

**Begriffsbildung/Definition** – 1. *Zu den Begriffen – provisorische Abgrenzungen.* Der Ausdruck  $\uparrow$ «Begriff» weist wenigstens vier im vorliegenden Kontext berücksichtigungspflichtige Bedeutungen auf: (1) (relativ auf die unterlegte Grammatik) atomarer Redeteil, (2) Bedeutung eines atomaren Redeteils, (3) Prädikator bzw. genereller Term, (4) Bedeutung eines Prädikators. Will man einerseits Fragen z.B. nach der Definition von Individuenkonstanten oder der Regulierung von Junktoren nicht a limine ausschließen, dann sollte man sich auf die beiden ersten Sinnzuweisungen konzentrieren. Andererseits sind die beiden zuletzt genannten Verständnisarten verbreiteter und auch tiefer in klassischen Problemstellungen wie etwa der  $\uparrow$ Universalienfrage verankert. Um beiden Tatsachen gerecht zu werden und zugleich den Zusammenhang zwischen Ausdruck und  $\uparrow$ Bedeutung in die Betrachtung einzustellen, wird in der Folge von der *Einführung* von Ausdrücken resp. der *Festlegung der Bedeutung* von Ausdrücken gesprochen: Indem ein Ausdruck (= Begriff (1)) eingeführt wird, erfolgt die Festlegung seiner Bedeutung (= Begriff (2)). Fasst man dann nach (4) die Bedeutungen von Prädikatoren als Begriffe, dann werden diese durch die Einführung eines zugehörigen Prädikators festgelegt bzw. gebildet.

Einen atomaren Ausdruck  $\mu$  (gleich welcher Kategorie) in eine Sprache  $S$  einführen, besagt: *Spezifizieren, wie  $\mu$  in  $S$  zu verwenden ist* bzw. wie  $\mu$  in  $S$  korrekt verwendet wird bzw. angeben, wie jeder beliebige  $S$ -Nutzer  $\mu$  verwenden muss, um  $\mu$  in  $S$  korrekt zu verwenden. Dieses Startverständnis von Ausdruckseinführung gewinnt mit der Entwicklung des unterlegten Sprach-, Wahrheits- und Bedeutungskonzepts Kontur. Im Zentrum stehen in der Folge allgemein interessierende Verfahren wie z.B. das Definieren; weitgehend außen vor bleibt die Schilderung gut dokumentierter Einzelthemen wie z.B. die Bedeutungsverleihung für theoretische Terme oder die Regulierung der logischen Operatoren.

## 2. Zur Begriffs- und Problemgeschichte

Schon die Verknüpfung von Bedeutung (Sfestsetzung) und  $\uparrow$ Wahrheit lässt erwarten, dass ein unter dem Gesichtspunkt der Umfassendheit erfolgreicher historischer Zugriff auf das Einführungsthema zu einer Geschichte zumindest der theoretischen Philosophie gerät. So dürften sich etwa die meisten der in erkenntnisphilosophischen Streitsachen tätigen Autoren zur Etablierung der ersten Begriffe und – damit unausweichlich verbunden – zur Auszeichnung der ersten Aussagen geäußert haben. Es erstaunt daher auch nicht, dass sich einschlägige historische Abhandlungen auf ausgewählte Verfahren, Ausdruckssorten, Wissenschaftsgruppen, Zeitabschnitte o.ä. konzentrieren; umfassender angelegte Monographien sind Raritäten.<sup>1</sup> Die folgenden Bemerkungen erweisen lediglich dem am längsten tradierten Lehrstück und dem in der Sache folgenreichsten Autor Respekt.

### 2.1 Traditionelle Definitionslehre

Die gewöhnlich auf Aristoteles zurückgeführte traditionelle Definitionslehre<sup>2</sup> bietet neben der Unterscheidung zwischen Real- und Nominaldefinition<sup>3</sup> eine Anleitung zum Definieren. Diese besteht im Kern aus einer Regel und vier bzw. fünf in Varianten präsentierten begleitenden Maximen. Die  $\uparrow$ Regel fordert, dass Arten im Rückgriff auf die nächst höhere Gattung und die artbildende Differenz definiert werden: *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam*. Die Maximen lauten: Die

Definition soll das Wesen bzw. die wesentlichen Attribute der Art erfassen. Die Definition darf nicht zirkulär sein. Die Definition darf keine mehrdeutigen, dunklen oder metaphorischen Ausdrücke enthalten. Die Definition darf nicht negativ sein (falls sie affirmativ sein kann). Die Definition darf weder zu weit noch zu eng sein. Musterbeispiele regel- bzw. maximengerechter Definition sind die Aussagen *«Der Mensch ist ein vernunftbegabtes Lebewesen»* oder *«Quadrate sind gleichseitige Rechtecke»*.

Einerseits kann man der überkommenen Anleitung zum Definieren allgemein geteilte Plausibilität und weithin erwünschten Ausschlusseffekt nicht absprechen. Andererseits ist sie – jedenfalls unter der heute üblichen Aufgabenzuweisung für eine Definitionslehre – ein Beispiel für ein weitgehend inoperables, inkorrektes und unvollständiges Regelwerk.<sup>4</sup> (1) Die verwendete Begrifflichkeit, z.B. *«Wesen»*, *«dunkel»*, erlaubt es in vielen Fällen nicht, zwischen regelgemäßem und regelwidrigem Definieren zu unterscheiden. Auch die vergleichsweise leicht nachvollziehbare Grundregel ist insofern nicht verlässlich befolgsam, als die mit der Rede von *der* nächsten Gattung unterstellte Eindeutigkeit nicht generell gegeben ist. (2) Inkorrekt ist das Reglement, insoweit z.B. Mehrfachdefinitionen nicht generell ausgeschlossen werden. Auch wenn man Übertragungen auf Funktions- oder Individuenkonstanten vornähme, ergäben sich wegen Vernachlässigung der Einzigkeitsbedingung unerwünschte Definitionen.

(3) Die traditionelle Definitionslehre ist in zweifacher Hinsicht unvollständig: *Grammatische Unvollständigkeit* liegt vor, weil nur Artbezeichnungen, also (eine Untersorte) generelle(r) Terme, als Definienda zugelassen sind; aber auch Individuennamen waren (in einer erweiterten aristotelischen Grammatik) Kandidaten. Beim Übergang zu reicheren Grammatiken wird man auch mehrstellige Prädikatoren und Funktoren als unberücksichtigte Definitionskandidaten nennen. *Semantische Unvollständigkeit* ist gegeben sowohl durch die Reduktion begrifflicher Beziehungen auf das Art-Gattungsschema wie auch durch den Ausschluss negativer Definienda: Definitionen mit adjunktivem Definiens – *«Skandinavier sind Dänen oder .... oder Schweden»* – bzw. mit negativen Definiens – *«Kinderlos sind alle und nur die, die nicht jemandes Elter sind»* – sind in der Redepraxis bewährt (und nach einem alternativen Regelwerk) korrekt.

### 2.2 Zur Fregeschen Einführungslehre

Gottlob Frege hat zum Einführungsthema sowohl auf der *Vollzugsseite* als auch auf der *Reflexionsebene* maßstäbliche Beiträge geleistet. (1) Auf der Vollzugsseite ist ein *konstruktiver* und ein *kritischer* Aspekt zu unterscheiden. (1-1) In der *Begriffsschrift* und den *Grundgesetze[n] der Arithmetik* baut Frege für den logisch-mathematischen Bereich sprachliche Systeme, die seiner Forderung nach vollständiger Explizitheit genügen; dabei führt er die einzelnen Ausdrücke dieser Sprache in rigoroser Weise ein. Die Definition des Anzahlbegriffs im § 42 des ersten Bandes der *Grundgesetze* wird von der material-intuitiven Seite her in den *Grundlagen der Arithmetik* vorbereitet. Der dort im § 68 nötige Rückgriff auf die unerklärte Umfangsredeweise wird in den *Grundgesetzen* legitimiert durch die (störungsanfällige) axiomatische Fixierung des Begriffs des Wertverlaufs im Grundgesetz V. Das in einer Sprache erster Stufe formulierbare konsistente

Fragment des Systems der *Grundgesetze* wurde von Neologizisten, allen voran Boolos, intensiv untersucht. (1-2) Die die Sprachkonstruktion und damit die Ausdruckseinführung steuernde Auffassung liegt auch der Auseinandersetzung Freges mit den Begriffsbildungsangeboten anderer Autoren zugrunde. So unterzieht er im zweiten Band der *Grundgesetze* die zahlentheoretischen Definitionsvorschläge zeitgenössischer Mathematiker wie Cantor, Dedekind und Weierstrass einer teils harschen Kritik. In den *Grundlagen* setzt er sich mit überkommenen Explikationen der Begriffe Anzahl, Einheit und Eins auseinander, indem er in vorbildlicher Weise das Ausbleiben erwünschter und das Eintreten unerwünschter Konsequenzen der jeweiligen Bestimmungsvorschläge markiert. Durch brieflichen Austausch und in einer Reihe von Aufsätzen mit dem Titel «Über die Grundlagen der Geometrie» trägt Frege wesentlich zur Klärung der sog. axiomatischen Methode bei, die Hilbert in seinen *Grundlagen der Geometrie* vorstellt: Hilberts Axiome sind – in heute geläufiger Terminologie – keine Aussagen und damit auch keine wahrheitsfähigen Gebilde; die Verwendung des Ausdrucks «Axiom» stellt insofern einen irreführenden Sprachgebrauch dar. Sie sind vielmehr als offene Formeln anzusehen, die in ihrer konjunktiven Zusammenfassung einen – in Freges Redeweise – Begriff zweiter Stufe bzw. – in den Worten von Carnap – ein Explizitprädikat bzw. – in der Diktion von Suppes – ein mengentheoretisches Prädikat definieren.

(2) Bezüglich der Reflexion über das Einführen i.a. und das Definieren i.b. sind zunächst zwei bodenbereitende Leistungen zu erwähnen: Zum einen schafft Frege die *grammatischen Voraussetzungen*, um überhaupt eine differenzierte Lehre vom Einführen (und vom Schließen) entfalten zu können. Er entwickelt, pauschal geredet, die Ausdruckskategorien für Sprachen erster und zweiter Stufe. Man stelle in Rechnung, dass vor Frege die Definition zwei- oder höherer Prädikatoren keine Aufgabe sein konnte. Diesbezüglich bahnbrechend ist der Aufsatz *Function und Begriff*, in dem die Funktion-Argument-Wert-Perspektive auf sprachliche Gegebenheiten bzw. das von ihnen Ausgedrückte und Bedeutete angewendet wird. Zum anderen unterscheidet Frege klarer als Pascal<sup>5</sup> zwischen undefinierten und definierten Ausdrücken; und er bezieht diese Unterscheidung ausdrücklich auf sprachliche Systeme. Auf diesem Boden entwickelt er v.a. im ersten (§§ 26-33) und zweiten (§§ 55-67) Band der *Grundgesetze* sowie in mehreren Nachlassstücken eine ausnehmend rigorose Definitionslehre.<sup>6</sup> Ausgangspunkt sind zwei Forderungen: Die *Freiheit* von Definitionen schließt aus, dass die Korrektheit der Definition die Wahrheit einer Aussage des Systems voraussetzt. Die *Unbeschränktheit* sichert, dass der zu erklärende Ausdruck für alle Kontexte durch die Definition erklärt wird.

