Definitionslehre: Begleitendes Skript zum PS "Logische Propädeutik und Methodische Begriffsbildung B: Definitionslehre"*

Friedrich Reinmuth; Universität Greifswald

28/02/2013

* Dieses Skript ist nicht zum Selbststudium, sondern zur Begleitung der im Untertitel genannten Lehrveranstaltung gedacht. Die Ausführungen dienen der Lehre und stellen lediglich eine Zusammenfassung der angegebenen Literatur in dem durch die Denkwerkzeuge entwickelten Rahmen dar. Das Skript wird seit dem Sommersemester 2009 verwendet und regelmäßig überarbeitet. Ab dem Sommersemester 2013 ist diese Fassung verbindlich.

Vorbemerkung

Die Angehörigen einer Sprachgemeinschaft gebrauchen ihre Sprache und verwenden deren Redemittel, um bestimmte Zwecke zu erreichen. Dabei geben die jeweilige Grammatik und die auf diese zurückgreifenden Spezifikationen der korrekten Verwendung von Ausdrücken vor, wie welche Redezwecke erfüllt werden können, umgekehrt geben die jeweils verfolgten Zwecke den Rechtfertigungsmaßstab für eine Sprache, ihre Grammatik und die Spezifikationen der korrekten Verwendung ihrer Ausdrücke ab.

Dabei gilt, dass der Grammatiktyp einer Sprache grundsätzlich bestimmt, welche Redehandlungsmöglichkeiten in dieser Sprache überhaupt eingerichtet, welche Ausdrücke überhaupt eingeführt werden können, während mit der Spezifikation des spezifischen Inventars einer Sprache und der Regulierung der korrekten Verwendung der in diesem Inventar enthaltenen Ausdrücke festgelegt wird, welche Redehandlungen in dieser Sprache tatsächlich ausgeführt werden können. Bezogen auf einen bestimmten Grammatiktyp sind es also das jeweilige Inventar und die jeweilige Regelung der korrekten Verwendung der darin enthaltenen Ausdrücke, die bestimmen, was in einer Sprache wie worüber gesagt werden kann (↑ D: 2.4).

Im Unterschied zu unserer lebensweltlichen Gebrauchssprache, bei der sowohl die Grammatik einschließlich des Inventars als auch die Regulierung der korrekten Verwendung vor allem auf historisch gewachsenen impliziten Konventionen beruhen, findet in den Wissenschaften wie auch in anderen Bereichen, etwa der Gesetzgebung, regelmäßig eine gezielte Erweiterung gegebener Sprachen durch die Einführung neuer Ausdrücke und eine (oft damit verbundene) Einrichtung neuer Redemöglichkeiten statt. Bei Sprachen mit rein konstitutioneller Genese wie den bereits bekannten Standardsprachen erster Stufe sind sogar alle Ausdrücke einzuführen, alle Redehandlungsmöglichkeiten allererst zu etablieren. Einführungsversuche können nun einerseits in verschiedenen Hinsichten misslingen, andererseits lässt sich die Einführungspraxis reflektieren und – bis zu einem gewissen Grad – durch zielführende Regeln anleiten.

Im Folgenden werden zunächst die Einführung atomarer Ausdrücke in Sprachen, die damit verfolgten Zwecke und einige allgemeine Unterscheidungen zwischen verschiedenen Formen der Einführung kursorisch erläutert (1). Sodann wird mit einer Auszeichnung bestimmter Sprachen erster Stufe und einer Präzisierung der Erweiterungsrede für diese Sprachen das begriffliche Fundament für die weitere Arbeit geschaffen und das Verhältnis von axiomatischem Setzen und definitorischem Setzen näher erläutert. Die Einführung der metasprachlichen Begrifflichkeiten erfolgt dabei selbst durch Definitionen, so dass mit der Einführung der metasprachlichen Begrifflichkeiten gleichzeitig Beispiele für das Definieren gegeben werden (2).

Anschließend finden die dann etablierten Erweiterungsbegriffe im Aufbau der Verwandtschaftssprache V Exemplifizierung. Ziel ist es dabei zum einen, das Verständnis der Erweiterungsrede und der Rolle von axiomatischen und definitorischen Setzungen beim Sprachaufbau durch die Schaffung von Beispielen zu stützen. Zum anderen soll weitere Vertrautheit mit den konkreten Tätigkeiten des axiomatischen und definitorischen Setzens hergestellt und das zielgerichtete Anziehen von Axiomen und Definitionen eingeübt werden (3).

Ausgerüstet mit Erweiterungsbegrifflichkeiten und konkreten Beispielen wird sodann die definitorische Spracherweiterung näher untersucht, wobei der Schwerpunkt auf dem Verhältnis von regelgemäßen Definitionen und definitorischen Spracherweiterungen liegt. (4). Im Anschluss ist die Funktionsweise der Definitionsregel für die unbedingte Definition von Prädikatoren näher zu erläutern sowie die regelgeleitete Definition von Prädikatoren zu erlernen (5). Anschließend sind Anfangskenntnisse zur Definition von Funktoren und Individuenkonstanten zu erwerben (6). Vorbereitend findet eine Erläuterung der (Mindest- und Höchst)Zahlquantifikationen statt (D: 5.3)

Die Kapitel 1 bis 5 bilden den Pflichtteil der Veranstaltung. Wie für den (Meta)Logik-Teil gilt auch hier, dass der Maßstab für die Klausur durch die Übungsaufgaben vorgegeben wird. Erfahrungsgemäß gilt dabei: Wer regelmäßig die Übungsaufgaben bearbeitet (auch wenn nur im Versuchssinn!) und regelmäßig an den angebotenen Begleitveranstaltungen teilnimmt, der besteht normalerweise die Klausur. Wer die Übungsaufgaben nicht bearbeitet oder nicht an den Begleitveranstaltungen teilnimmt, der besteht die Klausur in der Regel nicht. Es folgen Hinweise zur Textgestaltung und zur Klammereinsparung.

[Zur Textgestaltung] Drei Sorten von hervorgehobenen Zeilen sind innerhalb des Textes systematisch nummeriert: Metasprachliche Festlegungen, Theoreme etc. sind in der Form (Kapitelnummer-n) nummeriert, wobei die Zählung in jedem Kapitel neu einsetzt. Die Angabe von Redehandlungsregeln folgt keiner allgemeinen Nummerierung. Stattdessen werden Redehandlungsregeln mit mnemotechnischen Abkürzungen benannt. Objektsprachliche axiomatische und definitorische Setzungen, Beispiele, alle Bearbeitungen derselben, Schaubilder, Tabellen etc. sind in der Form [Kapitelnummer.n] nummeriert. Auf die Satzaussage eines mit [Kapitelnummer.n] nummerierten objektsprachlichen Satzes wird in der Form [Kapitelnummer.n]$_{A}$ Bezug genommen. Von diesen Nummerierungen ausgenommen sind im Allgemeinen lediglich Beispielaussagen, die nicht weiter bearbeitet und daher, wenn überhaupt, mit Zusatzzeichen markiert werden. Querverweise auf Kapitel der Denkwerkzeuge haben die Form (↑ D: Kapitelnummer), während Querverweise innerhalb des Skripts die Form (↑ Kapitelnummer) haben. Vorverweise auf Kapitel der Denkwerkzeuge haben die Form (D: Kapitelnummer), während Vorverweise innerhalb des Skripts die Form (Kapitelnummer) haben.

Vielen metasprachlichen Theoremen folgt ein Beweisansatz. Diese Beweisansätze sind selbst keine Beweise, sondern sollen nur ein gewisses Verständnis davon herstellen, wie ein Beweis für das betreffende Theorem zu führen wäre. Das Zeichen '■' wird verwendet, um das Ende solcher Beweisansätze zu markieren.*

[Zur Klammereinsparung] (i) Bei iterierten Konjunktionen und Adjunktionen sei implizite Linksklammerung vereinbart:

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ stehe für $(\ldots((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \ldots \wedge A_n)$

und

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ stehe für $(\ldots((A_1 \vee A_2) \vee A_3) \ldots \vee A_n)$

(ii) Zur Bindungsstärke der zweistelligen Junktoren sei festgelegt:

(iia) Ist ψ ein zweistelliger Junktor, dann stehe

$A \wedge B \,\psi\, \Gamma$ für $(A \wedge B) \,\psi\, \Gamma$.

(iib) Ist ψ ein zweistelliger, von '$\wedge$' verschiedener Junktor, dann stehe

$A \,\psi\, B \wedge \Gamma$ für $A \,\psi\, (B \wedge \Gamma)$.

(iiv) ist ψ ein zweistelliger, von '$\wedge$' verschiedener Junktor, dann stehe

$A \vee B \,\psi\, \Gamma$ für $(A \vee B) \,\psi\, \Gamma$.

(iid) Ist ψ ein zweistelliger, von '$\wedge$' und '$\vee$' verschiedener Junktor, dann stehe

$A \,\psi\, B \vee \Gamma$ für $A \,\psi\, (B \vee \Gamma)$.

Ansonsten erfolgt die Klammerung wie in Kap. 4 der Denkwerkzeuge.

---

* Es handelt sich um ein aktives Dokument: Jeder Eintrag im Inhaltsverzeichnis ist mit dem entsprechenden Kapitel verknüpft und alle Einträge sind als Lesezeichen vorhanden. Ferner sind alle Querverweise, Nennungen nummerierter Zeilen und Regelnennungen im Fließtext, die sich nicht im unmittelbaren Umfeld der Bezugsstelle befinden, mit den entsprechenden Stellen verknüpft. Man kann daher durch Klicken auf Verweise und mit der Funktion "Vorherige Ansicht" (Alt+Nach-links-Taste) zu den einschlägigen Verweisstellen und wieder zurück wechseln. Man mache sich dies auch begleitend zur Lektüre des ausgedruckten Skripts zu Nutze. Verweise auf Kapitel der Denkwerkzeuge verlinken auf die elektronische Fassung des jeweiligen (Ober)Kapitels.

Deutlichkeit der Begriffe vertreibt die Schwärmerey; hinter Verworrenen Begriffen versteken sich Theosophen. Goldmacher, Mystiker, Initiaten in geheimen Gesellschaften.

Das Kapitel von den definitionen ist in der Logic das allerwichtigste. Denn es ist immer die größte Forderung, die man an einen philosophen thun kann, daß er seinen Begriff definiren soll.

Immanuel Kant

1 Zur Einführung

Um einen (im Folgenden immer: atomaren) Ausdruck in eine Sprache S einzuführen, ist vorbereitend zunächst anzugeben, welcher grammatischen Kategorie dieser Ausdruck in S angehören und gegebenenfalls welche Stellenzahl er haben soll. Der Ausdruck wird sodann in S eingeführt, indem seine korrekte Verwendung in Sätzen von S festgelegt wird.

Die Einführung von Ausdrücken dient damit gerade dazu, bestimmte Redehandlungsmöglichkeiten einzurichten. Beispielsweise erlaubt die Einführung des Annahmeperformators das Annehmen von Aussagen, die Einführung des Folgerungsperformators und der logischen Operatoren erlaubt das Folgern von Aussagen, die Einführung des Behauptungsperformators erlaubt das Behaupten von Aussagen und gemeinsam erlauben die Einführungen dieser Redeteile das Beweisen und Behaupten von Aussagen.

Die Einführung dieser Redeteile erlaubt es damit auch, Aussagen als wahr zu qualifizieren – eben indem man sie behauptet und beweist. Dabei legen die Regeln, mit denen ein logischer Operator μ eingeführt wird, fest, *wie* eine Aussage, die μ zum Hauptoperator hat, als wahr qualifiziert werden kann und wie *welche* Aussagen im Ausgang von einer solchen Aussage (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) als wahr qualifiziert werden können. Allgemein gilt: *Wie welche Ausdrücke in eine Sprache eingeführt sind, legt fest, welche Aussagen in dieser Sprache wie als wahr qualifiziert werden können* (↑ D: 2.4).

Mit den in Kap. 4 der Denkwerkzeuge eingeführten Redeteilen lassen sich allerdings nur begrenzte Redeabsichten verwirklichen, insbesondere lassen sich nur Aussagen einer Art als wahr qualifizieren, nämlich die logisch-wahren Aussagen (↑ D: 5.1.2). Um auch Aussagen als wahr zu qualifizieren, die nicht logisch-wahr sind, müssen weitere Ausdrücke eingeführt und in ihrer Verwendung reguliert werden.

Will man etwa in einer Verwandtschaftssprache nicht nur die Aussage

$$\bigwedge x \bigvee y \text{ Mutter-von}(y, x) \vee \neg \bigwedge x \bigvee y \text{ Mutter-von}(y, x),$$

sondern etwa auch die Aussage

$$\bigwedge x \bigvee y \text{ Mutter-von}(y, x)$$

oder in einer empirischen Sprache nicht nur Aussagen wie

$$\text{schwerer}(a, b) \lor \neg\text{schwerer}(a, b)$$

oder

$$\bigwedge x \bigwedge y(\text{schwerer}(x, y) \rightarrow \neg\text{schwerer}(y, x)) \lor \bigvee x \bigvee y(\text{schwerer}(x, y) \land \text{schwerer}(y, x)),$$

sondern Aussagen wie

$$\text{schwerer}(a, b)$$

bzw.

$$\neg\text{schwerer}(a, b)$$

und

$$\bigwedge x \bigwedge y(\text{schwerer}(x, y) \rightarrow \neg\text{schwerer}(y, x))$$

als wahr qualifizieren, dann muss man allererst die Prädikatoren 'Mutter-von(.., ..)' und 'schwerer (.., ..)' so in die jeweilige Sprache einführen, dass die Möglichkeit zur Wahrqualifikation dieser logisch-indeterminierten Aussagen geschaffen wird. Allgemein: *Will man mehr als nur logisch-wahre Aussagen als wahr erweisen, dann muss man mehr als nur die logischen Operatoren einführen.*

Hinsichtlich der Sprachen, in denen die verwendungsfestlegenden Redehandlungen erfolgen, sind drei Einführungsformen zu unterscheiden: Ausdrücke einer Sprache können in ihrer Verwendung reguliert werden, indem (i) in der jeweiligen Konstruktionssprache entsprechende Redehandlungsregeln gesetzt werden oder (ii) indem die korrekte Verwendung der einzuführenden Ausdrücke durch konstruktsprachliche Redehandlungen in der Sprache selbst festlegt wird oder (iii) indem die konstruktionssprachliche Setzung von Redehandlungsregeln mit konstruktsprachlichen Festlegungen verbunden wird. Im ersten Fall handelt es sich um *konstruktions- bzw. metasprachliche* Einführungen, im zweiten Fall um *konstrukt- bzw. objektsprachliche* Einführungen und im dritten Fall um *gemischt(sprachlich)e* Einführungen.[*]

Ein Parade-Beispiel für das *konstruktionssprachliche Einführen* durch das Setzen von Redehandlungsregeln ist die Einführung des Annahme- und des Folgerungsperformators und der logischen Operatoren durch die Annahmeregel und die Folgerungsregeln. Man beachte dabei, dass die Regeln für die logischen Operatoren *zusammen* die korrekte Verwendung des Folgerungsperformators reglementieren. Ein Ausdruck muss also nicht durch genau eine Regel oder genau ein Regelpaar und – allgemeiner – nicht durch genau eine oder genau zwei Festlegungen eingeführt werden.

[*] Zur Unterscheidung von Konstruktions- und Konstrukt- bzw. Meta- und Objekt- bzw. Konstitutions- und konstituierter Sprache siehe D: 2.2.4.

Bei *konstruktsprachlichen Einführungen* wird ein Ausdruck eingeführt, indem eine Redehandlung in der Konstruktsprache vollzogen wird. Um derartige Einführungen vornehmen zu können, muss daher zuvor die Möglichkeit zu entsprechenden konstruktsprachlichen Redehandlungen geschaffen werden, indem entsprechende Performatoren konstruktionssprachlich, also durch das Setzen von Redehandlungsregeln, in die Konstruktsprache eingeführt werden.

Die Standardformen des konstruktsprachlichen Einführens sind das *axiomatische Setzen* und das *definitorische Setzen*, die entsprechenden objektsprachlichen Performatoren sind (hier) 'AXIOM___' und 'DEF___'. Der Performator 'AXIOM___' wird durch Regeln für das axiomatische Setzen eingeführt (siehe etwa die Regeln AS1 und AS2 in Kap. 2.2). Der Performator für das definitorische Setzen wird durch Definitionsregeln eingeführt (siehe etwa die Regel DP in Kap. 2.2 und die Regeln DFB und DIB in Kap. 6).

Später wird beim Aufbau der Verwandtschaftssprache V u.a. der Satz

[3.1] AXIOM $\bigwedge x(\bigvee y(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(y)) \wedge \bigvee z(\text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg\text{weiblich}(z)))$

geäußert und damit die Aussage

$[3.1]_A$ $\bigwedge x(\bigvee y(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(y)) \wedge \bigvee z(\text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg\text{weiblich}(z)))$

als Axiom gesetzt (↑ 3.1). Mit dieser Setzung werden die Teilausdrücke 'Elter-von(.., ..)' und 'weiblich(..)' (partiell) in V eingeführt. Dagegen ist die Verwendung aller anderen Teilausdrücke des Setzungssatzes – einschließlich des Performators 'AXIOM___' – in V bereits anderweitig – in diesem Fall durch Redehandlungsregeln – reguliert.

Beim Aufbau von V wird später u.a. der Satz

[3.8] DEF $\bigwedge x \bigwedge y(\text{Mutter-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x))$

geäußert und damit die Aussage

$[3.8]_A$ $\bigwedge x \bigwedge y(\text{Mutter-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x))$

als Definition gesetzt (↑ 3.2). Damit wird der Prädikator 'Mutter-von(.., ..)' definiert. Dabei wird ausschließlich die Verwendung von 'Mutter-von(.., ..)' in V geregelt, während die sonstigen Teilausdrücke des Definitionssatzes – einschließlich des Performators 'DEF___' – in ihrer Verwendung bereits durch Redehandlungsregeln oder Axiome reguliert sind.

Durch das axiomatische und definitorische Setzen werden nicht nur Ausdrücke in die Sprache eingeführt, sondern die gesetzten Aussagen werden durch die Setzung direkt als wahr qualifiziert und somit als Gründe gewonnen: *Axiomatisches Setzen und definitorisches Setzen* *sind wahrqualifizierende Akte*, Axiome stellen die Anfangsgründe des Beweisens logisch-indeterminierter Aussagen dar, Definitionen liefern weitere Gründe.

Um die gesetzten Aussagen auch in Beweise einbringen zu können, ist jedoch wiederum allererst eine entsprechende Redehandlungsmöglichkeit zu etablieren, indem der Anziehungsperformator 'Da___' durch Regeln, die das *Anziehen* bestimmter Aussagen, insbesondere der Axiome und Definitionen, erlauben, eingeführt wird. Die für die Anziehung von Axiomen und Definitionen einschlägige Regel lautet hier:

(ANZ1) Wenn eine parameterfreie Aussage Γ in S axiomatisch oder definitorisch gesetzt ist, dann darf man Γ in S anziehen.

In V gehört ANZ1 zu den Redehandlungsregeln und dementsprechend können die Aussage $[3.1]_A$ – als Axiom – und die Aussage $[3.8]_A$ – als Definition – in V in Beweisen angezogen werden. Damit ist u.a. die oben aufgeführte logisch-indeterminierte Aussage '$\bigwedge x \bigvee y$ Mutter-von(y, x)' in V beweisbar. Zu beachten ist dementsprechend, dass die Verwendungsregulierung für die axiomatisch und definitorisch eingeführten Ausdrücke auch dadurch erfolgt, dass die Anziehungs- und Folgerungsregeln bestimmen, was man mit den gesetzten Axiomen und Definitionen in Beweisen tun darf.

Gemischtsprachliche Einführungen werden insbesondere bei der Konstruktion von empirischen Sprachen einschlägig. Um Ausdrücke mit *empirisch-synthetischen* Bedeutungsanteilen einzuführen, ist nämlich die korrekte Verwendung dieser Ausdrücke auch an *nichtsprachliche Zubringeroperationen* zu binden. Die allgemeine Form der dazu vorzunehmenden operationalen Einführungen durch Konstatierungsregeln lässt sich wie folgt angeben:

(**K**) Wenn man beim Vollzug der nichtsprachlichen Zubringeroperationen $Z_1, \ldots, Z_i$ bezüglich mit $\theta_1, \ldots, \theta_n$ bezeichneter Gegenstände zu dem und dem Ergebnis gelangt, dann darf man eine Aussage der Form $\Phi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ konstatieren.

Ein Beispiel ist etwa die folgende Regel, die die korrekte Verwendung des Prädikators 'schwerer(.., ..)' an eine Wägeoperation bindet:

(**KW**) Wenn zwei mit θ_1, θ_2 bezeichnete Körper auf je eine Waagschale einer geeichten Balkenwaage gelegt werden und die θ_1-Waagschale tiefer sinkt als die θ_2-Waagschale, dann darf man die aus der Anwendung von 'schwerer(.., ..)' auf θ_1 und θ_2 resultierende Aussage konstatieren.

Mit dem Setzen einer Konstatierungsregel werden die entsprechenden Prädikatoren partiell konstruktionssprachlich eingeführt, insbesondere werden ihre empirisch-synthetischen Bedeutungsanteile durch die Konstatierungsregeln gegeben. Zugleich wird über die Gesamtheit der Konstatierungsregeln der Konstatierungsperformator 'KON___' eingeführt.

Das *Konstatieren* einer Aussage ist ebenfalls ein wahrqualifizierender Akt, die konstatierbaren Aussagen sind *Empireme*, die – mit einer entsprechenden Anziehungsregel – ebenso wie Axiome und Definitionen angezogen werden dürfen. Ebenso wie Axiome und Definitionen liefern Empireme also Gründe, die nicht ihrerseits erst durch Beweise als wahr qualifiziert werden müssen.

