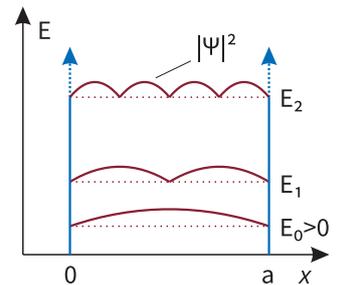


Abb. 25. Mögliche Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden.

²⁰ negative k -Werte in der Wellenfunktion bedeuten Ausbreitung entgegengesetzt zu x .

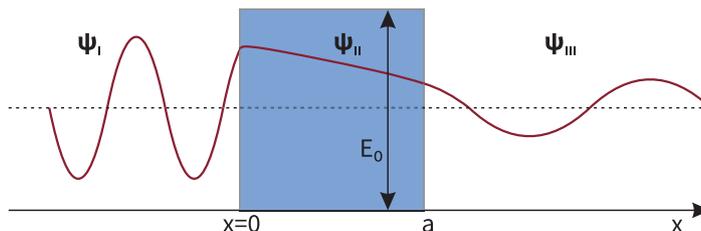


Abb. 26. Skizze zum Tunneleffekt. Die Eingangsenergie reicht eigentlich nicht aus, um das Potential zu überwinden. Dennoch gibt es eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit auch hinter der Barriere.

Ansätze

$$\psi_I = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx} \quad (23.14)$$

$$\psi_{II} = C \cdot e^{ikx} + D \cdot e^{-ikx} \quad (23.15)$$

$$\psi_{III} = A' \cdot e^{ikx}, \quad (23.16)$$

wobei für den rechten Teil keine Reflektion mehr möglich ist. Zusätzlich kann man folgende sinnvolle Forderungen stellen, welche die Konstanten dann festlegen:

- Die Wellenfunktionen $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$ müssen an den Übergangsstellen 0 und a jeweils den gleichen Wert haben, damit sie nahtlos ineinander übergehen.

$$\rightarrow \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad ; \quad \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$$

- An den Übergangsstellen 0 und a muss der Übergang stetig sein. Das verbietet also etwa einen "Knick" als mögliche Fortsetzung.

$$\rightarrow \left. \frac{\partial \psi_I}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} \right|_{x=0} \quad ; \quad \left. \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial \psi_{III}}{\partial x} \right|_{x=a}$$

Wenn man die Ansätze in die stationäre Schrödingergleichung einsetzt und die Randbedingungen anwendet, erhält man ein System von 4 Gleichungen für die Koeffizienten A, B, C, D, A' . Um den Tunneleffekt zu beschreiben sind nun nicht alle Lösungen dieser Gleichungen nötig – es genügt, die Amplituden nach dem Durchgang $\psi_{III}(x > a)$ mit der einlaufenden Welle $\psi_I(x < 0)$ zu vergleichen. Die sogenannte Transmission T berechnet sich dann gemäß

Quantenmechanischer Tunneleffekt

$$T = \frac{|A'|^2}{|A|^2} \approx \frac{16E}{E_0^2} (E_0 - E) \cdot e^{-2a \cdot \frac{\sqrt{2m(E_0 - E)}}{\hbar}}. \quad (23.17)$$

Diese Transmissionsrate beschreibt also die absolute Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen mit der Energie E hinter der Potentialbarriere mit $E_{\text{pot}} = E_0$ und Breite a anzutreffen ist. Dieser Wert ist auch größer als 0, obwohl die Potentialbarriere höher als die eigene Energie ist ($E_0 - E > 0$). Dies ist aus klassischer Sicht nicht möglich und ein typischer Effekt der Quantenphysik. Relevant ist der Tunneleffekt beispielsweise beim Alphazerfall. Dabei verlässt ein Helium-4-Kern (2 Protonen und 2 Neutronen) einen größeren Atomkern. Der Potentialwall aus anziehender Kernwechselwirkung und abstoßender Coulomb-Wechselwirkung ist deutlich höher als die zur Verfügung stehende Energie (siehe Abbildung 26b). Wenn es den Tunneleffekt nicht gäbe, müsste ein Alphazerfall deutlich seltener stattfinden und außerdem hätten die freien Alphateilchen

geringere kinetische Energien. Nur mit der Anwendung des Tunneleffektes kann man die beobachtete Energieverteilung und Zerfallshäufigkeit erklären.

ABSCHNITT 23.4

Harmonischer Oszillator

Folgt später.

ABSCHNITT 23.5

zweidimensionales Kastenpotential

Als eine wichtige Vorstufe zur Beschreibung des Wasserstoffatoms mit der Schrödingergleichung, wollen wir zunächst noch ein zweidimensionales Kastenpotential untersuchen. Es soll sich analog zum eindimensionalen Fall um ein Potential der Form

$$E_{\text{pot}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \forall 0 < x < a \\ 0, & \forall 0 < y < b \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad (23.18)$$

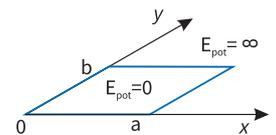


Abb. 27. Zweidimensionales Kastenpotential mit unendlich hohen Potentialbarrieren.

handelt. Nun muss man einen Lösungsansatz für die stationäre Schrödingergleichung finden. Vereinfacht wird dies durch die Annahme, dass die gesuchte Lösung sich in zwei Faktoren zerlegen lässt gemäß

$$\psi(x, y) = f(x) \cdot g(y). \quad (23.19)$$

Die Schrödingergleichung lässt sich dann in zwei voneinander unabhängige Gleichungen, jede für eine Variable, teilen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_{\text{pot}} \psi = E \psi \quad (23.20)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_{\text{pot}} \psi = E \psi \quad (23.21)$$

Die Lösung für jede dieser Gleichungen kennen wir bereits aus dem eindimensionalen Fall. Sie lauten analog zu Gl. 23.9:

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} \cdot x\right) \quad n_x = 1, 2, 3, \dots \quad (23.22)$$

$$g(y) = B \cdot \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} \cdot y\right) \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \quad (23.23)$$

$$\rightarrow \psi(x, y) = A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} \cdot y\right) \quad (23.24)$$

Diese Wellenfunktion muss noch normiert werden, damit man das Betragsquadrat später als Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretieren kann. Aus der Normierungsbedingung ergibt sich dann

$$\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b |\psi(x, y)|^2 dx dy = 1 \quad \rightarrow \quad A \cdot B = \frac{2}{\sqrt{a \cdot b}} \quad (23.25)$$

Durch Einsetzen der normierten Wellenfunktion kann man nun die Energieniveaus erhalten. Es ergibt sich

Energieniveaus 2D-Kastenpotential

$$E(n_x, n_y) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right) = E^* (n_x^2 + n_y^2). \quad (23.26)$$

Wir sehen also, dass es nun eine Vielzahl von möglichen Kombinationen für die Energieniveaus gibt. Erstmals zeigt sich hier auch der Fall, dass man durch verschiedene Kombination der Quantenzahlen n_x und n_y zu identischen Energieniveaus kommen kann. Dies ist etwa der Fall für $n_x = 7, n_y = 1$ und $n_x = n_y = 5$.

Entartete Zustände

Energieniveaus, die man durch m verschiedene Kombinationen von Quantenzahlen erreichen kann, nennt man “ m -fach entartet”.

ABSCHNITT 23.6

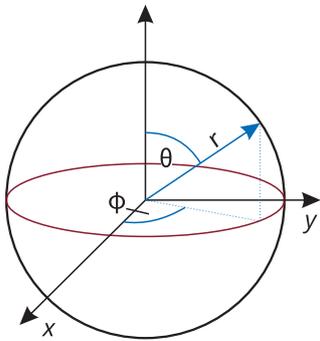
SGL mit kugelsymmetrischem Potential


Abb. 28. Zur Definition der Kugelkoordinaten r, θ, φ

Bisher wurde die Schrödingergleichung für kartesische Koordinaten (x, y, z) betrachtet. Für erste Erkenntnisse zu ein- und zweidimensionalen Problemen war das bereits sehr hilfreich. Ein Coulombpotential, wie es etwa um den Kern eines Wasserstoffatoms besteht, ist aber radialsymmetrisch und kann daher am sinnvollsten mit Kugelkoordinaten bzw. sphärischen Koordinaten (r, θ, φ) beschrieben werden.

Für die Vergesslichen: Die Definition der Kugelkoordinaten kann man sich in Abbildung 28 nochmals vor Augen führen. Die Umrechnungsvorschriften lassen sich direkt aus der Zeichnung erahnen, indem man jeweils die Sinus- und Kosinussätze anwendet. Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \cdot \sin \theta \sin \varphi & \theta &= \arccos \frac{z}{r} \\ z &= r \cdot \cos \theta & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Außerdem ändern sich die Ausdrücke für die Differentiale dx, dy, dz . Was wir benötigen, ist beispielsweise der Gradient ∇_r bzw. der Laplaceoperator $\nabla_r^2 = \Delta$ in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \nabla_r &= \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \nabla_r^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten lautet also die stationäre Schrödingergleichung nun also

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_{\text{pot}}(r)) \psi = 0 \quad (23.27)$$

Diese Differentialgleichung sieht nun erstmal recht unangenehm aus. Es ist aber möglich, deren Komplexität deutlich zu reduzieren. Wir hoffen auch diesmal wieder, dass eine mögliche Lösung sich in Faktoren zerteilen lässt, von denen jeder über nur eine

Koordinatenabhängigkeit verfügt:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \quad (23.28)$$

Das Einsetzen dieses Ansatzes führt dazu, dass man die Terme etwas umordnen kann:

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_{\text{pot}}(r)) r^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} \quad (23.29)$$

Man kann hier also die Gleichung in zwei Seiten aufteilen: Auf der linken Seite gibt es nur Abhängigkeiten von r und θ , die Rechte Seite hängt nur von ϕ ab. Da diese Gleichung natürlich für alle Koordinaten erfüllt sein soll, kann jede Seite für sich genommen nur konstant sein. Wir können jetzt also die linke und rechte Seite der Gleichung getrennt voneinander betrachten. Zunächst soll auf die rechte Seite eingegangen werden:

Der konstante Wert beider Seiten der Gleichung soll C_1 genannt werden. Damit ergibt sich

$$C_1 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \text{ bzw. } \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + C_1 \Phi = 0 \quad (23.30)$$

Die Lösung für diese Gleichung ist offensichtlich wieder eine e -Funktion der Form

$$\Phi = A \cdot e^{\pm i\sqrt{C_1}\varphi}. \quad (23.31)$$

Diese Wellenfunktion wiederholt ihren Wert nach einer Phasenverschiebung von $n \cdot 2\pi$. Wir fordern, dass sich an der Aussage dadurch nichts ändern darf:

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi \cdot n) \quad (23.32)$$

$$A \cdot e^{\pm i\sqrt{C_1}\varphi} = A \cdot e^{\pm i\sqrt{C_1}\varphi} \cdot e^{\pm i\sqrt{C_1}2\pi \cdot n} \quad (23.33)$$

$$1 = e^{\pm i\sqrt{C_1}2\pi \cdot n} \quad (23.34)$$

Die letzte Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn auch $\sqrt{C_1}$ immer eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ ist. Die Funktion $\Phi(\varphi)$ nimmt also die Form

$$\Phi(\varphi) = A \cdot e^{im\varphi} \quad (23.35)$$

an. Durch die Normierungsbedingung $\int_0^{2\pi} d\varphi |\Phi|^2 = 1$ kann man den Parameter A festlegen und hat die Funktion

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (23.36)$$

gefunden.

Nun wollen wir die linke Seite der Gleichung 23.29 betrachten. Es ist auch hier wieder möglich, die einzelnen Variablen zu separieren. Das ergibt dann die beiden Teile

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 (E - E_{\text{pot}}) = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = C_2 \quad (23.37)$$

die wiederum nur von einer Variable abhängen und also konstant C_2 sein müssen damit die Lösung universell gilt. Für die rechte Seite dieser Gleichung kennt man aus der Mathematik die Lösung unter dem Namen "Legendre-Polynome" P_l^m . Daraus kann man die Konstante $C_2 = l(l+1)$ bestimmen, mit einer Quantenzahl $l \in \mathbb{N}$. Außerdem muss $-l \leq m \leq l$ gelten. Weil wir später noch oft solche Quantenzahlen betrachten werden, sei hier betont: Es handelt sich um eine mathematische Notwendigkeit für die Lösung der Differentialgleichung. Es gibt also keine (offensichtliche) physikalische Notwendigkeit für die Forderungen an l und m .

Die Verbindung der Funktion $\Phi(\varphi)$ und P_l^m nennt man Kugelflächenfunktionen

Kugelflächenfunktionen

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \Phi(\varphi) \cdot P_l^m(\cos \theta) \quad -l \leq m \leq l, \quad l \in \mathbb{N}; \quad m \in \mathbb{Z} \quad (23.38)$$

Diese Funktionen kann man dann für die entsprechenden l und m Werte in Tabellen nachschlagen wenn die Funktionen konkret gebraucht werden. Sie sind immer die Lösungen für den Winkelanteil der Schrödingergleichung, wenn das Potential radialsymmetrisch $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(r)$ ist. Dies wird auch der Fall sein, wenn wir nun konkret als radialsymmetrisches Potential das Coulombpotential wählen und die Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom lösen.

ABSCHNITT 24

SGL für das Wasserstoffatom

Für die Wellenfunktion des Wasserstoffatoms nehmen wir zunächst vereinfachend an, dass der Atomkern ortsfest ist. Für die Wellenfunktion muss dann wieder die Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r \Psi(r, \theta, \varphi) - \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Psi(r, \theta, \varphi) = E \Psi(r, \theta, \varphi) \quad (24.1)$$

gelten. Weil es sich um ein radialsymmetrisches Potential handelt, können wir die Kugelflächenfunktionen als Lösung für die Winkelanteile direkt übernehmen. Es bleibt nun noch die Lösung für den Radialteil und das Coulomb-Potential zu finden.

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 (E - E_{\text{pot}}) = C_2 = l(l+1) \quad (24.2)$$

Die Rechnung ist etwas knifflig und wird hier ausgelassen. Gesagt sei, dass die gesuchten Funktionen $R(r)$ die "Laguerre-Polynome" $R_{n,l}(r)$ sind, die ebenfalls in Tabellen nachgeschlagen werden können. Mit den Laguerre Polynomen ergibt sich aus der SGL die Energie

$$E_n = -\frac{mZ^2 e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = -Ry^* \frac{Z^2}{n^2} \quad l \leq n-1 \quad (24.3)$$

wobei durch die Laguerre-Polynome rein mathematisch die Einschränkung für $l \leq n-1$ gelten muss. Die gefundenen Energieniveaus stimmen übrigens exakt mit denen aus dem Bohrschen Atommodell überein. Außerdem hängt die Energie offenbar nur von der Quantenzahl n und nicht von l oder m ab. Hier liegt also wie im Fall des zweidimensionalen Kastenpotentials eine Entartung vor. Es gibt also mehrere Wellenfunktionen für das Elektron mit identischer Energie.