Aus den Forderungen ergeben sich zwei Grundsätze, die gemeinsam vollständige Bedingungen für korrekte Definitionen festlegen. Der Grundsatz der *Vollständigkeit* resultiert aus der Unbeschränktheit. So muss z.B. ein einstelliger Prädikator so definiert werden, dass prinzipiell entscheidbar ist, ob er auf einen Gegenstand zutrifft oder nicht; damit wird etwa das bei der Erweiterung der Zahlbereiche beliebte stückweise Definieren wie auch jede bedingte Definition ausgeschlossen. Die Freiheitsforderung führt auf den Grundsatz der *Einfachheit*. Dieser verlangt, dass neben dem zu definierenden Ausdruck in der Definendumformel nur Variablen zugelassen

sind; dadurch werden auch Kontextdefinitionen in einem weiten Sinn ausgeschlossen. Zugelassen sind – übertragen in die später benutzte Terminologie – nur die unbedingte Definition von Prädikatoren sowie die Definition von Funktoren und Individuenkonstanten durch Identitäten, also Explizitdefinitionen im engeren Sinn. Auf Basis der Grundsätze entwickelt Frege Definitionsregeln, deren Kern für Sprachen erster Stufe durch die unten niedergelegten Regeln erfasst wird (vgl. 4.1). Definitionen, die den Grundsätzen genügen, erfüllen auch die Kriterien der Nichtkreativität und Eliminierbarkeit, die insofern bei Frege der Sache nach Berücksichtigung finden.

Bemerkenswert scheint schließlich, dass Frege bereits eine Fragestellung klar vor Augen hat, die sich für den Ausdrucks- und Aussagenbestand einer Sprache in analoger und verbundener Weise stellt: In der axiomatischen Basis einer Theorie ist ihr gesamtes konzeptuelles und alethisches Potential enthalten. Die Definition weiterer Begriffe und die damit einhergehenden Beweise weiterer Wahrheiten fügt der Basis nichts Neues hinzu; sie ist insofern nicht «notwendig für das System». Gleichwohl wird durch die konzeptuelle und begriffliche Entwicklung der Basis sehr viel Neues – in einem anderen Sinn des Wortes – hinzugefügt.<sup>7</sup>

Freges System hat sich als inkonsistent und damit revisionsbedürftig herausgestellt. Dieser Umstand spricht jedoch nicht gegen, sondern für die auf Transparenz und damit Kontrollierbarkeit angelegte Einführungskonzeption. Diese Eigenschaften haben die Entdeckung der  $\uparrow$ Antinomien wenn nicht ermöglicht, so doch erleichtert und allererst dazu gezwungen, solche Gebilde nicht mehr als Kuriosa abzutun, sondern folgenreiche Sprachrevisionen vorzuschlagen. Freges Explizittheitsniveau in der Begriffsbildung und im Beweisen sollte in allen (insbesondere philosophischen) Kontroversen verpflichtend sein!

### 3. Das philosophische Rahmenwerk

In der Folge wird das leitende Einführungskonzept in einen sprach- und erkenntnisphilosophischen Rahmen eingebettet. Das benötigte Beispielmateriale ist einer bei Bedarf erweiterten Wissenschaftssprache, nämlich der Klassensprache von Neumann, Bernays und Gödel mit Urelementen (= NBGU), entnommen.<sup>8</sup> Diese Sprache ist gehaltvoll, weit entwickelt, gut untersucht, universal einsetzbar, mutmaßlich konsistent und damit insgesamt dicht an der Idee einer *mathesis universalis*.

#### 3.1 Grammatische Vorgaben

Unter grammatischer Rücksicht stellen sich bei jeder Einführung zwei Fragen: (1) Welcher grammatischen Kategorie soll der einzuführende Ausdruck angehören? (2) In eine Sprache welchen grammatischen Zuschnitts ist der Kandidat einzuführen? Ausdruckskategorie und grammatischer Sprachtyp entscheiden wesentlich darüber, welche Einführungsverfahren überhaupt in Anspruch gebracht werden können. – Sprachliche Gegebenheiten lassen sich im Lichte verschiedener Grammatiken betrachten. Grammatiken, die zum Zwecke der Organisation kognitiver Redehandlungen konzipiert werden, heißen *logische* oder *rationale* Grammatiken. Aus der Vielzahl solcher Zugriffe interessieren in der Folge die *Standardgrammatik erster Stufe* sowie die um Termquantifikatoren *erweiterte* Standardgrammatik erster Stufe; die jeweiligen Sprachen sind dann *Standardsprachen* bzw. *erweiterte Standardsprachen erster Stufe*.

Die Klasse der Individuenkonstanten  $\alpha$ , der Individuenparameter  $\beta$ , der Individuenvariablen  $\omega$ , der  $n$ -stelligen Funktoren bzw. Funktionskonstanten  $\varphi$ , der  $n$ -stelligen Prädikatoren bzw. Prädikatkonstanten  $\Phi$ , der  $n$ -stelligen Junktoren  $\psi$ , der Formelquantifikatoren  $\Pi$  und der Performatoren  $\Xi$  bilden die atomaren Kategorien einer Standardsprache erster Stufe. Solche Sprachen lassen sich um Termquantifikatoren  $\kappa$  erweitern.

Die Bezeichnungen für die leere und die universale Klasse,  $\langle \emptyset \rangle$  und  $\langle V \rangle$ , aber auch der einführungstechnisch riskante (Eigen-)Name  $\langle \text{deus} \rangle$  sind Beispiele für Individuenkonstanten. Für Individuenparameter und -variablen finden nicht-kursivierte bzw. kursivierte lateinische Buchstaben Verwendung. Der Ausdruck  $\langle \text{der Härtegrad von...} \rangle$  und der Schnittfunktoren  $\langle \dots \cap \dots \rangle$  exemplifizieren ein- und zweistellige Funktoren. Der Klassenprädikator  $\langle \text{Cl}(\dots) \rangle$  und der Elementsprädikator  $\langle \dots \in \dots \rangle$  sind Beispiele für ein- und zweistellige Prädikatkonstanten von NBGU;  $\langle \dots \text{riecht stechend} \rangle$  und  $\langle \dots \text{schmeckt bitterer als...} \rangle$  sind ein- und zweistellige Prädikatkonstanten einer Chemiesprache. An ein- bzw. zweistelligen Junktoren werden der Denkbarkeitsjunktoren  $\langle \text{cog} \_ \_ \rangle$  und, wie üblich, der Negator  $\langle \sim \_ \_ \rangle$ , der Konjunktoren  $\langle \_ \_ \& \_ \_ \rangle$ , der Subjunktoren  $\langle \_ \_ \Rightarrow \_ \_ \rangle$ , der Adjunktoren  $\langle \_ \_ \vee \_ \_ \rangle$  und der Bisubjunktoren  $\langle \_ \_ \Leftrightarrow \_ \_ \rangle$  verwendet. An Formelquantifikatoren kommt der Universalquantifikator  $\langle \forall \dots \rangle$ , der Partikularquantifikator  $\langle \exists \dots \rangle$ , der Einzigkeits- oder Einsquantifikator  $\langle 1 \dots \rangle$  sowie als Exot  $\langle \text{CP} \dots \rangle$  (Lies: *cogitari potest*) zum Einsatz. Als Termquantifikatoren werden der Klassenquantifikator  $\langle \{ \dots \} \rangle$  und der Kennzeichnungsquantifikator  $\langle \text{the} \dots \rangle$  benutzt. – Aus der Anwendung eines Formelquantifikators  $\Pi$  auf eine Variable  $\omega$  entsteht der  $\omega$ -bindende *Formelquantor*  $\Pi\omega$ ;  $\langle \exists x \_ \_ \rangle$  ist z.B. der die Variable  $\langle x \rangle$  bindende Partikularquantor. Analog entsteht aus der Anwendung eines Termquantifikators  $\kappa$  auf eine Variable  $\omega$  der  $\omega$ -bindende *Termquantor*  $\kappa\omega$ ;  $\langle \text{the } y \_ \_ \rangle$  ist z.B. der die Variable  $\langle y \rangle$  bindende Kennzeichnungsquantor. Ferner kommen, abweichend von den Üblichkeiten, die Performatoren  $\langle \text{ES GILT} \_ \_ \rangle$ ,  $\langle \text{SEI} \_ \_ \rangle$ ,  $\langle \text{DA} \_ \_ \rangle$ ,  $\langle \text{ALSO} \_ \_ \rangle$ ,  $\langle \text{DE} \_ \_ \rangle$  und  $\langle \text{KO} \_ \_ \rangle$  zum Einsatz; mit ihrer Verwendung signalisieren Autoren die Art der vollzogenen Redehandlung.

Für Standardsprachen erster Stufe lässt sich einfach-induktiv definieren:  $\vartheta$  ist ein Term genau dann, wenn  $\vartheta$  atomarer Term ist oder sich aus der Anwendung eines  $n$ -stelligen Funktors  $\varphi$  auf  $n$  Terme  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  ergibt; dabei sind Individuenkonstanten, -variablen und -parameter *atomare Terme*. Die Begriffe des *Teilterms eines Terms*, des *offenen* und *geschlossenen Terms* resp. *Nominators* sind auf dieser Basis wie üblich zu definieren. Das Formelkonzept ist analog zum Termbegriff zu fixieren. Auf die junktoralen und die quantoralen Formeln wird unter Auszeichnung des Hauptoperators zugegriffen; demzufolge sind Negationen, Adjunktionen, ..., Universal-, Partikular- und Einsquantifikationen zu unterscheiden. Die Begriffe der *Teilformel*, des *Teilterms einer Formel*, des *Freiseins*, der *offenen* und *geschlossenen Formel* bzw. *Aussage* sowie des *Teilausdrucks* und der *Substitution* sind auf dieser Basis wiederum wie üblich festzulegen. *Sätze*  $\Sigma$  sind das Ergebnis der Anwendung von Performatoren  $\Xi$  auf Aussagen  $\Gamma$ . Über die Performatoren sind dann Behauptungs-, Annahme-, Anziehungs-, Folgerungs-, Definitions-, Konstatierungssätze usf. zu unterscheiden.

Für Sprachen erster Stufe mit Termquantoren umfasst die Charakterisierung der Terme und Formeln einen Winkelzug: Terme wie etwa  $\langle \{u \mid \text{Cl}(u) \ \& \ \text{Urel}(u) \} \rangle$  enthalten Formeln. Der Termbegriff kann deshalb *nicht vor*, sondern *nur gemeinsam mit* dem Formelbegriff bestimmt werden. Eine solche simultan-induktive Definition des Term- und Formelbegriffs liest sich so: (1) Atomare Terme sind Terme  $\vartheta$ . (2) Wenn  $\vartheta$  das Ergebnis der Anwendung eines  $n$ -stelligen Funktors  $\varphi$  auf  $n$  Terme  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  ist, dann ist  $\vartheta$  Term (funktoraler Term). (3) Wenn  $\Delta$  das Ergebnis der Anwendung eines  $n$ -stelligen Prädikators  $\Phi$  auf  $n$  Terme ist, dann ist  $\Delta$  eine Formel (atomare Formel). (4) Wenn  $\Delta$  das Ergebnis der Anwendung eines  $n$ -stelligen Junktors  $\psi$  auf  $n$  Formeln  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  ist, dann ist  $\Delta$  eine Formel (junktorale Formel). (5) Wenn  $\Delta$  das Ergebnis der Anwendung eines Formelquantors  $\Pi\omega$  auf eine Formel  $\Gamma$  ist, dann ist  $\Delta$  eine Formel (quantorale Formel). (6) Wenn  $\vartheta$  das Ergebnis der Anwendung eines Termquantors  $\kappa\omega$  auf eine Formel  $\Gamma$  ist, dann ist  $\vartheta$  ein Term (quantoraler Term); Term resp. Formel ist nur, was den Bestimmungen (1), (2), (6) resp. (3), (4), (5) genügt. Die übrigen grammatischen Begriffe erfordern auf diesem Hintergrund ebenfalls eine simultan-induktive Charakterisierung. Ferner sollen die Termquantifikatoren, die Funktions- und Individuenkonstanten zusammenfassend als *nominative* Redeteile angesprochen werden.