In der Regel möchte man Prädikatoren, deren empirisch-synthetische Bedeutungsanteile konstruktionssprachlich durch Konstatierungsregeln gegeben werden, auch mit *analytisch-strukturellen* Bedeutungsanteilen versehen, so soll z.B. – material gesprochen – die Schwerer-Beziehung prinzipiell asymmetrisch, irreflexiv und transitiv sein (d.h. der Prädikator 'schwerer(.., ..)' soll in empirischen Sprachen asymmetrisch, irreflexiv und transitiv sein (↑ 2.4, D: 6.2). Dies erreicht man, indem man in der Sprache geeignete Axiome setzt, womit der jeweilige Prädikator dann partiell konstruktsprachlich und insgesamt gemischtsprachlich eingeführt wird.

Um zu erreichen, dass der Prädikator 'schwerer(.., ..)' die gewünschten Eigenschaften hat, kann man beim Aufbau einer empirischen Sprache S beispielsweise die Aussagen

[1.1] $\neg\bigvee x \text{ schwerer}(x, x)$

und

[1.2] $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(\text{schwerer}(x, y) \wedge \text{schwerer}(y, z) \rightarrow \text{schwerer}(x, z))$

in S als Axiome setzen und somit sicherstellen, dass der Prädikator 'schwerer-(.., ..)' irreflexiv ([1.1]), transitiv ([1.2]) und damit auch asymmetrisch in S ist.

Letzeres bedeutet, dass die Aussage

[1.3] $\bigwedge x \bigwedge y(\text{schwerer}(x, y) \rightarrow \neg\text{schwerer}(y, x))$

in S beweisbar ist. Falls [1.1] und [1.2] in S als Axiome gesetzt sind, ist dies gerade der Fall, [1.3] muss dann also nicht extra gefordert werden. Alternativ könnte man auch [1.2] und [1.3] als Axiome in S setzen, womit dann auch [1.1] (durch Anziehung von [1.3]) in S beweisbar wäre.

Die nach den später etablierten Regeln DP, DFB und DIB zulässigen Definitionen führen immer zu einer *definitorischen Erweiterung* der jeweiligen Sprache um den definierten Ausdruck (↑ 4.3): Die definierten Ausdrücke sind *eliminierbar*, d.h. zu jeder Aussage der um die Definition und den definierten Ausdruck erweiterten Sprache gibt es eine in der erweiterten Sprache äquivalente Aussage, die nur Ausdrücke des Ausgangsinventars enthält (↑ 4.1), und die erweiterte Sprache ist eine *konservative Erweiterung* der Ausgangssprache, d.h. in ihr sind nur die Aussagen der Ausgangssprache beweisbar, die bereits in der Ausgangssprache selbst beweisbar waren (↑ 4.2).

Axiomatische Setzungen führen normalerweise nicht zu definitorischen Erweiterungen, sie sollen die Sprache gerade ›wirklich‹ verstärken. Insbesondere werden Axiome nicht nur gesetzt, um Ausdrücke (erstmals) einzuführen, sondern um eine Sprache nicht-konservativ zu erweitern, d.h., um im erweiterten Zustand tatsächlich aus Ausdrücken des Ausgangsinventars gebildete Aussagen beweisen zu können, die vorher nicht beweisbar waren.

Bei einer solchen nicht-konservativen Erweiterung verändert sich jeweils die Spezifikation der korrekten Verwendung der ›betroffenen‹ Ausdrücke. Bezogen auf die erweiterte Sprache sind diese Ausdrücke dann über die Gesamtheit der für ihre korrekte Verwendung einschlägigen Festlegungen eingeführt. Zu beachten ist, dass zu den von einer axiomatischen Setzung ›betroffenen‹ Ausdrücken unter Umständen nicht nur Teilausdrücke des gesetzten Axioms gehören, sondern gegebenenfalls etwa auch Ausdrücke der Sprache, die zur Definition von Teilausdrücken des Axioms herangezogen wurden oder die unter Rückgriff auf Teilausdrücke des Axioms definiert wurden.

Jede definitorische Erweiterung setzt voraus, dass bereits nicht-definitorische Erweiterungen vorgenommen wurden. Nicht-definitorische Erweiterungen richten gewissermaßen die ersten Redehandlungsmöglichkeiten ein, sie erlauben die ersten Wahrqualifikationen und führen zu den ersten Gründen, während definitorische Erweiterungen im Ausgang von den schon vorhandenen Ausdrücken und Redemöglichkeiten in – zumindest in formaler Hinsicht – risikofreier Weise zu weiteren Ausdrücken und weiteren Gründen führen.

Zwei Kernprinzipien sind für jede Ausdruckseinführung einschlägig: Das Prinzip der *formalen Korrektheit* sowie das Prinzip der *materialen Adäquatheit*. Wichtigster Aspekt der formalen Korrektheit ist hier die Konsistenzwahrung: Führt eine Einführung zur Inkonsistenz der Sprache, dann taugt diese Sprache nur noch als Mittel für alles und nichts und vor allem für letzteres (↑ D: 5.1.4). Diesbezüglich geht man mit konservativen – und also auch mit definitorischen – Erweiterungen kein Risiko ein, während bei Erweiterungen, die nicht konservativ sind, die Konsistenzwahrung immer fraglich ist. Einführungen sollen aber nicht nur formal korrekt, sondern auch material adäquat sein: Sie sollen die Erreichung der verfolgten Redezwecke bzw. -Absichten erlauben. So ist es etwa formal korrekt, in einer Verwandtschaftssprache, in die bereits der Ausdruck 'männlich(..)', aber der Ausdruck 'weiblich(..)' noch nicht eingeführt wurde, 'weiblich(..)' einzuführen, indem man

$\bigwedge x(\text{weiblich}(x) \leftrightarrow \text{männlich}(x))$

als Definition setzt. Falls man allerdings die Absicht hatte, eine konsistente Sprache aufzubauen, in der sich u.a. die Aussage:

$\bigvee x(\text{männlich}(x) \wedge \neg\text{weiblich}(x))$

beweisen lässt, dann hat man sich die Verwirklichung dieser Absicht erfolgreich verbaut.

Neben den genannten Kernprinzipien der formalen Korrektheit und der materialen Adäquatheit gibt es weitere Gesichtspunkte bzw. Forderungen, die bei allen Einführungen eine Rolle spielen, aber meist gegeneinander abgewogen werden müssen: Der Grundsatz der Einfachheit im Gebrauch (= *Handlichkeit*), der Grundsatz der Einfachheit für die metatheoretische Untersuchung (= *Überschaubarkeit*), die Forderung, Einführungen so vorzunehmen, dass keine ›neuen‹ unentscheidbaren Aussagen resultieren (= *Entscheidbarkeitsmaximierung*; vgl. Kap. 4.1.2) und das Prinzip der *Bordmittel*, das im einschlägigen Wahlfall eine Bevorzugung konstruktsprachlicher Einführungen verlangt.

Als Beispiel für Konflikte zwischen diesen Forderungen sei hier auf die Möglichkeit verwiesen, unter Rückgriff auf den Negator und einen der zweistelligen Junktoren die weiteren zweistelligen Junktoren durch Definitionsschemata einzuführen. Tut man dies, so resultiert eine größere Überschaubarkeit – aber eben auf Kosten der Handlichkeit (↑ D: 5.3.1).

Übung 1.1

Im vorhergehenden Text wurde behauptet, dass mit der Setzung von $[3.1]_A$ und $[3.8]_A$ als Axiom bzw. Definition die Aussage '$\bigwedge x \bigvee y$ Mutter-von(y, x)' beweisbar ist. Ergänzen Sie im folgenden Beweisfragment fehlende Schritte, bis ein Beweis entsteht, und ergänzen Sie an den mit '?' markierten Stellen fehlende Kommentare. Beachten Sie dabei, dass angezogene Aussagen immer verfügbar bleiben. '…' deutet fehlende Zeilen (also wenigstens eine fehlende Zeile) an.

0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigvee y$ Mutter-von(y, x)	
1	Da	$\bigwedge x(\bigvee y(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(y))$ $\wedge$ $\bigvee z(\text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg\text{weiblich}(z)))$	| Ax. $[3.1]_A$
2	Da	$\bigwedge x \bigwedge y(\text{Mutter-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x))$	| Def. $[3.8]_A$
3	Also	$\bigvee y(\text{Elter-von}(y, \text{x}) \wedge \text{weiblich}(y))$ $\wedge$ $\bigvee z(\text{Elter-von}(z, \text{x}) \wedge \neg\text{weiblich}(z))$	| UB; 1
4	Also	$\bigvee y(\text{Elter-von}(y, \text{x}) \wedge \text{weiblich}(y))$	| KB; 3

5	Sei_5	Elter-von(y, x) ∧ weiblich(y)	
6	Also_5	$\bigwedge y$(Mutter-von(y, y) ↔ Elter-von(y, y) ∧ weiblich(y))	| UB; 2
7	Also_5	Mutter-von(y, x) ↔ Elter-von(y, x) ∧ weiblich(y)	| UB; 6
	…		
k-2	Also_5	$\bigvee y$ Mutter-von(y, x)	| ?
k-1	Also	$\bigvee y$ Mutter-von(y, x)	| ?
k	Also	$\bigwedge x \bigvee y$ Mutter-von(y, x)	| ?

Übung 1.2

Im vorhergehenden Text wurde auch behauptet, dass a) wenn [1.1] und [1.2] axiomatisch gesetzt sind, auch [1.3] beweisbar ist, und dass b) wenn [1.3] axiomatisch gesetzt ist, auch [1.1] beweisbar ist. Ergänzen Sie in den folgenden Beweisfragmenten fehlende Schritte, bis Beweise entstehen, und ergänzen Sie fehlende Kommentare.

a)

0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigwedge y$(schwerer(x, y) → ¬schwerer(y, x))	
1	Da	¬$\bigvee x$ schwerer(x, x)	| Ax. [1.1]
2	Da	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(schwerer($x$, y) ∧ schwerer(y, z) → schwerer(x, z))	| Ax. [1.2]
3	Sei_3	schwerer(x, y)	
4	$\text{Wäre}_{3,4}$	schwerer(y, x)	
5	$\text{Also}_{3,4}$	schwerer(x, y) ∧ schwerer(y, x)	| KE; 3, 4
6	$\text{Also}_{3,4}$	$\bigwedge y \bigwedge z$(schwerer(x, y) ∧ schwerer(y, z) → schwerer(x, z)	| UB; 2
	…		
k-5	$\text{Also}_{3,4}$	$\bigvee x$ schwerer(x, x)	| ?
k-4	$\text{Also}_{3,4}$	¬$\bigvee x$ schwerer(x, x)	| ?
k-3	Also_3	¬schwerer(y, x)	| NE; 4-(k-4)
k-2	Also	schwerer(x, y) → ¬schwerer(y, x)	| ?
k-1	Also	$\bigwedge y$(schwerer(x, y) → ¬schwerer(y, x))	| ?
k	Also	$\bigwedge x \bigwedge y$(schwerer(x, y) → ¬schwerer(y, x))	| ?

b)

0	Es-gilt	¬$\bigvee x$ schwerer(x, x)	
1	Da	$\bigwedge x \bigwedge y$(schwerer(x, y) → ¬schwerer(y, x))	| Ax. [1.3]
2	Wäre_2	$\bigvee x$ schwerer(x, x)	

3	$\text{Sei}_{2,3}$	schwerer(x, x)	
4	$\text{Wäre}_{2,3,4}$	$\bigvee x$ schwerer(x, x)	
5	$\text{Also}_{2,3,4}$	schwerer(x, x)	| ?
	…		
k-2	$\text{Also}_{2,3}$	$\neg\bigvee x$ schwerer(x, x)	| ?
k-1	Also_{2}	$\neg\bigvee x$ schwerer(x, x)	| PB; 2, 3-(k-2)
k	Also	$\neg\bigvee x$ schwerer(x, x)	| NE; 2-(k-1)

Übung 1.3

Eine *Explikation* eines Ausdrucks μ einer Sprache S liegt vor, wenn man einen Ausdruck μ* unter Rücksicht auf die Verwendung von μ in S in eine Sprache S* einführt. Dabei soll dann die korrekte Verwendung von μ* in S* in Teilen der (korrekten) Verwendung von μ in S entsprechen.

Besondere Bedeutung kommt bei der Vorbereitung einer Explikation der Erstellung eines *Explikationsmaßstabes* zu. Dieser ist eine Menge von Aussagen von S*, die μ* zum Teilausdruck haben und die nach der Einführung von μ* in S* in S* beweisbar sein sollen. Ist S eine Gebrauchssprache und S* eine Explizitsprache, dann gehen in den Explikationsmaßstab oft Aussagen ein, die das Ergebnis der Formalisierung von S-Aussagen sind, in denen μ korrekt verwendet wird. Wie gut der Explikationsmaßstab ist, hängt dann natürlich auch von der Qualität der Formalisierungen ab.

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen über Verwandtschaftsverhältnisse, wobei Sie den Bezug auf Menschen unterschlagen können und sollen. So sollte etwa 'Jeder hat wenigstens eine Urgroßmutter' durch '$\bigwedge x \bigvee y$ Urgroßmutter-von(y, x)' und 'Jeder hat höchstens zwei Großmütter' durch

$$\bigwedge x \bigwedge u \bigwedge v \bigwedge w(\text{Großmutter-von}(u, x) \wedge \text{Großmutter-von}(v, x) \wedge \text{Großmutter-von}(w, x)$$
$$\rightarrow$$
$$u = v \vee u = w \vee v = w)$$

formalisiert werden. Sodann ist zu beachten: Jeder hat genau n so-und-so Dinge, wenn er wenigstens und höchstens n so-und-so Dinge hat. Jeder hat also genau dann genau vier Großeltern, wenn er wenigstens und höchstens vier Großeltern hat.

a) Jeder hat wenigstens ein weibliches Elternteil und wenigstens ein Elternteil, das nicht weiblich ist.

b) Jeder hat höchstens zwei Eltern.

c) Wenn jemand Elter von jemand ist, dann ist letzterer nicht Elter des ersteren.

d) Jeder hat genau zwei Eltern.

e) Jeder hat wenigstens eine Mutter.

f) Niemand hat mehr als eine Mutter.

g) Jeder hat genau eine Mutter.

h) Jeder hat wenigstens einen Vater.

i) Niemand hat mehr als einen Vater.

j) Jeder hat genau einen Vater.

k) Jeder hat genau einen Vater und genau eine Mutter.

l) Jeder ist Sohn oder Tochter von irgendjemand.

2 Erweiterungen

Sprachen werden oft nicht in einem Zug konstituiert, so dass alle Ausdrücke in einer dann abgeschlossenen Konstitutionsphase eingeführt werden. Stattdessen findet vielmehr oft eine schrittweise Sprachkonstitution statt, bei der eine Sprache nach und nach durch die Einführung neuer Ausdrücke oder die Setzung zusätzlicher Axiome oder auch Redehandlungsregeln Zug um Zug erweitert und an die Bedürfnisse der Sprecher angepasst wird. Dabei ist es oft so, dass verschiedene Sprachen Teile ihres Inventars, ihrer Syntax und Festlegungen für bestimmte – in allen diesen Sprachen wichtige – Ausdrücke teilen. In dieser Hinsicht kann man oft verschiedene Sprachen als Erweiterungen einer Ausgangssprache betrachten.

Im Folgenden wird nun die Erweiterungsrede zunächst für so genannte LE-Sprachen präzisiert. Dies sind Sprachen erster Stufe, die – zunächst einmal in einem intuitiven Sinne – Erweiterungen der – nach Abschluss von Kap. 4 der Denkwerkzeuge im Prinzip bekannten – Sprache L darstellen (2.1).

Sodann werden die Ausgangssprachen für die weiteren Betrachtungen, die LE-Sprachen L^+ und eine praxisnahe Erweiterung derselben, die Sprache L*, bereitgestellt. Diese Sprachen sehen im Gegensatz zu L die Redehandlungen des axiomatischen und des definitorischen Setzens sowie des Anziehens von Axiomen und Definitionen vor, wobei L* zusätzlich die Einbringung bereits bewiesener Aussagen und die Anwendung zulässiger Folgerungsregeln erlaubt. Sobald L* zur Verfügung steht, werden unter den LE-Sprachen die so genannten ADS-Sprachen ausgezeichnet, die bestimmte Erweiterungen von L^+ darstellen. Für diese werden dann weitere Erweiterungsbegrifflichkeiten zur Verfügung gestellt, die die metatheoretische Auseinandersetzung mit dem axiomatischen und definitorischen Setzen erleichtern (2.2).

Darauf folgen einige Bemerkungen zum Verhältnis von axiomatischem und definitorischem Setzen beim Sprachaufbau. In diesem Zusammenhang ist auch die in philosophischen Kontexten gerne bemühte Rede von Grundausdrücken bzw. Grundbegriffen zu streifen (2.3). Den Abschluss bildet ein Übungskapitel zur materialen Adäquatheit (2.4). Der Leser sollte sich bei der Lektüre der folgenden Kapitel bewusst machen, dass die metasprachliche Einführung von Begrifflichkeiten zur Beschreibung des objektsprachlichen Einführens nach demselben Muster erfolgt und denselben Kriterien genügen muss wie dieses selbst.

2.1 LE-Sprachen

In Kap. 2.2.3 der Denkwerkzeuge wurden Sprachen als Einheiten aus Grammatik und Performatorik charakterisiert, wobei die Grammatik ihrerseits in Inventar und Syntax zerfällt. Für die folgende Auseinandersetzung mit der Erweiterung von Sprachen ist es jedoch zweckmäßig, *Sprachen* (im Sinne von Explizitsprachen) als Einheiten aus Grammatik, Performatorik, der Menge ihrer Axiome und der Menge ihrer Definitionen aufzufassen.

Unter dieser Charakterisierung gilt insbesondere, dass zwei Sprachen S, S^* genau dann identisch sind, wenn die Grammatik von S gleich der Grammatik von S^* ist (d.h., das Inventar von S ist gleich dem Inventar von S^* und die Syntax von S ist gleich der Syntax von S^*), die Performatorik von S gleich der Performatorik von S^* ist (d.h., für alle R gilt: R ist genau dann eine Redehandlungsregel von S, wenn R eine Redehandlungsregel von S^* ist), die Menge der Axiome von S gleich der Menge der Axiome von S^* ist (d.h., für alle A gilt: A ist genau dann ein Axiom von S, wenn A ein Axiom von S^* ist) und die Menge der Definitionen von S gleich der Menge der Definitionen von S^* ist (d.h., für alle Δ gilt: Δ ist genau dann eine Definition von S, wenn Δ eine Definition von S^* ist).

Erläuternd ist hinzuzufügen, dass Γ genau dann ein *Axiom* bzw. eine *Definition von* S ist, wenn Γ eine S-Aussage ist und Γ in S als Axiom bzw. Definition gesetzt ist oder es ein Aussagenschema und eine Redehandlungsregel von S gibt, nach der alle S-Aussagen, die Instanzen dieses Aussagenschemas sind, als Axiom bzw. Definition von S genutzt werden dürfen, und Γ eine Instanz dieses Schemas ist. Man beachte: Axiome und Definitionen einer Sprache sind immer Aussagen dieser Sprache. Sind weder in S noch in S' Axiome oder Definitionen vorhanden, etwa, weil die entsprechenden Redehandlungen gar nicht vorgesehen sind, dann gilt trivialerweise, dass Γ genau dann Axiom resp. Definition von S ist, wenn Γ Axiom resp. Definition von S' ist.

Man beachte, dass sich daraus, dass eine Aussage Γ in S als Axiom oder Definition gesetzt ist, nicht ergibt, dass diese Setzung gemäß der Redehandlungsregeln von S korrekt ist. Im Gegensatz zu der hier gepflegten *korrektheitsneutralen* Verwendung von 'Axiom' und 'Definition' wird andernorts insbesondere 'Definition' oft *korrektheitssensitiv* zur alleinigen Auszeichnung von – im hiesigen Sinne – regelgemäßen Definitionen verwendet. Dies ist bei der Lektüre anderer Texte zu berücksichtigen!

Am Anfang aller folgenden Spracherweiterungen und Betrachtungen steht die Sprache L. L ist eine Sprache erster Stufe, für die gilt: Das Inventar von L enthält keine Individuenkonstanten, die abzählbar unendliche Menge PAR = {'u', 'v', 'w', 'x', 'y', 'z', 'u_1', 'v_1', 'w_1', 'x_1', 'y_1', 'z_1', 'u_2', 'v_2', 'w_2', 'x_2', 'y_2', 'z_2', …} der L-Parameter, die abzählbar unendliche Menge VAR = {'u', 'v', 'w', 'x', 'y', 'z', 'u_1', 'v_1', 'w_1', 'x_1', 'y_1', 'z_1', 'u_2', 'v_2', 'w_2', 'x_2', 'y_2', 'z_2', …} der L-Variablen, keine Funktoren, den L-Prädikator '.. = ..', die Menge {'¬___', '___→___', '___↔___',

'___∧___', '___∨___'} der L-Junktoren, die Menge {'⋀..', '⋁..'} der L-Quantifikatoren und die Menge {'Sei___', 'Wäre___', 'Also___' 'Es-gilt___'} der L-Performatoren.

Die Syntax von L enthält die Kategorien der L-Terme, L-Quantoren, L-Formeln und L-Sätze gemäß den in Kap. 3.2 der Denkwerkzeuge gegebenen Definitionen. Die Redehandlungsregeln von L sind die in Kap. 4 der Denkwerkzeuge etablierten Folgerungsregeln, die Annahmeregel sowie die Behauptungsregel. L enthält keine Axiome und auch keine Definitionen, d.h., $\{A \mid A \text{ ist Axiom von L}\} = \emptyset$ und $\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Definition von L}\} = \emptyset$.[*]

Im Folgenden werden LE-Sprachen (**L**-**E**rweiterungs-Sprachen) betrachtet, d.h. Sprachen erster Stufe, für welche einerseits gilt, dass sie Erweiterungen von L sind, während sie andererseits vom Grammatiktyp her höchstens Standardsprachen erster Stufe sind.