Wenn nun die Wellenfunktion für das Elektron des Wasserstoffatoms bekannt ist, kann man die Aufenthaltsorte des Elektrons untersuchen. Die Kugelflächenfunktionen Y_l^m geben hierbei die Winkelverteilung an. Für einige Quantenzahlen sind die sogenannten Orbitale in [Abbildung 29](#) gezeigt. Wenn man sich die Querschnitte für steigende Hauptquantenzahlen n ansieht, erkennt man den zunehmenden Abstand vom Zentrum an den größer werdenden gelben Ringen. Dies entspricht der bereits bekannten Zunahme der Bohrschen Radien bei höheren Hauptquantenzahlen. Die Orbitalformen für $l \neq 0$ werden zunehmend kompliziert und zeigen eine deutliche Winkelabhängigkeit durch den Einfluss der Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$.

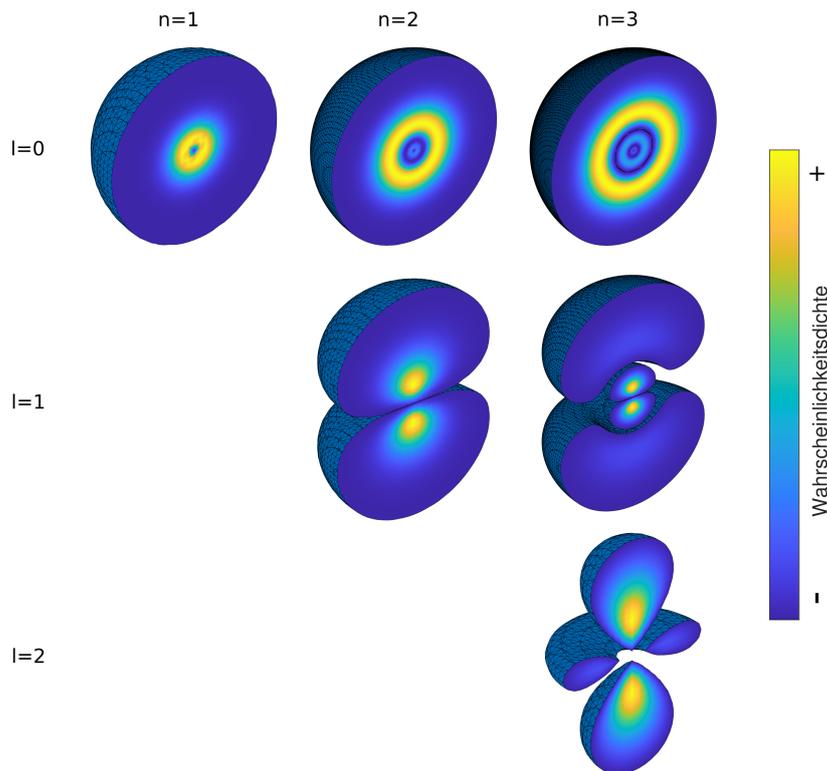


Abb. 29. $|\psi|^2$ für einige Quantenzahlen n und l . Der Betrag der Wahrscheinlichkeitsdichte ist farbcodiert entsprechend der Farbleiste rechts. Die Form der Winkelverteilung nennt man Orbital. Für steigende n nimmt der wahrscheinlichste Aufenthaltsradius zu. Mit steigenden l wird die allgemeine Form zunehmend komplex.

ABSCHNITT 25

Messprozess in der Quantenmechanik

Folgt später.

ABSCHNITT 26

Exkurs: Operatoren in der Quantenmechanik

Um in der Quantenmechanik einen Zustand aus einer Wellenfunktion zu bestimmen (also quasi eine Messung), nutzt man sogenannte Operatoren. Um die Operatoren einzuführen, ist es zweckmäßig zunächst die *Momente* einer Zufallsvariable zu veranschaulichen. Unbewusst ist das schon für die Schwerpunktsberechnung oder sogar für das Bilden eines Mittelwertes bereits bekannt. Allgemein definiert ist das k -te Moment einer Verteilung $f(x)$ durch

k -tes Moment einer Verteilung $f(x)$

$$m_k = \int x^k f(x) dx \quad (26.1)$$

Um diese Definition etwas zu verinnerlichen, hilf es vielleicht sich die Berechnungsvorschrift für den Massenschwerpunkt eines starren Körpers anzuschauen. Man berechnet den Schwerpunkt durch

$$x_S = \frac{\int x \cdot \rho(x) dx}{\int \rho(x) dx} \tag{26.2}$$

Über dem Bruchstrich ist sofort das erste Moment wiederzuerkennen. Für die Gauss-Verteilung ist das zweite Moment etwa gleich der Varianz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \tag{26.3}$$

. Das erste Moment dieser Gaussverteilung wäre beispielsweise 0, das auch deren Mittelwert entspricht. So wie durch die Anwendung dieser Momente, kann man auch in der Quantenmechanik durch gewisse Operator-Funktionen "Messungen" an Wellenfunktionen vornehmen. Ganz allgemein soll nun solch ein Operator von der Form

$$\langle \hat{F} \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi dV \tag{26.4}$$

geschrieben werden. Es handelt sich also immer um die Vorschrift ein Integral zu lösen in dem die Wellenfunktion und deren komplex-konjugierter Partner steht. Das F wird Observable genannt, mit den eckigen Klammern drückt man den Erwartungswert aus. Welche Operatoren sind nun zur Einführung ins Thema geeignet? Zunächst wollen wir den Ortsoperator \hat{x} einführen. Dieser ist denkbar einfach die Variable x selbst:

Ortsoperator \hat{x}

$$\langle \hat{x} \rangle = \bar{x} = \int \psi^* \cdot x \cdot \psi dV \tag{26.5}$$

Außerdem ist es nützlich, wenn man bei einem Quantenmechanischen Teilchen den Impuls bestimmen kann. Dies geschieht mit dem Impulsoperator \hat{p} :

Impulsoperator \hat{p}_x

$$\langle \hat{p}_x \rangle = \bar{p}_x = \int \psi^* \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \psi dV \tag{26.6}$$

Um sich zu vergewissern, dass der Ortsoperator auch wirklich den Aufenthaltsort eines Teilchens ermittelt und der Impulsoperator auch den Impuls eines Teilchens ermittelt, kann man beides an der Wellenfunktion $\psi(x) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(px - E_{kin}t)}$ eines freien Teilchens ausprobieren!

Allgemein ist der Messprozess über sogenannte Eigenwerte bestimmt. Eigenwerte sind die Werte f_n , die durch Anwendung eines Operators \hat{F} auf die Wellenfunktion entstehen gemäß

$$\hat{F}\psi_n = f_n\psi_n \tag{26.7}$$

Das bekannteste Beispiel hierfür ist der sogenannte Hamilton-Operator, der die Energieniveaus als Eigenwerte erzeugt:

$$\hat{H}\psi_n = \left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(x) \right) \psi_n = E_n\psi_n \tag{26.8}$$

Wenn man also eine Wellenfunktion für das Wasserstoffatom mit Quantenzahlen $n = 1, l = 0, m = 0$ aufstellt, so erhält man durch die Anwendung des Hamiltonoperators (darin steckt auch der Impulsoperator \hat{p}_x) das entsprechende Energieniveau für $n = 1$.

ABSCHNITT 26.1

Dirac-Schreibweise

Wenn man Veröffentlichungen zur Quantenmechanik lesen möchte, kommt man nicht umher sich mit einer besonderen Schreibweise zu befassen. Sie vereinfacht das komplizierte Integral-Kalkül erheblich und wird daher meist in der Quantenmechanik verwendet. Die Grundlage für die Dirac-Schreibweise ist die Definition eines Skalarproduktes:

“Bra” und “Ket” - Skalarprodukt

$$\underbrace{\langle \psi_1 |}_{bra} \underbrace{|\psi_2 \rangle}_{ket} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dV \quad (26.9)$$

Wir werden später noch sehen, warum man hier von einem Skalarprodukt spricht, obwohl es sich um Funktionen und nicht um “richtige” Vektoren handelt. Die Anwendung eines Operators kann man also etwa vereinfachend schreiben durch

$$f_n = \langle \psi_n^* | \hat{F} | \psi_n \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi dV \quad (26.10)$$

Um jetzt den Charakter des Skalarproduktes zu “entdecken”, schauen wir uns einen Operator \hat{L} an, der die Eigenwerte L_n erzeugen kann. Für zwei bestimmte Eigenwerte L_n und L_m gilt:

$$\hat{L} \psi_m = L_m \psi_m \quad (26.11)$$

$$\hat{L} \psi_n = L_n \psi_n \quad (26.12)$$

²¹ Weil Eigenwerte immer reelle Zahlen sind, gilt $L_m^* = L_m$

Wir bilden jetzt von der Gleichung 26.11 das komplex-konjugierte auf beiden Seiten der Gleichung:²¹

$$\hat{L}^* \psi_m^* = L_m^* \psi_m^* = \underbrace{L_m}_{EW \text{ sind reell!}} \psi_m^* \quad (26.13)$$

Jetzt erweitern wir die Gleichungen:

$$26.12 \cdot \psi_m^* : \quad \psi_m^* \hat{L} \psi_n = L_n \psi_n \psi_m^* \quad (26.14)$$

$$26.13 \cdot \psi_n : \quad \psi_n \hat{L}^* \psi_m^* = L_m \psi_m^* \psi_n \quad (26.15)$$

Jetzt bilden wir die Differenz aus 26.14 und 26.15:

$$\psi_m^* \hat{L} \psi_n - \psi_n \hat{L}^* \psi_m^* = L_n \psi_n \psi_m^* - L_m \psi_m^* \psi_n = \psi_n \psi_m^* (L_n - L_m) \quad (26.16)$$

Jetzt wird auf beiden Seiten über dV integriert:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \hat{L} \psi_n dV - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \hat{L}^* \psi_m^* dV}_{=0, \text{ wegen } \hat{L} = \hat{L}^*} = (L_n - L_m) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \psi_m^* dV \quad (26.17)$$

Die rechte Seite der Gleichung muss also $= 0$ sein. Da die Eigenwerte irgendwelche Skalare sind, muss also das Integral für alle möglichen m und n verschwinden. Es muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \psi_m^* dV = 0 \quad \forall n \neq m \quad (26.18)$$

Wenn man nun für den Fall, dass $n = m$ ist, die Funktionen auf 1 normiert ($\int \psi_n \psi_n^* dv = 1$), kann man das Integral als sogenanntes orthogonales²² und normiertes²³ Funktionensystem betrachten:

²² wird 0 für $n \neq m$

²³ wird 1 für $n = m$

Orthonormiertes Funktionensystem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \psi_m^* dV = \delta_{nm} \quad (26.19)$$

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{nm} \quad (26.20)$$

Mit dem Kronecker-Delta δ , dass zu 1 wird bei gleichen Indizes, und 0 wird bei verschiedenen Indizes. Diese Definition entspricht genau dem Skalarprodukt, dass in der Vektorrechnung definiert wurde. Zwei Einheitsvektoren der kartesischen Koordinaten werden skalar multipliziert gemäß

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = \delta_{\mu\nu} \quad \text{mit } \mu, \nu = (x, y, z) \quad (26.21)$$

ABSCHNITT 27

Quantenobjekte in der Schule

Folgt später.

Relativität

TEIL

V

Meine Herren! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

Hermann Minkowski (1908)

ABSCHNITT 28

Einführung

Wir haben in den vorangegangenen Teilen der Vorlesung die Quantenphysik kennengelernt. Sie ist eine der Grundsäulen der modernen Physik und ist in der Präzision ihrer Vorhersagen unerreicht. Eine zweite Säule der modernen Physik wird nun in Gestalt der Relativitätstheorie vorgestellt. Ebenso wie die Quantenphysik haben wir es hier mit einem mathematisch sehr anspruchsvollen Gebiet der Physik zu tun – die Sprache der Relativitätstheorie ist die Differentialgeometrie, Tensoralgebra und komplizierte Systeme aus partiellen Differentialgleichungen. Es ist wohl klar, dass wir ein solches Themenfeld niemals “angemessen” bearbeiten können. Mein Ziel ist bei der Ausarbeitung dieser Vorlesung ist es, den Teilnehmern die wichtigsten Werkzeuge in die Hand zu geben um die relativistischen Effekte nachvollziehen zu können. Anders als in vielen Einführungsveranstaltungen werde ich aber die Rechnungen stets kompatibel zur allgemeinen Relativitätstheorie halten. Damit das nicht zu schwer wird, werden gezielt einige Beweise und Techniken ausgelassen die nicht unbedingt für die angedachten Erkenntnisse nötig sind. Wir bekommen es also nur mit Tensoren zu tun, die wie Vektoren oder Matrizen aussehen, und belassen es bei einfachen partiellen Ableitungen. Für die Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie in der Schule genügen dann einfache Mathematik - die Begründung ist aber auf diesem Level “flatterhaft”. Für die folgenden Kapitel habe ich oft auf das Standardwerk zur Einführung von Torsten Fließbach [2] zurückgegriffen. Die konkreten Beispiele stammen dann oft aus dem Buch von Alexandra Stillert [3]. Einige Teile des Vorlesungsskriptes von Thomas Filk [4] habe ich für die mathematischen Grundlagen verwendet.

ABSCHNITT 28.1

Ätherhypothese

Im 19. und 20. Jahrhundert war die Ätherhypothese vorherrschende Erklärung für die Fortbewegung elektromagnetischer Wellen. Man kann sich diesen Äther als pendant zur Schallausbreitung vorstellen, die auf ein Medium zur Fortgewegung angewiesen ist weil nur so die Rückstellkräfte des Mediums die Druckwellen übertragen können. Der

- 28. Einführung
- 28.1. Ätherhypothese
- 28.2. Lorentz-TF
- 29. SRT
- 29.1 Add. von Geschw.
- 29.2. Zeitdilatation
- 29.3. Längenkontraktion
- 29.4. Energie-Impuls Gesetz
- 29.5. Minkowski-Diagramm
- 29.6. SRT Dopplereffekt
- 30. ART
- 30.1. Das Äquivalenzprinzip
- 30.2. Geodätengleichung
- 30.3. Freie Feldgleichungen
- 30.4. Schwarzschild-Metrik
- 30.5. Grav. Rotverschiebung
- 30.6. Fall in schwarzes Loch
- 30.7. Einstein-Rosen-Brücke
- 30.8. Warp-Antrieb
- 30.9. Zeitreisen
- ?? Dunkle Materie
- 30.11. Hawking Strahlung
- 30.12. Quantenteleportation

Äther soll demnach das Medium sein, in dem sich Fluktuationen des elektrischen und magnetischen Feldes ausbreiten. Die gängige Vorstellung also war, dass es einen “ruhenden” Äther als Medium “überall” gibt, und sich elektromagnetische Wellen relativ zu diesem Äther mit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s ausbreiten. Die Erde bewegt sich dabei auf ihrer Bahn durch diesen Äther. Es müsste also eine relative Geschwindigkeit der Erde zum Äther geben – den sogenannten Ätherwind. Um die Geschwindigkeit des Ätherwindes zu bestimmen, unternahmen Michelson und Morley 1887 ihr berühmtes Experiment: Sie messen die Geschwindigkeit der Lichtausbreitung einmal parallel zur Erdbewegung und einmal senkrecht dazu. Das Experiment wurde oft und unter vielen Bedingungen wiederholt. Das Ergebnis aber war stets: Die Lichtgeschwindigkeit war immer gleich. Die Erde scheint sich nicht relativ zum Äther zu bewegen.