Anbei: Der (oder liberaler: ein) Apparat der logischen Grammatik ist, gegen ein verbreitetes Vorurteil, nicht nur bei der Konstruktion und der Benutzung formaler bzw. idealer Sprachen unverzichtbar. Er ist bei jeder Überprüfung beliebiger Verlautbarungen auf deduktive Korrektheit im Einsatz. Er sollte ferner bereits in den Anfangsstadien der Analyse zentraler Begriffe u.a. aus der X-heitsgruppe (Gutheit, Schönheit usf.) und der Y-tätsklasse (Objektivität, Rationalität usf.) nach der *Maxime der grammatischen Diversifizierung* zur Anwendung kommen: Betrachte einen F-heits- oder G-tätstitel als Kurzbezeichnung für eine ganze Vokabelmannschaft und verschaffe Dir einen Überblick über den grammatischen Status der einzelnen Mitglieder! So hat man z.B. bezüglich  $\langle \text{Gutheit} \rangle$  u.a. zu unterscheiden zwischen dem Performator  $\langle \text{ES IST GUT} \_ \_ \rangle$ , dem einstelligen Funktor  $\langle \text{das Gute an...} \rangle$ , der (abstraktiven) Individuenkonstante  $\langle \text{die Gutheit} \rangle$ , dem einstelligen Junktoren  $\langle \text{es ist gut} \_ \_ \rangle$  und den zahlreichen ein- und mehrstelligen Prädikatoren wie  $\langle \dots \text{ist ein gutes F} \rangle$ ,  $\langle \dots \text{ist für...ein besseres G als...} \rangle$ . Mit der exemplarisch angedeuteten grammatischen Diversifizierung wird ein Ansatz für eine differenzierte semantische Analyse geschaffen.

### 3.2 Das Einführungskonzept

Man *führt* einen (relativ auf den unterlegten kategorialen Rahmen) atomaren Ausdruck  $\mu$  in eine (grammatisch so und so gestaltete)  $\uparrow$ Sprache  $S$  ein, wenn man spezifiziert, wie  $\mu$  in Sätzen  $\Sigma$  von  $S$  korrekt verwendet wird. Ein atomarer Ausdruck  $\mu$  *wird* in einem  $\uparrow$ Satz  $\Sigma$  von  $S$  verwendet, falls er ein Teilausdruck von  $\Sigma$  ist und dieser Satz im Vollzug einer Redehandlung ( $\uparrow$ Behauptung,  $\uparrow$ Folgerung, Vermutung, Bestreitung, Frage, Konstatierung usf.) geäußert wird. Ein atomarer Ausdruck  $\mu$  *wird* in einem Satz  $\Sigma$  von  $S$  korrekt verwendet, falls  $\mu$  in  $\Sigma$  von  $S$  verwendet wird und falls mit der Äußerung von  $\Sigma$  eine korrekte Redehandlung in  $S$  vollzogen wird. Eine Redehandlung ist in einer Sprache korrekt, falls sie einer für sie einschlägigen Regel dieser Sprache genügt. Mit der Äußerung der Sätze

(1) ES GILT  $\forall u (Cl(u) \Rightarrow u \subseteq u)$

(2) ES GILT  $\forall u u \not\subseteq u$

wird in NBGU eine korrekte bzw. inkorrekte Redehandlung vollzogen. Die zugehörige Behauptungsregel (vgl. (4)) verlangt einen Beweis, der nur für die Aussage von (1) zu erbringen ist. Die jeweiligen atomaren Teilausdrücke –  $\langle \text{ES GILT } \_ \rangle$ ,  $\langle \forall \dots \rangle$ ,  $\langle Cl(\dots) \rangle$ ,  $\langle u \rangle$ ,  $\langle \_ \Rightarrow \_ \rangle$ ,  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$ ,  $\langle \dots \not\subseteq \dots \rangle$  – finden in (1) bzw. (2) demnach korrekte bzw. inkorrekte Verwendung. Ein atomarer Ausdruck wird zufolge dieser Erläuterungen eingeführt, indem entsprechende Redehandlungsregeln, die zugleich Verwendungsregeln darstellen, als Handlungsanleitung für beliebige Benutzer der Sprache gesetzt werden – oder indem Äquivalentes innerhalb der jeweiligen Sprache geleistet wird. – Das soeben erläuterte Einführen eines atomaren Ausdrucks in eine Sprache sollte nicht mit dem didaktischen Einführen, der Einweisung eines Sprachbenutzers in die korrekte Verwendung eines atomaren Ausdrucks, verwechselt werden.

Die skizzierte Auffassung ist nicht im Sinne freihändiger Beliebigkeit zu deuten: Wer – um an das Schul(gegen)beispiel zu erinnern – einen zweistelligen Junktor  $\langle \_ \text{tonk} \_ \rangle$  so reglementiert, dass man einerseits aus einer Aussage  $\Delta$  die Tonktion von  $\Delta$  und einer Aussage  $B$  folgern darf (tonk-Einführung), dass man andererseits aus der Tonktion von  $\Delta$  und  $B$  sowohl auf  $\Delta$  als auch auf  $B$  schließen darf (tonk-Beseitigung), der trivialisiert die entsprechende Sprache. Die Ausdruckseinführung ist – wie die Konstruktion und Erweiterung von Sprachen insgesamt – negativ durch das Prinzip der *Konsistenz* bzw. liberaler: der *Nichttrivialisierbarkeit* gesteuert: Inkonsistente bzw. triviale Sprachen resp. die in ihnen erzielten  $\langle$ Einsichten $\rangle$  vermögen das weitere (Rede- und Nichtrede-)Handeln nicht zu orientieren und sind insoweit unzuverlässig.<sup>9</sup>

Der angesprochenen negativen Grenze der Begriffsbildung ist das Prinzip der *materiellen Zweckmäßigkeit* an die Seite zu stellen: Die Konstruktion von Sprachen und das Einführen von Ausdrücken hat so zu erfolgen, dass die materiellen Orientierungs- und Handlungsziele im Gebrauch dieser Sprache erreichbar werden: Die Entwicklung physikalischer und chemischer Sprachen verdankt sich keineswegs dem kontemplativen Interesse körperloser oder hitzeunempfindlicher Wesen; und ohne das Ziel der Konfliktvermeidung und -bewältigung wird man keine ethischen oder juristischen Sprachen konstruieren (vgl. 5.).

Neben diesen beiden Kernprinzipien der Sprachkonstruktion und Ausdruckseinführung, die auch als  $\langle$ formale Korrektheit $\rangle$  und  $\langle$ materiale Adäquatheit $\rangle$  angesprochen werden, sind zwei Sorten von Gürtelprinzipien zu unterscheiden: Die erste hat wie die Kernprinzipien globale Reichweite. Zu ihnen gehören die komparativ zu lesenden Grundsätze der Einfachheit im Gebrauch (= *Handlichkeit*), der Einfachheit für die metatheoretische Untersuchung (= *Überschaubarkeit*), die Forderung nach *Entscheidbarkeitsmaximierung*, aber auch das Prinzip der *Bordmittel*: Etabliere Ausdrücke einer Sprache wenn möglich in dieser Sprache. Die genannten Grundsätze, die untereinander konfliktfähig und insoweit vermittlungsbedürftig sind, können zur Entscheidung zwischen konkurrierenden formal korrekten und material adäquaten Sprachkonstruktionen herangezogen werden.

Die zweite Sorte von Gürtelprinzipien hat regionale Reichweite und betrifft Ausdruckstypen, Einführungsverfahren und Einführungsanlässe.

Exemplarisch verwiesen sei auf das Separiertheits- und das Harmonieprinzip für logische Operatoren, auf die Unabhängigkeitsforderung bei der Etablierung von Grundbegriffen, auf die Adäquatheitsmaxime bei explikativen Einführungen und auf das Prinzip der minimalen Invasion in Revisionsituationen. Eine Sortierung dieser regionalen Prinzipien sowie eine Systematisierung des Zusammenwirkens aller Prinzipiengruppen muss als Desiderat gemeldet werden.<sup>10</sup>

Seine Pointe erhält der skizzierte Ansatz dadurch, dass mit der prinzipienkonformen Ausdruckseinführung bzw. Bedeutungsfestsetzung zugleich die  $\langle$ alethische Geschäftsordnung $\rangle$  errichtet wird: Einige Redehandlungsregeln wie die Behauptungs- oder Konstatierungsregeln (vgl. 5.2) sind direkt Wahrheitskriterien, andere gehen in die Formulierung von Wahrheitskriterien mittelbar ein: So fließen etwa die Folgerungsregeln oder die Regeln des axiomatischen Setzens über den Beweisbegriff in die Behauptungsregel ein. Indem man, allgemein gesprochen, die Bedeutung eines Ausdrucks festsetzt, richtet man – direkt oder indirekt – die Möglichkeiten der Wahrklassifikation der Aussagen ein, in denen er als Teilausdruck vorkommt: Wer, um das notorische Beispiel aufzugreifen, die Bedeutung des Negators im klassischen Sinne festsetzt, schafft Möglichkeiten der Wahrklassifikation, gegen die sich die Freunde einer intuitionistischen oder minimallogischen Bedeutungsfixierung verwahren. Wozu sonst sollte letztlich der Aufwand um die Festsetzung der Bedeutung von Ausdrücken gut sein, wenn die  $\uparrow$ Wahrheit und Falschheit der Aussagen, in denen die Ausdrücke vorkommen, davon unberührt wäre! Dispute über die Bedeutungsfestsetzung sind damit stets Dispute über die wahrqualifizierenden Prozeduren, und umgekehrt; und Fragen nach der Rechtfertigung einzelner Bedeutungsfixierungen oder ganzer Sorten von Fixierungsprozeduren sind zugleich Fragen nach der Rechtfertigung einzelner oder umfassender Arten von Wahrheitskriterien.<sup>11</sup>

### 3.3 Einführungsformen

Ein atomarer Ausdruck  $\mu$  – so die Vorgabe – kann in eine Sprache – hier: NBGU pur oder erweitert – eingeführt werden, indem man in der Konstruktionsprache entsprechende Redehandlungsregeln setzt oder indem man in der konstruierten Sprache selbst Äquivalentes leistet. Im ersten Fall liegt eine *konstruktions-* bzw. *metasprachliche*, im zweiten eine *konstrukt-* bzw. *objektsprachliche* Einführung vor.