Dazu sei zunächst in Erinnerung gerufen, dass das Inventar jeder Standardsprache erster Stufe $\mathcal{S}$ die atomaren Kategorien der $\mathcal{S}$-Konstanten α, $\mathcal{S}$-Parameter β, $\mathcal{S}$-Variablen ω, $\mathcal{S}$-Funktoren φ^n, $\mathcal{S}$-Prädikatoren Φ^n, $\mathcal{S}$-Junktoren ψ^n, $\mathcal{S}$-Quantifikatoren Π und $\mathcal{S}$-Performatoren Ξ umfasst, während die Syntax einer solchen Sprache $\mathcal{S}$ die syntaktischen Kategorien der $\mathcal{S}$-Terme θ, $\mathcal{S}$-Quantoren $\Pi\omega$, $\mathcal{S}$-Formeln Δ und $\mathcal{S}$-Sätze Σ enthält (↑ D: 3.2).

Dabei ist zu beachten, dass sich Angehörige der Operatorenkategorien der Funktoren, Prädikatoren und Junktoren hinsichtlich ihrer Stellenzahl unterscheiden können, während Quant(ifikat)oren (im vorgegeben Rahmen) und Performatoren immer einstellig sind. Welche Ausdrücke zur Syntax einer Sprache erster Stufe gehören, deren Inventar wenigstens das Inventar von L umfasst und höchstens die Kategorien einer Standardsprache erster Stufe enthält, hängt allein vom jeweiligen Inventar ab, denn die in Kap. 3.2 der Denkwerkzeuge gegebenen Definitionen der syntaktischen Kategorien gelten – in entsprechender Spezialisierung – für alle diese Sprachen.

Im Folgenden wird die Kategorienrede ohne Sprachbezug verwendet, um allgemein über grammatische Kategorien (gemäß der Standardgrammatik erster Stufe) zu reden. Beispielsweise wird 'Kategorie' verwendet, um allgemein über grammatische Kategorien gemäß der Standardgrammatik erster Stufe zu reden und 'Funktor' oder 'Kategorie der Funktoren' um Ausdrücke sprachübergreifend zu kategorisieren, während mit Ausdrücken wie 'S-Kategorie' die grammatischen Kategorien einer konkreten Sprache S betitelt werden und Ausdrücke wie 'S-Funktor' oder 'Kategorie der S-Funktoren' sich auf die (Menge der) Funktoren einer konkreten Sprache S beziehen.

---

[*] '∅' ist das Zeichen für die leere Menge, d.h. die Menge, die keine Elemente enthält.

Man beachte, dass für die Performatorik der im Folgenden betrachteten Sprachen immer vorausgesetzt wird, dass diese im Gegensatz zu gebräuchlichen Alltagsregelwerken (i) nur Regeln enthalten, die das Redehandeln der Sprachbenutzer direkt, ohne Vermittlung weiterer Regeln, anleiten, und (ii) dass alle Konsequenzen der Regeln einer Sprache selber als Normen für die Sprachbenutzung gelten. Eine Performatorik, die eine allgemeine Regel enthält, die dann durch eine spezifische Regel eingeschränkt wird, führt damit bei Eintreten des Regelantezedens für die spezifischere Regel zu widersprüchlichen Handlungsanweisungen. Hier besteht also ein Gegensatz zu vielen gebrauchssprachlichen Regelwerken, bei denen das Vorgehen in solchen Fällen durch höherstufige Regeln reguliert oder eine Entscheidung an eine Entscheidungsinstanz, etwa ein Gericht, delegiert wird. In diesem Zusammenhang wird festgelegt: S ist *performatorik-konsistent* genau dann, wenn (i) S eine Sprache ist und (ii) es keine Instanz A eines Regelantezedens einer Redehandlungsregel von S gibt, so dass unter A in S eine Redehandlung erlaubt und nicht erlaubt ist.

Nun zur Definition des einstelligen (metasprachlichen) Prädikators '.. ist eine LE-Sprache', die anschließend erläutert wird:

(2-1) **Definition.** *LE-Sprache*

S *ist eine LE-Sprache*

gdw

S ist eine performatorik-konsistente Sprache erster Stufe und

(i) Das Inventar von S umfasst höchstens die atomaren Kategorien einer Standardsprache erster Stufe und
   a) $\{\beta \mid \beta$ ist ein S-Parameter$\} = \text{PAR}$,
   b) $\{\xi \mid \xi$ ist eine S-Variable$\} = \text{VAR}$,
   c) '.. = ..' $\in \{\Phi \mid \Phi$ ist ein S-Prädikator$\}$,
   d) $\{\psi \mid \psi$ ist ein L-Junktor$\} \subseteq \{\psi \mid \psi$ ist ein S-Junktor$\}$,
   e) $\{\Pi \mid \Pi$ ist ein L-Quantifikator$\} \subseteq \{\Pi \mid \Pi$ ist ein S-Quantifikator$\}$,
   f) $\{\Xi \mid \Xi$ ist ein L-Performator$\} \subseteq \{\Xi \mid \Xi$ ist ein S-Performator$\}$ und

(ii) Die Syntax von S enthält genau die Kategorien der S-Terme, S-Quantoren, S-Formeln und S-Sätze gemäß den in Kap. 3.2 der Denkwerkzeuge gegebenen Definitionen,

(iii) Die Performatorik von S enthält wenigstens die Redehandlungsregeln von L.

Für das Inventar einer LE-Sprache S gilt nach Klausel (i) von Definition (2-1), dass es höchstens die atomaren Kategorien der Standardgrammatik erster Stufe umfasst und dass die Menge der S-Parameter gleich PAR ist, die Menge der S-Variablen gleich VAR ist, '.. = ..' Element der Menge der S-Prädikatoren ist, die Menge der L-Junktoren Teilmenge der Menge der S-Junktoren ist, die Menge der L-Quantifikatoren Teilmenge der Menge der S-

Quantifikatoren und die Menge der L-Performatoren Teilmenge der Menge der $\mathcal{S}$-Performatoren ist. Das Inventar von LE-Sprachen umfasst also zumindest das gesamte L-Inventar.

Die Syntax einer LE-Sprache $\mathcal{S}$ enthält gemäß Klausel (ii) von Definition (2-1) die Kategorien der $\mathcal{S}$-Terme, $\mathcal{S}$-Quantoren, $\mathcal{S}$-Formeln und $\mathcal{S}$-Sätze gemäß den in Kap. 3.2 der Denkwerkzeuge gegebenen Definitionen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass diese Definitionen auf die entsprechende Sprache zu spezialisieren sind; es sind genau solche (wohlgeformten) Ausdrücke Mitglieder der syntaktischen Kategorien einer LE-Sprache $\mathcal{S}$, deren atomare Teilausdrücke sämtlich $\mathcal{S}$-Ausdrücke sind.

Für die Performatorik einer LE-Sprache $\mathcal{S}$ gilt nach Klausel (iii) von Definition (2-1), dass sie wenigstens die Redehandlungsregeln von L umfasst. Mit anderen Worten: Wenn $\mathcal{S}$ eine LE-Sprache ist, dann ist die Performatorik von L Teilmenge der Performatorik von $\mathcal{S}$. Da LE-Sprachen sodann performatorik-konsistent sein müssen, gilt ferner, dass die Performatorik einer LE-Sprache $\mathcal{S}$ gegenüber der Performatorik von L nicht in ›non-monotoner‹ Weise, also um neue Redehandlungsregeln, die die Redehandlungsregeln von L einschränken, erweitert wurde. Damit gilt insbesondere, dass alle L-Aussagen, die in L beweisbar sind, auch in jeder LE-Sprache beweisbar sind. Dabei gilt, dass Γ *in* $\mathcal{S}$ *beweisbar ist* genau dann, wenn $\mathcal{S}$ eine Sprache ist und Γ eine $\mathcal{S}$-Aussage ist, für die es in $\mathcal{S}$ einen Beweis gibt. Das folgende, ohne Beweisansatz notierte Theorem hält den gerade beschriebenen Sachverhalt noch einmal fest:

(2-2) **Theorem.** *Alle in L beweisbaren Aussagen sind in jeder LE-Sprache beweisbar*

Für alle L-Aussagen Γ gilt: Wenn Γ in L beweisbar ist und $\mathcal{S}$ eine LE-Sprache ist, dann ist Γ auch in $\mathcal{S}$ beweisbar.

In Definition (2-1) finden sich keine Klauseln zu Axiomen und Definitionen, da in L weder Axiome noch Definitionen gesetzt sind (und auch gar nicht gesetzt werden können, da die entsprechenden Redehandlungsmöglichkeiten für L nicht gegeben sind). Daher gilt trivialerweise für alle LE-Sprachen $\mathcal{S}$, dass alle Axiome von L auch Axiome von $\mathcal{S}$ und alle Definitionen von L auch Definitionen von $\mathcal{S}$ sind. Im Folgenden werden – so nicht ausdrücklich anders angegeben – ausschließlich LE-Sprachen betrachtet.

Bevor nun die Sprachen L^+ und L^* näher spezifiziert werden können, sind zunächst einige Präzisierungen der Erweiterungsrede für LE-Sprachen vorzunehmen, wobei diese (und weitergehende) Präzisierungen nur die hier benötigten Unterscheidungen bereitstellen, nicht aber alle Erweiterungsmöglichkeiten und Konfigurationen derselben abdecken.

Zuerst wird ein allgemeiner Erweiterungsbegriff für LE-Sprachen etabliert:

(2-3) **Definition.** *Erweiterung*

S' ist eine Erweiterung von S

gdw

S und S' sind LE-Sprachen und

(i) Für alle τ, (n,) K gilt: Wenn τ ein (n-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (n-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K,

(ii) Für alle R gilt: Wenn R eine Redehandlungsregel von S ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S',

(iii) Für alle Γ gilt: Wenn Γ ein Axiom von S ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S',

(iv) Für alle Γ gilt: Wenn Γ eine Definition von S ist, dann ist Γ auch eine Definition von S'.

Da LE-Sprachen performatorik-konsistent sind, gilt mit Klausel (ii) (und u.a. dem nachfolgenden Theorem) wiederum das folgende Theorem:

(2-4) **Theorem.** *Alle in einer LE-Sprache beweisbaren Aussagen sind auch in ihren Erweiterungen beweisbar*

Wenn S' eine Erweiterung von S ist, dann gilt für alle S-Aussagen Γ: Wenn Γ in S beweisbar ist, dann ist Γ auch in S' beweisbar.

Man beachte bei dieser und den folgenden Festlegungen, dass sich aus den Bestimmungen für die atomaren Kategorien zweier LE-Sprachen ›entsprechende‹ Verhältnisse für ihre syntaktischen Kategorien ergeben:

(2-5) **Theorem.** *Erweiterung und Syntax*

Wenn S' eine Erweiterung von S ist, dann:

(i) Jeder (geschlossene) S-Term ist auch ein (geschlossener) S'-Term,

(ii) Jeder S-Quantor ist auch ein S'-Quantor,

(iii) Jede (geschlossene) S-Formel ist auch eine (geschlossene) S'-Formel und

(iv) Jeder S-Satz ist auch ein S'-Satz.

Beweisansatz: Sei S' eine Erweiterung von S. Dann gilt nach Definition (2-3), dass S und S' LE-Sprachen sind und es gilt: Wenn τ ein (n-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (n-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K.

Zu (i): Zunächst zeigt man: (ia) Wenn θ ein S-Term ist, dann ist θ ein S'-Term. (ia) lässt sich durch Induktion über den Termaufbau zeigen. Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft E für alle Terme einer LE-Sprache S gilt, reicht es nämlich zu zeigen, dass E für alle atomaren S-Terme gilt und sich über den Termaufbau weiter vererbt.

Es sind nämlich alle Terme einer LE-Sprache S entweder atomare Terme oder durch Anwendung von Funktoren auf andere – und letztendlich auf atomare Terme – aufgebaute funktorale Terme. Ist nun S eine LE-Sprache und gilt eine Eigenschaft E für alle atomaren S-Terme und gilt: Wenn S-Terme $\theta_1, \ldots, \theta_n$ die Eigenschaft E haben und φ ein n-stelliger S-Funktor ist, dann hat auch $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ die Eigenschaft E, dann gilt daher E für alle S-Terme.

Nun zum konkreten Fall: Zunächst sind alle atomaren S-Terme θ auch (atomare) S'-Terme. Es gilt nämlich: Wenn θ eine S-Individuenkonstante ist, dann ist θ eine S'-Individuenkonstante, wenn θ ein S-Parameter ist, dann ist θ ein S'-Parameter, und wenn θ eine S-Variable ist, dann ist θ eine S'-Variable. Daraus ergibt sich: Wenn θ ein atomarer S-Term (also eine S-Individuenkonstante, ein S-Parameter oder eine S-Variable) ist, dann ist θ ein atomarer S'-Term (also eine S'-Individuenkonstante, ein S'-Parameter oder eine S'-Variable) und mithin ein S'-Term.

Nun ist zu zeigen, dass sich die Eigenschaft, S'-Term zu sein, über den Termaufbau der S-Terme vererbt. Dazu ist zu zeigen: Wenn die S-Terme $\theta_1, \ldots, \theta_n$ auch S'-Terme sind und φ ein n-stelliger S-Funktor ist, dann ist auch $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ ein S'-Term. Seien dazu $\theta_1, \ldots, \theta_n$ S-Terme und auch S'-Terme. Sei nun φ ein n-stelliger S-Funktor. Dann ist φ auch ein n-stelliger S'-Funktor und $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sind nach Voraussetzung S'-Terme und damit ist $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ auch ein S'-Term. Es gilt also, dass alle atomaren S-Terme auch S'-Terme sind und dass sich die Eigenschaft, S'-Term zu sein, über den Termaufbau vererbt. Damit gilt dann (ia).

Damit gilt aber auch, dass für alle S-Terme θ gilt: Wenn θ ein geschlossener S-Term ist, dann ist θ ein geschlossener S'-Term. Sei nämlich θ ein geschlossener S-Term. Dann ist θ ein S-Term, der keine S-Variable zum Teilterm hat. Nun gilt für alle ξ: ξ ist genau dann eine S-Variable, wenn ξ eine S'-Variable ist. Also ist θ ein S-Term, der keine S'-Variable zum Teilterm hat. Mit (ia) ergibt sich dann: θ ist ein S'-Term, der kein S'-Variable zum Teilterm hat, und mithin ist θ ein geschlossener S'-Term.

Zu (ii): Sei $\Pi\omega$ ein S-Quantor. Dann ist Π ein S-Quantifikator und ω eine S-Variable. Dann ist Π ein S'-Quantifikator und ω eine S'-Variable und damit $\Pi\omega$ ein S'-Quantor.

Zu (iii): Um (iii) zu zeigen wird zunächst unter Rückgriff auf (i) und (ii) durch Induktion über den Formelaufbau gezeigt: (iiia) Wenn Γ eine S-Formel ist, dann ist Γ eine S'-Formel. Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft E für alle Formeln einer LE-Sprache S gilt, reicht es nämlich zu zeigen, dass E für alle atomaren S-Formeln gilt und sich über den Formelaufbau weiter vererbt. Es sind nämlich alle Formeln einer LE-Sprache S entweder atomare Formeln oder durch Anwendung von Junktoren und Quantoren auf andere – und letztendlich auf atomare Formeln – aufgebaute molekulare Formeln.

Ist nun S eine LE-Sprache und gilt eine Eigenschaft E (a) für alle atomaren S-Formeln und gilt: (b) Wenn S-Formeln $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ die Eigenschaft E haben und ψ ein n-stelliger S-Junktor ist, dann hat auch $\psi(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ die Eigenschaft E, und (c) wenn eine S-Formel Δ die Eigenschaft E hat und $\Pi\omega$ ein S-Quantor ist, dann hat auch $\Pi\omega\Delta$ die Eigenschaft E, dann gilt daher E für alle S-Formeln.

Zunächst ist also zu zeigen, dass alle atomaren S-Formeln auch S'-Formeln sind. Sei dazu Γ eine atomare S-Formel. Dann gibt es einen n-stelligen S-Prädikator Φ und S-Terme $\theta_1, \ldots, \theta_n$, so dass Γ das Ergebnis der Anwendung von Φ auf $\theta_1, \ldots, \theta_n$ ist. Seien Φ und $\theta_1, \ldots, \theta_n$ so. Dann ist Φ ein n-stelliger S'-Prädikator und nach (i) sind $\theta_1, \ldots, \theta_n$ S'-Terme und damit ist dann Γ auch eine atomare S'-Formel und damit eine S'-Formel. Also gilt für alle atomaren S-Formeln, dass sie S'-Formeln sind.

Sodann ist zu zeigen, dass die Eigenschaft, eine S'-Formel zu sein, sich über den Formelaufbau der S-Formeln vererbt. Zunächst für junktorale Formeln: Angenommen die S-Formeln $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sind auch S'-Formeln. Sei nun ψ ein n-stelliger S-Junktor. Dann ist ψ auch ein n-stelliger S'-Junktor und $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sind nach Voraussetzung S'-Formeln und damit ist auch $\psi(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ eine S'-Formel.

Nun bleiben noch die quantoralen Formeln: Angenommen Δ ist eine S-Formel, die auch eine S'-Formel ist. Sei nun $\Pi\omega$ ein S-Quantor. Dann ist mit (ii) $\Pi\omega$ ein S'-Quantor und nach Voraussetzung Δ eine S'-Formel und somit $\Pi\omega\Delta$ eine S'-Formel. Es gilt also, dass alle atomaren S-Formeln auch S'-Formeln sind und dass sich die Eigenschaft, eine S'-Formel zu sein, über den Formelaufbau vererbt. Damit gilt dann (iiia).

Daraus ergibt sich aber auch, dass für alle S-Formeln Γ gilt: Wenn Γ eine geschlossene S-Formel ist, dann ist Γ eine geschlossene S'-Formel. Sei nämlich Γ eine geschlossene S-Formel. Dann ist Γ eine S-Formel, in der keine S-Variable frei ist. Nun gilt für alle ξ: ξ ist genau dann eine S-Variable, wenn ξ eine S'-Variable ist. Also ist Γ eine S-Formel, in der keine S'-Variable frei ist. Mit (iiia) ergibt sich dann: Γ ist eine S'-Formel, in der keine S'-Variable frei ist, und mithin ist Γ eine geschlossene S'-Formel.

Zu (iv): Sei $\Xi\Gamma$ ein S-Satz. Dann ist Ξ ein S-Performator und Γ eine S-Aussage Dann ist Ξ ein S'-Performator und mit (iii) ist Γ eine S'-Aussage und damit $\Xi\Gamma$ ein S'-Satz. ■

Das nächste Theorem besagt, dass die Erweiterungsbeziehung für LE-Sprachen reflexiv sowie transitiv und antisymmetrisch ist (↑ 2.4):*

* Zu Eigenschaften von Relationen (bzw. Prädikatoren) siehe auch Kap. 6 der Denkwerkzeuge.

(2-6) **Theorem.** *Strukturelle Eigenschaften der Erweiterung*

(i) Wenn S eine LE-Sprache ist, dann ist S eine Erweiterung von S.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S' ist und S' eine Erweiterung von S ist, dann ist S^* eine Erweiterung von S.

(iii) Wenn S' eine Erweiterung von S ist und S eine Erweiterung von S' ist, dann ist S' gleich S.

Beweisansatz: *Zu* (i): Sei S eine LE-Sprache. Dann ist S eine LE-Sprache und es gilt:

> Wenn τ ein (*n*-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (*n*-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K,
> Wenn R eine Redehandlungsregel von S ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S,
> Wenn Γ ein Axiom von S ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S,
> Wenn Γ eine Definition von S ist, dann ist Γ auch eine Definition von S.

Damit ist S dann nach Definition (2-3) eine Erweiterung von S.

Zu (ii): Sei S* eine Erweiterung von S' und S' eine Erweiterung von S. Dann sind S*, S' und S LE-Sprachen und es gilt:

> Wenn τ ein (*n*-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (*n*-stelliger) S*-Ausdruck der atomaren Kategorie K,
> Wenn R eine Redehandlungsregel von S' ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S*,
> Wenn Γ ein Axiom von S' ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S*,
> Wenn Γ eine Definition von S' ist, dann ist Γ auch eine Definition von S*.

und

> Wenn τ ein (*n*-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (*n*-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K,
> Wenn R eine Redehandlungsregel von S ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S',
> Wenn Γ ein Axiom von S ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S',
> Wenn Γ eine Definition von S ist, dann ist Γ auch eine Definition von S',

Daraus ergibt sich, dass S* und S LE-Sprachen sind und dass gilt:

> Wenn τ ein (*n*-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (*n*-stelliger) S*-Ausdruck der atomaren Kategorie K,
> Wenn R eine Redehandlungsregel von S ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S*,
> Wenn Γ ein Axiom von S ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S*,
> Wenn Γ eine Definition von S ist, dann ist Γ auch eine Definition von S*.

Damit gilt nach Definition (2-3), dass S* eine Erweiterung von S ist.

Zu (iii): Sei S' eine Erweiterung von S und S eine Erweiterung von S'. Dann ergibt sich mit Definition (2-3):

> Wenn τ ein (n-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (n-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K,
> Wenn R eine Redehandlungsregel von S ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S',
> Wenn Γ ein Axiom von S ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S',
> Wenn Γ eine Definition von S ist, dann ist Γ auch eine Definition von S'

und

> Wenn τ ein (n-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (n-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K,
> Wenn R eine Redehandlungsregel von S' ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S,
> Wenn Γ ein Axiom von S' ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S,
> Wenn Γ eine Definition von S' ist, dann ist Γ auch eine Definition von S.

Daraus ergibt sich:

> τ ist genau dann ein (n-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K, wenn τ ein (n-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist,
> R ist genau dann eine Redehandlungsregel von S, wenn R eine Redehandlungsregel von S' ist,
> Γ ist genau dann ein Axiom von S, wenn Γ ein Axiom von S' ist,
> Γ ist genau dann eine Definition von S, wenn Γ eine Definition von S' ist.