Im Jahr 1905 veröffentlichte Albert Einstein²⁴ im Alter von 26 Jahren den Artikel “Über die Elektrodynamik bewegter Körper”. Dieser Artikel enthält bereits alle Aussagen der speziellen Relativitätstheorie! Wichtigste Postulate waren

Einsteinsche Postulate

- Absolute, gleichförmige Bewegung kann man nicht messen.
- Die Lichtgeschwindigkeit c ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Die erste Aussage beinhaltet im Wesentlichen die Erweiterung der Newtonschen Relativität auf alle Bewegungen, nicht nur die mechanischen. Demnach sollen nun auch die Maxwell-Gleichungen in allen Inertialsystemen gelten.

Die zweite Aussage kann man auch als übliche Eigenschaft für Wellen auffassen. Die Schallwellen, die von einer Autohupe ausgehen, breiten sich relativ zur Luft immer mit der gleichen Geschwindigkeit aus, egal ob sich das Auto relativ zur Luft bewegt oder nicht. Die Geschwindigkeit der Schallwellen hängt einzig und allein von den Eigenschaften der Luft ab.

ABSCHNITT 28.2

Lorentz-Transformation

Man kann nun die Einsteinschen Postulate verwenden, um eine Transformationsbeziehung zwischen einem unbewegten und einem gleichförmig bewegten Bezugssystem (Inertialsystem) herzuleiten. Dafür legen wir nun zunächst die mathematischen Grundlagen, die zwar zunächst übertrieben scheinen, aber dafür später nahtlos in der allgemeinen Relativitätstheorie anknüpfen. Wir beschreiben im Folgenden die sogenannte *Raumzeit* als 4er Vektoren der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (28.1)$$

Das 0-te Element dieses Vektors ist also die Strecke $s = c \cdot t$ die ein Lichtstrahl in der Zeit t zurücklegt. Diese Koordinate drückt also die Zeit aus. Die anderen Komponenten sind dann in einem kartesischen Koordinatensystem die x , y und z -Koordinaten. In der Relativitätstheorie schreibt man diese Art von Vektoren statt als Vektor \vec{x} günstigerweise nur als Komponenten x^μ . Dabei ist x der Name des Vektors und μ ist eine hochgestellte griechische Zählvariable, die von $0 \dots 3$ läuft.²⁵ Wir werden auch tiefgestellten Komponenten begegnen (x_μ). Grob gesagt kann man bei den hochgestellten und tiefgestellten Indizes von Vektoren in unterschiedlichen Geometrien sprechen - die mathematischen Grundlagen hierzu erspare ich uns hier aber. Wir werden später noch sehen wie man

²⁴ Im selben Jahr hatte er auch die Quantenhypothese zum Photoeffekt veröffentlicht.

²⁵ Man muss also stets aufpassen und deutlich kennzeichnen, wenn ein solcher Komponentenvektor potenziert wird: z.B. $(x^\mu)^2$

einen Index hochstellen oder herunterstellen kann, dass ist das mindestens nötige Handwerkszeug dazu.

Es werden im Laufe der Rechnungen sehr häufig Summen der Komponenteneinträge von Vektoren zustandekommen. Es ist zweckmäßig eine Konvention einzuführen um sich das ständige Benutzen des Summenzeichens zu ersparen:

Einsteinsche Summenkonvention

Über doppelt auftretende Indices auf einer Seite einer Gleichung wird summiert, wenn ein Index oben und der andere unten steht.

$$x_\mu x^\mu = \sum_\mu x_\mu x^\mu = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 + \dots \tag{28.2}$$

Außerdem muss ein äquivalent zum Skalarprodukt definiert werden. Mit den 4er-Vektoren muss den besonderen Charakter der Zeit als Koordinate berücksichtigen. Man nennt dieses Äquivalent Minkowski-Produkt

Minkowski-Produkt

$$(x, y) := \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \sum_{i,j=1}^3 x^i y^j \tag{28.3}$$

mit der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ ²⁶

²⁶ Die Minkowski-Metrik kann auch mit umgekehrten Vorzeichen definiert werden. Dies ist Konventionssache und muss beachtet werden wenn man sich verschiedenen Literaturvorlagen bedient!

Minkowski Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{28.4}$$

Um etwas Übung im Umgang mit dieser ungewohnten Formulierung zu bekommen, nutzen wir nun die Minkowski Metrik, um das Wegelement in der 4-dimensionalen Raumzeit (der 4er Vektor aus Gleichung 28.1) zu bestimmen. Zur Erinnerung: Im dreidimensionalen kartesischen System würde man das Wegelement berechnen gemäß $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. In der Minkowski-Raumzeit erhält man das Wegelement durch Aussummieren von $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Hier soll zur Übung mal ganz ausführlich vorgegangen werden:

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_\mu \sum_\nu \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{28.5}$$

$$= \sum_\mu (\eta_{\mu 0} dx^\mu dx^0 + \eta_{\mu 1} dx^\mu dx^1 + \eta_{\mu 2} dx^\mu dx^2 + \eta_{\mu 3} dx^\mu dx^3) \tag{28.6}$$

$$= \sum_\mu (\eta_{\mu 0} dx^\mu dx^0) + \sum_\mu (\eta_{\mu 1} dx^\mu dx^1) + \sum_\mu (\eta_{\mu 2} dx^\mu dx^2) + \sum_\mu (\eta_{\mu 3} dx^\mu dx^3) \tag{28.7}$$

Bevor die zweite Summe über μ berechnet wird, schauen wir uns $\eta_{\mu\nu}$ genauer an. Es gibt nur Elemente in der Hauptdiagonalen – alle anderen Elemente mit $\mu \neq \nu$ werden zu Null. Bei der Summe über $\mu = 0 \dots 3$ werden nun alle Elemente mit $\mu \neq \nu$ direkt

weggelassen:

$$(ds)^2 = \eta_{00}dx^0dx^0 + \eta_{11}dx^1dx^1 + \eta_{22}dx^2dx^2 + \eta_{33}dx^3dx^3 \quad (28.8)$$

Nun kann man gemäß Definition 28.4 die Elemente von $\eta_{\mu\nu}$ einsetzen und erhält

Wegelement in Minkowski-Raumzeit

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = c^2(dt)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 \quad (28.9)$$

Wir haben jetzt alle Mittel zur Verfügung um die Lorentz-Transformation, das zentrale Element der speziellen Relativitätstheorie, herzuleiten. Die Einsteinschen Postulate besagen, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich sein soll. Das heißt die Lichtgeschwindigkeit ist einerseits $\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = c$, und muss andererseits auch in einem anderen Inertialsystem (mit ' gekennzeichnet) $\frac{\Delta\vec{x}'}{\Delta t'} = c$ sein. Das führt uns zu

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 = 0 = (c\Delta t')^2 - (\Delta\vec{x}')^2 \quad (28.10)$$

Wir können also das Relativitätsprinzip und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit miteinander in der Aussage kombinieren, dass

- Das Wegelement $(ds)^2$ konstant ist
- Eine Transformation in ein anderes Inertialsystem das Wegelement $(ds)^2$ nicht ändern darf ($(ds)^2 = (ds')^2$).

Wir suchen also genau diese Transformationen, die das Wegelement nicht verändern wenn man sich gedanklich in ein anderes Inertialsystem begibt. Ein Inertialsystem hat eine konstante Geschwindigkeit im Vergleich zum Ursprungssystem. Daher suchen wir eine Transformation $\Lambda(\vec{v})$ der Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \Lambda(\vec{v}) \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (28.11)$$

Jetzt geht es daran, die einzelnen Einträge dieser Matrix Λ , die linear von \vec{v} abhängen darf, zu bestimmen. Der Einfachheit halber gehen wir von einer Bewegung nur in x -Richtung aus. Die Komponenten $x^2 = (x^2)'$ und $x^3 = (x^3)'$ bleiben also von der Transformation unangetastet und die Geschwindigkeit v_x hat nur eine Komponente in x -Richtung. Das transformierte Wegelement wird in Komponentenschreibweise wie folgt geschrieben:

$$(ds')^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^\mu)'(dx^\nu)' \quad (28.12)$$

Jedes Differential $(dx^\mu)'$ wird nun durch die transformierte Koordinate $\Lambda_\alpha^\mu dx^\alpha$ ersetzt²⁷. Das ergibt

$$\eta_{\mu\nu}(dx^\mu)'(dx^\nu)' = \eta_{\mu\nu} \cdot \Lambda_\alpha^\mu dx^\alpha \cdot \Lambda_\beta^\nu dx^\beta = \eta_{\mu\nu} \cdot \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu dx^\alpha dx^\beta \quad (28.13)$$

, was gemäß $(ds)^2 = (ds')^2$ zu

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (28.14)$$

führt. Aus dieser Gleichung kann man direkt ablesen, dass

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta} \quad (28.15)$$

²⁷ An die Einsteinsche Summenkonvention denken. Es werden einfach neue Zählvariablen α, β eingeführt um die Summation zu beschreiben.

gelten muss. Dies ergibt einige Gleichungen zur Bestimmung der Einträge von Λ . Weil wir uns hier auf die x -Richtung beschränkt haben (y und z -Richtung werden also nicht transformiert), kann man sich auf wenige Komponenten beschränken:

$$\Lambda = (\Lambda_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & 0 & 0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28.16)$$

Hierfür wurde der obere Index von Λ als Zeilenindex einer Matrix, der untere Index als Spaltenindex geschrieben. Um weniger schreiben zu müssen, beschränken wir uns auf den relevanten Teil dieser Matrix – also die obere linke Ecke. Die Bestimmung der einzelnen Einträge dieser Komponenten ist nun eng an die Vorgehensweise in [5] angelegt. Wir haben es also für die Gleichung 28.15 zu tun mit den Tensoren

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (28.17)$$

Damit kann man nun aus $\eta_{\mu\nu}\Lambda_{\alpha}^{\mu}\Lambda_{\beta}^{\nu} = \eta_{\alpha\beta}$ für die möglichen Kombinationen von α und β Gleichungen für die jeweiligen Komponenten aufstellen. Als Beispiel soll das nun für die erste Kombination $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ gezeigt werden:

$$\eta_{00} = \Lambda_0^{\mu}\Lambda_0^{\nu}\eta_{\mu\nu} = \sum_{\mu} \Lambda_0^{\mu} \left(\sum_{\nu} \Lambda_0^{\nu}\eta_{\mu\nu} \right) \quad (28.18)$$

$$= \sum_{\mu} \Lambda_0^{\mu} (\Lambda_0^0\eta_{\mu 0} + \Lambda_0^1\eta_{\mu 1}) \quad (28.19)$$

$$= \Lambda_0^0 \left(\underbrace{\Lambda_0^0}_{=1}\eta_{00} + \Lambda_0^1 \underbrace{\eta_{01}}_{=0} \right) + \Lambda_0^1 \left(\Lambda_0^0 \underbrace{\eta_{10}}_{=0} + \Lambda_0^1 \underbrace{\eta_{11}}_{=-1} \right) \quad (28.20)$$

$$1 = (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 \quad (28.21)$$

Für die anderen Kombinationen von $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ ergeben sich ganz ähnliche Gleichungen. Davon sind zwei identisch – es bleiben also insgesamt 3 nutzbare Gleichungen übrig:

$$\begin{aligned} (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 &= 1 & -(\Lambda_1^1)^2 + (\Lambda_1^0)^2 &= -1 \\ \Lambda_0^0\Lambda_1^0 - \Lambda_0^1\Lambda_1^1 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen (klarer Hinweis durch die $a^2 - b^2 = 1$ -Form) lassen sich durch hyperbolische Funktionen lösen. Es folgt daher für die Lorentz-Transformation

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \quad (28.22)$$

Wie transformiert sich jetzt also konkret die x -Koordinate für ein mit Geschwindigkeit v bewegtes Bezugssystem (siehe auch Abb. 30)? Für die $(x^1)'$ -Komponente ergibt sich

$$(x^1)' = 0 = \Lambda_0^1 ct + \Lambda_1^1 x^1 = \Lambda_0^1 ct + \Lambda_1^1 vt \quad (28.23)$$

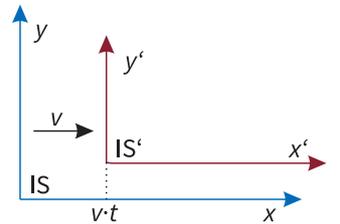


Abb. 30. Ein Inertialsystem IS' bewegt sich relativ zum System IS mit einer konstanten Geschwindigkeit v .

Wir wollen hier den Koordinatenursprung (deswegen $(x^1)' = 0$) betrachten. Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Umstellen

$$-\frac{\Lambda_0^1}{\Lambda_1^1} = \frac{v}{c} = \frac{-\sinh \psi}{\cosh \psi} = -\tanh \psi \quad (28.24)$$

Daraus kann man nun einen Ausdruck für $\psi = \operatorname{arctanh}(\frac{v}{c})$ erhalten und durch Nutzung der Definitionen der Hyperbolischen Funktionen die folgenden Ausdrücke finden:

$$\sinh\left(\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)\right) = \frac{\left(\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (28.25)$$

$$\cosh\left(\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (28.26)$$

Damit können wir nun endlich die Komponenten der Lorentz-Transformation konkret angeben. Zur Vereinfachung wird nun der Term γ statt $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$:²⁸

²⁸Mit dieser Abkürzung muss man vorsichtig sein. In verschiedenen Lehrbüchern wird γ unterschiedlich genutzt. Manchmal gilt auch $\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ oder $\gamma = \left(\frac{v}{c}\right)^2$

Lorentz-Transformation

$$(x^\mu)' = \Lambda_\nu^\mu(x^\nu) \quad \text{mit} \quad \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} & -\frac{\left(\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ -\frac{\left(\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \frac{v}{c} \\ -\gamma \cdot \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \quad (28.27)$$

ABSCHNITT 29

Spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie folgt nun ausschließlich aus den Bereits gefundenen Zusammenhängen. Wir werden also für die folgenden Effekte nur die gefundene Lorentz-Transformation auf verschiedene Wege anwenden. Zur Einführung wollen wir versuchen, zwei Geschwindigkeiten im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie zu addieren.

ABSCHNITT 29.1

Addition von Geschwindigkeiten

In der klassischen Mechanik wird oft die Vorstellung eines fahrenden Zuges verwendet. Wenn man von einem fahrenden Zug (v_{Zug}) aus eine Pistolenkugel abfeuert ($v_{\text{Projektil}}$) wird die Geschwindigkeit für den ruhenden Beobachter $v = 0$ selbstverständlich einfach $v_{\text{Zug}} + v_{\text{Projektil}}$ sein. So einfach ist es nun in der Relativitätstheorie nicht mehr, den sonst könnte man ja leicht auf Geschwindigkeiten größer als c addieren...

Dafür muss man zweimal hintereinander eine Lorentz-Transformation durchführen. Die Transformationsmatrizen Λ multiplizieren sich dann also zu

$$\Lambda \Big|_{v_1+v_2} = \Lambda \Big|_{v_1} \cdot \Lambda \Big|_{v_2} = \begin{pmatrix} \cosh \psi_1 & -\sinh \psi_1 \\ -\sinh \psi_1 & \cosh \psi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh \psi_2 & -\sinh \psi_2 \\ -\sinh \psi_2 & \cosh \psi_2 \end{pmatrix} \quad (29.1)$$

Wenn man diese Matrixmultiplikation ausführt, kann man noch Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen anwenden und erhält

$$\Lambda \Big|_{v_1+v_2} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi_1 + \psi_2) & -\sinh(\psi_1 + \psi_2) \\ -\sinh(\psi_1 + \psi_2) & \cosh(\psi_1 + \psi_2) \end{pmatrix} \quad (29.2)$$

Wenn man das ψ wieder durch die Ausdrücke mit v/c ersetzt, erhält man

relativistische Addition von Geschwindigkeiten

$$v_{1+2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} \quad (29.3)$$

Wie man gut an der Abbildung 31 sehen kann, ist es auch bei der Addition einer bereits sehr großen Geschwindigkeit von $v_1 = 0.9c$ nicht möglich, den Wert c zu erreichen. Selbst bei der Addition von $0.9c + 0.9c$ erhält man nur $v_{1+2} \approx 0.98c$.