Zum Verständnis der konstruktionsprachlichen Einführung ist vorauszuschicken, dass Sprachen als Regelwerke mit vorgeschalteter Grammatik konzipiert sind. Die Regeln beziehen sich auf die einzelnen Redehandlung(styp)en. Da NBGU als performativ arme Sprache lediglich die Handlungsformen des axiomatischen Setzens, des Definierens, des Annehmens, des Anziehens, des Folgerns und des Konstatierens enthält, umfasst das Regelwerk Setzungs-, Definitions-, Annahme-, Anziehungs-, Folgerungs- und Konstatierungsregeln. Diese Regeln sind in der Konstruktionsprache für NBGU formuliert. Ihre Wirkweise sei am Beispiel der Partikularquantoreinführung, einer Folgerungsregel, studiert:

(3) Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenmenge  $X$  das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms  $\theta$  für eine Variable  $\omega$  in einer Formel  $B$ , in der höchstens  $\omega$  frei ist, gewonnen hat, dann darf

man in Abhängigkeit von X die Partikularquantifikation von B bzgl.  $\omega$  folgern. Die Regel erlaubt, von Aussagen mit einem geschlossenen Term als Teilausdruck zu einer Partikularquantifikation überzugehen. Material: Hat ein bestimmter Gegenstand eine Eigenschaft, dann darf man schließen, dass es einen Gegenstand mit dieser Eigenschaft gibt. Damit richtet sie (in Teilen) die Handlung des Schließens ein. (Partiell) eingeführt wird damit einerseits der Folgerungsoperator, in NBGU das Zeichen  $\langle \text{ALSO}_\_ \rangle$ . Zugleich findet andererseits die Verwendung des Partikularquantors (partielle) Spezifikation: Wenn der Partikularquantor in einem Folgerungssatz als Hauptoperator der gefolgerten Aussage verwendet wird, findet er korrekte Verwendung, falls die im Regelantezeden beschriebene diskursive Lage gegeben ist. Indem – allgemein – Folgerungsregeln erlauben, dass gefolgt wird, und indem sie spezifizieren, was, d.h. eine Aussage welcher (durch ihren Hauptoperator gekennzeichneten) Art aus welchen schon gewonnen Aussagen, gefolgt wird, spezifizieren sie simultan die korrekte Verwendung des Folgerungsoperators und des jeweiligen Operators.

Die Quantorenregeln legen auch fest, wie die Variablen und die Parameter verwendet werden. Die Organisation der Rolle der Parameter in Ableitungszusammenhängen obliegt den Regeln der Universalquantoreinführung und der Partikularquantorbeseitigung. Variablen und Parameter bedürfen keiner individuellen Charakterisierung; sie sind *rein generisch eingeführt*. Die *Behauptungsregel* für NBGU wie auch für viele verwandte kognitive Sprachen nimmt Bezug auf den jeweiligen Beweis- bzw. Begründungsbegriff, der wiederum von den zugelassenen Axiomen und den Folgerungsregeln bestimmt wird:

(4) Wenn es einen Beweis für eine Aussage  $\Delta$  gibt, dann darf man  $\Delta$  behaupten.

Die *Annahmeregeln* erlaubt die Annahme jedweder Aussage in Abhängigkeit von dieser Aussage; und die *Anziehungsregeln* gestattet es, bereits als wahr erwiesene Aussagen abhängigkeitsfrei in Beweise einzubringen. Diese Regeln richten in NBGU das Behaupten, Annehmen und Beweisen ein; und sie setzen damit die Bedeutung der jeweiligen Performatoren fest; zugleich *regulieren sie unspezifisch* die Verwendung der Redeteile, die nicht Performatoren sind: Ein Ausdruck  $\mu$  wird in einer Annahme oder einer Anziehung schon deshalb korrekt verwendet, weil er Teilausdruck einer Aussage bzw. einer als wahr erwiesenen Aussage ist.

Wenn eine Sprache bereits konstruiert ist, kann sie im Vollzug von Redehandlungen gebraucht werden. Einige dieser Redehandlungen, das axiomatische Setzen und das (objektsprachliche) Definieren, dienen ihrerseits der konstruktssprachlichen Einführung von Ausdrücken. So wird der zweistellige Teilklassenprädikator  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$  in NBGU wie folgt definiert:

(5) DE  $\forall x \forall y (x \subseteq y \Leftrightarrow \text{Cl}(x) \ \& \ \text{Cl}(y) \ \& \ \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y))$

Da in NBGU geregelt ist, wie man Definitionen verwendet, ist so auch die Verwendung des Teilklassenprädikators organisiert: Als wahre Aussagen dürfen die Aussagen von Definitionen in Beweisen angezogen (oder auch direkt definitorisch gesetzt) werden. Damit sind sie als Prämissen für Folgerungen verfügbar. So kann man aus (5) mit der Universalquantorbeseitigung Instanzen folgern, um mit Bisubjunktor- und Subjunktorbeseitigung fortzufahren. Material gesprochen artikuliert die

Definition ein charakteristisches (und damit positives wie negatives) Kriterium für Teilklassenschaft; und das Definiens enthält eine vollständige (und damit sowohl hinreichende als auch notwendige) Bedingung für Teilklassenschaft.

Einige Ausdruckstypen werden – relativ auf den grammatischen und handlungstypischen Zuschnitt einer Sprache – nur konstruktssprachlich, andere nur konstruktssprachlich eingeführt: So wird in NBGU der Teilklassenprädikator nur konstruktssprachlich etabliert, während die Performatoren und die logischen Operatoren ausschließlich konstruktssprachlich eingeführt werden. Prinzipiell können Ausdrücke aber auch teilweise konstruktssprachlich, teilweise konstruktssprachlich etabliert werden: So können empirische Prädikatoren durch metasprachliche Operationsregeln und durch objektsprachliche Prinzipien in ihrer Bedeutung fixiert werden (vgl. 5.2). Zu unterscheiden ist also zwischen *ungemischter* und *gemischter* Einführung.

Wird durch eine Bedeutungsfestsetzung eine Sprache echt verstärkt, dann liegt eine *nicht-definitorische* Einführung vor, anderenfalls eine *definitorische*. Diese Unterscheidung kreuzt die soeben erörterte zwischen konstruktssprachlicher und konstruktssprachlicher Etablierung. Die Definition des Teilklassenprädikators ist ein Beispiel für eine objektsprachliche definitorische Einführung. Die folgenden Schemata sind Beispiele für metasprachliche definitorische Einführungen:

(6) Wenn  $\xi$  Variable und  $\Delta$  Formel ist, so dass in  $\Delta$  höchstens  $\xi$  frei ist, dann darf man jede Instanz von  
 a)  $\forall \xi \Delta \Leftrightarrow \sim \exists \xi \sim \Delta$   
 b)  $\text{CP} \xi \Delta \Leftrightarrow \text{cog} \exists \xi \Delta$   
 als Definition setzen.

Die Bisubjunktionen stellen metasprachliche Definitionsschemata für Formelquantifikatoren dar, die im Bedarfsfall definitorische Setzungen innerhalb der Konstruktssprache erlauben. Die Verfügbarkeit des Partikularquantifikators, des Negators und des Denkbareitsjunktors ist vorausgesetzt. Man hätte diese Einführung stattdessen auch über die Folgerungs- oder die Anziehungshandlung abwickeln können.

Junktoren, Formel- und Termquantifikatoren sind in den zugrunde gelegten Sprachen erster Stufe deshalb keiner objektsprachlichen Definition zugänglich, weil diese weder über Formel- noch über Prädikatorvariablen verfügen. Bei Wahl einer Sprache zweiter Stufe oder einer Sprache mit Formel- bzw. Propositionenvariablen ist hingegen prinzipiell eine objektsprachliche Definierbarkeit gegeben.

Konstruktssprachliche nicht-definitorische Einführungen sind v.a. objektsprachliche axiomatische Charakterisierungen. Mit dem Extensionalitätsaxiom:

(7) AXIOM  $\forall x \forall y (\text{Cl}(x) \ \& \ \text{Cl}(y) \ \& \ \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$

wird z.B. die Bedeutung des Elementsprädikators in NBGU (partiell) fixiert. Konstruktssprachliche nicht-definitorische Einführungen werden exemplifiziert durch die Hinzufügung der Regel der doppelten Negationsbeseitigung zur minimalen oder zur intuitionistischen Logik oder durch das unten vorgestellte Komprehensionsschema (vgl. 5.1). Definitionen sind stets ungemischte Einführungen: Die ganze Bedeutung eines Ausdrucks soll in einem Zug gegeben werden. Nicht-definitorische Einführungen können demgegenüber auch gemischt sein.

Wiederum quer zu den bisherigen Einteilungen liegt eine weitere: Wird ein Ausdruck eingeführt, so zwar, dass ausdrücklich auf seine schon bestehende und

zuvor aufzubereitende Verwendung Rücksicht genommen wird, dann liegt eine *explikative* Einführung bzw. eine *Explikation* vor. Wird hingegen ein bis dahin nicht im Gebrauch befindlicher Ausdruck bereitgestellt oder ein Ausdruck, dessen bisherige Verwendungsgewohnheiten bei der Einführung keine Rolle spielen, dann liegt eine *novative* Einführung, eine *Novation*, vor.

Zufolge dieser Charakterisierung des Explizierens als eine *an Verwendungsgewohnheiten rückgebundene Form des Einführens* gilt: Das Explizieren bezieht sich auf *alle* grammatischen Kategorien – und nicht nur auf Prädikatoren. Das Explizieren kann im Wege *aller* Einführungsverfahren erfolgen – und nicht nur durch Definition. Als Spezies des Einführens unterliegt das Explizieren dem jeweils unterlegten Einführungskonzept. Dieses resultiert aus dem grundsätzlichen Zugriff auf Redehandeln, Sprache, Wahrheit und Bedeutung. Wer bestimmten Einführungsformen, z.B. der imprädikativen Charakterisierung oder der bedingten Definition, mit Skepsis begegnet, wird sie auch nicht zum Explizieren einsetzen. Deshalb ist im Zuge der Dissenslokalisierung stets zu überprüfen, ob der Auslöser von Explikationskontroversen im fundierenden einführungstheoretischen Bereich sitzt oder eher fallspezifischer Natur ist. Die Untersuchung der *explikativen Gesamtprozedur*, der *Explikationsfaktoren* und der *Explikationsalternativen* und *-kontroversen* bildet ein Kernstück der wissenschaftlichen, insbesondere aber der philosophischen Methodologie. – Die Fortschreibung dieses Lehrstücks gewinnt in dem Maße für die genuin philosophischen Belange an Einschlägigkeit, als die einseitige Orientierung an formalen Explikationsparadigmen, z.B. am geordneten Paar, überwunden wird.<sup>12</sup>

#### 4. Definitoriale Einführungsformen

(Unbedingte) Definitoriale Einführungen genügen zwei Kriterien. Zum ersten sollen sie die *gesamte* Bedeutung eines Ausdrucks fixieren. Definiendum und Definiens müssen also so miteinander verbunden sein, dass sie in allen Aussagen die Aufgabe des jeweils anderen übernehmen können: *Eliminierbarkeit*. Zum zweiten soll die Definition *nur* die Bedeutung des Definiendums fixieren. Insbesondere soll sie nicht die Bedeutung anderer Ausdrücke derart verändern, dass zuvor nicht Beweisbares nach Hinzufügung der Definition beweisbar wird: *Konservativität* bzw. *Nichtkreativität*.