Damit gilt dann zunächst, dass das Inventar von S gleich dem Inventar von S' ist, die Performatorik von S gleich der Performatorik von S', die Menge der Axiome von S gleich der Menge der Axiome von S' und die Menge der Definitionen von S gleich der Menge der Definitionen von S' ist. Sodann ergibt sich aus der Annahme und Theorem (2-5) :

> Jeder S-Term ist auch ein S'-Term,
> Jeder S-Quantor ist auch ein S'-Quantor,
> Jede S-Formel ist auch eine S'-Formel und
> Jeder S-Satz ist auch ein S'-Satz.

und

> Jeder S'-Term ist auch ein S-Term,
> Jeder S'-Quantor ist auch ein S-Quantor,
> Jede S'-Formel ist auch eine S-Formel und
> Jeder S'-Satz ist auch ein S-Satz.

Daraus ergibt sich:

θ ist genau dann ein S-Term, wenn θ ein S'-Term ist,
$\Pi\omega$ ist genau dann ein S-Quantor, wenn $\Pi\omega$ ein S'-Quantor ist,
Δ ist genau dann eine S-Formel, wenn Δ eine S'-Formel ist,
Σ ist genau dann ein S-Satz, wenn Σ ein S'-Satz ist.

Damit ist dann auch die Syntax von S gleich der Syntax von S'. Nach den Bemerkungen am Anfang des Kapitels ist dann insgesamt S' gleich S. ■

Das folgende Theorem besagt, dass L in dem Sinne die ›kleinste‹ LE-Sprache ist, als (i) L eine LE-Sprache ist und (ii) für jede LE-Sprache S gilt, dass S eine Erweiterung von L ist:

(2-7) **Theorem.** *L ist die ›kleinste‹ LE-Sprache*

(i) L ist eine LE-Sprache,
(ii) Wenn S eine LE-Sprache ist, dann ist S eine Erweiterung von L.

Beweisansatz: *Zu* (i): L ist eine performatorik-konsistente Sprache erster Stufe, für die die Klauseln (i) bis (iii) von Definition (2-1) erfüllt sind.

Zu (ii): Sei S eine LE-Sprache. Dann gilt mit (i), dass L eine LE-Sprache ist und aus Definition (2-1) ergibt sich, dass

Wenn τ ein (n-stelliger) L-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (n-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K,
Wenn R eine Redehandlungsregel von L ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S.

Sodann ergibt sich daraus, dass

$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom von L}\} = \emptyset$ und $\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Definition von L}\} = \emptyset$,

dass

Wenn Γ ein Axiom von L ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S,
Wenn Γ eine Definition von L ist, dann ist Γ auch eine Definition von S.

Damit ist S nach Definition (2-3) insgesamt eine Erweiterung von L. ■

Die nächste Festlegung betrifft eine ausschließliche Erweiterung des Inventars um atomare Ausdrücke:

(2-8) **Definition.** *Inventarerweiterung*

S' ist eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (*der Kategorie K_1 und der Stelligkeit* s_1) …, μ_n (*der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n*)
gdw
$n \geq 1$ und S und S' sind LE-Sprachen und

(i) μ_1 ist atomarer S'-Ausdruck (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n ist atomarer S'-Ausdruck (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n),
(ii) Für alle τ, (r,) K^* gilt: τ ist genau dann ein (r-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K^*, wenn τ ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener (r-stelliger) S'-Ausdruck der

atomaren Kategorie K^* ist,

(iii) Für alle R gilt: R ist genau dann eine Redehandlungsregel von S, wenn R eine Redehandlungsregel von S' ist,

(iv) Für alle Γ gilt: Γ ist genau dann ein Axiom von S, wenn Γ ein Axiom von S' ist,

(v) Für alle Γ gilt: Γ ist genau dann eine Definition von S, wenn Γ eine Definition von S' ist.

Man beachte, dass die Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$, um die das Inventar erweitert wird, weder Parameter noch Variablen sein können, da für zwei LE-Sprachen S und S' die Menge der S-Parameter gleich PAR gleich der Menge der S'-Parameter und die Menge der S-Variablen gleich VAR gleich der Menge der S'-Variablen ist. Inventarerweiterungen sind immer dann notwendig, wenn neue Redemittel bereitgestellt werden sollen: Bevor die Verwendung von Ausdrücken in einer Sprache reguliert werden kann, müssen diese zunächst als Ausdrücke dieser Sprache zur Verfügung stehen.

Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, werden im Folgenden bei der Formulierung von Theoremen und in Beweisansätzen oft die Stellen für Kategorien und Stelligkeit unterdrückt, also beispielsweise

die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$

statt

die atomaren Ausdrücke μ_1 der Kategorie K_1 und der Stelligkeit $s_1, \ldots, \mu_n$ der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n.

Außerdem werden für den Fall, dass $n = 1$, die Indizes weggelassen. Analoges gilt für spätere Definitionen.

Wie bei der allgemeinen Erweiterung (vgl. Theorem (2-5)) ergeben sich auch bei der Inventarerweiterung aus den Festlegungen für die atomaren Ausdrücke entsprechende Verhältnisse für die syntaktischen Kategorien. Das entsprechende Theorem wird zur Vereinfachung späterer Beweise etwas allgemeiner formuliert:

(2-9) **Theorem.** *Inventarerweiterung und Syntax*

Wenn S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und wenn S^* eine LE-Sprache ist, deren Inventar gleich dem Inventar von S' ist, dann gilt für alle τ, dass

(i) τ genau dann ein (geschlossener) S-Term ist, wenn τ ein (geschlossener) S^*-Term ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat,

(ii) τ genau dann ein S-Quantor ist, wenn τ ein S^*-Quantor ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat,

(iii) τ genau dann eine (geschlossene) S-Formel ist, wenn τ eine (geschlossene) S^*-Formel ist, die weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat, und

(iv) τ genau dann ein S-Satz ist, wenn τ ein S*-Satz ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat.

Beweisansatz: Sei S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Dann gilt nach Definition (2-8), dass S und S' LE-Sprachen sind und es gilt: τ ist genau dann ein (r-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K, wenn τ ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener (r-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist.

Sei nun S* eine LE-Sprache, deren Inventar gleich dem Inventar von S' ist. Dann gilt: τ ist genau dann ein (r-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K, wenn τ ein (r-stelliger) S*-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist. Damit gilt aber insgesamt: τ ist genau dann ein (r-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K, wenn τ ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener (r-stelliger) S*-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist.

Zu (i): Zunächst zeigt man, dass

(iaa) Wenn θ ein S-Term ist, dann ist θ ein S*-Term, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat

und dass

(iab) Wenn θ ein S*-Term ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat, dann ist θ ein S-Term.

Dabei sind (iaa) und (iab) wieder durch Induktion über den Termaufbau zu zeigen (siehe Beweisansatz zu Klausel (i) von Theorem (2-5)). Zuerst zeigt man (iaa): Wenn θ ein S-Term ist, dann ist θ ein S*-Term, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat.

Zunächst gilt, dass wenn θ ein atomarer S-Term ist, θ ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener atomarer S*-Term ist. Da die Teilausdruckschaft für atomare Terme mit der Identität zusammenfällt, ergibt sich, dass wenn θ ein atomarer S-Term ist, θ ein atomarer S*-Term ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat.

Angenommen die S-Terme $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sind S*-Terme, die weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck haben. Sei nun φ ein n-stelliger S-Funktor. Dann ist φ auch ein n-stelliger S*-Funktor, der von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschieden ist und damit weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat, und $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sind nach Voraussetzung S*-Terme, die weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck haben. Damit ist aber auch $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ ein S*-Term, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat.

Sodann zeigt man (iab): Wenn θ ein S*-Term ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat, dann ist θ ein S-Term. Zunächst gilt, dass wenn θ ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener atomarer S*-Term ist, θ ein atomarer S-Term ist. Damit ergibt sich wiederum, dass wenn

θ ein atomarer S*-Term ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat, θ ein atomarer S-Term ist.

Angenommen für die S*-Terme $\theta_1, \ldots, \theta_n$ gilt: Wenn $\theta_1, \ldots, \theta_n$ weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck haben, dann sind $\theta_1, \ldots, \theta_n$ S-Terme. Sei nun φ ein n-stelliger S*-Funktor und sei $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ ein S*-Term, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat. Dann haben weder φ noch θ_1 noch … noch θ_n μ_1 oder … oder μ_n zum Teilausdruck, denn sonst hätte $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ μ_1 oder … oder μ_n zum Teilausdruck.

Dann ist φ von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschieden und damit auch ein n-stelliger S-Funktor. Sodann haben $\theta_1, \ldots, \theta_n$ weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck und sind damit nach Voraussetzung S-Terme. Damit ist φ ein n-stelliger S-Funktor und $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sind S-Terme und damit ist auch $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ ein S-Term.

Somit gilt insgesamt:

> (ia) θ ist genau dann ein S-Term, wenn θ ein S*-Term ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat.

Daraus ergibt sich dann wiederum:

> θ ist genau dann ein geschlossener S-Term, wenn θ ein geschlossener S*-Term ist, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat.

Sei nämlich θ ein geschlossener S-Term. Dann ist θ ein S-Term, der keine S-Variable zum Teilterm hat. Nun gilt für alle ξ: ξ ist genau dann eine S-Variable, wenn ξ eine S*-Variable ist. Also ist θ ein S-Term, der keine S*-Variable zum Teilterm hat. Mit (ia) ergibt sich dann: θ ist ein S*-Term, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat, und θ ist ein S*-Term, der kein S*-Variable zum Teilterm hat, und mithin ist θ ein geschlossener S*-Term, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat.

Sei nun θ ein geschlossener S*-Term, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat. Dann ist θ ein S*-Term, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat und der keine S*- und damit keine S-Variable zum Teilterm hat. Mit (ia) ergibt sich dann: θ ist ein S-Term, der kein S-Variable zum Teilterm hat, und mithin ist θ ein geschlossener S-Term.

Zu (ii): Sei $\Pi\omega$ ein S-Quantor. Dann ist Π ein S-Quantifikator und ω eine S-Variable. Dann ist Π ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener S*-Quantifikator und ω eine von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedene S*-Variable und damit $\Pi\omega$ ein S*-Quantor, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat. Sei nun $\Pi\omega$ ein S*-Quantor, der weder μ_1 noch … noch μ_n zum Teilausdruck hat. Dann ist Π ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener S*-Quantifikator und ω eine von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedene S*-Variable und damit Π ein S-Quantifikator und ω eine S-Variable und somit $\Pi\omega$ ein S-Quantor.

Zu (iii) *und* (iv): (iii) zeigt man – unter Rückgriff auf (i) und (ii) – durch Induktion über den Formelaufbau (siehe Beweisansatz zu Klausel (iii) von Theorem (2-5)) und (iv) – unter Rückgriff auf (iii) – analog zu (ii). ■

Im Gegensatz zur Erweiterungsbeziehung ist die Beziehung der Inventarerweiterung nicht reflexiv, sondern bezüglich der ersten und zweiten Stelle irreflexiv. Sodann ist die Beziehung der Inventarerweiterung bezüglich der ersten und zweiten Stelle transitiv, womit sich auch ergibt, dass sie bezüglich der ersten und zweiten Stelle asymmetrisch ist:

(2-10) **Theorem.** *Strukturelle Eigenschaften der Inventarerweiterung*

(i) Es gibt kein S, so dass es $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt und S eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist.

(ii) Wenn S^* eine Inventarerweiterung von S' um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ ist, dann ist S^* eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

(iii) Wenn S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist S keine Inventarerweiterung von S' um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Beweisansatz: *Zu* (i): Angenommen es gäbe ein S, so dass es $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt und S eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist. Seien S und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ so. Dann gilt nach Definition (2-8), dass $\mu_1, \ldots, \mu_n$ atomare Ausdrücke von S sind und es gilt: τ ist genau dann ein atomarer S-Ausdruck, wenn τ ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener atomarer S-Ausdruck ist. Damit ergibt sich aber, dass $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschieden von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sind, was im Widerspruch zur Selbstidentität steht.

Zu (ii): Sei S* eine Inventarerweiterung von S' um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$. Dann sind S, S' und S* LE-Sprachen und man überzeugt sich leicht, dass gilt:

> R ist genau dann eine Redehandlungsregel von S, wenn R eine Redehandlungsregel von S* ist,
> Γ ist genau dann ein Axiom von S, wenn Γ ein Axiom von S* ist,
> Γ ist genau dann eine Definition von S, wenn Γ eine Definition von S* ist.

Sodann gilt: $\nu_1, \ldots, \nu_r$ sind atomare S'-Ausdrücke und damit auch atomare S*-Ausdrücke und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sind atomare S*-Ausdrücke. Nun ist nur noch zu zeigen:

> τ ist genau dann ein atomarer S-Ausdruck, wenn τ ein von $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener S*-Ausdruck ist.

Sei dazu τ ein atomarer S-Ausdruck. Da S' eine Inventarerweiterung von S um $\nu_1, \ldots, \nu_r$ ist, ist τ dann ein von $\nu_1, \ldots, \nu_r$ verschiedener atomarer S'-Ausdruck. Da S* eine Inventarerweiterung von S' um $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, ist τ dann ein von $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener atomarer S*-Ausdruck.

Sei nun umgekehrt τ ein von $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener atomarer S*-Ausdruck. Dann ist τ ein von $\nu_1, \ldots, \nu_r$ verschiedener atomarer S'-Ausdruck. Dann ist τ ein atomarer S-Ausdruck.

Zu (iii): Ergibt sich aus (i) und (ii). ■

Das folgende Theorem gibt Auskunft über die Verhältnisse zwischen Inventarerweiterungen und Erweiterungen:

(2-11) **Theorem.** *Inventarerweiterung und Erweiterung*

(i) Wenn S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist S' eine Erweiterung von S.

(ii) Es gibt S, S', so dass S' eine Erweiterung von S ist und es keine $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt, so dass S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist.

Beweisansatz: Zu (i): Sei S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Dann ergibt sich aus Definition (2-8), dass S und S' LE-Sprachen sind und dass gilt:

τ ist genau dann ein (r-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K*, wenn τ ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener (r-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K* ist.

Daraus ergibt sich Klausel (i) von Definition (2-3) :

Wenn τ ein (n-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist, dann ist τ auch ein (n-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K.

Sodann ergibt sich mit Definition (2-8) :

R ist genau dann eine Redehandlungsregel von S, wenn R eine Redehandlungsregel von S' ist,
Γ ist genau dann ein Axiom von S, wenn Γ ein Axiom von S' ist,
Γ ist genau dann eine Definition von S, wenn Γ eine Definition von S' ist.

Daraus ergeben sich Klausel (ii) bis (iv) von Definition (2-3):

Wenn R eine Redehandlungsregel von S ist, dann ist R auch eine Redehandlungsregel von S',
Wenn Γ ein Axiom von S ist, dann ist Γ auch ein Axiom von S',
Wenn Γ eine Definition von S ist, dann ist Γ auch eine Definition von S'.

Damit ist S' dann insgesamt eine Erweiterung von S.

Zu (ii): Nach Theorem (2-7) ist L eine Erweiterung von L und nach Klausel (i) von Theorem (2-10) gibt es keine $\mu_1, \ldots, \mu_n$, so dass L eine Inventarerweiterung von L um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist. Also gibt es ein S', so dass S' eine Erweiterung von L ist und es keine $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt, so dass S' eine Inventarerweiterung von L um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist. Also gibt es S, S', so dass S' eine Erweiterung von S ist und es keine $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt, so dass S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist. ■

Das folgende Theorem besagt, dass es höchstens eine Inventarerweiterung einer Ausgangssprache um dieselben Ausdrücke gibt:

(2-12) **Theorem.** *Eindeutigkeitstheorem für Inventarerweiterungen*
Wenn S^* eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist S^* gleich S'.

Beweisansatz: Seien S* und S' Inventarerweiterungen von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Dann ergibt sich aus Definition (2-8), dass die Performatorik von S* gleich der Performatorik von S gleich der Performatorik von S' ist, dass die Menge der Axiome von S* gleich der Menge der Axiome von S gleich der Menge der Axiome von S' ist und dass die Menge der Definitionen von S* gleich der Menge der Definitionen von S gleich der Menge der Definitionen von S' ist. Sodann gilt:

τ ist ein atomarer S*-Ausdruck
gdw
τ ist gleich μ_1 oder … oder μ_n oder τ ist ein atomarer S-Ausdruck
gdw
τ ist ein atomarer S'-Ausdruck.

Damit gilt, dass die Inventare von S* und S' übereinstimmen. Die Identität der Syntax von S* mit der Identität der Syntax von S' zeigt man dann für beide Richtungen analog zum Vorgehen bei Theorem (2-5). Nach den Bemerkungen am Kapitelanfang ist damit S* gleich S'. ■

Theorem (2-12) rechtfertigt es, dann, wenn irgendeine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ existiert, von *der* Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ zu sprechen.

Die nächste Festlegung betrifft eine ausschließliche Erweiterung der Performatorik um Redehandlungsregeln:

(2-13) **Definition.** *Performatorikerweiterung*
S' ist eine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$
gdw
$n \geq 1$ und S und S' sind LE-Sprachen und
(i) Für alle τ, (r,) K gilt: τ ist genau dann ein (r-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K, wenn τ ein (r-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist,

(ii) $R_1, \ldots, R_n$ sind Redehandlungsregeln von S',

(iii) Für alle R^* gilt: R^* ist genau dann eine Redehandlungsregel von S, wenn R^* eine von $R_1, \ldots, R_n$ verschiedene Redehandlungsregel von S' ist,

(iv) Für alle Γ gilt: Γ ist genau dann ein Axiom von S, wenn Γ ein Axiom von S' ist,

(v) Für alle Γ gilt: Γ ist genau dann eine Definition von S, wenn Γ eine Definition von S' ist.

Im Gegensatz zur Erweiterungsbeziehung und ebenso wie die Beziehung der Inventarerweiterung ist die Beziehung der Performatorikerweiterung nicht reflexiv, sondern bezüglich der ersten und zweiten Stelle irreflexiv. Sodann ist die Beziehung der Performatorikerweiterung wie die der Inventarerweiterung bezüglich der ersten und zweiten Stelle transitiv, womit sich auch ergibt, dass sie ebenfalls bezüglich der ersten und zweiten Stelle asymmetrisch ist:

(2-14) **Theorem.** *Strukturelle Eigenschaften der Performatorikerweiterung*

(i) Es gibt kein S, so dass es $R_1, \ldots, R_n$ gibt und S eine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ ist.

(ii) Wenn S^* eine Performatorikerweiterung von S' um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ und S' eine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R'_1, \ldots, R'_r$ ist, dann ist S^* eine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R'_1, \ldots, R'_r$ und $R_1, \ldots, R_n$.

(iii) Wenn S' eine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ ist, dann ist S keine Performatorikerweiterung von S' um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$.

Beweisansatz: Der Beweis erfolgt analog zu dem von Theorem (2-10). ■

Das folgende Theorem besagt, dass sich Performatorikerweiterungen zu Erweiterungen verhalten, wie sich Inventarerweiterungen zu Erweiterungen verhalten:

(2-15) **Theorem.** *Performatorikerweiterung und Erweiterung*

(i) Wenn S' eine Performatorikerweiterung von S um die die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ ist, dann ist S' eine Erweiterung von S.

(ii) Es gibt S, S', so dass S' eine Erweiterung von S ist und es keine $R_1, \ldots, R_n$ gibt, so dass S' eine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ ist.

Beweisansatz: Der Beweis erfolgt analog zu dem von Theorem (2-11). ■

Das folgende Theorem besagt, dass es höchstens eine Performatorikerweiterung einer Ausgangssprache um dieselben Redehandlungsregeln gibt:

(2-16) **Theorem.** *Eindeutigkeits-Theorem für Performatorikerweiterungen*

Wenn S^* eine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ ist und S' eine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ ist, dann ist S^* gleich S'.

Beweisansatz: Der Beweis erfolgt analog zu dem von Theorem (2-12). ■

Theorem (2-16) rechtfertigt es, dann, wenn irgendeine Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ existiert, von *der* Performatorikerweiterung von S um die Redehandlungsregeln $R_1, \ldots, R_n$ zu sprechen.

2.2 ADS-Sprachen und Erweiterungen um Axiome und Definitionen

2.2.1 ADS-Sprachen

Nun können die Sprachen L^{+} und L*, die als Ausgangssprachen für den definitorischen und axiomatischen Sprachaufbau dienen werden, angegeben werden. L^{+} soll eine Erweiterung von L sein, in der das axiomatische und definitorische Setzen von Aussagen sowie die Anziehung der Axiome und Definitionen in Beweisen möglich ist. In L* soll darüber hinaus auch die Anziehung bereits bewiesener Aussagen und die Anwendung bestimmter zulässiger Folgerungsregeln möglich sein. Die Sprache L lässt sich nur durch Inventar- und Performatorikerweiterungen erweitern. Um Erweiterungen durch axiomatische oder definitorische

Setzungen vornehmen zu können, sind eben allererst entsprechende Redehandlungsmöglichkeiten einzurichten.

Dazu ist zunächst das Inventar von L um die Performatoren 'AXIOM___' für das axiomatische Setzen, 'DEF___' für das definitorische Setzen und – u.a. weil die gesetzten Axiome und Definitionen eben gerade in Beweisen verwendet werden sollen – den Performator 'Da___' für Anziehungen zu erweitern. Das folgende Theorem besagt nun, dass es wenigstens eine Inventarerweiterung von L um die Performatoren 'AXIOM___', 'DEF___' und 'Da___' gibt:

(2-17) **Theorem.** *Existenz einer Inventarerweiterung von L um* 'AXIOM___', 'DEF___' *und* 'Da___'
Es gibt ein S, so dass S eine Inventarerweiterung von L um die Performatoren 'AXIOM___', 'DEF___' und 'Da___' ist.