ABSCHNITT 29.2

Zeitdilatation

Den Effekt, der Zeitdilatation genannt wird, kann man “leicht” durch die Bedingung der Invarianz des Wegelementes beschreiben. Es geht dabei um die Entwicklung der Zeitkoordinate dt (also einer Uhr) in einem bewegten Bezugssystem. Die Zeitkoordinate t im Inertialsystem IS ist die Zeit, die eine ruhende Uhr im System IS anzeigen würde. Jetzt wollen wir wissen, welche Zeit τ eine Uhr anzeigt, die sich in IS mit einer Geschwindigkeit v bewegt.²⁹ Wenn wir die Ortskoordinaten in den Ursprung setzen, dann ist das Wegelement und die Zeitkoordinate nur durch einen Faktor unterscheidbar:

$$d\tau = \frac{1}{c} ds' \quad (29.4)$$

Wie man das Wegelement ds' ausdrückt, wissen wir bereits:

$$ds' = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}} = \sqrt{c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2} \quad (29.5)$$

Jetzt wird dt ausgeklammert:

$$ds' = dt \sqrt{c^2 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2}} = dt \sqrt{c^2 - v^2} = c \cdot dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = ds \quad (29.6)$$

Zusammen mit Gleichung 29.4 ergibt sich nun ein Ausdruck für die Eigenzeit τ

Eigenzeit im bewegten Inertialsystem, Zeitdilatation

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (29.7)$$

Was für Schlussfolgerungen kann man hieraus nun ziehen? Aus dem trivialen Fall $v = 0$ folgt, dass die Zeitspanne im System IS' (mit $v = 0$ bewegt) dann $t_2 - t_1 = \tau$ beträgt. Die Uhren gehen also synchron.

Falls aber eine Geschwindigkeit $v > 0$ in das Integral 29.7 eingeht, wird der Integrand kleiner als 1 und es folgt damit $\tau < t_2 - t_1$. Bewegte Uhren gehen also langsamer als ruhende Uhren! Trotzdem geht aber natürlich jede Uhr in seinem Inertialsystem “richtig”. Die Anzeige der Uhr kann ja schließlich nicht vom Inertialsystem abhängen. Nur wenn eine ruhende und eine bewegte Uhr nach gewisser Zeit verglichen werden, gibt es eine Diskrepanz.

Einen experimentellen Nachweis kann man durch die Höhenstrahlung realisieren (siehe Abb. 32). In der Atmosphäre entstehen durch energiereiche Strahlung Myonen, die nur eine sehr kurze Lebenszeit von durchschnittlich $T_{1/2} = 2.2 \mu\text{s}$ haben. Diese

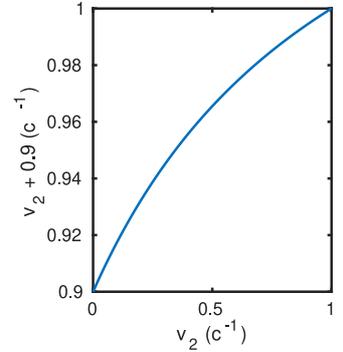


Abb. 31. Addition von Geschwindigkeiten für das Beispiel $v_1 = 0.9c$.

²⁹ Diese Zeit tau haben wir bisher auch mit t' bezeichnet

Lebenszeit wurde in einem “ruhenden” Labor gemessen. Die Myonen haben bei ihrer Entstehung eine Geschwindigkeit von etwa $v_\mu = 0.9994c$. Dennoch reicht diese große Geschwindigkeit eigentlich nicht, damit nach der Strecke $s \approx 10 \text{ km}$ viele Myonen die Erdoberfläche erreichen. Es wäre nur mit der Strecke $s = v_\mu \cdot T_{1/2} \approx 660 \text{ m}$ zu rechnen. Dennoch kann man viele Myonen an der Erdoberfläche nachweisen – dies ist nur mit den Effekten der speziellen Relativitätstheorie zu erklären: Im bewegten IS’ des Myons gehen die Uhren einfach etwas langsamer und das Myon schafft also mehr Strecke bevor dessen Zerfallszeit abgelaufen ist. Wir schätzen also ab:

$$\Delta t_{\text{Erde}} = \sqrt{1 - \frac{0.9994c}{c}} \cdot \Delta t_\mu \approx 0.0245 \Delta t_\mu \tag{29.8}$$

Für uns ruhende Beobachter hat das Myon also offenbar $\Delta t_\mu = \frac{1}{0.0245} \cdot 2.2 \mu\text{s} = 90 \mu\text{s}$ Zeit bevor es zerfällt. Damit wäre die zurückgelegte Strecke groß genug um eine Myon-Detektion auf der Erdoberfläche zu erklären.

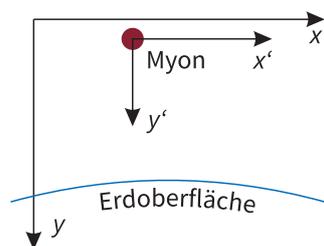


Abb. 32. Längenkontraktion vs. Zeitdilatation. Das Myon legt in seinem IS’ einen wesentlich kürzeren Weg zurück, als wir im ruhenden IS messen.

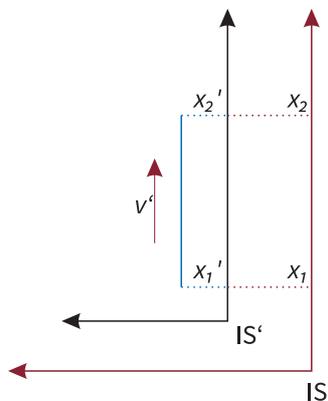


Abb. 33. Die Länge eines Stabes, der im System IS’ ruht, wird gemessen. Einmal relativ zum Inertialsystem IS und einmal im bewegten System IS’.

ABSCHNITT 29.3

Längenkontraktion

Der Effekt der Längenkontraktion, der jetzt behandelt wird, ist eng verwandt mit der Zeitdilatation. Man kann ihr direkt auf eine Längenmessung mit Stoppuhren (inklusive Zeitdilatation) zurückführen. In Abbildung 33 sind die entsprechenden Bedingungen für die Längenmessung gezeigt. Das ruhende System wird IS genannt, das bewegte System (in dem der Stab ruht), wird IS’ genannt. Im System IS’ des Stabes, beträgt seine Ausdehnung $x'_2 - x'_1 = l_{\text{eigen}}$. Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Länge des Stabes von IS aus gesehen gemessen wird. In der Abbildung sieht man, dass die gesuchte Länge $l_{IS} = x_2 - x_1$ ist. Die Transformationen dieser Ortskoordinaten lauten nun

$$x'_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} (x_2 - v't_2) \tag{29.9}$$

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} (x_1 - v't_1) \tag{29.10}$$

Die Messungen müssen nun aber gleichzeitig stattfinden, also ist $t_2 = t_1$. Damit kann man die Differenz der beiden Ortskoordinaten bestimmen zu:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} (x_2 - x_1) \tag{29.11}$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} (x'_2 - x'_1) \tag{29.12}$$

Damit haben wir einen Ausdruck für die Längenkontraktion gefunden:

Längenkontraktion

$$l = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \cdot l_{\text{eigen}} \quad (29.13)$$

Für eine Geschwindigkeit $v > 0$ heißt das also, dass die scheinbare Länge für einen Beobachter verkürzt scheint. Wenn ein Raumschiff mit relativistischer Geschwindigkeit an uns vorbeifliegt, erscheint es also kürzer im Vergleich zu seiner Länge rühend auf der Erde. Andererseits heißt das auch, dass man mit relativistischer Geschwindigkeit einen kürzeren Weg zum Ziel zurücklegen muss. Diese Interpretation ist austauschbar mit dem Effekt der Zeitdilatation.

Das Beispiel des Myons mit der kurzen Lebenszeit kann man auch mithilfe der Längenkontraktion erklären. Das Myon bewegt sich schnell, deshalb reduziert sich in dessen IS die Strecke bis zur Erdoberfläche auf 660 m.

ABSCHNITT 29.4

Energie-Impuls-Beziehung

Die Herleitung der Energie-Impuls-Beziehung ist ohne die hier verwendete Schreibweise der allgemeinen Relativitätstheorie nur schwer oder unvollständig möglich.³⁰ Wir werden hier also ein Paradebeispiel für die Anwendung der Mathematik in der Physik sehen – und werden schließlich mit einer der fundamentalsten und folgenreichsten Gleichungen in der Geschichte der Physik belohnt.

Die Herleitung beginnt mit der Newtonschen Bewegungsgleichung, die auf die 4er-Vektoren erweitert wird. Dafür definieren wir die 4-er Geschwindigkeit u^α durch

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (29.14)$$

Diese Geschwindigkeit kann man in ein anderes IS durch eine Lorentz-Transformation überführen:³¹

$$u'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta \quad (29.15)$$

Wir wünschen uns also jetzt die Möglichkeit, statt der bekannten Newtongleichung $m \frac{dv'}{dt} = \vec{F}_N$, eine relativistische Variante aufzustellen. Die müsste dann also angelehnt daran etwa

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \quad (29.16)$$

lauten. Hier ist F^α nicht wirklich festgelegt³² und dessen Komponenten müssen noch bestimmt werden. Diese Gleichung muss, wenn wir sie in der Relativitätstheorie nutzen wollen, bei einer Lorentztransformation seine Form behalten (also immernoch gültig sein). Es muss dann immernoch gelten

$$m \frac{du'^\alpha}{d\tau} = F'^\alpha \quad (29.17)$$

Außerdem muss Sie für eine Relativbewegung von $v' = 0$ der Bezugssysteme in die üblichen Newtongleichungen übergehen. Um die Einträge von F^α zu identifizieren, wenden wir die Lorentz-Transformation und untersuchen die Resultate. Für eine Relativbewegung mit v_x in x -Richtung ergibt sich:

$$F^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta F'^\beta \quad (29.18)$$

³⁰ Ich meine hier die 4-er Vektoren und Summenkonvention usw.

³¹ Also genau so, wie man auch die Ortskoordinaten transformieren würde.

³² Nur die Kräfte wie bei Newton können das nicht sein. Es spielt ja auch noch die Zeitkoordinate usw. hier mit.

. Nach ausmultiplizieren der Rechten Seite erhält man folgende transformierte Komponenten für F^α :

$$F^0 = \gamma \frac{v^1 F_N^1}{c} \tag{29.19}$$

$$F^1 = \gamma F_N^1 \tag{29.20}$$

$$F^2 = F_N^2 \tag{29.21}$$

$$F^3 = F_N^3, \tag{29.22}$$

wobei F_N jeweils die bekannten Kraftkomponenten aus der Newtonschen Bewegungsgleichung $m \frac{dv^\mu}{dt}$ sind. Man erkennt, dass offenbar die letzten drei Komponenten mit der Newton-Kraft übereinstimmen – zusätzlich mit einer Lorentz-Transformation für die x -Richtung. Der Ausdruck F^0 ist erstmal nicht bekannt. Wir erinnern uns jedoch an die Energiedefinition aus der Mechanik: Dort war $E = \int v \cdot F dt$. Man kann also durch Vergleich erkennen, dass

$$F^0 = \gamma \frac{v_x F_N^1}{c} = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} \tag{29.23}$$

gilt. Im Folgenden wollen wir nicht die Kraftkomponenten, sondern die Impulskomponenten p^α angeben. Für diese gilt $p^\alpha = m \cdot \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \cdot m \frac{dx^\alpha}{dt}$ und man kann die einzelnen Komponenten angeben als³³

³³ Es gebe hier wieder nur eine Geschwindigkeit in x -Richtung. Deswegen wird nur die v^1 -Komponente Lorentz-transformiert.

$$p^\alpha = \left(\gamma \cdot m \frac{c \cdot dt}{dt} = \gamma mc, \gamma mv^1, mv^2, mv^3 \right) \tag{29.24}$$

Nun bleibt noch die Frage, was unter der ersten Komponente γmc zu verstehen ist. Hier kann man durch Verwendung von Gl. 29.23 eine erstaunliche Aussage ableiten. So ist der Impuls durch Integration über die Eigenzeit aus der Kraftkomponente F^0 zu erhalten gemäß

$$p^0 = \int dF^0 d\tau = \frac{\gamma}{c} \int \frac{dE}{dt} d\tau = \frac{\gamma}{c} \int \frac{dE}{dt} \frac{dt}{\gamma} = \frac{E}{c} \tag{29.25}$$

Man kann also den Ausdruck $\gamma \cdot mc$ im Viererimpuls mit E/c ersetzen. Daraus folgt dann auch ein Ausdruck für diese nun *relativistische Energie* genannte Energieform:

relativistische Energie

$$E = \gamma \cdot mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{29.26}$$

und den relativistischen Impuls

relativistischer Impuls

$$E = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{29.27}$$

gefunden. Um den berühmten Energie-Impuls-Satz herzuleiten ist es nun kein weiter Weg mehr.

relativistische Masse An dieser Stelle möchte ich einen wichtigen Hinweis geben. Der relativistische Impuls ist als Größe oben definiert. Es ist nun aus mathematischer Sicht auch möglich den relativistischen Impuls anzusehen als ein Produkt aus relativistischer Masse $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ und der nichtrelativistischen Geschwindigkeit v . Dies wurde

früher oft sowohl in Lehrbüchern als auch in der Schule gemacht. Die Ergebnisse von Rechnungen usw. werden dadurch nicht falsch. Die Interpretation an sich ist jedoch mehr als zweifelhaft. Die Masse wird normalerweise als eine Teilcheneigenschaft angesehen. Die Summe der Teilchen in einem Festkörper ergibt schließlich dessen Masse. Nach dieser Definition darf die Masse sich natürlich nicht durch den Bewegungszustand ändern! Ein schnelles Raumschiff besteht trotzdem noch aus N Protonen und Neutronen, die Masse muss konstant bleiben.

Wenn man allerdings die Masse streng als träge Masse definiert, hat diese Sichtweise zumindest eine geringe Berechtigung. Es wird demnach zunehmend "schwer", ein schnelles Objekt immer weiter zu beschleunigen ($F = dp/dt$). Die Trägheit nimmt also zu. Bitte seien Sie sich dieser Feinheiten stets bewusst bzw. informieren Sie sich weitergehend bevor Sie im Unterricht von einer "relativistischen Masse" sprechen.