Genauer: Sei  $S$  Standardsprache oder erweiterte Standardsprache erster Stufe mit Beweis- und (klassischem) Folgerungsbegriff. Sei  $\Delta$  geschlossene  $S$ -Formel und  $\mu$  atomarer Teilausdruck von  $S$ ; dann genügt  $\Delta$  der Eliminierbarkeit bezüglich  $\mu$  in  $S$  genau dann, wenn es zu jeder  $S$ -Aussage  $\Gamma$ , die  $\mu$  zum Teilausdruck hat, eine  $\mu$ -freie  $S$ -Aussage  $B$  gibt, so dass die Subjunktion aus  $\Delta$  und der Bisubjunktion aus  $\Gamma$  und  $B$  in  $S$  beweisbar ist.  $\Delta$  genügt der Konservativität bzw. Nichtkreativität bezüglich  $\mu$  in  $S$  genau dann, wenn für jede  $S$ -Aussage  $\Gamma$ , die  $\mu$  nicht zum Teilausdruck hat, gilt: Wenn  $\Gamma$  in der um  $\Delta$  erweiterten Sprache  $S$  beweisbar ist, dann ist  $\Gamma$  auch in  $S$  alleine beweisbar. Die Konservativität sichert auch die Konsistenz, wenn die nicht-erweiterte Sprache diese Tugend bereits besitzt: Wäre nämlich  $S$  zuzüglich  $\Delta$  bei gleichzeitiger Konsistenz von  $S$  und Nichtkreativität von  $\Delta$  inkonsistent; dann wäre aus  $S$  zuzüglich  $\Delta$  eine Kontradiktion ableitbar, die wegen Nichtkreativität auch schon aus  $S$  alleine ableitbar

wäre. Damit wäre  $S$  im Widerspruch zur Annahme inkonsistent.

Die beiden auf Pascal zurückgeführten, teilweise aber schon bei Aristoteles gesichteten Kriterien wurden von Lesniewski präzisiert.<sup>13</sup> Sie bilden den Leitfaden zur Formulierung von Definitionsregeln für die verschiedenen grammatischen Kategorien: Wer den Regeln folgt, fertigt ausschließlich definitoriale, d.h. eliminierbare und konservative, Einführungen an. Die folgenden Überlegungen beschränken sich auf objektsprachliche Definitionen; sie sind übertragbar auf die Gestaltung metasprachlicher Schemata für Junktoren und Quantoren.<sup>14</sup> – Mit Blick auf neuere definitionstheoretische Ergebnisse sei angemerkt, dass dieses Standardvorgehen die Verhältnisse zwischen Eliminierbarkeit, Konservativität und Definierbarkeit nicht adäquat spiegelt, ohne jedoch inkorrekt zu sein.<sup>15</sup>

#### 4.1 Zur Definition von Prädikatkonstanten

In Standardsprachen oder erweiterten Standardsprachen erster Stufe lassen sich Prädikat-, Funktions- und Individuenkonstanten objektsprachlich definieren. Anhand des früher notierten Beispiels der Definition der Teilklassenshaft

$$(5) \quad DE \quad \forall x \forall y (x \subseteq y \Leftrightarrow Cl(x) \ \& \ Cl(y) \ \& \ \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y))$$

kann die schon benutzte Terminologie exemplarisch erläutert – wenn auch nicht im strikten Sinne eingeführt – werden: Der zu definierende Ausdruck bzw. das *Definiendum* ist der zweistellige Prädikator  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$ . Die *Definiendumformel*  $\langle x \subseteq y \rangle$  ist das Ergebnis der Anwendung des Definiendums  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$  auf die Variablen  $\langle x \rangle$  und  $\langle y \rangle$ . Rechts vom Bisubjunktoren befindet sich die in  $\langle x \rangle$  und  $\langle y \rangle$  offene Formel  $\langle Cl(x) \ \& \ Cl(y) \ \& \ \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y) \rangle$ , das *Definiens* bzw. die *Definiensformel* für  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$ . Die *Definitionsformel* für  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$  ist das Ergebnis der Anwendung des Bisubjunktors auf die Definiendum- und die Definiensformel, also die Formel  $\langle x \subseteq y \Leftrightarrow Cl(x) \ \& \ Cl(y) \ \& \ \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y) \rangle$ . Die Vorschaltung der beiden Universalquantoren  $\langle \forall x \rangle$ ,  $\langle \forall y \rangle$  führt zur Bindung der freien Variablen und damit zur *Definitions aussage* bzw. zur *Definition* von  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$ . Der *Definitionsoperator*  $\langle DE \_ \rangle$ , der oft auch als rechter Index des Bisubjunktors bzw. des Identitätszeichens auftritt, wird auf die Definitions aussage angewendet und ergibt den Definitionssatz bzgl.  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$ . Diese Terminologie ist für Funktions- und Individuenkonstanten sinngemäß anzupassen.

Die Regel für die *unbedingte* Definition von Prädikatoren *durch universalquantifizierte Bisubjunktionen* wird, wie auch die anderen Redehandlungsregeln, informell und ohne ausdrücklichen Bezug auf eine bestimmte Sprache formuliert:

- (8) Wenn:
- $\xi_1, \dots, \xi_n$  sind paarweise verschiedene Variablen,
  - $\Phi$  ist ein neuer  $n$ -stelliger Prädikator,
  - $\Delta$  ist eine Formel, für die gilt:
    - in  $\Delta$  sind höchstens  $\xi_1, \dots, \xi_n$  frei,
    - alle atomaren Teilausdrücke von  $\Delta$  sind eingeführte Ausdrücke,
    - in  $\Delta$  ist kein Parameter Teilterm,
  - $\Gamma$  ist eine Aussage der Form:
 
$$\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n (\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) \Leftrightarrow \Delta),$$
 dann darf man  $\Gamma$  definitorisch setzen.

Zu a) Da  $\langle x \rangle$  und  $\langle y \rangle$  verschiedene Variablen sind, erfüllt die Definition der Teilklassenshaft die erste Bedingung, die für mehrstellige Prädikatkonstanten einschlägig ist. Die Forderung trägt dem Umstand

Rechnung, dass die Relata verschieden sein können, gelegentlich aber auch zusammenfallen: Man möchte mit Hilfe der Definition sowohl über Aussagen der Art  $\langle 0 \subseteq V \rangle$  als auch des Typs  $\langle 0 \subseteq 0 \rangle$  befinden. Das wäre ausgeschlossen, wenn man  $\langle x \subseteq x \rangle$  als Definiendumformel gewählt hätte; in diesem Fall wäre die Eliminierbarkeit und damit die Entscheidbarkeit auf Formeln des zweiten Typs eingeschränkt.

Zu b)  $\langle \dots \subseteq \dots \rangle$  ist in NBGU tatsächlich ein neuer, d.h. vorher noch nicht eingeführter, Prädikator. Damit wird jede Form von Zirkularität ausgeschlossen. Wäre früher bereits eine Einführungsmaßnahme bezüglich des Teilklassenprädikators erfolgt, ergäbe sich überdies sofort ein Verträglichkeitsproblem. – Von einer 'harmlosen Mehrfachdefinition' wird in diesem Kontext dann gesprochen, wenn man einen Ausdruck definiert hat und auf Basis dieser Definition zu einer Aussage gelangt, die ebenso gut als Definition getaugt hätte, und zwar in dem Sinne, dass die Ursprungsdefinition ihrerseits zum Lemma geworden wäre. So definiert

$$(9) \quad \forall x \forall y (x \subset y \Leftrightarrow x \subseteq y \ \& \ x \neq y)$$

den echten Teilklassenprädikator; dann wird:

$$(10) \quad \forall x \forall y (x \subset y \Leftrightarrow x \subseteq y \ \& \ \exists z (z \in y \ \& \ z \notin x))$$

beweisbar. Hier wäre aber auch die umgekehrte Reihenfolge bei Tausch der kognitiven Rollen möglich gewesen.

Zu ca) Der Formel  $\Delta$  entspricht in der Musterdefinition das Definiens  $\langle Cl(x) \ \& \ Cl(y) \ \& \ \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y) \rangle$ . Da nur  $\langle x \rangle$  und  $\langle y \rangle$  frei sind, ist die Bedingung ca) erfüllt. Die Nichtbeachtung dieser Forderung birgt wiederum ein Inkonsistenzrisiko: Man 'definiere' die einstellige Prädikatskonstante  $\langle F(\dots) \rangle$  durch definitorische Setzung von:

$$(11) \quad \forall x \forall y (F(x) \Leftrightarrow x \in y)$$

Aus (11) gewinnt man durch Universalquantorbesetzung  $\langle \forall y (F(x) \Leftrightarrow x \in y) \rangle$ ; mit demselben logischen Zug folgen  $\langle F(x) \Leftrightarrow x \in V \rangle$  und  $\langle F(x) \Leftrightarrow x \in 0 \rangle$ . Diese Aussagen führen auf  $\langle x \in V \Leftrightarrow x \in 0 \rangle$ , dann auf  $\langle \forall x (x \in V \Leftrightarrow x \in 0) \rangle$ . Wegen  $\langle 0 \in V \rangle$  würde dann im Widerspruch zur Leerheit von  $0 \ \langle 0 \in 0 \rangle$  gelten. – Eine analoge Überlegung lässt sich anstellen, wenn man im Definiens statt der Variablen einen Parameter zulässt; damit ist auch der Sinn der Bedingung cc) erläutert.

Zu cb) Die Etabliertheitsbedingung ist in der Musterdefinition erfüllt: Die logischen Konstanten und die Variablen sind durch Folgerungsregeln eingeführt. Überdies enthält das Definiens an NBGU-Eigenausdrücken nur den Elementschafsprädikator  $\langle \dots \in \dots \rangle$  und den Klassenprädikator  $\langle Cl(\dots) \rangle$ . Die erste Konstante ist Grundbegriff und damit axiomatisch organisiert (vgl. 5.1). Die zweite Konstante kann man zuvor durch Setzung von

$$(12) \quad \forall w (Cl(w) \Leftrightarrow \sim Urel(w))$$

definieren; und  $\langle Urel(\dots) \rangle$  ist wiederum axiomatisch eingeführter Grundprädikator. Damit ist eine vergleichsweise kurze Definitionskette gegeben. Sie zeigt aber schon den *systematisierenden Effekt* der Forderung: Wer eine Definition verlangt, verlangt letztlich die Konstruktion eines Sprachsystems; nur so lässt sich durchgängige Eliminierbarkeit bis auf die Grundaussagen gewährleisten. – In der Praxis sind häufig *Definitionsprovisorien* anzutreffen: Die Definitia sind ihrerseits eher Einführungskandidaten als wohl etablierte Redeteile. Wenn es zu einem späteren Zeitpunkt gelingt, eine Sprache zu konstruieren, in der die atomaren Definitia ihrerseits eingeführt sind, werden die Provisorien in korrekte Definitionen verwandelt.

Zu d) Die Musterdefinition besitzt die verlangte Form der universalquantifizierten Bisubjunktion. Es ist

besonders zu beachten, dass die Definiendumformel atomar ist. Wäre sie z.B. eine Konjunktion, so könnte man bei Gegebenheit des instanziierten Definiens jedes der beiden instanziierten Konjunkte gewinnen. Diese Konjunkte wären jedoch nicht eliminierbar.