Aus diesem Theorem und Theorem (2-12) ergibt sich, dass es genau eine Inventarerweiterung von L um die Performatoren 'AXIOM___', 'DEF___' und 'Da___' gibt. Damit ist die folgende Definition der (metasprachlichen) Individuenkonstanten 'L^{ADD}' korrekt (↑ 6):

(2-18) **Definition.** *L^{ADD}*
$L^{ADD} = S$
gdw
S ist eine Inventarerweiterung von L um die Performatoren 'AXIOM___', 'DEF___' und 'Da___'.

Nun können die Redehandlungen des axiomatischen und definitorischen Setzens sowie des Anziehens eingerichtet werden, indem die Performatorik von L^{ADD} um entsprechende Redehandlungsregeln erweitert wird. Die Verwendungsregulierung der neuen Performatoren erfolgt damit wie die aller Performatoren konstruktionssprachlich durch das Setzen von Redehandlungsregeln. In den folgenden Regelformulierungen stehen 'S' und 'S'' stets für Erweiterungen von L^{ADD}.

Die Verwendung des Performators 'AXIOM___' wird durch die Regeln AS1 und AS2 reguliert:

(**AS1**) *Erste Regel für das axiomatische Setzen*
Wenn A eine parameterfreie Aussage von S ist und wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\} \cup \{A\}$ nicht oberflächeninkonsistent ist, dann darf man A in S axiomatisch setzen.

(**AS2**) *Zweite Regel für das axiomatische Setzen*

Wenn S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist, und wenn

a) A eine parameterfreie Aussage von S' ist und

b) $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\} \cup \{A\}$ nicht oberflächeninkonsistent ist,

dann darf man A in S' axiomatisch setzen.

Man beachte, dass die Forderung, dass die als Axiom zu setzende Aussage nicht schon offensichtlich zu Widersprüchen führt, nicht ausreicht, um die Konsistenz der jeweiligen Erweiterung sicherzustellen. Gefordert ist hier ja nur, dass die Hinzufügung des Axioms zur Menge der bereits axiomatisch oder definitorisch gesetzten Aussagen nicht zu einer Menge führt, die oberflächeninkonsistent ist, die also eine Kontradiktion oder eine Aussage und ihre Negation enthält (↑ D: 5.1.3). Die Inkonsistenz kann natürlich trotzdem vorhanden sein, sie kann sogar nur ›einige Folgerungsschritte entfernt liegen‹. Gemeinhin wird man wenn möglich versuchen, nachzuweisen, dass die als Axiom zu setzende Aussage mit der Menge der bereits axiomatisch und definitorisch gesetzten Aussagen verträglich ist. Stellt man umgekehrt fest, dass dies nicht gegeben ist, muss die Sprache als inkonsistent verabschiedet bzw. – etwa durch Streichung des betreffenden Axioms – ›repariert‹ werden. Konsistenz ist für LE-Sprachen eine Voraussetzung ihrer erfolgreichen Benutzung. Allerdings sind Konsistenznachweise oft nicht einfach und es ist nicht möglich, die Einhaltung der Konsistenzforderung in derselben Weise verfahrensgeleitet zu prüfen, wie etwa das (Nicht-)Bestehen von Oberflächeninkonsistenz bei endlichen Aussagenmengen oder die Einhaltung der logischen Regeln in einem Beweis(versuch). Analoge Bemerkungen betreffen die – zumindest für die ›kanonische‹ Repräsentation von Sprachen – oftmals erhobene Forderung, dass die als Axiom gesetzte Aussage nicht bereits aus den Axiomen folgt. Diese Forderung wird zudem in der Praxis oft bewusst aus didaktischen oder Handlichkeitsüberlegungen außer Acht gelassen. Für die metatheoretische Überschaubarkeit bringt sie jedoch entscheidende Vorteile.

Die Verwendung des Performators 'DEF___' wird durch die Regel DP reguliert:

(**DP**) *Regel für die (unbedingte) Definition von Prädikatoren*

Wenn:

a) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sind paarweise verschiedene Variablen von S ($n \geq 1$),

b) S' ist eine Inventarerweiterung von S um den n-stelligen Prädikator Φ,

c) Δ ist eine Formel von S, für die gilt:

ca) in Δ sind höchstens $\xi_1, \ldots, \xi_n$ frei,

cb) in Δ ist kein S-Parameter Teilterm,

d) Γ ist eine Aussage der Form:

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta),$$

dann darf man Γ in S' definitorisch setzen.

Für die unbedingte Definition von Prädikatoren gemäß DP gilt also: Die *Definitionsaussage* bzw. *Definition* hat die Gestalt

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta)$$

D.h., die Definition hat die Gestalt einer (mehrfach) universalquantifizierten Bisubjunktion. Die Bisubjunktion ist die *Definitionsformel*. Das linke Bisubjunkt ist die *Definiendumformel* mit dem *Definiendum* (dem zu definierenden Ausdruck) als Hauptoperator; das rechte Bisubjunkt ist das *Definiens* (der definierende Ausdruck) bzw. die *Definiensformel*. Der *Definitionssatz* ist das Ergebnis der Anwendung des *Definitionsperformators* 'DEF___' auf die Definitionsaussage/die Definition. Man betrachte etwa die später in V gesetzte Definition von 'männlich(..)' (↑ 3.2). Der Definitionssatz,

[3.5] DEF $\bigwedge x$(männlich(x) ↔ ¬weiblich(x)),

mit dessen Äußerung die Setzung vollzogen wird, ist das Ergebnis der Anwendung des Definitionsperformators 'DEF___' auf die Definition bzw. Definitionsaussage

$[3.5]_A$ $\bigwedge x$(männlich(x) ↔ ¬weiblich(x)).

Die Definitionsaussage ist eine universalquantifizierte Bisubjunktion. Die Bisubjunktion

männlich(x) ↔ ¬weiblich(x)

ist die Definitionsformel. Das linke Bisubjunkt der Definitionsformel, 'männlich(x)', ist die Definiendumformel, eine atomare Formel, deren Hauptoperator das Definiendum, der einstellige Prädikator 'männlich(..)', ist. Das rechte Bisubjunkt der Definitionsformel, '¬weiblich(x)', ist das Definiens bzw. die Definiensformel. Man beachte, dass sich aus der Forderung, dass Δ eine $\mathcal{S}$-Formel ist, insbesondere ergibt, dass alle atomaren Teilausdrücke von Δ atomare $\mathcal{S}$-Ausdrücke sind. Sind umgekehrt alle atomaren Teilausdrücke der Formel Δ atomare $\mathcal{S}$-Ausdrücke, dann ist Δ eine $\mathcal{S}$-Formel.

Die Verwendung des Performators 'Da___' wird zunächst nur durch die Regel ANZ1 reguliert, die die Verwendung der gesetzten Axiome und Definitionen als Gründe erlaubt:

(**ANZ1**) *Regel für die Anziehung axiomatisch oder definitorisch gesetzter Aussagen*
Wenn eine parameterfreie Aussage Γ in $\mathcal{S}$ axiomatisch oder definitorisch gesetzt ist, dann darf man Γ in $\mathcal{S}$ anziehen.

Angezogene Aussagen bleiben erinnerlich immer verfügbar. Das folgende Theorem bereitet die Definition der (metasprachlichen) Individuenkonstante 'L^+' vor:

(2-19) **Theorem.** *Existenz einer Performatorikerweiterung von L^{ADD} um* AS1, AS2, DP *und* ANZ1
Es gibt ein $\mathcal{S}$, so dass $\mathcal{S}$ eine Performatorikerweiterung von L^{ADD} um die Redehandlungsregeln AS1, AS2, DP und ANZ1 ist.

Aus diesem Theorem und Theorem (2-16) ergibt sich, dass es genau eine Performatorikerweiterung von L^{ADD} um die Redehandlungsregeln AS1, AS2, DP und ANZ1 gibt. Damit ist wiederum die folgende Definition der (metasprachlichen) Individuenkonstanten 'L^+' korrekt:*

(2-20) **Definition.** *L^+*
$L^+ = \mathcal{S}$
gdw
$\mathcal{S}$ ist eine Performatorikerweiterung von L^{ADD} um die Redehandlungsregeln AS1, AS2, DP und ANZ1.

L^+ erlaubt bereits alles, was man benötigt, um eine Standardsprache erster Stufe durch Inventarerweiterungen und anschließende Setzung von Axiomen und Definitionen aufzubauen. Allerdings ist L^+ für die alltägliche Beweispraxis insofern etwas unhandlich, als man gerne bereits bewiesene Aussagen nicht noch einmal gewinnen, sondern anziehen möchte. Dies wird über die Hinzufügung folgender Regel ermöglich:

(**ANZ2**) *Regel für die Anziehung bereits bewiesener Aussagen*
Wenn eine parameterfreie Aussage Γ in $\mathcal{S}$ bereits bewiesen wurde, dann darf man Γ in $\mathcal{S}$ anziehen.

Eine Aussage ist in einer Sprache $\mathcal{S}$ bereits bewiesen, wenn in $\mathcal{S}$ ein Beweis für diese Aussage vorgelegt wurde. ANZ2 ist hier so ›auszulegen‹, dass auch die in Kap. 4 der Denkwerkzeuge (einschließlich der Übungen) bewiesenen L-Aussagen, in deren Beweise keine Anziehungen eingegangen sind, im Folgenden in allen LE-Sprachen als bewiesen gelten. Ein (immer: korrekter) Beweis, der keine Anziehungen enthält, ist ein Beweis für eine logisch-wahre Aussage. Analoges gilt für Beweisschemata und Aussagenschemata. Dass keine Anziehungen nötig sind, um die Aussage (resp. das Aussagenschema) frei von Abhängigkeiten zu gewinnen, zeigt, dass diese Aussage (resp. dieses Aussagenschema) allein unter Rückgriff auf logische Regeln etabliert werden kann und damit logisch-wahr ist. Die in Kap. 4 der Denkwerkzeuge durch anziehungsfreie Beweise bewiesenen L-Aussagen sind damit logisch-wahr – sie können alleine unter Rückgriff auf die in jeder LE-Sprache verfügbaren logischen Grundregeln bewiesen werden. Nun wurden in Kap. 4 der Denkwerkzeuge allerdings vornehmlich logisch-wahre *Aussagenschemata* bewiesen, also Aussagenschemata, deren Instanzen sämtlich logisch-wahr sind. Die Instanzen dieser bereits bewiesenen Schemata möchte man nun in der alltäg-

* Siehe dazu wiederum die Regel DIB in Kap. 6.

lichen Argumentations- und Beweispraxis gerne ebenfalls ausnutzen, ohne die entsprechenden Instanzen jeweils ›aufs Neue‹ zu gewinnen. Viele der bewiesenen logisch-wahren Aussagenschemata sind schematischen Subjunktionen. Hier wurde jeweils gezeigt, dass die Sukzedentia allein im Ausgang von den jeweiligen Antezedentia zu gewinnen sind. Auch hier möchte man den Übergang von einer Antezedensinstanz zu einer Sukzedensinstanz vollziehen, ohne den schon beschrittenen Weg noch einmal abzuschreiten. Analoge Bemerkungen betreffen die Übergänge zwischen den Bisubjunktinstanzen bereits bewiesener logisch-wahrer Bisubjunktionsschemata. Um die in Kap. 4 der Denkwerkzeuge bereits bewiesenen logisch-wahren Aussagenschemata im Allgemeinen und schematischen Subjunktionen und Bisubjunktionen im Besonderen für die Zwecke des praxisnahen Beweisens auszunutzen, lässt sich die Performatorik von L^+ um zulässige Folgerungsregeln (↑ D: 5.2.2) erweitern:

(**ZR1**) *Zulässige Folgerungsregel zur Folgerung der Instanzen logisch-wahrer Aussagenschemata*

Wenn eine Aussage Γ Instanz eines Aussagenschemas ist, für das in Kap. 4 der Denkwerkzeuge ein anziehungsfreier schematischer Beweis vorgelegt wurde bzw. in einer Übungsaufgabe vorzulegen war, dann darf man Γ folgern.

(**ZR2**) *Zulässige Folgerungsregel zur Folgerung von Sukzedensinstanzen logisch-wahrer Subjunktionsschemata im Ausgang von den entsprechenden Antezdensinstanzen*

Wenn die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B Instanz eines Aussagenschemas ist, für das in Kap. 4 der Denkwerkzeuge ein anziehungsfreier schematischer Beweis vorgelegt wurde bzw. in einer Übungsaufgabe vorzulegen war, und man A gewonnen hat, dann darf man B folgern.

(**ZR3)** *Zulässige Folgerungsregel zur Folgerung von Bisubjunktinstanzen logisch-wahrer Bisubjunktionsschemata im Ausgang von entsprechenden Bisubjunktinstanzen*

Wenn die Bisubjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B Instanz eines Aussagenschemas ist, für das in Kap. 4 der Denkwerkzeuge ein anziehungsfreier schematischer Beweis vorgelegt wurde bzw. in einer Übungsaufgabe vorzulegen war, und man A (resp. B) gewonnen hat, dann darf man B (resp. A) folgern.

Eine nach einer zulässigen Regel gefolgerte Aussage wird damit verfügbar gemacht. Eine Tilgung von Annahmen findet dabei dann und nur dann statt, wenn der Übergang gleichzeitig nach einer tilgenden Regel, also SE, NE oder PB, korrekt ist. ANZ2 und die zulässigen Folgerungsregeln sind ähnlich motiviert, nämlich durch den Wunsch, bereits etablierte Zusammenhänge nicht von Neuem zu etablieren, sondern direkt auszunutzen. Allerdings bestehen zwei Unterschiede, die hervorzuheben sind. Der erste Unterschied ist ›grundsätzlicher‹ Natur: ANZ2 erlaubt die Ausnutzung von Beweisleistungen, die bereits *in* der jeweiligen Sprache erbracht wurden. Dagegen stellen die zulässigen Regeln eine Erweiterung der Performatorik dar, die unter Rückgriff auf bereits gezeigte logische Zusammenhänge zu rechtfertigen ist. Die zulässigen Regeln vereinfachen die alltägliche Beweispraxis und sie sind, wie durch die in Kap. 4 der Denkwerkzeuge erstellten schematischen Beweise vorgeführt, durch die bedeutungsetablierenden Grundregeln abgedeckt. Alle mit Hilfe der zulässigen Regeln vollzogenen Übergänge lassen sich – ggf. mit zusätzlichen Schritten – auch unter Anwendung der Grundregeln erreichen – genau darin besteht die Zulässigkeit der zulässigen Regeln. Der zweite hervorzuhebende Unterschied betrifft die Parameterfreiheit der betroffenen Aussagen: Angezogene Aussagen müssen parameterfrei sein, während dies für die mit Hilfe zulässiger Regeln gefolgerten Aussagen nicht zutrifft. Hintergrund ist die Überlegung, dass die Konklusion eines Beweises immer aus den angezogenen Aussagen folgen soll, was allgemein nur sichergestellt ist, wenn die angezogenen Aussagen keine Parameter enthalten. Warum? Für die zulässigen Regeln ist eine solche Beschränkung nicht vonnöten, da die mit ihrer Hilfe gefolgerten Aussagen ja gerade allein unter Rückgriff auf die Grundregeln gewonnen werden könnten. Im Regelkommentar ist bei Anziehungen die jeweilige Regel zu notieren und mit einem passenden Kürzel auf die einschlägige Setzung bzw. den einschlägigen Beweis zu verweisen. Für Folgerungen nach zulässigen Regeln sind die jeweilige Regel und die Nummer des jeweiligen Beweisschemas bzw. der Übungsaufgabe in Kap. 4 der Denkwerkzeuge zu notieren.

Das folgende Theorem bereitet die Definition der (metasprachlichen) Individuenkonstante 'L*' vor:

(2-21) **Theorem.** *Existenz einer Performatorikerweiterung von* L^+ *um* ANZ2, ZR1, ZR2 *und* ZR3
Es gibt ein S, so dass S eine Performatorikerweiterung von L^+ um die Redehandlungsregeln ANZ2, ZR1, ZR2 und ZR3 ist.

Aus diesem Theorem und Theorem (2-16) ergibt sich, dass es genau eine Performatorikerweiterung von L^+ um die Redehandlungsregeln ANZ2, ZR1, ZR2 und ZR3 gibt. Damit ist wiederum die folgende Definition der (metasprachlichen) Individuenkonstanten 'L*' korrekt:

(2-22) **Definition.** *L**
$L^* = S$
gdw
S ist eine Performatorikerweiterung von L^+ um die Redehandlungsregeln ANZ2, ZR1, ZR2 und ZR3.

Für die folgenden Ausführungen werden nun insbesondere so genannte ADS-Sprachen (**A**xiomatische- und **D**efinitorische-**S**etzungs-Sprachen) betrachtet: *

(2-23) **Definition.** *ADS-Sprache*

S ist eine ADS-Sprache

gdw

(i) S ist eine Erweiterung von L^+ und
(ii) Die Performatorik von S umfasst höchsten die Redehandlungsregeln von L* und ggf. weitere Folgerungsregeln, die gegenüber den logischen Regeln von L zulässig sind,
(iii) Wenn Δ Axiom oder Definition von S ist, dann ist Δ parameterfrei.

Das folgende, ohne Beweisansatz notierte Theorem besagt, dass für jede ADS-Sprache S gilt, dass in S genau die S-Aussagen beweisbar sind, die aus der Menge der Axiome und Definitionen von S ableitbar sind:

(2-24) **Theorem.** *In ADS-Sprachen sind genau die Aussagen dieser Sprachen beweisbar, die Konsequenzen der jeweiligen Menge der Axiome und Definitionen sind*

Wenn S eine ADS-Sprache ist, dann gilt für alle S-Aussagen Γ: $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\} \vdash \Gamma$ gdw Γ ist in S beweisbar.

Das folgende Theorem ergibt sich direkt aus Definition (2-3) und Definition (2-23) und besagt, dass ADS-Sprachen und ihre Erweiterungen LE-Sprachen sind:

(2-25) **Theorem.** *ADS-Sprachen und ihre Erweiterungen sind LE-Sprachen*

(i) Wenn S eine ADS-Sprache ist, dann ist S eine LE-Sprache.
(ii) Wenn S eine ADS-Sprache und S' eine Erweiterung von S ist, dann ist S' eine LE-Sprache.

Eine LE-Sprache S ist gemäß Definition (2-23) genau dann eine ADS-Sprache, wenn das Inventar von S gegenüber L wenigstens um die Performatoren 'AXIOM___', 'DEF___' und 'Da___' erweitert ist, die Performatorik von S wenigstens die Redehandlungsregeln von L^+ enthält und höchstens die Redehandlungsregeln von L* sowie ggf. weitere gegenüber den logischen Regeln von L, also den logischen Grundregeln, zulässige Folgerungsregeln enthält und alle Axiome und Definitionen von S parameterfrei sind. Mit letzterer Bedingung gilt dann für alle ADS-Sprachen S: Wenn Γ eine S-Aussage ist, dann ist Γ genau dann in S be-

* In der Abschlussklausur werden die von Ihnen zu benutzenden bzw. zu betrachtenden ADS-Sprachen nur die Regeln von L^+ enthalten. **Die Benutzung von ANZ2 und der zulässigen Regeln wird in der Abschlussklausur** also **nicht gestattet sein.** Dort müssen sie Ihre Beherrschung der bedeutungsetablierenden Grundregeln nachweisen.

weisbar, wenn Γ aus der Menge der in $\mathcal{S}$ axiomatisch oder definitorisch gesetzten Aussagen ableitbar ist (Zur Ableitbarkeit siehe D: 5.1.2).

Das folgende Theorem, dass sich mit Theorem (2-6) und den einschlägigen Definitionen ergibt, besagt, dass L^+ in dem Sinne die ›kleinste‹ ADS-Sprache ist, als (i) L^+ eine ADS-Sprache ist und (ii) für jede ADS-Sprache $\mathcal{S}$ gilt, dass $\mathcal{S}$ eine Erweiterung von L^+ ist:

(2-26) **Theorem.** *L^+ ist die ›kleinste‹ ADS-Sprache*
(i) L^+ ist eine ADS-Sprache,
(ii) Wenn $\mathcal{S}$ eine ADS-Sprache ist, dann ist $\mathcal{S}$ eine Erweiterung von L^+.

Aus Klausel (ii) von Theorem (2-26) und der Tatsache, dass L^+ selber eine Erweiterung von L ist, ergibt sich dann mit Theorem (2-4) insbesondere, dass alle L-Aussagen, die in L beweisbar sind, in jeder ADS-Sprache beweisbar sind. Für L^+ selbst gilt, dass in L^+ genau die L^+-Aussagen beweisbar sind, die aus $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $L^+\} = \emptyset$ ableitbar sind, welches genau die L^+-Aussagen sind, die in L beweisbar sind, welches genau die L-Aussagen sind, die in L beweisbar sind, welches genau die logisch-wahren L-Aussagen sind. Da die zusätzlichen Regeln von L* nur die Anziehung bereits bewiesener Aussagen erlauben (ANZ2) bzw. gegenüber den logischen Regeln von L zulässig sind (ZR1, ZR2, ZR3), gilt selbiges auch für L*.

Das folgende, ohne Beweisansatz notierte Theorem besagt, dass alle Inventarerweiterungen einer ADS-Sprache ADS-Sprachen sind:

(2-27) **Theorem.** *Inventarerweiterungen von ADS-Sprachen sind ADS-Sprachen*
Wenn $\mathcal{S}$ eine ADS-Sprache ist und $\mathcal{S}'$ eine Inventarerweiterung von $\mathcal{S}$ um atomare Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist $\mathcal{S}'$ eine ADS-Sprache.