Wir werden nun wieder das Wegelement ds^2 darstellen. Diesmal wollen wir aber die Impulse statt die Ortskoordinaten einbeziehen und dividieren durch das Zeitdifferential:

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad | \cdot m^2 \quad (29.28)$$

$$m^2 c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \cdot m \cdot dx^\alpha \cdot m \cdot dx^\beta \quad | / d\tau / d\tau \quad (29.29)$$

$$m^2 c^2 = \eta_{\alpha\beta} \left(m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \left(m \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) \quad (29.30)$$

$$m^2 c^2 = \eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \quad (29.31)$$

$$(29.32)$$

Aus der Impuls-Formulierung über die Energie folgt nun

$$m^2 c^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \quad (29.33)$$

Nach Umformung haben wir nun den Energie-Impuls-Satz der Relativitätstheorie hergeleitet:

relativistischer Energie-Impuls-Satz

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 (\vec{p})^2 \quad (29.34)$$

Um zu verstehen, was für zentrale Aussagen hier gemacht werden, schauen wir uns die Grenzfälle an. Wir nehmen dafür einen "kleinen" oder einen "großen" Impuls an, so dass also jeweils einer der beiden Terme von Gleichung 29.34 dominant wird.³⁴

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \begin{cases} p \ll mc & \rightarrow E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \\ p \gg mc & \rightarrow E = c \cdot p = mc^2 \end{cases} \quad (29.35)$$

Der erste Fall für kleine Geschwindigkeiten, folgt also

$$E = \frac{p^2}{2m} + mc^2 = E_{\text{kin}} + mc^2 \quad (29.36)$$

Also Ruheenergie E_0 wird nun die Energie ohne Bewegungsanteil bezeichnet:

Ruheenergie, Energie-Masse-Äquivalenz

$$E_0 = mc^2 \quad \Delta E = \Delta mc^2 \quad (29.37)$$

³⁴ Man nutzt (wie immer) eine Taylorentwicklung für diese Näherung. Dazu stellen wir den E-I-Satz etwas um: $E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} = cp \sqrt{\frac{(mc)^2}{p^2} + 1}$. Den Fall $p \gg mc$ erkennt man nun sofort, für $p \ll mc$ kann man die Taylorentwicklung nutzen: $\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}$. Dann wird der letzte Term in der Wurzel ("klein") genähert bis zum linearen Glied: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ und damit $mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} \right)$

$${}^{35}_{1}\text{g} \cdot c^2 = 9^{13} \text{ J}$$

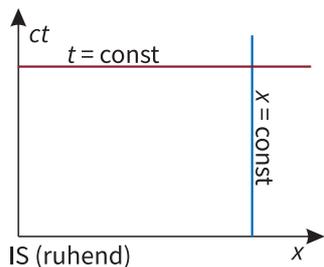


Abb. 34. Zeitentwicklung (vertikale Linien) für feste Ortskoordinaten und Ereignisse an verschiedenen Orten zu gleichen Zeitpunkten (horizontale Linien) für einen ruhenden Beobachter.

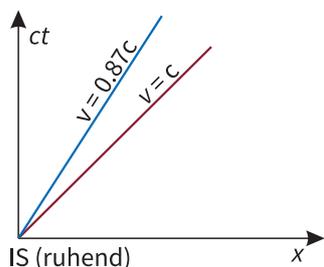


Abb. 35. Minkowski-Diagramm mit den Koordinatensystemen für einen relativ bewegten Beobachter mit einer Geschwindigkeit $v < c$ in die positive x -Richtung (blaue Linie) und für ein Teilchen mit $v = c$ (rote Linie).

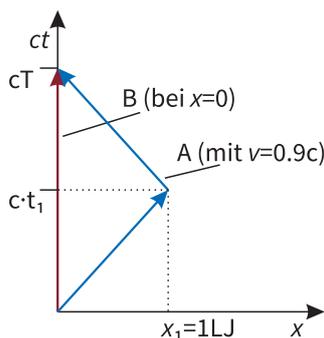


Abb. 36. Minkowski-Diagramm-Darstellung des Zwillingsparadoxons. Die Zeit läuft für den ruhenden Beobachter A anders ab, als für den Reisenden B.

Es hat sich hier also gezeigt, dass ein ruhendes Teilchen ohne Impuls trotzdem einer enormen Menge Energie entspricht³⁵. Die Masse wird im Rahmen der ART als Ursache des Gravitationsfeldes gesehen. Es gibt aber auch andere Fälle, in denen diese Energie sichtbar wird:

- Bindungsenergien in Atomkernen entspricht immer auch eine Masse. Die Summe der Massen der Kernbestandteile ist nicht gleich der Kernmasse!
- Bei der Spaltung schwerer Kerne wird Bindungsenergie frei. Die Spaltprodukte zusammen sind leichter als der Ursprungskern.
- Ein Stern wird durch starke Gravitationskräfte zusammengehalten. Dies reduziert seine Masse im Vergleich zu $m = \rho \cdot V$ deutlich.

ABSCHNITT 29.5

Minkowski-Diagramm

Um die Phänomene der speziellen Relativitätstheorie anschaulich zu behandeln werden oft sogenannte Minkowski-Diagramme verwendet. Darauf soll in diesem Abschnitt kurz anhand von einigen Beispielen eingegangen werden. In einem Minkowski-Diagramm wird auf der y -Achse die Zeitkoordinate $x^0 = ct$ abgebildet und auf der x -Achse eine Ortskoordinate, wie in Abbildung 34 gezeigt. Ein in diesem System ruhender Beobachter ($x = const, \forall t$) würde man in diesem Diagramm durch eine vertikale Linie darstellen. Geraden oder Kurven im Minkowski-Diagramm nennt man auch *Weltlinien*. Man kann im Minkowski-Diagramm nun auch Relativbewegungen darstellen. Ein Objekt, das sich mit $v = c$ relativ zum Inertialsystem IS (die Koordinatenachsen) fortbewegt, legt mit jedem Fortschritt Δx auf der x -Achse auch den Schritt $c \cdot \Delta t$ auf der y -Achse zurück. Damit folgt für ein solches Objekt eine Weltlinie mit Steigung $\tan \alpha = \frac{c \Delta t}{\Delta x} = \frac{c}{v} = 1$ (gelbe Linie in Abbildung 35). Wenn die Geschwindigkeit $v < c$ beträgt, folgt eine Weltlinie mit $\tan \alpha = \frac{c}{v} > 1$ und damit $\alpha > 45^\circ$ (siehe blaue Linie in Abbildung 35).

Wir wollen nun zur Übung das berühmte Zwillingsparadoxon mit Minkowski-Diagrammen darstellen. Das Zwillingsparadoxon gestaltet sich wie folgt: Zwei Zwillinge befinden sich in gleichem Alter auf der Erde ($x = 0$). Ein Zwilling A bewegt sich in einem Raumschiff mit hoher Geschwindigkeit $v = 0.9c$ von der Erde weg, kehrt nach der Flugzeit t_1 am Punkt x_1 (1 LJ vom Startpunkt entfernt) um und fliegt mit gleicher Geschwindigkeit wieder zurück. Wir wollen nun untersuchen, wieviel Zeit für die beiden Zwillinge zwischen Abreise und Ankunft vergangen ist. Für die Analytische Lösung geht man ganz ähnlich der grafischen Lösung vor. Die Zeit für den ruhenden Beobachter B entspricht genau der Länge seiner Weltlinie (es wird ja keine Strecke zurückgelegt):

$$\Delta s_B = \int_{(0,0,0,0)}^{(cT,0,0,0)} ds = cT \tag{29.38}$$

Jetzt wollen wir die Länge der Weltlinie von B beschreiben (von A bzw. IS aus gemessen!). Dafür betrachten wir zuerst den Weg bis zum Umkehrpunkt. Dafür gilt:

$$\Delta s_{A,\text{hin}} = \int_{(0,0,0,0)}^{(cT/2, x_U, 0, 0)} |ds| = \int_{(0,0,0,0)}^{(cT/2, x_U, 0, 0)} \sqrt{\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = \sqrt{c^2 - v^2} \int_0^{cT/2} dt \tag{29.39}$$

Es wurde wieder aus dem Ausdruck $\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ das Differential dt ausgeklammert, um einen Ausdruck für die Geschwindigkeit zu bekommen. Das Integral über dt kann man

nun ausführen und erhält:

$$\sqrt{c^2 - v^2} \int_0^{cT/2} dt = c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int_0^{cT/2} dt = \frac{cT}{2\gamma} = \frac{cT'}{2} \quad (29.40)$$

Für den Rückweg gilt im Prinzip das gleiche:

$$\Delta s_{A,\text{rück}} = \int_{(cT/2, x_U, 0, 0)}^{(cT, 0, 0, 0)} |ds| = c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int_{cT/2}^{cT} dt = \frac{cT}{2\gamma} = \frac{cT'}{2} \quad (29.41)$$

Insgesamt läuft also für den Reisenden A die Zeit $T'/2 + T'/2 = T' = T/\gamma$ ab. Es ist also weniger Zeit als im Vergleich zum ruhenden Beobachter vergangen. Für unser Zahlenbeispiel bedeutet dies

$$T' = \sqrt{1 - \frac{(0.9c)^2}{c^2}} = 0.43 \cdot T \quad (29.42)$$

In Zahlen ergibt sich also für die Reisezeiten:

$$B : \quad T = \frac{2 \text{ LJ}}{0.9 \cdot c} = \frac{2 \cdot 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}}{0.9 \cdot c} = 2.25 \text{ Jahre} \quad (29.43)$$

$$A : \quad T' = 0.43 \cdot \frac{2 \text{ LJ}}{0.9 \cdot c} = 0.97 \text{ Jahre} \quad (29.44)$$

Der Altersunterschied ist also beträchtlich. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass der Reisende für Reisestrecke von 2 Lichtjahren nur etwas weniger als ein Jahr gebraucht hat. Es ist also nicht so, dass man für die 4.3 Lichtjare nach Alpha-Centauri selbst mit fast-Lichtgeschwindigkeit 4 Jahre bräuchte. Für eine bequeme Reisezeit von einer Woche muss man aber erstmal investieren: Man müsste mit $v = 0.999979c$ unterwegs sein...

ABSCHNITT 29.6

Relativistischer Dopplereffekt

Das Minkowski-Diagramm soll nun noch genutzt werden, um den relativistischen Dopplereffekt (oder auch *relativistische Rotverschiebung*) herzuleiten. Dafür betrachten wir die Situation aus Abb. 37. Unser unbewegtes Inertialsystem befinde sich im Ursprung und bewege sich nicht. Die Weltlinie ist also als vertikale Linie (im Bild blau) darzustellen. Ein relativ dazu bewegtes System soll sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x -Achse von uns entfernen. Dies wird im Bild durch die rote Gerade dargestellt. Alle folgenden Betrachtungen nehmen wir nun zunächst im IS von A vor, es wird also alles durch die Koordinaten x und t ausgedrückt. Um die Geradengleichung der Weltlinie des bewegten Systems zu ermitteln, nutzen wir die bekannte Geschwindigkeit v durch $x = v \cdot t$. Dies wird nun umgeformt, um es in die korrekte Koordinatenachsen-Bezeichnung ($ct = f(x)$) zu bringen:

$$x = v \cdot t \rightarrow cx = v \cdot ct \rightarrow ct = \frac{c}{v} \cdot x \quad (29.45)$$

Um den relativistischen Dopplereffekt nun zu beschreiben, erzeugen wir in unserem ruhenden System ein periodisches Signal mit der Frequenz f und der Periodendauer T , wie in Abb. 37 an der ct -Achse angedeutet. Dieses Signal propagiert nun durch die Raumzeit (mit $v = c!$) und wird vom sich entfernenden Beobachter aufgefangen. Die Signalpropagation muss im Diagramm durch die Gerade $ct = x$ dargestellt werden.

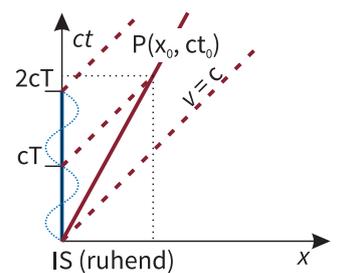


Abb. 37. Ruhendes IS erzeugt ein Signal und sendet dieses an einen bewegten Beobachter.

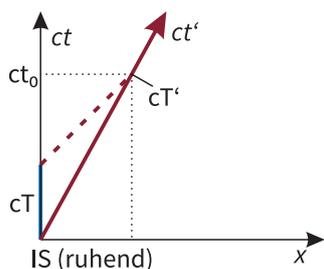


Abb. 38. Ausschnitt zur Berechnung von T' .

Während wir im ruhenden System die Periodendauer T für das Signal feststellen, so wird der bewegte Beobachter stattdessen die Periodendauer T' ermitteln. Um T' zu bestimmen, benötigen wir zunächst die Zeit t_0 . Diese können wir aus dem Schnittpunkt der beiden Geraden, wie in Abb. 38 skizziert, ermitteln. Die Geradengleichung für das propagierte Signal entspricht einer nach oben verschobenen Gerade mit Anstieg 1, also $ct = x + cT$. Die Gleichung für die Weltlinie des bewegten Bezugssystems lautet $ct = \frac{c}{v} \cdot x$. Wir stellen nun beide Gleichungen nach x um und setzen sie gleich. Damit folgt

$$t_0 = \frac{cT}{c - v} \tag{29.46}$$

Um herauszufinden welcher Zeitspanne dies im bewegten System entspricht, benötigen wir die Zeitdilatation. Dies führt dann zu

$$T' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t_0 \tag{29.47}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{cT}{c - v} \tag{29.48}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{(c - v)^2}} T = \sqrt{\frac{(c - v) \cdot (c + v)}{(c - v)^2}} \tag{29.49}$$

$$T' = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \cdot T \tag{29.50}$$

Mit den Frequenzen ($f = 1/T$) ergibt sich dann die Frequenzverschiebung für schnell bewegte Beobachter

relativistischer Dopplereffekt / Rotverschiebung

$$f' = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \cdot f \tag{29.51}$$

Dies bedeutet eine Verringerung der Frequenz bzw. eine Erhöhung der Wellenlänge (Rotverschiebung) wenn sich die Signalursache schnell vom Beobachter wegbewegt.

Allgemeine Relativitätstheorie

Was weiß ein Fisch von dem Wasser, in dem er sein ganzes Leben lang schwimmt?

Albert Einstein

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird nun durch die Einsteinschen Feldgleichungen eine Verbindung von Gravitation und Raum geschaffen. Wir werden also den “flachen” Minkowskiraum verlassen. Glücklicherweise ist keine neue mathematische Beschreibung nötig, da wir bis hier schon alles notwendige eingeführt haben.

Das Äquivalenzprinzip

Das sogenannte Äquivalenzprinzip nach Einstein lautet: Trägheit und schwere Masse sind wesensgleich. Hierbei ist die als Trägheit (oder träge Masse) die Eigenschaft eines Körpers zu bezeichnen, sich gegen eine Beschleunigung zu wehren gemäß

$$m_t = \frac{F}{a}. \quad (30.1)$$

Die schwere Masse ist eine Proportionalitätskonstante im Gravitationspotential gemäß

$$F = G \frac{m_{s1} m_{s2}}{r^2} \quad (30.2)$$

. Eine etwas zugänglichere Formulierung des Äquivalenzprinzips ist die folgende:

Äquivalenzprinzip

In einem lokalen Bezugssystem lässt sich der Einfluss der Gravitationskraft nicht von der Wirkung einer Beschleunigung unterscheiden.