Nicht wenige Autoren von NBGU sympathisieren mit einer zu (5) alternativen Definition der Teilklassenschaft, die die Erklärung ausdrücklich auf Klassen beschränkt:

$$(13) \quad DE \quad \forall x \forall y (Cl(x) \ \& \ Cl(y) \Rightarrow (x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)))$$

(13) exemplifiziert die *bedingte* Definition von Prädikatoren *durch universalquantifizierte Subjunktionen*, deren Struktur mit

$$(14) \quad \forall \xi_1 \dots \forall \xi_n (B \Rightarrow (\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) \Leftrightarrow \Delta))$$

angegeben ist. Die Regel für solche Definitionen ist für B dahin zu ergänzen, dass B eine parameterfreie Aussage ist, die nur eingeführte Ausdrücke enthält und in der allenfalls  $\xi_1, \dots, \xi_n$  frei sind.

Zwischen Proponenten und Opponenten des bedingten Definierens herrscht ein lebhafter Streit, der nach wenigen Runden auf grundsätzliche Fragen der Redeorganisation führt. Die Debatte betrifft auch die nominativen Redeteile. Für die Prädikatkonstanten wird sie immer dann einschlägig, wenn man den intendierten Anwendungsbereich von vornherein auf einen echten Teilbezirk des unterlegten Redebereichs, im Beispiel: auf die Klassen, beschränken möchte. Anhänger des unbedingten Definierens erzwingen die *Falschheit* jeder Anwendung des Prädikators auf eine nichtintendierte Entität: Mit (5) wird ausgeschlossen, dass ein Urelement von irgendetwas Teilklassen ist. Freunde des bedingten Definierens zielen auf die *Unentscheidbarkeit* solcher Aussagen: Bedingte Definitionen erlauben nur eine bedingte Eliminierbarkeit – und sind insoweit keine Definitionen im strengen Sinne. Deshalb kann bei Zugrundelegung von (13) über den Wahrheitsstatus einer Urelemente betreffenden Teilklassenaussage nicht befunden werden.<sup>16</sup>

#### 4.2 Zur Definition von Funktions- und Individuenkonstanten

Funktions- und Individuenkonstanten, die nicht variablenbindenden nominativen Redeteile, lassen sich u.a. definieren durch Identitäten. Ein Beispiel für die Definition eines zweistelligen NBGU-Funktors ist die Charakterisierung des Schnitts von Klassen:

$$(15) \quad DE \quad \forall x \forall y (x \cap y = \{z \mid z \in x \ \& \ z \in y\})$$

Denkt man sich NBGU um Elemente einer Werkstoffsprache erweitert, dann lässt sich der einstellige Funktor  $\langle \text{der Härtegrad von} \dots \rangle$  z.B. so definieren:

$$(16) \quad DE \quad \forall x (\text{der Härtegrad von } x = \text{die auf } x \text{ ausgeübte mechanische Kraft : die Fläche des auf } x \text{ erzeugten Eindrucks})$$

In (15) ist das Definiens ein Quantorterm; in (16) handelt es sich um einen funktoralen Term. Die legitimierende Regel für die *unbedingte* Definition von Funktionskonstanten *durch universalquantifizierte Identitäten* ist jener für Prädikatkonstanten analog; die Strukturformel ist mit

$$(17) \quad \forall \xi_1 \dots \forall \xi_n (\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = 9)$$

wiederzugeben. – Individuenkonstanten lassen sich als stellenfreie Funktionskonstanten lesen. In der Definitionsregel entfallen demzufolge die die Variablen betreffenden Bestimmungen; die Struktur von Definitionen von Individuenkonstanten *durch Identitäten* hat die Gestalt

$$(18) \quad \alpha = 9.$$

Als Beispiel aus NBGU sei die Definition der Klasse der natürlichen Zahlen notiert:

(19) DE  $\mathbf{N} = \{u \mid \forall x (0 \in x \ \& \ \forall z (z \in x \Rightarrow \mathbf{N}f' z \in x) \Rightarrow u \in x)\}$

Die definierte Konstante bezeichnet die Klasse derjenigen  $u$ , die Element all der Klassen sind, die die leere Klasse enthalten und unter der Nachfolgeroperation  $\mathbf{N}f$  abgeschlossen sind. (19) ist eine *Induktivdefinition*; derartige Definitionen sind in NBGU und ähnlich ausdrucksstarken Sprachen als Explizitdefinitionen möglich. Auch der früher gegebenen Termbestimmung (vgl. 3.1) lässt sich in NBGU eine Explizitdefinition zuordnen. Das induktive Definieren und das darauf beruhende induktive Beweisen bildet eine Schlüsselpraxis in den Formalwissenschaften und ist zudem Objekt umfassender metatheoretischer Forschungen.<sup>17</sup> Unterstellt man, um den Bereich des Wohluntersuchten zu verlassen, eine Erweiterung von NBGU um den (z.B. im Sinne von Frege und Carnap etablierten) Kennzeichnungsquantifikator und um die zweistellige theologische Prädikatkonstante  $\langle \dots \text{maius} \dots \rangle$ , dann lässt sich die Individuenkonstante  $\langle \text{deus} \rangle$  durch

(20) DE  $\text{deus} = \text{the } x (\sim \text{CPy } y \text{ maius } x)$

definieren. – Man fingiere eine Sprache, die weder über Termquantifikatoren verfügt noch Funktions-, noch Individuenkonstanten unter ihren undefinierten Ausdrücken aufweist. Um Ausdrücke dieser Kategorien zu etablieren, muss man auf im Sinne der *Einzigkeit* charakterisierende Eigenschaften resp. Formeln als Definiens zurückgreifen. Die Definiendumformel ist eine Identitätsformel. Am Beispiel der in (20) definierten Individuenkonstante:

(21) DE  $\forall x (\text{deus} = x \Leftrightarrow \sim \text{CPy } y \text{ maius } x)$ .

Diese *unbedingte* Definition einer Individuenkonstante durch eine *universalquantifizierte Bisubjunktion* wird von folgender Regel regiert:

(22) Wenn:

- $\alpha$  ist eine neue Individuenkonstante,
- $\omega$  ist eine Variable,
- $\Delta$  ist eine Formel, für die gilt:
  - in  $\Delta$  ist höchstens  $\omega$  frei,
  - alle atomaren Teilausdrücke von  $\Delta$  sind eingeführte Ausdrücke,
  - kein Parameter ist Teilterm von  $\Delta$ ,
  - die Aussage  $1\omega\Delta$  ist beweisbar,
  - $\Gamma$  ist eine Aussage der Form:
 
$$\forall \omega (\alpha = \omega \Leftrightarrow \Delta),$$
 dann darf man  $\Gamma$  definitorisch setzen.

Für Funktionskonstanten, die man als stellenführende Individuenkonstanten betrachten kann, gilt eine analoge, um Variablenbestimmungen erweiterte Regel; die Struktur der *unbedingten* Definition von Funktoren durch *universalquantifizierte Bisubjunktionen* ist durch

(23)  $\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n (\phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \omega \Leftrightarrow \Delta)$

beschrieben. Ein Beispiel ist gegeben, wenn man NBGU um Verwandtschaftstermini erweitert und den einstelligen Vaterfunktoren durch Äußerung von

(24) DE  $\forall x \forall y (\text{der Vater von } x = y \Leftrightarrow \exists w \ y \text{ zeugte } x \text{ mit } w)$

definiert. Die Achillesferse der auf Formeln rekurrierenden Definitionsformen ist die in (22) unter d) geforderte *Einzigkeitsbedingung*. Gibt es z.B. kein Gebilde, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, dann resultiert mit (21) ein Widerspruch: Wegen  $\langle \text{deus} = \text{deus} \rangle$  gilt  $\langle \sim \text{CPy } y \text{ maius } \text{deus} \rangle$ . Daraus folgt aber:  $\langle \exists x \sim \text{CPy } y \text{ maius } x \rangle$ . Was ist zu tun, wenn für  $\Delta$  die Einzigkeit nicht oder nur bedingt gegeben ist oder bis auf weiteres entscheidungsunzugänglich ist? In formaler Hinsicht lässt sich bezüglich jeder Formel  $\Delta$  bzw. jeder durch diese beschriebenen Eigenschaft und bzgl. jeder

Individuen- resp. Funktionskonstante mit der *Methode des Ersatzreferenten* eine Lösung angeben:  $\alpha$  könnte durch  $\Delta$  mit Hilfe einer universalquantifizierten Bisubjunktion wie folgt definiert werden:

(25)  $\forall \xi (\alpha = \xi \Leftrightarrow (\exists \omega (\forall \zeta (\omega = \zeta \Leftrightarrow [\zeta, \omega, \Delta]) \ \& \ \omega = \xi)) \vee (\sim 1\omega\Delta \ \& \ \xi = \alpha^*))$

Bei gegebener Einzigkeit wird das Definiendum mit dem einzigen  $\Delta$ -Ding identifiziert, bei Nichterfülltheit wird ein durch  $\alpha^*$  bezeichneter Ersatzreferent angegeben. Die Korrektheit der Definition ist nicht von einem Beweis abhängig und in Freges Sinn  $\langle \text{frei} \rangle$  (2.2). Da man jedoch eine Individuenkonstante nur dann durch eine Formel zu charakterisieren pflegt, wenn diese die Einzigkeitsbedingung erfüllt oder wenigstens unter einer  $\langle \text{interessanten} \rangle$  Bedingung erfüllt, wird der mit (25) angedeutete Weg in der Definitionspraxis meist gemieden.

In Aufnahme des zuletzt genannten Falls – die Einzigkeit ist bedingt erfüllt – bieten sich nun wieder zwei Wege an. Die *bedingte* Definition von Funktions- resp. Individuenkonstanten durch *universalquantifizierte Subjunktionen bei bedingter Einzigkeit* folgen den Schemata:

(26)  $\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n \forall \omega (B \Rightarrow (\phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \omega \Leftrightarrow \Delta))$

(27)  $\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n \forall \omega (B \Rightarrow (\alpha = \omega \Leftrightarrow \Delta))$ ,

wobei insbesondere  $\omega$  kein Teilterm von  $B$  sein darf. Die *unbedingte* Definition von Funktions- resp. Individuenkonstanten durch *universalquantifizierte Bisubjunktionen bei bedingter Einzigkeit* benutzt die Methode des Ersatzreferenten:

(28)  $\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n \forall \omega (\phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \omega \Leftrightarrow (B \ \& \ \Delta) \vee (\sim B \ \& \ \omega = \alpha^*))$

(29)  $\forall \omega (\alpha = \omega \Leftrightarrow (B \ \& \ \Delta) \vee (\sim B \ \& \ \omega = \alpha^*))$ .

Die beiden Verfahren können in NBGU anhand der Definition des Wertfunktors  $\langle \dots' \dots \rangle$  (Lies:  $\langle \text{der Wert von } \dots \text{ für } \dots \rangle$ ) verglichen werden:

(30)  $\forall f \forall x \forall y (\text{Funktion}(f) \ \& \ x \in \text{dom}(f) \Rightarrow (f' x = y \Leftrightarrow [y, x] \in f))$

(31)  $\forall f \forall x \forall y (f' x = y \Leftrightarrow (((\text{Funktion}(f) \ \& \ x \in \text{dom}(f)) \ \& \ [y, x] \in f) \vee (\sim (\text{Funktion}(f) \ \& \ x \in \text{dom}(f)) \ \& \ y = V)))$ .