2.2.2 Erweiterungen um Axiome und Definitionen

Zur metatheoretischen Begleitung des axiomatischen und definitorischen Setzens sind nun weitere Erweiterungsbegrifflichkeiten zu etablieren. Zunächst wird die Rede von der Erweiterung um Axiome reguliert:

(2-28) **Definition.** *Erweiterung um Axiome*

S' *ist eine Erweiterung von* S *um die Axiome* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$

gdw

$n \geq 1$ und S, S' sind ADS-Sprachen und

(i) Für alle τ, (r,) K gilt: τ ist genau dann ein (r-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K, wenn τ ein (r-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist,

(ii) Für alle R gilt: R ist genau dann eine Redehandlungsregel von S, wenn R eine Redehandlungsregel von S' ist,

(iii) $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ sind Axiome von S',

(iv) Für alle Γ gilt: Γ ist genau dann ein Axiom von S, wenn Γ ein von $A_1, \ldots, A_n$ verschiedenes Axiom von S' ist,

(v) Für alle Γ gilt: Γ ist genau dann eine Definition von S, wenn Γ eine Definition von S' ist.

Man beachte, dass von dieser Definition nur Erweiterungen erfasst werden, bei der gegenüber der Ausgangssprache lediglich parameterfreie Axiome hinzukommen. Die Hinzufügung von Axiomen, die Parameter enthalten, führt zu Sprachen, die keine ADS-Sprachen und daher hier nicht von Interesse sind. Analoge Bemerkungen betreffen auch die folgenden Definitionen. Setzt man in einer ADS-Sprache S eine Aussage A gemäß AS1 als Axiom, dann geht man offenbar von S zur Erweiterung von S um das Axiom A über. Das folgende Theorem besagt, dass sich die Erweiterung um Axiome strukturell so verhält wie die Inventarerweiterung um atomare Ausdrücke und wie die Performatorikerweiterung um Redehandlungsregeln:

(2-29) **Theorem.** *Strukturelle Eigenschaften der Erweiterung um Axiome*

(i) Es gibt kein S, so dass es $A_1, \ldots, A_n$ gibt und S eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_n$ ist.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S' um die Axiome $A_1, \ldots, A_n$ ist und S' eine Erweiterung von S um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_r$ ist, dann ist S^* eine Erweiterung von S um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_r$ und $A_1, \ldots, A_n$.

(iii) Wenn S' eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_n$ ist, dann ist S keine Erweiterung von S' um die Axiome $A_1, \ldots, A_n$.

Beweisansatz: Der Beweis erfolgt analog zu dem von Theorem (2-10). ■

Das folgende Theorem besagt, dass sich die Erweiterung um Axiome im Verhältnis zur Erweiterung so verhält wie die Inventarerweiterung um atomare Ausdrücke und wie die Performatorikerweiterung um Redehandlungsregeln:

(2-30) **Theorem.** *Erweiterung um Axiome und Erweiterung*

(i) Wenn S' eine Erweiterung von S um die die Axiome $A_1, \ldots, A_n$ ist, dann ist S' eine Erweiterung von S.

(ii) Es gibt S, S', so dass S' eine Erweiterung von S ist und es keine $A_1, \ldots, A_n$ gibt, so dass S' eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_n$ ist.

Beweisansatz: Der Beweis erfolgt analog zu dem von Theorem (2-11). ■

Das folgende Theorem besagt, dass sich die Erweiterung um Axiome hinsichtlich der Höchst-Zahl von Erweiterungen einer Sprache um dieselben Axiome so verhält wie die Inventarerweiterung um atomare Ausdrücke und wie die Performatorikerweiterung um Redehandlungsregeln:

(2-31) **Theorem.** *Eindeutigkeitstheorem für die Erweiterung um Axiome*

Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_n$ ist und S' eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_n$ ist, dann ist S^* gleich S'.

Beweisansatz: Der Beweis erfolgt analog zu dem von Theorem (2-12). ■

Nun wird die Rede von der Erweiterung um Axiome und atomare Ausdrücke reguliert:

(2-32) **Definition.** *Erweiterung um Axiome und um atomare Ausdrücke*

S' ist eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ *und die atomaren Ausdrücke* μ_1 (*der Kategorie K_1 und der Stelligkeit* s_1), …, μ_n (*der Kategorie K_n und der Stelligkeit* s_n)

gdw

$m, n \geq 1$ und S, S' sind ADS-Sprachen und es gibt ein S^*, so dass S^* eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist und S' eine Erweiterung von S^* um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ ist.

Ist S^* eine Inventarerweiterung von S um atomare Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und setzt man in S^* eine Aussage A gemäß AS2 als Axiom, dann geht man von S zur Erweiterung von S um das Axiom A und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ über. Das folgende Theorem besagt, dass auch die Erweiterung um Axiome und atomare Ausdrücke bezüglich der ersten und zweiten Stelle irreflexiv, transitiv und asymmetrisch ist:

(2-33) **Theorem.** *Strukturelle Eigenschaften der Erweiterung um Axiome und atomare Ausdrücke*

(i) Es gibt kein S, so dass es $A_1, \ldots, A_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt und S eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S' um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S' eine Erweiterung von S um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_j$ und die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ ist, dann ist S^* eine Erweiterung von S um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_j$ und $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

(iii) Wenn S' eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist S keine Erweiterung von S' um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Beweisansatz: *Zu* (i): Angenommen es gäbe ein S, so dass es $A_1, \ldots, A_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt und S eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist. Seien S und $A_1, \ldots, A_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ so. Dann gilt nach Definition (2-32), dass ein S^* gibt, so dass S^* eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S eine Erweiterung von S^* um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ ist. Sei S* so.

Dann ergibt sich mit Definition (2-8), dass $\mu_1, \ldots, \mu_n$ atomare Ausdrücke von S* sind und dass gilt:

τ ist genau dann ein atomarer S-Ausdruck, wenn τ ein von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschiedener atomarer S*-Ausdruck ist.

Sodann gilt aber mit Definition (2-28):

τ ist genau dann ein atomarer S*-Ausdruck, wenn τ ein atomarer S-Ausdruck ist.

Damit ergibt sich aber insgesamt, dass $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verschieden von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sind, was im Widerspruch zur Selbstidentität steht.

Zu (ii): Sei S* eine Erweiterung von S' um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und S' eine Erweiterung von S um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_j$ und die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$.

Dann gilt nach Definition(2-32), dass S, S' und S* ADS-Sprachen sind und dass:

Es gibt ein S^+, so dass S^+ eine Inventarerweiterung von S' um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S* eine Erweiterung von S^+ um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ ist,

und

Es gibt ein $S^\sim$, so dass $S^\sim$ eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ ist und S' eine Erweiterung von $S^\sim$ um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_j$ ist.

Seien S^+ und $S^\sim$ so. Erweitert man dann dass Inventar von $S^\sim$ um $\mu_1, \ldots, \mu_n$, so erhält man eine Inventarerweiterung von $S^\sim$ um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Sei nun $S^\#$ eine solche Inventarerweiterung von $S^\sim$ um $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Dann gilt mit Klausel (ii) von Theorem (2-10), dass $S^\#$ eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist. Damit ist dann nach Theorem (2-27) auch $S^\#$ eine ADS-Sprache.

Sodann gilt:

τ ist ein atomarer $S^\#$-Ausdruck

gdw

τ ist gleich μ_1 oder … oder μ_n oder τ ist gleich ν_1 … oder ν_r oder τ ist ein atomarer S-Ausdruck

gdw

τ ist gleich μ_1 oder … oder μ_n oder τ ist ein atomarer $S^\sim$-Ausdruck

gdw

τ ist gleich μ_1 oder … oder μ_n oder τ ist ein atomarer S'-Ausdruck

gdw

τ ist ein atomarer S^+-Ausdruck

gdw

τ ist ein atomarer S*-Ausdruck.

Ferner gilt, dass $A'_1, \ldots, A'_j$ Axiome von S' und damit Axiome von S^+ und damit Axiome von S^* sind und dass $A_1, \ldots, A_m$ Axiome von S^* sind und dass

Γ ist ein Axiom von $S^\#$

gdw

Γ ist ein Axiom von S

gdw

Γ ist ein Axiom von $S^\sim$

gdw

Γ ist ein von $A'_1, \ldots, A'_j$ verschiedenes Axiom von S'

gdw

Γ ist ein von $A'_1, \ldots, A'_j$ verschiedenes Axiom von S^+

gdw

Γ ist ein von $A'_1, \ldots, A'_j$ und $A_1, \ldots, A_m$ verschiedenes Axiom von S^*.

Zuletzt gilt noch:

Δ ist eine Definition von $S^\#$

gdw

Δ ist eine Definition von S

gdw

Δ ist eine Definition von $S^\sim$

gdw

Δ ist eine Definition von S'

gdw

Δ ist eine Definition von S^+

gdw

Δ ist eine Definition von S^*.

Da $S^\#$ und S^* ADS-Sprachen sind, ist damit S^* insgesamt eine Erweiterung von $S^\#$ um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_j$ und $A_1, \ldots, A_m$. Damit gilt dann: S ist eine ADS-Sprache und es gibt ein $\mathcal{S}^\#$, so dass $\mathcal{S}^\#$ eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S^* eine Erweiterung von $\mathcal{S}^\#$ um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_j$ und $A_1, \ldots, A_m$ ist. Nach Definition (2-32) ist damit S^* eine Erweiterung von S um die Axiome $A'_1, \ldots, A'_j$ und $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Zu (iii): Ergibt sich aus (i) und (ii). ■

Das folgende Theorem gibt über das Verhältnis der Erweiterung um Axiome und atomare Ausdrücke zur Erweiterung Auskunft:

(2-34) **Theorem.** *Erweiterung um Axiome und atomare Ausdrücke und Erweiterung*

(i) Wenn *S*' eine Erweiterung von *S* um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist *S*' eine Erweiterung von *S*.

(ii) Es gibt *S*, *S*', so dass *S*' eine Erweiterung von *S* ist und es keine $A_1, \ldots, A_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt, so dass *S*' eine Erweiterung von *S* um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist.

Beweisansatz: *Zu* (i): Sei S' eine Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Dann gilt nach Definition (2-32), dass es ein *S** gibt, so dass *S** eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S' eine Erweiterung von *S** um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ ist. Sei S* so. Dann ist nach Klausel (i) von Theorem (2-11) S* eine Erweiterung von S und nach Klausel (i) von Theorem (2-30) S' eine Erweiterung von S* und damit nach Klausel (ii) von Theorem (2-6) S* eine Erweiterung von S.

Zu (ii): Nach Theorem (2-26) ist L^+ eine Erweiterung von L^+ und nach Klausel (i) von Theorem (2-33) gibt es keine $A_1, \ldots, A_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$, so dass L^+ eine Erweiterung von L^+ um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist. Also gibt es *S*, *S*', so dass *S*' eine Erweiterung von *S* ist und es keine $A_1, \ldots, A_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt, so dass *S*' eine Erweiterung von *S* um die Axiome $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist. ■

Das folgende Theorem besagt, dass es höchstens eine Erweiterung einer ADS-Sprache um dieselben Axiome und dieselben atomaren Ausdrücke gibt:

(2-35) **Theorem.** *Eindeutigkeitstheorem für die Erweiterung um Axiome und atomare Ausdrücke*

Wenn *S** eine Erweiterung von *S* um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und *S*' eine Erweiterung von *S* um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist *S** gleich *S*'.

Beweisansatz: Seien S* und S' Erweiterungen von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Dann gilt nach Definition (2-32):

> Es gibt ein S^+, so dass S^+ eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S* eine Erweiterung von S^+ um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ ist,

und

> Es gibt ein $S^\sim$, so dass $S^\sim$ eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S' eine Erweiterung von $S^\sim$ um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ ist.

Seien S^+ und $S^\sim$ so. Dann gilt mit Theorem (2-12), dass S^+ gleich $S^\sim$ ist. Dann sind S* und S' Erweiterungen von S^+ um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$. Daraus ergibt sich wiederum mit Theorem (2-31), dass S* gleich S' ist. ■

Die Verträglichkeit der Einermenge der als Axiom zu setzenden Aussage mit der Menge der bereits axiomatisch oder definitorisch gesetzten Aussagen ist zwar, da nicht effektiv überprüfbar, in den Regelantezedentia von AS1 und AS2 nicht gefordert, aber doch gewünscht. Für ADS-Sprachen reicht dies nämlich aus, um sicherzustellen, dass die jeweiligen axiomatischen Setzungen nicht zur Inkonsistenz der Sprache führen.

Um derartige Sachverhalte genauer fassen zu können, werden zunächst entsprechende Definitionen gesetzt:

(2-36) **Definition.** *Konsistente LE-Sprache*

S ist eine konsistente LE-Sprache

gdw

S ist eine LE-Sprache und es gibt kein Γ, so dass sowohl Γ als auch $\neg\Gamma$ in S beweisbar sind.

(2-37) **Definition.** *Inkonsistente LE-Sprache*

S ist eine inkonsistente LE-Sprache

gdw

S ist eine LE-Sprache und S ist keine konsistente LE-Sprache.

(2-38) **Theorem.** *LE-Sprachen sind genau dann inkonsistent, wenn sie nicht konsistent sind*

Wenn S eine LE-Sprache ist, dann ist S genau dann eine inkonsistente LE-Sprache, wenn S keine konsistente LE-Sprache ist.

Beweisansatz: Sei S eine LE-Sprache. Sei nun S eine inkonsistente LE-Sprache. Dann ist nach Definition (2-37) S keine konsistente LE-Sprache. Sei nun S keine konsistente LE-Sprache. Dann ist S eine LE-Sprache und keine konsistente LE-Sprache und damit ist S nach Definition (2-37) eine inkonsistente LE-Sprache. ■

Das folgende Theorem bringt eine Spezialisierung für ADS-Sprachen:

(2-39) **Theorem.** *Konsistenz und Inkonsistenz von ADS-Sprachen*

(i) Wenn S eine ADS-Sprache ist, dann ist S genau dann eine konsistente LE-Sprache, wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\}$ konsistent ist.

(ii) Wenn S eine ADS-Sprache ist, dann ist S genau dann eine inkonsistente LE-Sprache, wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\}$ inkonsistent ist.

Beweisansatz: Sei S eine ADS-Sprache. Nach Theorem (2-25) ist S dann eine LE-Sprache und nach Theorem (2-24) gilt für alle S-Aussagen Γ:

Γ ist genau dann in S beweisbar, wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$.

Nun zu (i): Sei S eine konsistente LE-Sprache. Dann gibt es nach Definition (2-36) kein Γ, so dass sowohl Γ als auch $\neg\Gamma$ in S beweisbar sind. Damit gibt es dann aber auch keine S-Aussage Γ, so dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$
und
$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \neg\Gamma$.

Nun gilt für alle LE-Sprachen S, dass es wenigstens eine S-Aussage Δ gibt. Sei Δ nun eine S-Aussage. Dann gilt

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \nvdash \Delta$
oder
$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \nvdash \neg\Delta$.

In beiden Fällen gibt es dann eine Aussage B, so dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \nvdash$ B.

Damit gilt aber (siehe D: 5.1.3), dass $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\}$ konsistent ist.

Sei nun $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\}$ konsistent. Dann gibt es keine S-Aussage Γ, so dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$
und
$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \neg\Gamma$

und somit auch kein Γ, so dass sowohl Γ als auch $\neg\Gamma$ in S beweisbar wären. Damit ist S eine konsistente LE-Sprache.

Zu (ii): Sei S eine inkonsistente LE-Sprache. Dann ist S keine konsistente LE-Sprache. Dann gilt mit (i), dass $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\}$ nicht konsistent ist. Sei nun $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\}$ nicht konsistent. Dann gilt mit (i), dass S keine konsistente LE-Sprache ist und damit eine inkonsistente LE-Sprache ist. ■

Nun das angekündigte Theorem zum Zusammenhang zwischen der Verträglichkeit der als Axiom zu setzenden Aussage mit der Menge der bereits axiomatisch oder definitorisch gesetzten Aussagen und der Konsistenz-Wahrung:

(2-40) **Theorem.** *Konsistenzwahrende Erweiterung von ADS-Sprachen um Axiome*

(i) Wenn S eine ADS-Sprache ist, $A_1, \ldots, A_m$ S-Aussagen sind und $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\} \cup \{A_1, \ldots, A_m\}$ konsistent ist, dann ist die Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ eine konsistente LE-Sprache.

(ii) Wenn S eine ADS-Sprache ist, S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, $A_1, \ldots, A_m$ S'-Aussagen sind und $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\} \cup \{A_1, \ldots, A_m\}$ konsistent ist, dann ist die Erweiterung von S' um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$ eine konsistente LE-Sprache.

Beweisansatz: *Zu* (i): Sei S eine ADS-Sprache und seien $A_1, \ldots, A_m$ S-Aussagen und sei $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \cup \{A_1, \ldots, A_m\}$ konsistent. Sei nun die S* (nach (2-31) eindeutig bestimmte) Erweiterung von S um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$. Dann gilt mit Definition (2-28), dass S* eine ADS-Sprache ist und dass

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S*}\} = \{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \cup \{A_1, \ldots, A_m\}.$$

Also ist S* eine ADS-Sprache und $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S*$\}$ ist konsistent und nach Klausel (i) von Theorem (2-39) ist damit S* eine konsistente LE-Sprache.

Zu (ii): Sei S eine ADS-Sprache, S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$, seien $A_1, \ldots, A_m$ S'-Aussagen und sei $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\}$ $\cup$ $\{A_1, \ldots, A_m\}$ konsistent. Sei nun S* eine Erweiterung von S' um die Axiome $A_1, \ldots, A_m$.

Dann gilt mit Definition (2-28), dass S* eine ADS-Sprache ist und aus den Definitionen (2-8) und (2-28) ergibt sich

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S*}\}$$
$$=$$
$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S'}\} \cup \{A_1, \ldots, A_m\}$$
$$=$$
$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \cup \{A_1, \ldots, A_m\}$$

Also ist S* eine ADS-Sprache und $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S*$\}$ ist konsistent und nach Klausel (i) von Theorem (2-39) ist S* damit eine konsistente LE-Sprache. ■

Nun werden Begrifflichkeiten für die Rede von der Erweiterung einer Sprache um Definitionen bzw. um Definitionen und atomare Ausdrücke eingeführt, die sich analog zu den für die Erweiterung um Axiome bzw. Axiome und atomare Ausdrücke etablierten Begrifflichkeiten verhalten:

(2-41) **Definition.** *Erweiterung um Definitionen*

S' ist eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$

gdw

$n \geq 1$ und S, S' sind ADS-Sprachen und

(i) Für alle τ, (r,) K gilt: τ ist genau dann ein (r-stelliger) S-Ausdruck der atomaren Kategorie K, wenn τ ein (r-stelliger) S'-Ausdruck der atomaren Kategorie K ist,

(ii) Für alle R gilt: R ist genau dann eine Redehandlungsregel von S, wenn R eine Redehandlungsregel von S' ist,

(iii) Für alle Γ gilt: Γ ist genau dann ein Axiom von S, wenn Γ ein Axiom von S' ist,

(iv) $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sind Definitionen von S',

(v) Für alle Γ gilt: Γ ist genau dann eine Definition von S, wenn Γ eine von $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ verschiedene Definition von S' ist.

Ist S' eine Inventarerweiterung von S um einen n-stelligen Prädikator Φ und setzt man eine Aussage Γ gemäß DP in S' als Definition, dann geht man offenbar von S' zur Erweiterung von S' um die Definition Γ über. Dieser Zug ist regelgedeckt und korrekt.

Man beachte aber, dass sowohl DP als auch die später gegebenen Regeln DFB und DIB stets verlangen, dass (genau) eine Definition ausgehend von einer Sprache S in der Inventarerweiterung von S um den zu definierenden Ausdruck gesetzt wird. Eine Setzung in der jeweiligen Ausgangssprache S selbst ist nach DP, DFB und DIB jedoch *niemals* korrekt, sie gefährdet die Konservativität der Erweiterung (↑ 4.2; 5.1).

Es folgen erwartbare Theoreme zu strukturellen Eigenschaften der Erweiterung um Definitionen sowie zum Verhältnis zur Erweiterung und hinsichtlich der Höchst-Zahl von Erweiterungen um dieselben Definitionen:

(2-42) **Theorem.** *Strukturelle Eigenschaften der Erweiterung um Definitionen*

(i) Es gibt kein S, so dass es $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ gibt und S eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ist.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S' um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ist und S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_r$ ist, dann ist S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_r$ und $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$.

(iii) Wenn S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ist, dann ist S keine Erweiterung von S' um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$.

Beweisansatz: Theorem (2-42) lässt sich analog zu Theorem (2-10) zeigen. ■

(2-43) **Theorem.** *Erweiterung um Definitionen und Erweiterung*

(i) Wenn S' eine Erweiterung von S um die die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ist, dann ist S' eine Erweiterung von S.

(ii) Es gibt S, S', so dass S' eine Erweiterung von S ist und es keine $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ gibt, so dass S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ist.

Beweisansatz: Theorem (2-43) lässt sich analog zu Theorem (2-11) zeigen. ■

(2-44) **Theorem.** *Eindeutigkeitstheorem für die Erweiterung um Definitionen*

Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ist und S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ist, dann ist S^* gleich S'.

Beweisansatz: Theorem (2-44) lässt sich analog zu Theorem (2-12) zeigen. ■

Nun werden Begrifflichkeiten für die Rede von der Erweiterung einer Sprache um Definitionen und atomare Ausdrücke eingeführt:

(2-45) **Definition.** *Erweiterung um Definitionen und um atomare Ausdrücke*

S' ist eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n)

gdw

$m, n \geq 1$ und S, S' sind ADS-Sprachen und es gibt ein S^*, so dass S^* eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist und S' eine Erweiterung von S^* um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ ist.