Wir sprechen also hier, im Gegensatz zur spezielle Relativitätstheorie, von Beschleunigungen. Es soll nocheinmal verdeutlicht werden, dass Beschleunigte Bewegungen nicht im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie behandelt werden können.³⁶

Aus dem Äquivalenzprinzip kann man die sogenannten Einsteinschen Feldgleichungen ableiten. Das würde allerdings den Rahmen dieser Veranstaltung sprengen, weshalb hierauf verzichtet wird. Wir bedienen uns lediglich einigen Schlussfolgerungen aus der Differentialgeometrie, um die geeigneten Worte für die ART zu finden. Statt einer Bahnkurve spricht man nun von Geodäten in der Raumzeit. Geodäten sind ganz ursprünglich etwa Längen- oder Breitengerade auf der Erdoberfläche. Man stelle sich vor, dass man zwei zufällige Ort auf der Erdoberfläche wählt und einfach geradeaus geht. Die Bahn um die Erdkugel beschreibt dann eine Geodäte – also eine Kurve die entsprechend der Erdkrümmung folgt. Da wir Menschen im Vergleich zur Erdkrümmung klein sind, würde uns das allein nicht ermöglichen die Erdkrümmung festzustellen. Jetzt werden wir aber folgendes Experiment anstellen können: Zwei Menschen starten an zwei Punkten in derselben Richtung. Auf einer flachen Erde würden Sie sich für alle Ewigkeit auf parallelen Strecken fortbewegen und sich niemals begegnen. Wenn die Erdoberfläche aber gekrümmt ist, werden sich diese parallelen Linien schneiden. Und das ist der Fall. Spätestens hier haben wir die Euklidische Geometrie verlassen. Genau so verhält es sich mit Geodäten in einer gekrümmten Raumzeit: Zwei Raumschiffe starten im Weltall auf

³⁶ *Beschleunigte Bezugssysteme sind keine Inertialsysteme!*

parallelem Kurs, könnten sich aber in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes trotzdem in die Quere kommen. Diese Raumkrümmung in Anwesenheit von Materie bzw. Energie wird durch die Einsteinschen Feldgleichungen beschrieben:

Einsteinsche Feldgleichungen

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{Raumkrümmung}} + \Lambda g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}_{\text{Energie-Impuls-Tensor}} \quad (30.3)$$

wobei Λ die kosmologische Konstante ist. Es sind "sinnvolle" Lösungen dieser Feldgleichung mit und auch ohne kosmologische Konstante möglich. Die Konstante hat großen Einfluss auf kosmologische Lösungen – sie beschreibt die Expansion des Universums. Einstein hatte deren Einführung als "größte Eselei seines Lebens" bereut. Heutzutage sind die kosmologischen Modelle jedoch auf diese Konstante angewiesen, da man gegenwärtig von einem expandierenden Universum ausgeht. Die Konstante Λ drängt also gewissermaßen das Universum auseinander und entspricht daher einer Energiedichte des Vakuums. Man kann diesen Effekt direkt mit den Vakuumfeldenergien der Quantenmechanik vergleichen – und auch direkt mit der Quantenmechanik bestimmen. Die Quantenmechanik würde auf diesem Wege eine kosmologische Konstante von $\Lambda_{QM} \approx 10^{70} \text{ m}^{-2}$ vorhersagen. Die ART ermittelt jedoch durch experimentelle Messungen einen Wert von $\Lambda_{ART} \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$. Diese Diskrepanz ist bisher ungeklärt und wird als Äquivalent zur Ultraviolettkatastrophe ("Vakuumkatastrophe") gesehen. Die Diskrepanz von $\Lambda_{QM}/\Lambda_{ART} \approx 10^{122}$ wird oft als die schlechteste theoretische Vorhersage einer Konstanten in die Geschichte bezeichnet.³⁷

³⁷ Mittlerweile scheint es allerdings der Fall zu sein, dass die Quantenmechanik gar keinen Beitrag zu Λ vorhersagt. Allenfalls wäre dies durch eine Störung in der Form des Universums zu erwarten, was nicht ausgeschlossen ist.

ABSCHNITT 30.2

Bewegungsgleichung/Geodätengleichung

Wir wollen hier kurz zeigen, was man tun kann um die Geodäten für eine gegebene Raumkrümmung (man nennt dies Metrik) zu berechnen. Eine Geodäte ist immer die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Im euklidischen Raum ist dies eine Gerade. Auf einer Kugeloberfläche werden die entsprechenden Kurven Geodäten oder Großkreise genannt³⁸. In einer gekrümmten Raumzeit werden wir es also im Allgemeinen mit Kurven zu tun haben, die zwei Punkte durch eine kürzeste Strecke verbinden. Die Bewegungsgleichung für solche gekrümmten Räume lautet

Bewegungsgleichung für gekrümmte Räume

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (30.4)$$

Wenn man die Differentiale $d/d\tau$ durch d/ds ersetzt, nennt man dies die Geodätengleichung. Die Christoffelsymbole Γ berechnet man gemäß

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{g^{\beta\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (30.5)$$

Hinweise: Man kann die Indizes der Metrik senken/heben durch $g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$. Außerdem sind die partiellen Ableitungen der Koordinaten untereinander gleich 0 (z.B. $\partial x^0/\partial x^1 = 0$).

ABSCHNITT 30.3

Materiefreie Feldgleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen werden wir nur in stark vereinfachter Form untersuchen. Wir nehmen dafür eine homogene Masseverteilung als Ursache für die Raumkrümmung an (also etwa ein Stern o.ä.). Der Radius dieser Masseverteilung solle r_0 betragen. Die Feldgleichungen für die Lösungen außerhalb (ohne Materie, deswegen wird $T_{\mu\nu} = 0$) von r_0 lauten dann nur noch

Materiefreie Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (30.6)$$

wobei der Ricci-Tensor R nur noch diagonale Einträge hat die ungleich 0 sind. Die Elemente des Ricci-Tensors werden aus den Christoffel-Symbolen $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ und damit aus der Metrik $g_{\mu\nu}$ festgelegt. Für ganz neugierige gibt es hier die Berechnungsvorschrift³⁹:

³⁹ Man könnte hiermit die Schwarzschildmetrik überprüfen!

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\rho}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \quad (30.7)$$

ABSCHNITT 30.4

Schwarzschild-Metrik

Diese stark vereinfachte Form der Feldgleichungen wollen wir jetzt nutzen um eine Lösung zu konstruieren. Die Gleichung 30.6 hängt von der Metrik $g^{\mu\nu}$ ab. Was aber genau ist denn nun eine Metrik? Wir sind bereits in der SRT der Metrik für die euklidische (flache) Raumzeit begegnet, $\eta_{\mu\nu}$. Diese wurde genutzt um das Wegelement ds bzw. $(ds)^2$ zu bestimmen nach $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Genau auf die gleiche Weise kann man auch die Metrik einer gekrümmten Raumzeit nutzen, um ein Wegelement in diesem gekrümmten Raum zu berechnen:

Wegelement in gekrümmter Raumzeit

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (30.8)$$

Diese Metrik $g_{\mu\nu}$ definiert also, wie genau dieser gekrümmte Raum aussieht. Die eigentliche materiefreie Feldgleichung 30.6 hängt über die Christoffelsymbole ja auch eigentlich nur von $g_{\mu\nu}$ und dessen Ableitungen ab. Die Ableitung einer Lösung der komplizierten Differentialgleichungen, die in Gleichung 30.6 impliziert sind, ist recht umständlich. Wir gehen hier darum einen anderen Weg und nehmen eine bereits gefundene Lösung als gegeben an. Dass diese Lösung tatsächlich die materiefreien Feldgleichungen erfüllt, bleibt der Übungsveranstaltung überlassen. Eine Metrik, die die materiefreie Feldgleichung erfüllt, hat die Form

Schwarzschild Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{r_s}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(1 - \frac{r_s}{r})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (30.9)$$

und wurde 1915 von Karl Schwarzschild als erste exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen gefunden. Wegen der Kugelsymmetrie der Masseverteilung werden hier Kugelkoordinaten $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$ verwendet. Wir können uns jetzt leicht das Wegelement dieser Schwarzschildmetrik berechnen:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (30.10)$$

Dieses Wegelement ist im Vergleich zur Minkowski-Metrik deutlich facettenreicher. Wir erkennen zunächst ein Problem, dass allerdings aus der Wahl der Koordinaten folgt. Das Wegelement wird singulär, wenn $r \rightarrow 0$ strebt. Außerdem sehen wir an der zweiten Koordinate das gleiche singuläre Verhalten für $r = r_S$.⁴⁰ Wichtiger ist aber noch folgender Effekt: Wenn die Radialkoordinate r den Wert r_S unterschreitet, ändern sich die Vorzeichen im Wegelement der ersten beiden Koordinaten. Diese Situation kann man (sehr mit Vorsicht zu behandeln!) notdürftig interpretieren als: *Zeit und Raum tauschen die Rollen..* Man nennt die Größe r_S auch Ereignishorizont. Wo genau liegt dieser Ereignishorizont für unsere Metrik? Man kann dafür einen Vergleich der Newton-Gravitation und der relativistischen Gravitation anstellen. Dafür muss man allerdings recht kompliziert für die Bewegungsgleichung der ART (siehe 30.4) für schwache Felder vereinfachen. Aus diesen Näherungen bekommt man eine Bedingung, die gelten muss wenn in schwachen Gravitationsfeldern die Newtonsche Mechanik gültig sein soll. Damit das der Fall ist, muss

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \quad (30.11)$$

sein. In diesen Ausdruck ist das Newtonsche Gravitationspotential mit der Gravitationskonstanten G einer Masse M eingegangen. Durch Vergleich mit dem $g_{\mu\nu}$ -Element der Schwarzschild Metrik kann man nun leicht einen Ausdruck für r_S erkennen:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \quad \rightarrow \quad r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (30.12)$$

Man nennt diese Konstante r_S auch Schwarzschildradius. Für die Sonne beträgt der Schwarzschildradius demnach

$$r_{S,Sonne} = \frac{2GM_{Sonne}}{c^2} \approx 3 \text{ km} \quad (30.13)$$

wobei der tatsächliche Radius der Sonne $r_{Sonne} = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$ beträgt. Die Abweichung des Sonnenradius vom Schwarzschildradius um 6 Größenordnungen zeigt also, dass die Abweichungen von der Minkowski-Metrik in unserem Sonnensystem sehr klein sind.⁴¹ Wenn ein Stern den Radius r_S unterschreitet, nennt man ihn ein Schwarzes Loch. Wie kann man sich so ein schwarzes Loch vorstellen? Wir unterteilen es hierfür in drei Bereiche: Im ersten Bereich I ist die Masse des Sterns kugelsymmetrisch in einem Gebiet mit Radius r_b verteilt. Innerhalb dieses Gebietes kann man mit der Schwarzschildmetrik keine Aussagen treffen, da hier die materiefreien Feldgleichungen nicht gelten. Im folgenden Bereich II zwischen der Massenansammlung und dem Ereignishorizont beobachten wir den bereits angesprochenen Vorzeichenwechsel im Wegelement ds . Was beim Eintritt in den Ereignishorizont passiert wird später noch genauer untersucht. Außerdem ist wohl bekannt, dass kein Licht und damit auch keine Information den Ereignishorizont wegen der starken Gravitation wieder verlassen kann – deswegen spricht man auch von einem schwarzen Loch. Warum das der Fall ist, hängt mit der sogenannten gravitativen Rotverschiebung zusammen.

⁴⁰ Diese Singularität ist durch Wahl einer anderen Metrik zu vermeiden, es ist also eher ein Artefakt ohne strenge physikalische Notwendigkeit.

⁴¹ Trotzdem sind die Effekte wichtig! Die Periheldrehung des Merkur etwa kann nur mit einer Raumkrümmung erklärt werden.

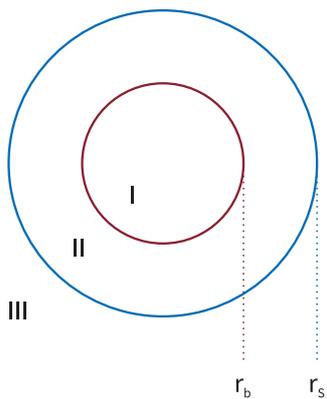


Abb. 39. Dieses schwarze Loch besitzt eine Masseverteilung bis r_b . Der Ereignishorizont liege bei r_S .

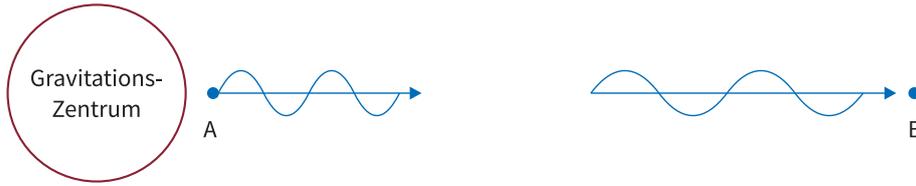


Abb. 40. Die Veränderung der Eigenzeit in der Nähe eines Gravitationsfeldes beeinflusst auch die Wellenlänge von Licht. Hat das Licht das Gravitationspotential verlassen, scheint das Licht eine größere Wellenlänge zu haben.

ABSCHNITT 30.5

Gravitative Rotverschiebung

Um den Effekt der gravitativen Rotverschiebung zu untersuchen, machen wir uns zunächst das Problem bewusst. Wir wollen wissen, welchen Einfluss ein Photon durch die Anwesenheit eines Gravitationsfeldes spürt. Das Photon besitzt als grundlegende Eigenschaft eine Verknüpfung mit der Zeit – in Form einer Frequenz bzw. Wellenlänge. Wir wollen also zunächst untersuchen, was mit einer Uhr in Anwesenheit eines Gravitationspotentials geschieht. Wir nehmen an, unsere Uhr befinde sich im Koordinatenursprung ($x^1 = x^2 = x^3 = 0$). Dann ist das Wegelement:

$$d\tau = \frac{ds_{\text{Uhr}}}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{g_{00}} dt \quad (30.14)$$

Wir untersuchen jetzt folgenden Sachverhalt: Es werden zwei Photonen vom Ort A in Richtung Ort B gesendet. Die Zeit im System des Photons sei τ , die Zeit im System des Beobachters sei t . Direkt angewendet ergibt sich für die differentiellen Zeitintervalle am Ort A bzw. Ort B nun

$$d\tau_A = \sqrt{g_{00}(r_A)} dt_A \quad d\tau_B = \sqrt{g_{00}(r_B)} dt_B \quad (30.15)$$

Die sehr kurzen Zeitintervalle $d\tau$ können wir auch als eine Schwingungsperiode der Lichtwelle bezeichnen. Damit können wir die Frequenzen ausdrücken als⁴² $d\tau_A = \frac{1}{\nu_A}$ bzw. $d\tau_B = \frac{1}{\nu_B}$. Das Gravitationsfeld soll sich zeitlich nicht ändern. Das heißt, dass die Reisezeiten für das erste Signal und für das zweite Signal für den Beobachter gleich lang sein müssen. Daraus folgt $dt_A = dt_B$. Wir können nun durch Division die Gleichungen 30.15 verbinden:

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}} \quad (30.16)$$

Damit haben wir einen Ausdruck erhalten, mit dem man die Änderung der Frequenz einer Lichtwelle bestimmen kann, wenn Sie Gravitationspotentiale durchläuft. In der Praxis wird auch oft der Rotverschiebungsparameter $z = \frac{\nu_A}{\nu_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}} - 1$ bzw. die relative Rotverschiebung $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_B}$ verwendet. Man kann also bei bekannten Prozessen (Fusion in Sternen) ausgesendete Spektren untersuchen und bei einer entsprechenden Rotverschiebung auf die Gravitation am Entstehungsort schließen!