Von Vereinfachungen im Definiens von (31) wird zwecks Wahrung der Parallelität zum Definitionsschema abgesehen. Die Allklasse  $V$  übernimmt die Rolle des Ersatzreferenten. Die Bedingung von (30) wird in (31) das erste Konjunkt im positiven Definiensadjunkt, ihre Negation wird das erste Konjunkt im negativen Definiensadjunkt. Um Beispiele aus dem philosophischen Feld hinzuzufügen, sei für  $B$  die Aussage  $\langle \text{Die Welt ist eine perfekte Hierarchie} \rangle$  gewählt und ferner für (32) die Geltung von  $\langle \text{Die Welt ist eine perfekte Hierarchie} \Rightarrow 1x \sim \text{CPy } y \text{ maius } x \rangle$  unterstellt. Die Alternativen lauten:

(32)  $\forall x (\text{Die Welt ist eine perfekte Hierarchie} \Rightarrow (\text{deus} = x \Leftrightarrow \sim \text{CPy } y \text{ maius } x))$

(33)  $\forall x (\text{deus} = x \Leftrightarrow ((\text{Die Welt ist eine perfekte Hierarchie} \ \& \ \sim \text{CPy } y \text{ maius } x) \vee (\sim \text{Die Welt ist eine perfekte Hierarchie} \ \& \ x = V)))$ .

Das Schaubild (34, s. nächste Seite) kartiert die vorgelegte kursorische Erläuterung gebräuchlicher objektsprachlicher Definitionsformen.<sup>18</sup>

### 5. Nichtdefinitorische Einführungsformen

Definitionen greifen auf bereits verfügbare Redeteile zurück. Diese müssen letztlich auf nichtdefinitorischem Wege etabliert werden. Die Folgerungsregeln (vgl. 3.3) stellen, jedenfalls teilweise, eine solche Möglichkeit bereit. Nachstehend sind zwei weitere Verfahren zu skizzieren: Mit der Methode der *Bedeutungspostulate* können strukturell-analytische Bedeutungen bzw. Bedeutungsanteile festgesetzt werden. Mit der Methode der



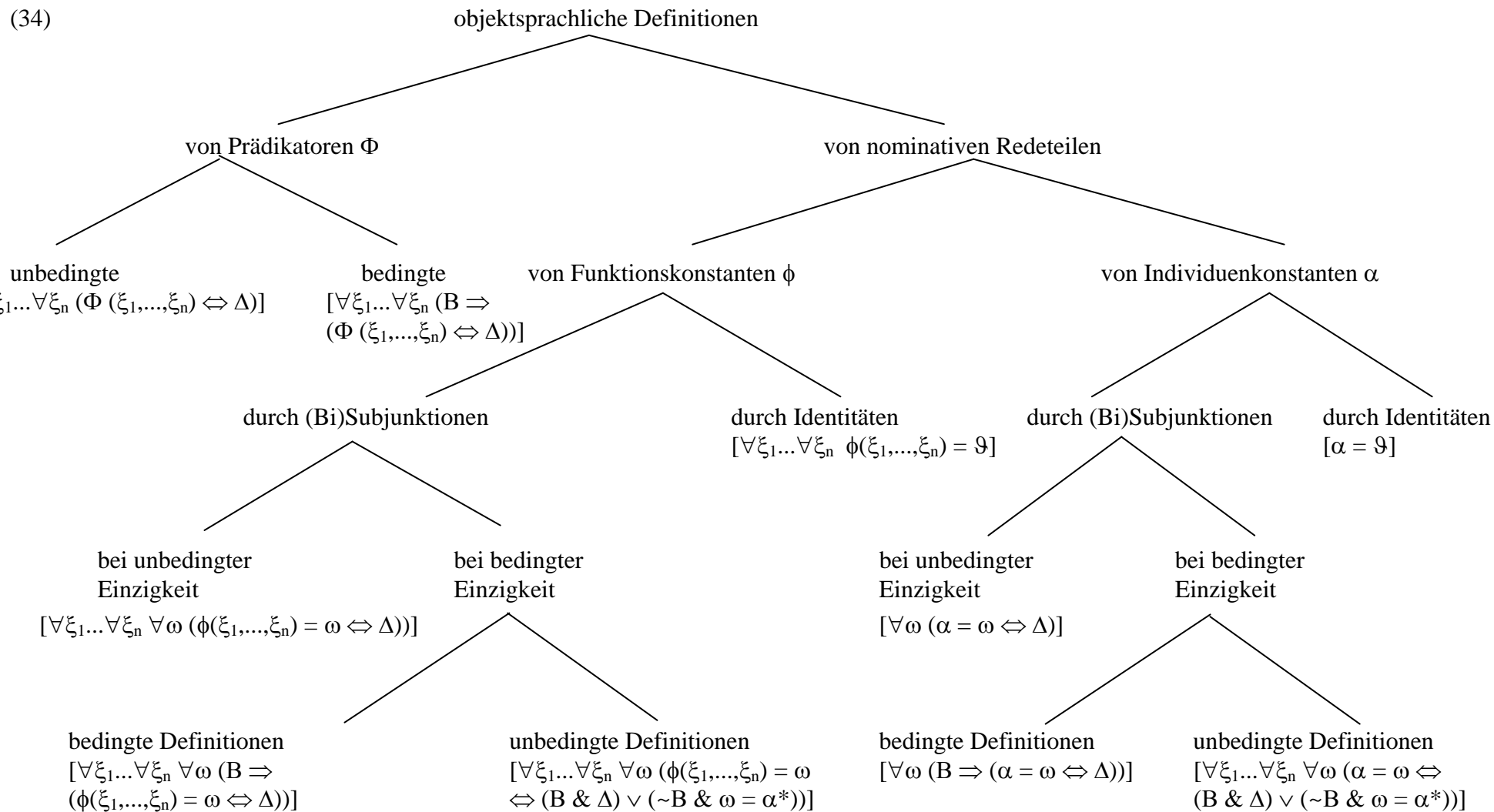
*Operationalisierungen* lassen sich empirisch-synthetische Bedeutungen bzw. Bedeutungsanteile fixieren.

Die nichtdefinitiven Verfahren sichern die konzeptuellen Anfänge, die ersten Worte, die Grundbegriffe, die *«notiones simplices»* usf. Der in unzähligen Handbuchartikeln aufzufindende Hinweis, das gerade verhandelte Konzept sei ein Grundbegriff, entbindet daher zwar von Definitions-, nicht aber von Einführungspflichten. Außerdem wird in aller Regel übersehen, dass ein Redeteil, der in *einem* sprachlichen System undefiniert ist, in einem *anderen* sehr wohl unter den definierten Begriffen vorkommen kann.

### 5.1 *Bedeutungspostulate*

Die Methode des Bedeutungspostulierens oder des Setzens von Axiomen bzw. (ersten) Prinzipien wurde durch

(7) AXIOM  $\forall x \forall y (Cl(x) \& Cl(y) \& \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$



schon exemplifiziert: Klassen sind bei Elementgemeinsamkeit identisch. Der in NBGU definierte Identitätsprädikator und der ebenfalls definierte Klassenprädikator lassen sich eliminieren. Man erhält dann eine Aussage, die neben den logischen Redeteilen mit  $\langle \text{Urel}(\dots) \rangle$  und  $\langle \dots \in \dots \rangle$  nur die undefinierten Prädikatkonstanten von NBGU als atomare Teilausdrücke aufweist:

$$(35) \quad \forall x \forall y (\sim \text{Urel}(x) \ \& \ \sim \text{Urel}(y) \ \& \ \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow \forall w ((x \in w \Leftrightarrow y \in w) \ \& \ (w \in x \Leftrightarrow w \in y)))$$

Die Umformulierung motiviert durch ihre relative Unübersichtlichkeit zugleich, warum man auch bei der Formulierung der  $\langle$ ersten Prinzipien $\rangle$  auf schon definierte Ausdrücke nur ungern verzichtet und Formulierungen bevorzugt, die genau genommen bereits Konsequenzen aus der  $\langle$ eigentlichen $\rangle$  Formulierung und einigen Definitionen sind. Für die Grundprädikatoren wird insofern  $\langle$ Bedeutung postuliert $\rangle$ , als ihre Verwendung durch ihr Vorkommen im Prinzip umrissen wird; und die Verwendung wird – ganz analog zu den definierten Ausdrücken – insofern reglementiert, als durch die Anziehungsregel und die Folgerungsregeln festgelegt ist, was man mit den Axiomen in Beweisen tun darf. Insofern Axiome in Beweisen frei von Abhängigkeit angezogen werden dürfen und damit zur deduktiven Ausbeutung bereitstehen, erfolgt mit der Setzung von Axiomen auch das Setzen  $\langle$ erster Gründe $\rangle$ . Das Anfangsproblem für Ausdrücke und das Anfangsproblem für Aussagen finden ihre Lösung also  $\langle$ auf einen Schlag $\rangle$ .

Die Frage nach den Regeln des Postulierens ist in Erinnerung an die Maxime der Konsistenz oder schwächer der Nichttrivialisierbarkeit einer liberalen Beantwortung zuzuführen:

$$(36) \quad \text{Wenn eine Aussage (resp. ein Aussagenschema) } \Gamma \text{ mit der Klasse der schon postulierten Aussagen (und gegebenenfalls der Empireme) verträglich ist, dann darf man } \Gamma \text{ (resp. die Instanzen von } \Gamma \text{) postulieren.}$$

Den damit umrissenen Setzungsspielraum hat man nun in material möglichst zielführender Weise zu nutzen. So benötigt man etwa in Klassensprachen aller Art ein Schema, das den Übergang von Eigenschaften zu Klassen lizenziert. Der damit verbundene Redezweck besteht in der *Vergegenständlichung* von Eigenschaften zu Klassen und den damit bewirkten Bequemlichkeiten und Vereinfachungen der Rede. Ein solches Übergangsmuster ist weder von Philosophen noch von Mathematikern erfunden, sondern bereits in der lebensweltlichen Gebrauchssprache gut verankert. Es lässt sich ungefähr so formulieren: Wenn eine Gegebenheit Element einer Klasse ist, z.B. der Klasse der Philosophen, dann soll sie auch die entsprechende Eigenschaft, nämlich Philosoph zu sein, besitzen, und umgekehrt; ein begriffliche Ausdruck dieses Komprehensionsgedankens lautet:

$$(37) \quad \text{Wenn } \omega, \xi \text{ verschiedene Variablen sind und } \Gamma \text{ eine Formel ist, in der höchstens } \omega \text{ frei ist, dann darf man jede Aussage der Form:} \\ \exists \xi \forall \omega (\omega \in \xi \Leftrightarrow \Gamma) \\ \text{als Axiom setzen.}$$

Diese extrem freizügige Regel kollidiert z.B. bei Wahl von  $\langle x \notin x \rangle$  für  $\Gamma$  mit (36). Da andererseits (37) in vielen anderen Fällen zielführend arbeitet, ist eine Abschwächung angezeigt. NBGU ersetzt (37) durch das modifizierte Schema

$$(38) \quad \forall \omega (\text{Urel}(\omega) \vee \text{Set}(\omega) \Rightarrow \exists \xi (\omega \in \xi \Leftrightarrow \Gamma)).$$

Nun hat man allerdings dafür zu sorgen, dass das Antezedens für hinreichend viele Fälle auch erfüllt ist: Urelementseigenschaft ergibt sich durch empirische Erweiterungen. Für Mengenschaft sorgen dann kategorische und hypothetische Zulieferaxiome wie z.B. das Unendlichkeits- oder das Potenzmengenaxiom.