Ist S' eine Inventarerweiterung von S um einen n-stelligen Prädikator Φ und setzt man eine Aussage Γ gemäß DP in S' als Definition, dann geht man insgesamt von S zur Erweiterung von S um die Definition Γ und den n-stelligen Prädikator Φ über. Es folgen wiederum bereits zu erwartende Theoreme zu strukturellen Eigenschaften der Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke sowie zum Verhältnis zur Erweiterung und hinsichtlich der Höchst-Zahl von Erweiterungen um dieselben Definitionen und dieselben atomaren Ausdrücke:

(2-46) **Theorem.** *Strukturelle Eigenschaften der Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke*

(i) Es gibt kein S, so dass es $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt und S eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S' um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_j$ und die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ ist, dann ist S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_j$ und $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

(iii) Wenn S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist S keine Erweiterung von S' um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Beweisansatz: Theorem (2-46) lässt sich analog zu Theorem (2-33) zeigen. ■

(2-47) **Theorem** *Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke und Erweiterung*

(i) Wenn S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist S' eine Erweiterung von S.

(ii) Es gibt S, S', so dass S' eine Erweiterung von S ist und es keine $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt, so dass S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist.

Beweisansatz: Theorem (2-47) lässt sich analog zu Theorem (2-34) zeigen. ■

(2-48) **Theorem.** *Eindeutigkeitstheorem für die Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke*

Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist und S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ist, dann ist S^* gleich S'.

Beweisansatz: Theorem (2-48) lässt sich analog zu Theorem (2-35) zeigen. ■

Ein Spezialfall der Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke ist die Erweiterung um eine regelgemäße Definition eines atomaren Ausdrucks und diesen Ausdruck selbst. Eine solche Erweiterung findet mit jeder Setzung einer Definition gemäß DP statt.

Normalerweise wird beim Aufbau einer Sprache jedoch nicht nur eine Definition gesetzt, sondern es werden ganze ›Definitionsketten‹ gebildet. Sind nun alle Definitionen gemäß DP oder einer anderen der im Folgenden etablierten Definitionsregeln erfolgt, dann steht die Sprache am Ende der Definitionskette in bestimmten Beziehungen zur Ausgangssprache, so ist etwa die Endsprache konsistent, wenn die Ausgangssprache konsistent war (↑ 4.2).

Um solche Beziehungen griffig formulieren zu können, erfasst die folgende Definition daher nicht nur die regelgemäße Erweiterung um eine Definition und einen atomaren Ausdruck, sondern auch die Erweiterungsbeziehung, die zwischen zwei Sprachen S und S^* genau dann besteht, wenn S^* das Ergebnis einer Folge von Erweiterungen von S um mehrere regelgemäße Definitionen und die definierten Ausdrücke ist:

(2-49) **Definition.** *Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke gemäß Definitionsregeln*

S^* ist eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S

gdw

$n, j \geq 1$ und S, S^* sind ADS-Sprachen und S^* ist eine Erweiterung von S um die Definition $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) und

(i) $R_1, \ldots, R_j$ sind Definitionsregeln von S,

(ii) Es gibt eine Folge $S_0, \ldots, S_n$ von ADS-Sprachen, so dass

a) S_0 gleich S und S_n gleich S^* ist,

b) Für alle i ($1 \leq i \leq n$) gilt:

ba) S_i ist eine Erweiterung von S_{i-1} um die Definition Δ_i und den atomaren Ausdruck μ_i (der Kategorie K_i und der Stelligkeit s_i) und

bb) es gibt ein S', so dass S' eine Inventarerweiterung von S_{i-1} um den atomaren Ausdruck μ_i (der Kategorie K_i und der Stelligkeit s_i) ist und Δ_i in S' gemäß eines R_k ($1 \leq k \leq j$) als Definition gesetzt werden darf.

Erläuternd ist hinzuzufügen, dass die Definitionsregeln einer LE-Sprache S die Redehandlungsregeln von S sind, die die Verwendung des Definitionsperformators regulieren. Das folgende Theorem bringt eine Vereinfachung für $n = 1$ und $j = 1$:

(2-50) **Theorem.** *Erweiterung um eine Definition und einen atomaren Ausdruck gemäß einer Definitionsregel*

S* ist eine Erweiterung von S um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ gemäß der Definitionsregel R von S

gdw

S, S* sind ADS-Sprachen und S* ist eine Erweiterung von S um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ und

(i) R ist eine Definitionsregel von S,

(ii) Es gibt ein S', so dass S' eine Inventarerweiterung von S um den atomaren Ausdruck μ ist und Δ in S' gemäß R als Definition gesetzt werden darf.

Beweisansatz: (*Links-Rechts-Richtung*): Sei S* eine Erweiterung von S um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ gemäß der Definitionsregel R von S. Mit Definition (2-49) gilt dann, dass S, S* ADS-Sprachen sind und S* eine Erweiterung von S um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ ist, R eine Definitionsregel von S ist und es eine Folge S_0, S_1 von ADS-Sprachen gibt, so dass S_0 = S und S_1 = S* und S_1 eine Erweiterung von S_0 um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ ist und es ein S' gibt, so dass S' eine Inventarerweiterung von S_0 um den atomaren Ausdruck μ ist und Δ in S' gemäß R als Definition gesetzt werden darf.

Seien nun S_0, S_1 so wie verlangt. Dann ist S_0 = S und S_1 = S*. Damit gilt dann insgesamt, dass S, S* ADS-Sprachen sind und S* eine Erweiterung von S um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ ist, R eine Definitionsregel von S ist und es ein S' gibt, so dass S' eine Inventarerweiterung von S um den atomaren Ausdruck μ ist und Δ in S' gemäß R als Definition gesetzt werden darf.

(*Recht-Links-Richtung*): Seien S, S* ADS-Sprachen und S* eine Erweiterung von S um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ, R eine Definitionsregel von S und gebe es ein S', so dass S' eine Inventarerweiterung von S um den atomaren Ausdruck μ ist und Δ in S' gemäß R als Definition gesetzt werden darf. Dann gilt mit S_0 = S und S_1 = S*, dass es eine Folge S_0, S_1 von ADS-Sprachen gibt, so dass S_0 = S und S_1 = S* und S_1 eine Erweiterung von S_0 um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ ist und es ein S' gibt, so dass S' eine Inventarerweiterung von S_0 um den atomaren Ausdruck μ ist und Δ in S' gemäß R als Definition gesetzt werden darf. Damit gilt dann nach Definition (2-49) insgesamt, dass S* eine Erweiterung von S um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ gemäß der Definitionsregel R von S ist. ■

Ist S' eine Inventarerweiterung von S um den n-stelligen Prädikator Φ und Γ eine S'-Aussage, die die Voraussetzungen des Regelantezedens von DP für Φ erfüllt, dann geht man offenbar mit der definitorischen Setzung von Γ in S' von S zur Erweiterung von S um die Definition Γ und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S über. Im Vorgriff auf Kap. 4.2 ist festzuhalten, dass eine solche Erweiterung auf jeden Fall konsistent ist, wenn die Ausgangssprache konsistent ist. Das folgende Theorem besagt, dass regelgemäße Erweiterungen um Definitionen und atomare Ausdrücke Erweiterungen um Definitionen und atomare Ausdrücke sind:

(2-51) **Theorem.** *Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke gemäß Definitionsregeln und Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke*

Wenn S^* eine Erweiterung von S um Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und atomare Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S ist, dann ist S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Beweisansatz: Ergibt sich direkt aus Definition (2-49). ■

Damit und mit den einschlägigen Definitionen ergeben sich die folgenden, ohne Beweisansatz notierten Theoreme zu strukturellen Eigenschaften der regelgemäßen Erweiterung um Definitionen, zum Verhältnis zur Erweiterung sowie zur Höchstzahl von regelgemäßen Erweiterungen um dieselben Definitionen und dieselben atomaren Ausdrücke:

(2-52) **Theorem.** *Strukturelle Eigenschaften der Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke gemäß Definitionsregeln*

(i) Es gibt kein S, so dass es $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und $R_1, \ldots, R_j$ gibt und S eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S ist.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S' um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S' ist und S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_r$ und die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ gemäß den Definitionsregeln $R'_1, \ldots, R'_m$ von S ist,
dann ist S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_r$ und $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\nu_1, \ldots, \nu_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R'_1, \ldots, R'_m$ und $R_1, \ldots, R_j$ von S.

(iii) Wenn S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S ist, dann ist S keine Erweiterung von S' um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S.

Die Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke gemäß Definitionsregeln verhält sich in erwartbarer Weise zur Erweiterung:

(2-53) **Theorem.** *Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke gemäß Definitionsregeln und Erweiterung*

(i) Wenn S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S ist, dann ist S' eine Erweiterung von S.

(ii) Es gibt S, S', so dass S' eine Erweiterung von S ist und es keine $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und $R_1, \ldots, R_j$ gibt, so dass S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S ist.

Das folgende Theorem besagt, dass es höchstens eine regelgemäße Erweiterung einer Sprache um dieselben Definitionen und dieselben atomaren Ausdrücke gibt.

(2-54) **Theorem.** *Eindeutigkeitstheorem für die Erweiterung um Definitionen und atomare Ausdrücke gemäß Definitionsregeln*

Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S ist und S' eine Erweiterung von S um die Definitionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ und die atomaren Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gemäß den Definitionsregeln $R_1, \ldots, R_j$ von S ist, dann ist S^* gleich S'.

In Kap. 3 werden die hier definierten Erweiterungsformen exemplifiziert, indem durch schrittweise Erweiterung von L^+ eine Verwandtschaftssprache entwickelt wird.

2.3 Erste Setzungen und Definitionen

Das regelgemäße Definieren gemäß DP, DFB oder DIB ist eine relativ risikofreie Form der Ausdruckseinführung: Definiert man einen Prädikator gemäß DP, einen Funktor gemäß DFB oder eine Individuenkonstante gemäß DIB, dann ist die Erweiterung der Ausgangssprache um die Definition und den definierten Ausdruck gemäß der jeweils einschlägigen Definitionsregel eine definitorische Erweiterung der Ausgangssprache. Damit ist insbesondere sichergestellt, dass die erweiterte Sprache nicht durch die Erweiterung inkonsistent wird (↑ 4.3).

Allerdings braucht das Definieren einen Anfang: Jede (regelgemäße) Definition greift auf schon eingeführte Ausdrücke zurück. Offensichtlich muss es in (regelgemäßen) ›Definitionsketten‹ also einen Anfangsbestand an Ausdrücken geben, die ihrerseits nicht selber definiert sind. Diesen Anfangsbestand bilden die so genannten Grundausdrücke, die zur Definition weiterer Ausdrücke dienen. Genauer soll für LE-Sprachen festgelegt werden:

(2-55) **Definition.** *Grundausdruck*

μ *ist ein Grundausdruck von* $\mathcal{S}$

gdw

$\mathcal{S}$ ist eine LE-Sprache und μ ist eine $\mathcal{S}$-Individuenkonstante oder μ ist ein $\mathcal{S}$-Funktor oder μ ist ein $\mathcal{S}$-Prädikator und es gibt keine $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}^*$ und Δ, so dass $\mathcal{S}^*$ eine Erweiterung von $\mathcal{S}'$ um die Definition Δ und den atomaren Ausdruck μ ist und $\mathcal{S}$ eine Erweiterung von $\mathcal{S}^*$ ist.

Ist $\mathcal{S}$ eine LE-Sprache, dann sind nach der Definition genau die $\mathcal{S}$-Individuenkonstanten, $\mathcal{S}$-Funktoren und $\mathcal{S}$-Prädikatoren Grundausdrücke von $\mathcal{S}$, die in $\mathcal{S}$ nicht durch eine Definition eingeführt sind.

Diese Charakterisierung macht bereits deutlich, dass bei der nicht-sprachrelativierten Rede von Grundausdrücken (oder Grundbegriffen) eine gewisse Skepsis angezeigt ist. Zu fragen ist nämlich immer, in welcher Sprache der jeweils als (undefinierbarer) Grundausdruck ausgezeichnete Ausdruck denn ein Grundausdruck sein soll: Unter den Prädikatoren, Funktoren und Individuenkonstanten gibt es keinen Hochadel der absoluten Grundausdrücke, sondern die Grundausdrücke einer Sprache sind einfach diejenigen Ausdrücke in einer Sprache, die in dieser Sprache herangezogen werden, um andere Ausdrücke zu definieren, aber selbst nicht definiert werden.

Im Folgenden wird deutlich werden, dass Sprachen mit identischer Grammatik, in denen dieselben Aussagen beweisbar sind, im Ausgang von verschiedenen Grundausdrücken aufgebaut werden können, wobei Grundausdrücke der einen Sprache definierte Ausdrücke einer anderen Sprache sind (man vergleiche dazu die Verwandtschaftssprache V in Kap. 3 mit der in Kap. 5.2. entwickelten Sprache und die Sprachen G^+ und W^+ in Übung 2.5).

Eine gewisse Sonderstellung nimmt dabei allerdings der Identitätsprädikator ein, der in allen betrachteten Sprachen nicht durch Definition eingeführt und somit in allen betrachteten Sprachen ein Grundausdruck ist. Allerdings ist auch der Identitätsprädikator kein absolut undefinierbarer Ausdruck: Entfernt man etwa aus der Performatorik von L^+ die Regeln IE und IB und erweitert das Inventar der resultierenden Sprache um endlich viele Prädikatoren, dann lässt sich der Identitätsprädikator in der daraus resultierenden Sprache $\mathcal{S}$ so definieren, dass für alle geschlossenen $\mathcal{S}$-Terme θ_1, θ_2 gilt: $\theta_1 = \theta_2$ ist genau dann in $\mathcal{S}$ beweisbar, wenn für alle höchstens in der Variablen ξ offenen $\mathcal{S}$-Formeln Δ gilt, dass $[\theta_1, \xi, \Delta] \leftrightarrow [\theta_2, \xi, \Delta]$ in $\mathcal{S}$ beweisbar ist. Des Weiteren lässt sich der Identitätsprädikator in Sprachen zweiter Stufe material adäquat definieren.

Die Grundausdrücke selbst können nun nicht über Definitionen eingeführt werden, sondern sie müssen über die Setzung von Redehandlungsregeln oder über axiomatische Setzungen eingeführt werden. Ein Beispiel für den ersten Fall liefert wiederum der in LE-Sprachen über die Regeln IE und IB eingeführte Identitätsprädikator.

Für – in unserem Rahmen – ›gewöhnliche‹ Individuenkonstanten, Funktoren und Prädikatoren ist jedoch – soweit möglich – der Maxime der Bordmittel zu folgen, d.h. Grundausdrücke sind durch axiomatische Setzungen einzuführen. Dabei werden die Grundausdrücke in die jeweilige Sprache eingeführt, indem eine Ausgangssprache schrittweise um Axiome und die entsprechenden Ausdrücke erweitert wird (wobei allerdings im hier nicht weiter betrachteten Fall, dass Ausdrücke mit empirisch-synthetischen und analytisch-strukturellen Bedeutungsanteilen versorgt werden sollen, metasprachliche Konstatierungsregeln *und* axiomatische Setzungen einschlägig werden (↑ 1)).

Durch axiomatische Setzungen werden aber nicht nur Grundausdrücke bereitgestellt, sondern es wird auch ein Anfang für das Beweisen von Aussagen, die nicht logisch-wahr sind, geschaffen. Wie beim (regelgemäßen) Definieren, so gibt es auch beim Beweisen solcher Aussagen ein Anfangsproblem: In jedem Beweis für eine Aussage, die nicht logisch-wahr ist, muss eine Aussage, die auch nicht logisch-wahr ist, angezogen werden. Auch das Beweisen logisch-indeterminierter Aussagen muss dabei mit Aussagen beginnen, die nicht ihrerseits erst bewiesen werden müssen, so die Beweisführung zirkelfrei sein soll.

Den Anfang für das Beweisen solcher Aussagen liefern nun ebenfalls die axiomatisch gesetzten Aussagen, denn diese dürfen in Beweisen angezogen werden und erlauben so den

Beweis erster logisch-indeterminierter Aussagen. Mit der Setzung von Axiomen wird also das Anfangsproblem für das Definieren und das Anfangsproblem für das Beweisen logisch-indeterminierter Aussagen ›auf einen Schlag‹ gelöst.

Die Setzung von Axiomen ist allerdings keine leichthin zu unternehmende Sache, denn eine nicht-konservative Spracherweiterung – wie sie mit axiomatischen Setzungen ja gerade angestrebt wird – birgt immer das Risiko, dass die erweiterte Sprache durch die Erweiterung inkonsistent wird. Daher wird man bei axiomatischen Setzungen bemüht sein, einen Konsistenznachweis zu erbringen. Fernerhin ist die Setzung von Axiomen mit Hinsicht auf die materialen Redezwecke, die mit der jeweiligen Sprache verfolgt werden sollen, zu rechtfertigen: Die Setzung von Axiomen unterliegt wie alle Einführungsformen den Prinzipien der formalen Korrektheit und der materialen Adäquatheit und ist also mitnichten eine Angelegenheit freihändiger Beliebigkeit! Dabei ist die formale Korrektheit u.a. zu prüfen, indem untersucht wird, ob die jeweils einschlägigen Standards erfüllt sind; für ADS-Sprachen etwa ist zu prüfen, ob gemäß der entsprechenden Regeln verfahren wurde. Demgegenüber sind Axiome (und Definitionen) hinsichtlich ihrer materialen Adäquatheit zu rechtfertigen, indem dafür argumentiert wird – oder zumindest plausibilisiert wird –, dass sich mit ihnen die jeweils verfolgten Redezwecke erfolgreich und ohne unerwünschte ›Nebenwirkungen‹ verfolgen lassen.

2.4 Materiale Adäquatheit

(*Übungskapitel*)

Im Folgenden sollen Sie Entscheidungen zur materialen Adäquatheit bestimmter axiomatischer und definitorischer Setzungen fällen und begründen. Vorbereitend werden einige elementare Begrifflichkeiten der Ordnungs- und Relationstheorie für Sprachen (im Sinne von Explizitsprachen) bereitgestellt:

(2-56) **Definition.** *Reflexiver Prädikator*

Φ *ist ein reflexiver Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ ist ein zweistelliger S-Prädikator und die Aussage

$\bigwedge x\, \Phi(x, x)$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In allen üblichen Sprachen ist der Identitätsprädikator ein reflexiver Prädikator. In üblichen arithmetischen Sprachen ist der Prädikator '.. ≥ ..' ein reflexiver Prädikator. Dagegen ist der Prädikator '.. > ..' in üblichen arithmetischen Sprachen kein reflexiver Prädikator.

(2-57) **Definition.** *Irreflexiver Prädikator*

Φ *ist ein irreflexiver Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ ist ein zweistelliger S-Prädikator und die Aussage

$\neg\bigvee x\, \Phi(x, x)$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In üblichen arithmetischen Sprachen ist '.. > ..' ein irreflexiver Prädikator.

(2-58) **Definition.** *Transitiver Prädikator*

Φ *ist ein transitiver Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ ist ein zweistelliger S-Prädikator und die Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(\Phi(x, y) \wedge \Phi(y, z) \rightarrow \Phi(x, z))$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In allen üblichen Sprachen ist der Identitätsprädikator ein transitiver Prädikator. In üblichen arithmetischen Sprachen sind '.. ≥ ..' und '.. > ..' transitive Prädikatoren.

(2-59) **Definition.** *Symmetrischer Prädikator*

Φ *ist ein symmetrischer Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ ist ein zweistelliger S-Prädikator und die Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y(\Phi(x, y) \rightarrow \Phi(y, x))$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In allen üblichen Sprachen ist der Identitätsprädikator ein symmetrischer Prädikator. Dagegen sind '.. $\geq$ ..' und '.. > ..' in üblichen arithmetischen Sprachen keine symmetrischen Prädikatoren.

(2-60) **Definition.** *Asymmetrischer Prädikator*

Φ *ist ein asymmetrischer Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ ist ein zweistelliger S-Prädikator und die Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y(\Phi(x, y) \rightarrow \neg\Phi(y, x))$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In üblichen arithmetischen Sprachen ist '.. > ..' ein asymmetrischer Prädikator.

(2-61) **Definition.** *Bezügliche eines Prädikators antisymmetrischer Prädikator*

Φ *ist ein bezüglich* Ψ *antisymmetrischer Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ und Ψ sind zweistellige S-Prädikatoren und die Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y(\Phi(x, y) \wedge \Phi(y, x) \rightarrow \Psi(x, y))$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In üblichen arithmetischen Sprachen ist '.. $\geq$ ..' ein bezüglich des Identitätsprädikators antisymmetrischer Prädikator.

(2-62) **Definition.** *Antisymmetrischer Prädikator*

Φ *ist ein antisymmetrischer Prädikator in* S

gdw

Φ ist ein bezüglich '.. = ..' antisymmetrischer Prädikator in S.

Beispiel: In üblichen arithmetischen Sprachen ist '.. $\geq$ ..' ein antisymmetrischer Prädikator.

(2-63) **Definition.** *Konverser Prädikator*

Φ *ist ein zu* Ψ *konverser Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ und Ψ sind zweistellige S-Prädikatoren und die Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y(\Phi(x, y) \leftrightarrow \Psi(y, x))$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In üblichen arithmetischen Sprachen ist '.. > ..' ein zu '.. < ..' konverser Prädikator.

(2-64) **Definition.** *Bezüglich eines Prädikators konnexer Prädikator*

Φ *ist ein* Ψ*-konnexer Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ und Ψ sind zweistellige S-Prädikatoren und die Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y(\Phi(x, y) \vee \Psi(x, y) \vee \Phi(y, x))$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In üblichen arithmetischen Sprachen sind '.. ≥ ..' und '.. > ..' bezüglich des Identitätsprädikators konnexe Prädikatoren.

(2-65) **Definition.** *Konnexer Prädikator*

Φ *ist ein konnexer Prädikator in* S

gdw

Φ ist ein bezüglich '.. = ..' konnexer Prädikator in S.

Beispiel: In üblichen arithmetischen Sprachen sind '.. ≥ ..' und '.. > ..' konnexe Prädikatoren.