Wir wollen nun noch zwei Grenzfälle untersuchen: Ein sehr kleines und ein sehr starkes Gravitationspotential. Im Fall der Erddanziehung können wir im Rahmen der ART von einem sehr schwachen Gravitationspotential sprechen. Wie schon gezeigt, kann man für diesen Fall den entsprechenden Eintrag des metrischen Tensors durch die Newton-Gravitation annähern. Dann wird $g_{00}(r) \approx \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$. Für die Umgebung um die Erd-

⁴² mit $T = \frac{1}{f}$

⁴³ Die Potentialdifferenz der Newtongravitation wird linearisiert und beträgt hier $\Phi_B - \Phi_A = g(h_B - h_A)$.

oberfläche ergibt sich mit dieser Näherung⁴³

$$z = \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1 = \frac{g(h_B - h_A)}{c^2} = \frac{gh}{c^2} \tag{30.17}$$

Die relative Rotverschiebung beträgt dann

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2} \tag{30.18}$$

TODO: Herleitung auch mit Energiesatz möglich!

$$2\pi\hbar\nu_A = mc^2 + mgh \qquad 2\pi\hbar\nu_B = mc^2 \tag{30.19}$$

Man kann diesen Effekt der gravitativen Rotverschiebung im Erdfeld sogar messen. Beim Mößbauereffekt gibt es eine sehr scharfe Linienemission von Photonen. Wenn Quelle und Empfänger durch einen Höhenunterschied von $h = 22$ m getrennt sind, ändert sich die Frequenz der emittierten Photonen um

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2} = -2.46 \cdot 10^{-15} \tag{30.20}$$

. Diese Frequenzverschiebung kann man entsprechend den Berechnungen durch Messungen tatsächlich nachweisen.

Was passiert nun aber bei einem sehr starken Gravitationsfeld? Speziell wollen wir hier den Ereignishorizont eines schwarzen Loches als Ausgangsort für eine Photonen-Emission untersuchen. Dann wird durch

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_S}{r_B}}{1 - \frac{r_S}{r_A}}} \propto \sqrt{\frac{1}{0}} \tag{30.21}$$

die Rotverschiebung unendlich stark. Das Photon kann den Ereignishorizont also nicht verlassen.

ABSCHNITT 30.6

Fall in ein schwarzes Loch

Wir wollen nun an einem Beispiel die relativistische Bewegungsgleichung benutzen. Was liegt näher, als zu untersuchen wie ein Astronaut in ein schwarzes Loch fällt. Der Sachverhalt ist in Abbildung 41 dargestellt. Die Reise des Astronauten beginnt bei $r = R$ ohne Anfangsgeschwindigkeit ($\frac{dr}{dt} \frac{dr}{d\tau} = 0$). Die Masse des schwarzen Loches ist auf einem Punkt konzentriert, also ist hier $r_b = 0$. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{30.22}$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{g^{\beta\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \tag{30.23}$$

. Da wir nun die Schwarzschildmetrik nutzen, kann $g_{\mu\nu}$ eingesetzt werden und alle Ableitungen können ausgeführt werden. Für die x^0 Komponente liefert die Bewegungsgleichung

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \cdot \frac{dt}{d\tau} = const. \tag{30.24}$$

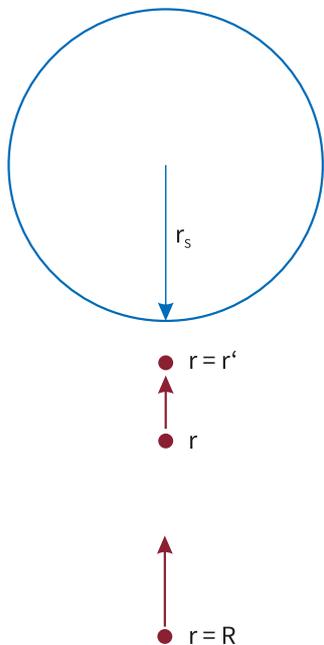


Abb. 41. Fall eines Astronauten in ein schwarzes Loch.

Und das Wegelement für den Pfad des Astronauten lautet⁴⁴

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} \quad (30.25)$$

⁴⁴ Wir betrachten einen geraden Weg, θ und φ werden also weglassen.

Diese beiden Gleichungen lassen sich analytisch lösen. Die Lösung wird hier ohne Rechnung angegeben und lautet

$$e^{-\frac{c \cdot \Delta t}{r_S}} = \frac{r' - r_S}{r - r_S} \quad (30.26)$$

Wenn sich der Astronaut dem Ereignishorizont nähert, wird der Ausdruck auf der rechten Seite gegen 0 gehen. Daher muss auch die linke Seite der Gleichung gegen 0 gehen, was für $\Delta t \rightarrow \infty$ erfüllt ist. Für den ruhenden Beobachter dauert es also unendlich lange, bis der Astronaut den Ereignishorizont erreicht.

Wie läuft das ganze aber für den Astronauten ab? Dafür muss man nun die Rechnung mit der Eigenzeit $d\tau$ des Astronauten durchführen. Es ergibt sich, dass die Zeit für den Fall ins schwarze Loch in diesen Eigenzeitkoordinaten endlich ist! Die Gesamte Fallzeit von $r = R$ bis zur Singularität ($r = 0$) beträgt

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{2c} \left(\frac{R^3}{r_S}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (30.27)$$

Der Astronaut nimmt den Moment nicht wahr, an dem er den Ereignishorizont passiert. Es ist also möglich den Ereignishorizont eines schwarzen Loches zu passieren. Es bahnt sich direkt eine Anwendung gängiger Science-Fiction an: Der Flug durch ein Wurmloch.⁴⁵

⁴⁵ Bevor Sie selbst durch ein Wurmloch fliegen, bitte noch die Übungsaufgabe zu den Gezeitenkräften lösen :-)

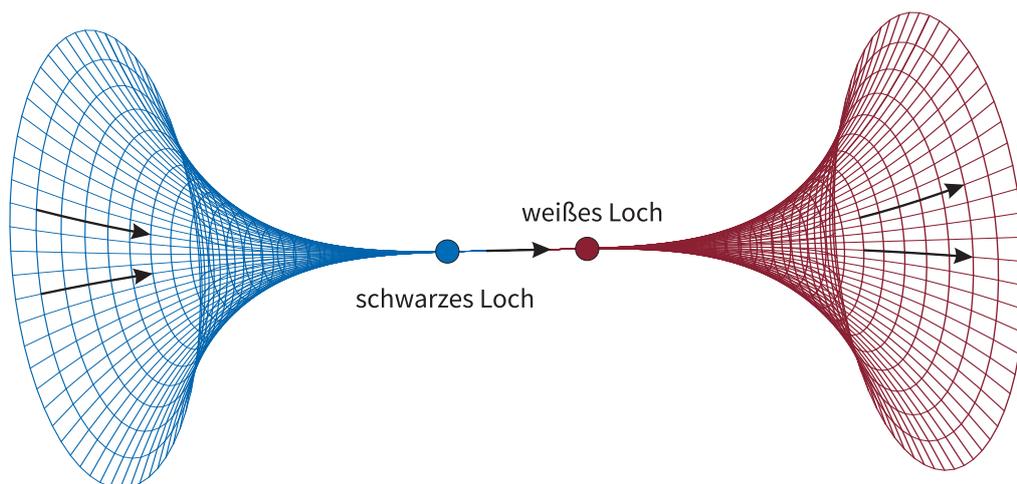


Abb. 42. Einstein-Rosen-Brücke als Verbindung eines schwarzen und weißen Loches. In kurzer Zeit könnten große Distanzen zurückgelegt werden.

Exotisches

In diesem Kapitel stelle ich kurz und oft ohne die nötige fachliche Tiefe (weil es meinen Horizont einfach deutlich überschreitet) Themen vor, die aus Wünschen von Studierenden ausgewählt wurden. Es sind hauptsächlich Effekte oder Vorstellungen, wie Sie in Medien oder Sci-Fi Filmen bekannt sind. Gerade deswegen sind es aber auch gute Schnittpunkte zwischen SchülerInnen und LehrerInnen, um interessante Gespräche über Physik zu führen.

ABSCHNITT 30.7

Einstein-Rosen-Brücke

Eine spannende Vorhersage der ART ist die Möglichkeit der Existenz von Wurmlöchern. In der Literatur oder in Filmen wird darauf häufig eingegangen. Was aber hat es darauf auf sich? Grundlegend beruhen Wurmlöcher auf der Existenz eines sogenannten "weißen Loches". Die Feldgleichungen erlauben prinzipiell Zeitumkehr – damit wäre ein solches weißes Loch das zeitumgekehrte Pendant zum schwarzen Loch. Es würde pausenlos Energie und Materie abstrahlen, und das in extremen Mengen. Ein solches Objekt wäre extrem hell und würde am Nachthimmel alle anderen Galaxien deutlich überstrahlen. Die Existenz eines weißen Loches ist also physikalisch höchst unplausibel, da man es schon längst hätte beobachten müssen. Ignorieren wir diese Tatsache, kommt hinzu dass ein solches weißes Loch aus Gründen der Energieerhaltung nicht isoliert existieren kann. Aber: Es im Rahmen der ART möglich ein Objekt zu modellieren, dass eine Verbindung aus schwarzem Loch und weißem Loch darstellt wie in Abbildung 42 gezeigt. Die Energieerhaltung wäre erfüllt und es wäre wie in der Science-Fiction möglich damit verschiedene Raumpunkte großer Entfernung miteinander zu verbinden. Diese Lösung der Feldgleichungen wurde 1935 von Einstein und Nathan Rosen vorgestellt, weswegen auch üblicherweise von einer Einstein-Rosen-Brücke gesprochen wird. Neben dem bereits

TEIL

VI

30.7. Einstein-Rosen-Brücke
 30.8. Warp-Antrieb
 30.9. Zeitreisen
 30.10. Dunkle Materie
 30.11. Hawking Strahlung
 30.12. Quantenteleportation

angesprochenen Problem mit den nicht beobachteten weißen Löchern, gibt es aber noch weitere Stolpersteine beim Benutzen des Wurmloches: Diese Lösung der Feldgleichungen ist selbst bei kleinsten Störungen instabil. Selbst der Eintritt eines Raumschiffes in das schwarze Loch würde die Verbindung destabilisieren und schließlich trennen. Dann würde man sich wiederfinden mit der Singularität hinter sich und dem Ereignishorizont vor sich – keine guten Raumfahrtbedingungen.

Als abschließende Bemerkung dazu aber noch gute Neuigkeiten: Es gibt auch neue Modelle von Wurmlochern die eine Passage ermöglichen könnten [6, 7].

ABSCHNITT 30.8

Warp-Antrieb

Instabile Einstein-Rosen-Brücken sind also wahrscheinlich nicht geeignet um interstellare Raumfahrt zu realisieren. Dann bleibt wenigstens noch der allseits bekannte Warp-Antrieb aus dem Star Trek Franchise. Und entgegen den üblichen Einschätzungen werden wir sehen, dass wir uns hier schon eher mit einer “umsetzbaren” Idee beschäftigen.

Das Ziel eines Warp-Antriebes ist kein geringeres, als die Fortbewegung mit Überlichtgeschwindigkeit. In Anlehnung an die Ideen von Star Trek gibt es echte Entwürfe, wie man solche Antriebe realisieren kann. Realisieren heißt hier, man gibt eine gewisse Metrik vor, die die gewünschten Eigenschaften beinhalten würde. Wie man solch eine Raumkrümmung dann erzeugt kann natürlich noch nicht betrachtet werden. Einer der Umsetzungen eines Warp-Antriebes ist das Modell des “Alcubierre-drive” [9]. Nötig ist es bei diesem Ansatz, ein Feld negativer Energie zu erzeugen.⁴⁶ Dann könnte man den Raum vor dem Raumschiff zusammenziehen und hinter dem Schiff wieder ausdehnen. Insgesamt wäre die Raumkrümmung in einiger Entfernung also wieder ausgeglichen und es gibt nur einen lokalen Einfluss in der Umgebung des Raumschiffes wie man in Abbildung 43 erkennt. Die Folge einer solchen vom Raumschiff erzeugten Raumkrümmung wäre, dass das Schiff sich mit $v < c$ oder sogar garnicht fortbewegt, sich das Ziel aber trotzdem relativ mit $v > c$ nähert. Außerdem wäre ein immens wichtiger Aspekt, dass durch die langsame Geschwindigkeit innerhalb der verformten Raumzeit keine Zeitdilatation berücksichtigt werden muss. Es ist also möglich ein entferntes Ziel in kurzer Zeit zu erreichen, ohne dass in der Heimat Millionen von Jahren vergangen sind. Die Metrik dazu lautet:

$$ds^2 = (v_s(t)^2 f(r_s(t))^2 - 1) dt^2 - 2v_s(t)r_s(t)dxdt + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (30.28)$$

mit r_s, f und v_s als komplizierte Funktionen der Koordinaten. Die Notwendigkeit von exotischer Materie/Energie würde einem Energiebedarf in Größenordnungen von Planeten, Sternen oder gar Galaxien entsprechen. Das macht diesen Entwurf zunächst “unpraktisch”.

Zum Glück gibt es aktuelle Veröffentlichungen die belegen, dass man auch mit positiver Energie ein solches Warp-Feld erzeugen kann [10]. Der Energiebedarf ist aber leider auch hier, sehr vorsichtig gesagt, hoch.

ABSCHNITT 30.9

Zeitreisen

Zeitreisen sind ein weiteres populäres Element, dass eng mit der Relativitätstheorie verknüpft ist. Weil auch dieses Thema in den Medien sehr präsent ist, soll hier ein grober Überblick über gängige (wissenschaftlich fundierte) Theorien zu Zeitreisen gegeben werden.

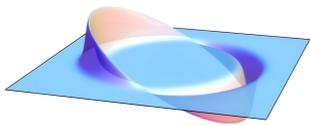


Abb. 43. Alcubierre-Drive: Der Raum vor dem Raumschiff wird kontrahiert, hinter dem Raumschiff expandiert [8].

⁴⁶ *Spekulationen zufolge könnte ja vielleicht die dunkle Materie hierzu einen Beitrag leisten...*

30.9.1 Zeitreisen in die Vergangenheit

Zeitreisen in die Vergangenheit sind (leider) physikalisch äußerst unplausibel. Man denke nur an das Großvaterparadoxon: Man würde in die eigene Vergangenheit reisen und könnte dort seinen Großvater töten. Das würde aber die eigene Existenz verhindern und damit zu einem Paradoxon führen. In der ART wurden Zeitreisen aber natürlich auf ihre Machbarkeit hin untersucht. So fand Kurt Gödel 1949 eine entsprechende Möglichkeit [11]. Als Lösung für die Feldgleichungen beschrieb er sogenannte closed timelike curves (CTC). Diese Pfade durch die Raumzeit ermöglichen es, wieder zur eigenen Vergangenheit zu reisen. Das praktische Problem an diesen Lösungen ist aber eben, dass sie geschlossen sind. Wenn jemand in die Vergangenheit reist und dort etwas tut, so hat er es “immer schon getan”. Man kann also die Zukunft mit der Reise in die Vergangenheit nicht beeinflussen sondern bedingt die bereits bekannte Zukunft damit. Auf philosophischer Ebene wird in diesem Zusammenhang auch oft vom problematischen freien Willen gesprochen.