Die axiomatischen Setzungen sind also zulässig, insofern sie nur konsistent sind; ansonsten sind sie gerechtfertigt durch das (möglichst einfache oder doch einfachere) Erreichen der

unterstellten Redezwecke, im betrachteten Fall der Vergegenständlichung von Eigenschaften zu Klassen. Weitere Rechtfertigungsbemühungen bezüglich der Einführung von Grundaussdrücken und des Setzens von Axiomen sind nicht erforderlich.

## 5.2 Operationalisierungen

Erweitert man NBGU um empirisch-synthetische Redemöglichkeiten, dann sind Einführungsverfahren erforderlich, die – global geredet – Sprache und Welt verbinden bzw. – spezifischer angesetzt – den korrekten Vollzug von kognitiven Redehandlungen an die Ausführung *nichtsprachlicher Zubringeroperationen* bindet. Die Illustration erfolge an dem (seit Helmholtz immer wieder erörterten) Beispiel des Schwererprädikators:

$$(39) \quad \text{Wenn zwei Körper } \theta_1, \theta_2 \text{ jeweils auf eine Schale einer ungestörten Balkenwaage gelegt werden und die } \theta_1\text{-Schale tiefer sinkt als die } \theta_2\text{-Schale, dann darf man die aus der Anwendung von } \langle \dots \text{ist schwerer als } \dots \rangle \text{ auf } \theta_1 \text{ und } \theta_2 \text{ entstehende atomare Aussage konstatieren.}$$

Die Regel bindet die korrekte Verwendung des Konstatierungsperformators  $\langle \text{KO} \_ \_ \rangle$  und des Schwererprädikators an die Ausführung einer Wägeoperation, an das vorgeschriebene Hantieren mit den Vergleichskandidaten und einer ungestörten Balkenwaage. Man vergegenwärtige sich analoge Operationen beim Längen-, Dauer-, Härte-, Intelligenzvergleich usf. Die allgemeine Form solcher operationaler Einführungen lässt sich so angeben:

$$(40) \quad \text{Wenn man beim Vollzug der nicht-sprachlichen Zubringeroperationen } Z_1, \dots, Z_i \text{ bezüglich der Gegenstände } \theta_1, \dots, \theta_n \text{ zu dem und dem Ergebnis gelangt, dann darf man Aussagen der Form } \Phi(\theta_1, \dots, \theta_n) / \sim \Phi(\theta_1, \dots, \theta_n) \text{ konstatieren.}$$

Die erwähnten Zubringeroperationen können schlichte und instrumentierte Wahrnehmungsakte sein, Herstellungsprozeduren, Mess- und Wägehandlungen usf. Insofern die Verwendung von Redeteilen an die Benutzung von Geräten gebunden wird, kann man von *bedeutungsstiftenden Geräten* bzw. umgekehrt von *gerätegestifteter Bedeutung* sprechen. Derartige Artefakte finden sich nicht  $\langle$ in der Natur $\rangle$ , sondern müssen mit Blick auf die je verfolgten Redezwecke allererst geplant und hergestellt werden. Dieses handwerklich-technische Fundament der Bedeutungsverleihung wird insbesondere von konstruktiv orientierten Wissenschaftsphilosophen ( $\uparrow$ Protophysik) betont und untersucht.<sup>19</sup>

Konstatierbare Aussagen sind *Empireme*. Ebenso wie Axiome bieten sie *diskursive Anfänge*, d.h. Gründe, die nicht ihrerseits diskursiv ausgewiesen werden müssen. Die Ergebnisse der empirischen Arbeit werden über Anziehungen in Diskurse eingebracht. Anders als beim Vollzug axiomatischer Setzungen werden jedoch beim Vollzug von Konstatierungen keine Ausdrücke objektsprachlich eingeführt.

Mit Konstatierungen ergeben sich nur endlich wenige Aussagen. Man wünscht aber, dass z.B. die Schwerer-Beziehung prinzipiell asymmetrisch, irreflexiv und transitiv ist. Man muss daher die empirisch-synthetischen Anteile, die durch die Operationalisierungen nach dem Muster von (40) gegeben sind, um strukturell-analytische Anteile ergänzen, indem man wiederum geeignete Bedeutungspostulate wie etwa

$$(41) \quad \forall x \forall y (x \text{ schwerer } y \Rightarrow \sim y \text{ schwerer } x)$$

setzt. Der insgesamt gemischtsprachlich eingeführte Prädikator hat dann empirisch-synthetische und analytisch-strukturelle Bedeutungsanteile, deren Zusammenspiel wiederum unter der Konsistenzforderung steht.

Die Elementarität des betrachteten Beispiels wird schlagartig deutlich, wenn man sich die unter (16) notierte Definition des Härtegrades als Quotient aus Kraft und Eindruckfläche unter der Rücksicht ihres Einführungsweges

repräsentiert. Man verdeutliche sich zunächst, welche sprachlichen und nicht-sprachlichen Operationen zur Ermittlung des Härtegrads eines bestimmten Gegenstandes vollzogen werden müssen und welche Geräte dazu benötigt werden; so muss man vor der Berechnung der Eindrucksfläche mit einem Zollstock Messungen der Länge und Breite des Eindrucks vornehmen. Man mache sich sodann klar, was an Einführungsleistungen – unter Einschluss der Planung und des Baus von Geräten – erforderlich ist, um die Ermittlung des Härtegrades zu ermöglichen. – Die Systematisierung dieses Feldes von Einführungsverfahren fällt in die Philosophie der technisch-empirischen Wissenschaften.<sup>20</sup>

Stegmüller 1970, 1-109.

*Geo Siegart*

Belnap, N., 1993, On Rigorous Definitions. In: *Philos. Stud.* 72. – Copi, I.M., <sup>6</sup>1982, *Introduction to Logic*, NY. – De Vries, I., 1964, *Logica, cui praemittitur introductio in Philosophiam*, Barcelona/Freiburg/Rom. – Dubislav, W., <sup>4</sup>1981, *Die Definition*, Hamburg. – Essler, W.K., 1970, *Wissenschaftstheorie I. Definition u. Reduktion*, Freiburg/München. – Greimann, D., 2007, *Regeln für das korrekte Explizieren von Begriffen*. *Zschr. f. philos. Forschung*, Bd. 60. – Hahn, S., 1998, *Überlegungsgleichgewicht(e). Prüfung einer Rechtfertigungsmetapher*, Freiburg/München 2000. – Hinst, P., 1996, *A Rigorous Set Theoretical Foundation of the Structuralist Approach*. In: W. Balzer/ C.U. Moulines (eds.), 1996, *Structuralist Theory of Science. Focal Issues, New Results*, Berlin/NY. – Horthy, J.F., 1993, *Frege on the Psychological Significance of Definitions*. In: *Philos. Stud.* 72. – Janich, P., 1997, *Das Maß der Dinge. Protophysik von Raum, Zeit u. Materie*, Fft./M. – Kalish, D./Montague, R./ Mar, G., <sup>2</sup>1980, *Logic. Techniques of Formal Reasoning*, NY/London/Toronto. – Kamlah, A., 2002, *Der Griff der Sprache nach der Natur. Eine Semantik d. klassischen Physik*, Paderborn. – Kleinknecht, R., 1979, *Grundlagen der modernen Definitionstheorie*, Königstein/Ts. – Kreisel, G., 1981, *Zur Bewertung mathematischer Definitionen*. In: E. Morscher et al. (Hg.), 1981, *Philosophie als Wissenschaft*, Bad Reichenhall. – Kutschera, F. v., 1967, *Elementare Logik*, Wien/NY. – Kutschera, F. v., 1989, *Gottlob Frege*, Berlin/NY. – McGee, V., 1998, *Inductive Definitions and Proofs*. In: *REPh*, Vol. 4. – Psarros, N., 1999, *Die Chemie und ihre Methoden. Eine philos. Betrachtung*, Weinheim. – Rantala, V., 1991, *Definitions and Definability*. In: J.H. Fetzer/ D. Shatz/ G.N. Schlesinger (eds.), 1991, *Definitions and Definability*, Dordrecht/Boston/London. – Savigny, E. v., <sup>3</sup>1973, *Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren*, München. – Siegart, G., 1997a, *Explikation. Ein methodologischer Versuch*. In: E. Runggaldier/ W. Löffler (Hg.), *Dialog und System*, Sankt Augustin. – Siegart, G., 1997b, *Vorfragen zur Wahrheit*, München. – Siegart, G. 2007a, *Alethic acts and alethiological reflection. An outline of a constructive philosophy of truth*. In: D. Greimann/G. Siegart (eds.), *Truth and speech acts*, NY. – Siegart, G. 2007b, *Johann Heinrich Lambert und die präexplikativen Methoden*. In: *Philos. Jb.* 114 Jg. – Stegmüller, W., 1970, *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie, Band II: Theorie u. Erfahrung*, Berlin/Heidelberg/NY. – Suppes, P., 1957, *Introduction to Logic*, Princeton (NJ)/Toronto/London. – Weingartner, P., 1976, *Wissenschaftstheorie II. 1. Grundlagenprobleme d. Logik u. Mathematik*, Stuttgart-Bad Cannstatt. – Weingartner, P., 1989, *Definitions in Russell, in the Vienna-Circle and in the Lvov-Warsaw School*. In: K. Szaniawski (ed.), 1989, *The Vienna Circle and the Lvov-Warsaw-School*, Dordrecht.

<sup>1</sup> Vgl. etwa Dubislav 1981. – <sup>2</sup> Vgl. De Vries 1964, 110-114; Suppes 1957, 11f.; Copi 1982, 165-169. – <sup>3</sup> Vgl. Kutschera 1967, 359-362; Weingartner 1976, 245-253. – <sup>4</sup> Vgl. Kutschera 1967, 356-359; Essler 1970, 48-53. – <sup>5</sup> Kutschera 1967, 362. – <sup>6</sup> Kutschera 1989, 140-154. – <sup>7</sup> Vgl. Weingartner 1976, 221-226; Horthy 1993; Kreisel 1981. – <sup>8</sup> Vgl. Hinst 1996, 234-240. – <sup>9</sup> Vgl. Siegart 1997, 502-505. – <sup>10</sup> Vgl. Hahn 2000, 202-241. – <sup>11</sup> Vgl. Siegart 1997b, Siegart 2007a. – <sup>12</sup> Vgl. Siegart 1997a; Greimann 2007; Siegart 2007b. – <sup>13</sup> Vgl. Kutschera 1967, 362-364; Weingartner 1989, 234f.; Suppes 1957, 152-155; Belnap 1993, 119-138. – <sup>14</sup> Vgl. Kalish/Montague/Mar 1980, 475-478. – <sup>15</sup> Vgl. Rantala 1991, 148-153; Kleinknecht 1979, 206-210. – <sup>16</sup> Vgl. Suppes 1957, 163-169; Essler 1970, 124-160; Belnap 1993, 163f. – <sup>17</sup> Vgl. McGee 1998. – <sup>18</sup> Vgl. Suppes 1957, 155-162; Essler 1970, 75-83; Savigny 1973, 102-137. – <sup>19</sup> Vgl. z.B. Psarros 1999; Janich 1997. – <sup>20</sup> Vgl. zum verhandelten Beispiel Psarros 1999, 96-102, und allgemein