Wenn man ohne die ART arbeitet und sich ausschließlich in einer Quantenphysikalischen Welt befände, wären allerdings Reisen in die Vergangenheit ohne Paradoxa möglich. Möglich machen dies dann die Wahrscheinlichkeitsinterpretation oder die Many-World-Interpretation.

Die gute Nachricht für angehende Zeitreisende ist aber, dass nur die Einflussnahme auf die Vergangenheit das Problem darstellt. Könnte man in die Vergangenheit reisen ohne jede Einflussnahme (z.B. nur eine Bildübertragung aus der Vergangenheit), so wäre dies mit der Theorie vereinbar.

Eine weitere hypothetische Möglichkeit, in die Vergangenheit zu reisen wäre unser bereits bekannter Warp-Antrieb als Möglichkeit einer Fortbewegung mit $v > c$.

30.9.2 Zeitreisen in die Zukunft

Zeitreisen in die Zukunft dagegen sind dagegen allgegenwärtig. Wir alle reisen pausenlos in die Zukunft. Jedoch mit einer uns vorgegebenen Geschwindigkeit die wir nicht beeinflussen können. Es stellt sich also eher die Frage, wie wir *schneller als üblich* in die Zukunft reisen können. Dies kann man direkt durch Anwendung der Gesetze aus der SRT und ART tun. Man strafft den Zeitablauf (verlängert also die Eigenzeit) durch

- hohe Geschwindigkeiten: Wenn man sich mit einer relativistischen Geschwindigkeit bewegt, wird die Eigenzeit entsprechend der Zeitdilatation verkürzt. Wenn man eine Rundreise mit großer Geschwindigkeit unternimmt, kommt man deutlich später wieder auf die Erde als dies dem eigenen Zeitrahmen entspricht.
- große Gravitationspotentiale: In Anwesenheit großer Massen verkürzt sich ebenfalls die Eigenzeit. Wenn man also für einige Zeit t ein schwarzes Loch umkreist und dann zurückkehrt, ist für den Beobachter die Zeit $t_2 > t$ vergangen.

ABSCHNITT 30.10

Dunkle Materie

Am Anfang der 1970er Jahre wurde die Rotationsgeschwindigkeit von Sternen in entfernten Galaxien untersucht. Dazu verwendete man die Doppler-Rotverschiebung als Maß für die Geschwindigkeit in verschiedenen Bereichen der betreffenden Galaxie. Durch Rechnungen kann man durch die vorhandene sichtbare Materie (im Wesentlichen Sterne, die Licht/Strahlung emittieren) ⁴⁷ diese Rotationsgeschwindigkeit sehr gut berechnen und ist in Abbildung 44 als durchgehende Linie gezeigt. Die tatsächlichen Messungen zeigten aber dagegen bei großen Abständen vom Zentrum eine eher konstante Rotationsgeschwindigkeit. Die einzig mögliche Erklärung dafür ist, dass die angenommene Masse

⁴⁷ Eventuell vorhandene Planeten spielen bei der Masse keine Rolle. Die Masse eines Sternensystems ist etwa gleich der Sternmasse.

und Massenverteilung falsch war. Wenn man in den Rechnungen eine fiktive Masseverteilung hinzufügt lässt sich das Messergebnis gut verifizieren. Der Haken an der Sache, diese "Dunkle Materie" beträgt dann etwa 90-95% der Gesamtmasse. Das heißt, nur etwa 5-10% der Materie einer Galaxie sind sichtbar.

Was soll nun aber diese Dunkle Materie sein? Zunächst einmal wird unter diesem Begriff alles zusammengefasst, dass nicht intensiv genug Strahlung aussendet um von uns wahrgenommen zu werden. Dies beinhaltet also auch ausgebrannte Sonnen oder zu schwach leuchtendes interstellares Gas. Aber selbst optimistische Schätzungen zu diesem Beitrag erklären bei Weitem nicht diese große Menge an dunkler Materie. Weitere Kandidaten für die nicht-sichtbare Masse sind Neutrinos. Diese sind zwar so gut wie masselos, dafür gibt es Sie aber in unvorstellbar großer Zahl. Neue Messungen geben Abschätzungen für Menge und Masse – die ebenfalls nicht als Erklärung für die dunkle Materie ausreicht.

Es muss also noch bisher unbekannte Teilchenarten geben, die vermutlich nur durch Gravitation, aber nicht durch andere Kräfte wechselwirken. Das Universum besteht also demnach zum Großteil aus Materie/Energie die wir weder beobachten können, noch im Labor erzeugen konnten. Es gibt theoretische Modelle, wie man Teilchen mit den geforderten Eigenschaften beschreiben kann. Wirklich gute Ansätze eine experimentelle Entscheidung zu treffen gibt es aber momentan, nach meinem Wissen, nicht.

ABSCHNITT 30.11

Hawking-Strahlung

Die sogenannte Hawking-Strahlung ist an die Gegenwart eines schwarzen Loches gebunden. Die hier gegebene Erklärung ist sehr vereinfacht – um nicht zu sagen: falsch. Trotzdem kann man sich daran den wesentlichen Kern des Effektes herleiten.

Der Ausgangspunkt dieser sehr vereinfachten Argumentation ist der Prozess der Entstehung virtueller Teilchen im Vakuum als Folge der Unbestimmtheitsrelation $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$. Diese Virtuellen Teilchen rekombinieren üblicherweise nach kurzer Zeit wieder und geben so ihre "geliehene" Energie wieder ab. Wie in Abbildung 45 gezeigt, gilt für diese Prozesse also Energieerhaltung, da $E = 0$. Wenn jetzt aber dieser Prozess genau am Ereignishorizont eines schwarzen Loches stattfindet, ist es den beiden entstandenen Teilchen nicht mehr möglich miteinander wechselzuwirken. Damit die Energieerhaltung $E = 0$ für diesen Prozess trotzdem gilt, muss das eine Teilchen also eine negative Energie besitzen. Hinweis: Dies ist nicht einfach mit einem $E < 0$ wie etwa in einem gebundenen Zustand im Potential zusehen. Vielmehr bedeutet dies auch eine "negative Masse" gemäß $E = mc^2$. Diese negative Energie wird vom schwarzen Loch absorbiert und trägt somit zum Energieverlust des schwarzen Loches bei. Wenn genügend negative Energie absorbiert wurde, "zerstrahlt" das schwarze Loch.

Diejenigen virtuellen Teilchen, die aber mit $E > 0$ dem schwarzen Loch entkommen, sind die hier diskutierte Hawking Strahlung. Die energetische Verteilung dieser Strahlung entspricht nach Hawking der eines schwarzen Körpers mit einer Temperatur von

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \quad (30.29)$$

, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse des schwarzen Loches ist. Das interessante an dieser Temperatur ist die inverse Abhängigkeit von der Masse. Das führt dazu, dass die abgestrahlte Leistung⁴⁸ für große schwarze Löcher sehr gering ist und für Messungen auf große Entfernungen also nicht zugänglich ist.

Wenn nun aber ein schwarzes Loch eine kleine Masse hat, ist die abgestrahlte Leistung durchaus wichtig. In der Strahlungsbilanz haben wir dann einen Einstrom von

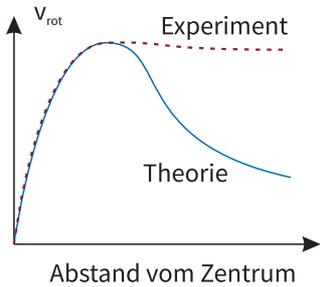


Abb. 44. Rotationsgeschwindigkeiten entfernter Galaxien.

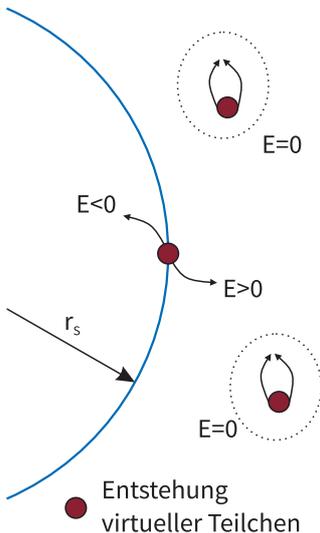


Abb. 45. Entstehung von Hawking-Strahlung am Ereignishorizont.

⁴⁸ $P(T) = \sigma_{SB} \cdot T^4$

Strahlung durch die kosmische Hintergrundstrahlung bei $T = 2.7\text{ K}$ und die Abstrahlung der Hawking Strahlung. Wenn nun also $T_H > 2.7\text{ K}$ wird, verliert das schwarze Loch kontinuierlich Energie. Dies ist der Fall für

$$M = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B \cdot 2.7\text{ K}} = 5 \cdot 10^{21}\text{ kg}$$

mit einem dazu passenden Schwarzschildradius von $r_S = 7.4\text{ }\mu\text{m}$. Man kann also zumindest beruhigt sein, dass hypothetische mikroskopische schwarze Löcher in Teilchenbeschleunigern von selbst zerstrahlen.

ABSCHNITT 30.12

Verschränkung und Quantenteleportation

Eine Verschränkung liegt in der Quantenphysik in vielen Situationen vor. Man nennt Zustände immer dann verschränkt, wenn man zwar den Zustand des gesamten Systems kennt ohne die Zustände der Einzelsysteme zu kennen. In der klassischen Physik ist dies übrigens nicht denkbar, da man dort schon prinzipiell in allen Systemen die Teile immer weiter in Teilsysteme unterteilen kann.

Ein gut verständliches Beispiel für ein “verschränktes” System ist das Wasserstoffatom. Aus einem Atom mit Kernspin (up oder down) und seinem Elektron mit Spin (down oder up). Durch Beobachtungen und Messungen kann man feststellen, dass der Gesamtdrehimpuls (bzw. das magnetische Moment) des Wasserstoffatoms gleich Null ist. Der Spin des Atomkerns und des Elektrons müssen sich also immer genau gegenseitig aufheben. Es sind also die Zustände

Kernspin	Drehimpuls Elektron	Gesamtdrehimpuls
↑	↓	0
↓	↑	0

möglich. Welche Einzelzustände tatsächlich bei einem Atom realisiert sind, kann man erst durch eine Messung herausfinden. Wenn man herausfindet, dass beim Atom nun der Elektronendrehimpuls $s_z = +1/2$ vorliegt, dann ist sofort gewiss dass der Kernspindementsprechend $-1/2$ betragen muss. Nach dieser Messung ist die Verschränkung aufgehoben/zerstört, denn es sind ja nun auch die Einzelzustände bekannt. Diesen Umstand kann man im Gedankenexperiment auf das sogenannte EPR-Paradoxon erweitern.

30.12.1 EPR-Paradoxon

Das EPR-Paradoxon (Einstein-Podolski-Rosen) war ursprünglich darauf angelegt, die Unvollständigkeit der Quantenmechanik zu belegen.⁴⁹ Das Paradoxon kann man am Beispiel eines Systems aus 2 Teilchen mit Spin veranschaulichen. Diese 2 Teilchen mit Spin up oder down sollen z.B. aus Annihilation entstehen und können so also nur den gemeinsamen Gesamts Spin Null haben. Diese Teilchen sind also bezüglich des Spins verschränkt (Gesamts Spin = 0, Einzelspins unbekannt). Diese zwei Teilchen kann man nun ohne die Einzelzustände zu bestimmen an beliebig entfernte Orte bringen. Würde man von Teilchen 1 oder 2 den Spin messen, bekommt man zu 50% als Ergebnis jeweils Spin-up oder Spin-down. Diese Spinmessung von Teilchen 1 ist im Rahmen der Unschärferelation mit der Spinmessung von Teilchen 2 verknüpft - so dass man nicht beide Eigenschaften dieses Teilchenpaares gleichzeitig genau kennen kann. Das Paradoxon besteht nun aber darin, dass nach einer Messung von Teilchen 1 (sagen wir: Spin-up) GENAU bekannt ist, dass der Spin von Teilchen 2 Spin-down sein muss. Ohne jede Unsicherheit. Durch dieses Paradoxon scheint also die Unbestimmtheitsrelation ausgehebelt.

In Wirklichkeit kann man dieses Argument entkräften, da die “Indirekte Schlussfolgerung” einer Eigenschaft mathematisch nicht mit einer “Quantenmechanischen Messung” gleichzusetzen ist. Diesbezüglich ist das Paradoxon also entkräftet. Es gibt aber

⁴⁹ Was ihnen damit nicht gelungen ist...

⁵⁰ *Jede Ursache kann nur eine Wirkung in ihrer unmittelbaren Umgebung zeigen.*

noch eine weitere Folgerung dieser Sachlage: Der Spin des Teilchens 2 wird durch die Messung am Teilchen 1 festgelegt – und dies instantan, aber Distanzunabhängig. Diese Verletzung des Lokalitätsprinzips⁵⁰ veranlasste Einstein dazu, von einer spukhaften (im Sinne von “verflixt”) Fernwirkung zu sprechen.

Das Ende dieser Geschichte lautet wie folgt: Alle Experimente und Messungen bestätigen bisher die Aussagen der Quantenmechanik, auch der Fernwirkung. Die Quantenmechanik ist also, entgegen jedem rationalen Verständnis, eine nicht-lokale Theorie.

Folgt nun aus dieser Verschränkung also eine Möglichkeit der Überlichtschnellen Kommunikation? Leider nein, denn ohne dass das Ergebnis der Messung 1 auf klassischem Wege ($v \approx c$) an den Ort von Teilchen 2 gebracht wurde kann man aus dessen Messung keinen Informationsgehalt ziehen.

30.12.2 Teleportation

Eine praktische Anwendung der Verschränkung kann man aber im Bereich der Quantenkryptografie bzw. Quantenteleportation finden. Dabei ist der Begriff Teleportation nicht wie aus der Science-Fiction zu betrachten. Es kann dadurch weder Masse noch Energie transportiert werden.

Literatur

- [1] S. Nemschockmichal. *Röntgenversuch Vorlesungssammlung*, 2022.
- [2] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. SpringerLink Bücher. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 7. Aufl. 2016 edition, 2016. ISBN 9783662531068. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-53106-8>.
- [3] A. Stillert. *Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher: eine Einführung für Lehramtsstudierende*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2019. ISBN 3658250992.
- [4] T. Filk. *Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie*. Vorlesungsskript. Version 03.02.2015.
- [5] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*, pages 9–14. SpringerLink Bücher. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 7. Aufl. 2016 edition, 2016. ISBN 9783662531068. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-53106-8>.
- [6] J. L. Blázquez-Salcedo, C. Knoll, and E. Radu. Traversable wormholes in einstein-dirac-maxwell theory. *Phys. Rev. Lett.*, 126:101102, Mar 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.126.101102. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.101102>.
- [7] J. Maldacena and A. Milekhin. Humanly traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, 103:066007, Mar 2021. doi: 10.1103/PhysRevD.103.066007. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.066007>.
- [8] AllenMcC., 2007. URL <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alcubierre.png>. CC3.0.
- [9] M. Alcubierre. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 11(5):L73–L77, may 1994. doi: 10.1088/0264-9381/11/5/001. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/5/001>.
- [10] A. Bobrick and G. Martire. Introducing physical warp drives. *Classical and Quantum Gravity*, 38(10):105009, apr 2021. doi: 10.1088/1361-6382/abdf6e. URL <https://doi.org/10.1088/1361-6382/abdf6e>.
- [11] K. Gödel. An example of a new type of cosmological solutions of einstein’s field equations of gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, 21:447–450, Jul 1949. doi: 10.1103/RevModPhys.21.447. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.447>.