(2-66) **Definition.** *Bezüglich eines Prädikators extensionaler Prädikator*

Φ *ist ein* Ψ*-extensionaler Prädikator in* S

gdw

S ist eine Sprache, Φ und Ψ sind zweistellige S-Prädikatoren und die Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge u \bigwedge v(\Phi(x, y) \wedge \Psi(x, u) \wedge \Psi(y, v) \rightarrow \Phi(u, v))$

ist in S beweisbar.

Beispiel: In üblichen Sprachen sind alle zweistelligen Prädikatoren bezüglich des Identitätsprädikators extensionale Prädikatoren. Insbesondere sind in üblichen arithmetischen Sprachen '.. ≥ ..' und '.. > ..' bezüglich des Identitätsprädikators extensionale Prädikatoren.

Übung 2.1

G sei die Inventarerweiterung von L* um die zweistelligen Prädikatoren 'gleichschwer(.., ..)' und 'schwerer(.., ..)'. G soll nun um Axiome erweitert werden, die die Verwendung von 'gleichschwer(.., ..)' und 'schwerer(.., ..)' regulieren. Sollte in der entsprechenden Erweiterung gelten, dass

(i) 'gleichschwer(.., ..)' reflexiv, symmetrisch und transitiv,
'schwerer(.., ..)' irreflexiv und transitiv (und damit asymmetrisch),
'schwerer(.., ..)' 'gleichschwer(.., ..)'-konnex und
'schwerer(.., ..)' 'gleichschwer(.., ..)'-extensional ist,

oder sollte gelten, dass

(ii) 'gleichschwer(.., ..)' reflexiv, symmetrisch und transitiv,
'schwerer(.., ..)' irreflexiv und transitiv (und damit asymmetrisch),
'schwerer(.., ..)' konnex und
'schwerer(.., ..)' 'gleichschwer(.., ..)'-extensional ist?

Entscheiden Sie sich und motivieren Sie ihre Entscheidung.

Übung 2.2

G* sei die Erweiterung von G um die Axiome:

$\bigwedge x$ gleichschwer(x, x),
$\bigwedge x \bigwedge y$(gleichschwer(x, y) $\rightarrow$ gleichschwer(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(gleichschwer($x$, y) $\wedge$ gleichschwer(y, z) $\rightarrow$ gleichschwer(x, z)),
$\neg \bigvee x$ schwerer(x, x),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(schwerer($x$, y) $\wedge$ schwerer(y, z) $\rightarrow$ schwerer(x, z)),
$\bigwedge x \bigwedge y$(schwerer(x, y) $\vee$ gleichschwer(x, y) $\vee$ schwerer(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge u \bigwedge v$(schwerer($x$, y) $\wedge$ gleichschwer(x, u) $\wedge$ gleichschwer(y, v)$\rightarrow$ schwerer(u, v)).

$G^{\#}$ sei die Erweiterung von G um die Axiome:

$\bigwedge x$ gleichschwer(x, x),
$\bigwedge x \bigwedge y$(gleichschwer(x, y) $\rightarrow$ gleichschwer(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(gleichschwer($x$, y) $\wedge$ gleichschwer(y, z) $\rightarrow$ gleichschwer(x, z)),
$\neg \bigvee x$ schwerer(x, x),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(schwerer($x$, y) $\wedge$ schwerer(y, z) $\rightarrow$ schwerer(x, z)),
$\bigwedge x \bigwedge y$(schwerer(x, y) $\vee$ $x = y$ $\vee$ schwerer(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge u \bigwedge v$(schwerer($x$, y) $\wedge$ gleichschwer(x, u) $\wedge$ gleichschwer(y, v)$\rightarrow$ schwerer(u, v)).

Wählen Sie die Erweiterung aus, in der die axiomatischen Setzungen Ihrer Ansicht nach material adäquat sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung unter Rückgriff auf Ihre Antwort zu Übung 2.1.

Übung 2.3

W sei die Inventarerweiterung von L* um die zweistelligen Prädikatoren 'gleichschwer(.., ..)' und 'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)'. W soll nun um Axiome erweitert werden, die die Verwendung von 'gleichschwer(.., ..)' und 'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)' regulieren. Sollte in der entsprechenden Erweiterung gelten, dass

(i) 'gleichschwer(.., ..)' reflexiv, symmetrisch und transitiv,
'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)' reflexiv und transitiv,
'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)' bezüglich 'gleichschwer(.., ..)' antisymmetrisch,
'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)' 'gleichschwer(.., ..)'-konnex und
'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)' 'gleichschwer(.., ..)'-extensional ist,

oder sollte gelten, dass

(ii) 'gleichschwer(.., ..)' reflexiv, symmetrisch und transitiv,
'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)' reflexiv, symmetrisch und transitiv,
'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)' 'gleichschwer(.., ..)'-konnex und
'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)' 'gleichschwer(.., ..)'-extensional ist?

Entscheiden Sie sich und motivieren Sie ihre Entscheidung.

Übung 2.4

W* sei die Erweiterung von W um die Axiome:

$\bigwedge x$ gleichschwer(x, x),
$\bigwedge x \bigwedge y$(gleichschwer(x, y) $\rightarrow$ gleichschwer(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(gleichschwer($x$, y) $\wedge$ gleichschwer(y, z) $\rightarrow$ gleichschwer(x, z)),
$\bigwedge x$ wenigstens-so-schwer-wie(x, x),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y) $\wedge$ wenigstens-so-schwer-wie(y, z)
$\rightarrow$ wenigstens-so-schwer-wie(x, z)),
$\bigwedge x \bigwedge y$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y) $\wedge$ wenigstens-so-schwer-wie(y, x)
$\rightarrow$ gleichschwer(x, y)),
$\bigwedge x \bigwedge y$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y)
$\vee$
gleichschwer(x, y)
$\vee$
wenigstens-so-schwer-wie(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge u \bigwedge v$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y) $\wedge$ gleichschwer(x, u) $\wedge$ gleichschwer(y, v)
$\rightarrow$ wenigstens-so-schwer-wie(u, v)).

W# sei die Erweiterung von W um die Axiome

$\bigwedge x$ gleichschwer(x, x),
$\bigwedge x \bigwedge y$(gleichschwer(x, y) $\rightarrow$ gleichschwer(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(gleichschwer($x$, y) $\wedge$ gleichschwer(y, z) $\rightarrow$ gleichschwer(x, z)),
$\bigwedge x$ wenigstens-so-schwer-wie(x, x),
$\bigwedge x \bigwedge y$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y) $\rightarrow$ wenigstens-so-schwer-wie(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y) $\wedge$ wenigstens-so-schwer-wie(y, z)
$\rightarrow$ wenigstens-so-schwer-wie(x, z)),
$\bigwedge x \bigwedge y$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y)
$\vee$
gleichschwer(x, y)
$\vee$
wenigstens-so-schwer-wie(y, x)),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge u \bigwedge v$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y) $\wedge$ gleichschwer(x, u) $\wedge$ gleichschwer(y, v)
$\rightarrow$ wenigstens-so-schwer-wie(u, v)).

Wählen Sie die Erweiterung aus, in der die axiomatischen Setzungen Ihrer Ansicht nach material adäquat sind und begründen Sie Ihre Entscheidung unter Rückgriff auf Ihre Antwort zu Übung 2.3.

Übung 2.5

a) G⁺ sei die Erweiterung von G* um die Definition:

$\bigwedge x \bigwedge y$(wenigstens-so-schwer-wie(x, y) $\leftrightarrow$ schwerer(x, y) $\vee$ gleichschwer(x, y))

und den Prädikator 'wenigstens-so-schwer-wie(.., ..)'. G^+ ist eine konsistente ADS-Sprache, in der alle Axiome von W* beweisbar sind. Entscheiden Sie, ob Sie die Erweiterung für material adäquat halten und begründen Sie Ihre Entscheidung unter Rückgriff auf Ihre Antwort zu Übung 2.4.

b) W^+ sei die Erweiterung von W* um die Definition:

$$\bigwedge x \bigwedge y(\text{schwerer}(x, y) \leftrightarrow \text{wenigstens-so-schwer-wie}(x, y) \wedge \neg\text{gleichschwer}(x, y))$$

und den Prädikator 'schwerer(.., ..)'. W^+ ist eine konsistente ADS-Sprache, in der alle Axiome von G* beweisbar sind. Entscheiden Sie, ob Sie die Erweiterung für material adäquat halten und begründen Sie Ihre Entscheidung unter Rückgriff auf Ihre Antwort zu Übung 2.2.

Übung 2.6

Informieren Sie sich über das so genannte Münchhausen-Trilemma. Diskutieren Sie, inwieweit es gerechtfertigt erscheint, die Setzung von Axiomen als "dogmatischen Abbruch" zu bezeichnen.

3 Die Verwandtschaftssprache V

Ausgehend von L* wird nun durch Anwendung der Regeln AS1, AS2 und DP die Verwandtschaftssprache V entwickelt, in der unter anderem korrekte Formalisierungen der in Übung 1.3 zu formalisierenden Aussagen beweisbar sein sollen. Dazu wird zunächst durch axiomatische Setzungen die axiomatische Basis von V aufgebaut (3.1), welche sodann durch definitorische Setzungen ausgebaut wird (3.2). Ziel ist es, sich mit dem axiomatischen Setzen und dem Definieren vertraut zu machen und das zielgerichtete Anziehen von Axiomen und Definitionen einzuüben.

3.1 Der Aufbau der axiomatischen Basis

Allererst wird die axiomatischen Basis von V aufgebaut. Dazu wird zunächst das Inventar von L* um den zweistelligen Prädikator 'Elter-von(.., ..)' und den einstelligen Prädikator 'weiblich(..)', die materialen Grundprädikatoren von V, erweitert. Das Resultat dieser Erweiterung, die Inventarerweiterung von L* um den zweistelligen Prädikator 'Elter-von(.., ..)' und den einstelligen Prädikator 'weiblich(..)', wird mit 'V_0' bezeichnet.

Erstes Axiom soll die Aussage

$[3.1]_A$ $\quad \bigwedge x(\bigvee y(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(y)) \wedge \bigvee z(\text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg\text{weiblich}(z)))$,

eine Formalisierung von a) aus Übung 1.3, sein. $[3.1]_A$ ist eine parameterfreie Aussage. Sodann ist $\{[3.1]_A\}$, die Einermenge von $[3.1]_A$, ersichtlich nicht oberflächeninkonsistent. Nun gilt:

$$\{A \mid A \text{ ist Axiom oder Definition von L*}\} = \emptyset$$

und somit ist auch

$$\{A \mid A \text{ ist Axiom oder Definition von L*}\} \cup \{[3.1]_A\}$$

nicht oberflächeninkonsistent, denn es gilt:

$\{A \mid A \text{ ist Axiom oder Definition von } L^*\} \cup \{[3.1]_A\} =$

$\emptyset \cup \{[3.1]_A\} =$

$\{[3.1]_A\}$

Tatsächlich gilt, da $\{[3.1]_A\}$ nicht nur nicht oberflächeninkonsistent, sondern konsistent ist, auch, dass $\{A \mid A \text{ ist Axiom oder Definition von } L^*\} \cup \{[3.1]_A\}$ konsistent ist. Ferner gilt:

$\emptyset \nVdash [3.1]_A$

und damit auch

$\{A \mid A \text{ ist Axiom oder Definition von } L^*\} \nVdash [3.1]_A.$

Somit darf $[3.1]_A$ nicht nur nach AS2 in V_0 als Axiom gesetzt werden, sondern die Setzung ist auch weder konsistenzgefährdend noch überflüssig:

[3.1] AXIOM $\bigwedge x(\bigvee y(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(y)) \wedge \bigvee z(\text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg\text{weiblich}(z)))$

Damit ist die Erweiterung von L* um die axiomatisch gesetzte Aussage und die beiden neuen Prädikatoren erreicht. Diese Erweiterung wird mit 'V_1' bezeichnet. In V_1 sind die Redehandlungsmöglichkeiten gegenüber L* schon erheblich erweitert, so kann man etwa die Aussage

$\bigwedge x \bigvee y \bigvee z(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg y = z)$

in V_1 beweisen. Andererseits ist in V_1 etwa die Formalisierung der Aussage

Jeder hat höchstens zwei Eltern

noch nicht beweisbar.

Nun wird die axiomatische Basis weiter verstärkt, indem V_1 sukzessive unter Anwendung von AS1 um weitere Axiome erweitern wird. Dabei sind jeweils nicht nur (i) die beiden Bedingungen des Regelantezedens erfüllt, sondern es gilt dabei jeweils auch, dass (ii) die Einermenge der axiomatisch gesetzten Aussage jeweils mit der Menge der bereits axiomatisch (und somit – da jeweils keine Definitionen gesetzt sind – der Menge der axiomatisch und definitorisch) gesetzten Aussagen verträglich ist und (iii) die axiomatisch gesetzte Aussage jeweils keine Konsequenz der Menge der bereits axiomatisch gesetzten Aussagen ist.

Zunächst wird mit der Setzung

[3.2] AXIOM $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \bigwedge v(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{Elter-von}(z, x) \wedge \text{Elter-von}(v, x)$
$\rightarrow$
$y = z \vee y = v \vee z = v),$

bei der eine Formalisierung von b) aus Übung 1.3 in V_1 als Axiom gesetzt wird, zu V_2, der Erweiterung von V_1 um das gesetzte Axiom, übergegangen. Von V_2 wird durch die Setzung

[3.3] AXIOM $\bigwedge x \bigwedge y(\text{Elter-von}(x, y) \rightarrow \neg\text{Elter-von}(y, x))$,

bei der eine Formalisierung von c) aus Übung 1.3 in V_2 als Axiom gesetzt wird, zu V_3, der Erweiterung von V_2 um das gesetzte Axiom übergegangen.

Damit sind die Grundprädikatoren der Verwandtschaftssprache V eingeführt. Sieht man vom logischen Operator '.. = ..' ab, so sind dies 'Elter-von(.., ..)' und 'weiblich(..)'. Alle weiteren Prädikatoren werden nun unter Rückgriff auf diese durch Definitionen eingeführt. Zu Veranschaulichungszwecken werden nun noch drei Individuenkonstanten durch axiomatische Setzungen eingeführt, wozu zunächst das Inventar von V_3 um die Individuenkonstanten 'i' (lies "Inge"), 'h' (lies "Hans") und 'o' (lies "Otto") erweitert wird, womit zu V_4, der Inventarerweiterung von V_3 um die Individuenkonstanten 'i', 'h' und 'o', übergegangen wird.

Die Aussage

$[3.4]_A$ $\neg\text{weiblich}(o) \wedge (\text{Elter-von}(i, o) \wedge \text{weiblich}(i)) \wedge (\text{Elter-von}(h, o) \wedge \neg\text{weiblich}(h))$

ist eine parameterfreie Aussage, die wiederum nicht nur gemäß AS2 in V_4 als Axiom gesetzt werden darf, sondern überdies mit der Menge der in V_3 gesetzten Axiome verträglich ist und nicht aus dieser folgt. Es erfolgt die Setzung

[3.4] AXIOM
$$\begin{array}{l} \neg\text{weiblich}(o) \\ \wedge \\ (\text{Elter-von}(i, o) \wedge \text{weiblich}(i)) \\ \wedge \\ (\text{Elter-von}(h, o) \wedge \neg\text{weiblich}(h)) \end{array}$$

mit der zu V_5, der Erweiterung von V_3 um das gesetzte Axiom und die drei Individuenkonstanten übergegangen wird.

Übung 3.1

Beachten Sie bei dieser und den folgenden Beweisaufgaben, dass Beweise in Erweiterungen von L* zu erstellen sind. Sie können also auch ANZ2, ZR1, ZR2 und ZR3 anwenden.

a) Beweisen Sie folgende Aussagen in V_1:

(i) $\bigwedge x \bigvee y \bigvee z(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg y = z)$

(ii) $\bigwedge x \bigvee y((\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(x)) \vee (\text{Elter-von}(y, x) \wedge \neg\text{weiblich}(x)))$

b) Beweisen Sie folgende Aussagen in V_2:

(i) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z((\text{Elter-von}(x, y) \wedge \neg\text{weiblich}(x)) \wedge (\text{Elter-von}(z, y) \wedge \neg\text{weiblich}(z)) \rightarrow x = z)$

(ii) $\bigwedge x \bigvee y \bigvee z(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{Elter-von}(z, x)$

$\wedge$

$\bigwedge v(\text{Elter-von}(v, x) \rightarrow (v = y \vee v = z) \wedge \neg(v = y \wedge v = z)))$

c) Beweisen Sie folgende Aussage in V_3:

$\neg\bigvee x\ \text{Elter-von}(x, x)$

d) Beweisen Sie in V_5:

(i) $\bigwedge x(\text{Elter-von}(x, \text{o}) \rightarrow x = \text{i} \vee x = \text{h})$

(ii) $\bigwedge x(\text{Elter-von}(x, \text{o}) \wedge \text{weiblich}(x) \rightarrow x = \text{i})$

(iii) $\bigwedge x(\text{Elter-von}(x, \text{o}) \wedge \neg\text{weiblich}(x) \rightarrow x = \text{h})$

e) Geben Sie zunächst direkte gebrauchssprachliche Formulierungen der bewiesenen Aussagen an und suchen Sie sodann nach intuitiv äquivalenten gebrauchssprachlichen Aussagen, die im Deutschen das Gleiche – aber wenn möglich kürzer und eingängiger – sagen.

Übung 3.2 (*nach* Absolvierung von D: 5.2.1 zu bearbeiten)
Zeigen Sie:

a) $\{[3.1]_A\}$ ist konsistent und $\emptyset \nvdash [3.1]_A$.

b) $\{[3.1]_A, [3.2]_A,\}$ ist konsistent und $\{[3.1]_A\} \nvdash [3.2]_A$.

c) $\{[3.1]_A, [3.2]_A, [3.3]_A\}$ ist konsistent und $\{[3.1]_A, [3.2]_A,\} \nvdash [3.3]_A$.

d) $\{[3.1]_A, [3.2]_A, [3.3]_A, [3.4]_A\}$ ist konsistent und $\{[3.1]_A, [3.2]_A, [3.3]_A\} \nvdash [3.4]_A$.

3.2 Der Ausbau der axiomatischen Basis

Offenbar zeichnen sich Beweise und Aussagen in V_5 durch eine relativ hohe Unübersichtlichkeit aus. Ferner vermisst man in V_5 die gewohnten Redemittel, um bestimmte Verwandtschaftsverhältnisse und Beziehungen zwischen diesen auszuzeichnen. Diese können in V_5 zwar ›grundsätzlich‹ ausgedrückt werden, aber eben oft nur sehr mühselig. Besonders deutlich wird dies, wenn man versucht, gebrauchssprachliche Aussagen über Verwandtschaftsverhältnisse in V_5 zu übertragen.

So müsste man, um auszudrücken, dass jeder Kind von genau einer Mutter und genau einem Vater ist, wobei letztere voneinander verschieden sind, eine Aussage wie

$$\begin{array}{l} \bigwedge x \bigvee y \bigvee z((\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(y) \wedge \bigwedge v(\text{Elter-von}(v, x) \wedge \text{weiblich}(v) \rightarrow v = y)) \\ \wedge \\ (\text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg\text{weiblich}(z) \wedge \bigwedge w(\text{Elter-von}(w, x) \wedge \neg\text{weiblich}(w) \rightarrow w = z)) \\ \wedge \\ \neg y = z) \end{array}$$

wählen. Um bequemere und eingängigere Ausdrucksmöglichkeiten bereit zu stellen, werden nun ausgehend von V_5 schrittweise Erweiterungen um Definitionen und Prädikatoren gemäß DP vorgenommen.

Diese Erweiterungen lassen sich immer nach dem folgenden Muster durchführen: Zuerst ist die Gestalt und die Stellenzahl n des Definiendums, also des zu definierenden Prädikators Φ, anzugeben. Damit ist auch die Inventarerweiterung der Ausgangssprache um Φ bestimmt. Sodann ist der n-stellige Prädikator Φ auf n paarweise verschiedene Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ anzuwenden; das Ergebnis ist die atomare Definiendumformel

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Dann ist zu überlegen, wie der Prädikator definiert werden soll, d.h., es ist zu überlegen, was mit ihm gesagt werden soll, d.h., wie seine korrekte Verwendung aussehen soll. Dementsprechend ist dann die Definiensformel Δ für das rechte Bisubjunkt zu wählen. Dabei ist zu beachten, dass in Δ höchstens die Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ frei sein dürfen, dass Δ eine Formel der jeweiligen Ausgangssprache sein muss (dies ist gegeben, wenn alle atomaren Teilausdrücke von Δ bereits Ausdrücke der Ausgangssprache sind) und dass in Δ kein Parameter Teilterm sein darf.

Sodann ist der Kandidat für die Definitionsaussage Γ zu bilden. Dazu wird zunächst die Definitionsformel, also die Bisubjunktion aus $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und Δ,

$\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n) \leftrightarrow \Delta$,

gebildet. Auf diese wird dann der ξ_n-bindende Universalquantor $\bigwedge\xi_n$ angewandt. Für den Fall, dass $n = 1$, ist die entstehende Quantorformel

$\bigwedge\xi_1(\Phi(\xi_1) \leftrightarrow \Delta)$

bereits die Definitionsaussage Γ. Falls $n > 1$, wird im nächsten Schritt der ξ_{n-1}-bindende Universalquantor $\bigwedge\xi_{n-1}$ auf $\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n) \leftrightarrow \Delta)$ angewandt. Dieses Vorgehen wird ggf. für alle verbleibenden Variablen durchgeführt, bis die Universalquantifikation

$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n) \leftrightarrow \Delta)$,

welche gerade die Definitionsaussage/Definition Γ ist, erreicht ist.

Anschließend ist nochmals zu prüfen, ob das Regelantezedens von DP erfüllt ist, ob man also alle Schritte formal richtig ausgeführt hat. Ist dies der Fall, dann ist Γ in der Inventarerweiterung der jeweiligen Ausgangssprache um Φ als Definition zu setzen, womit man wie gewünscht zur Erweiterung der Ausgangssprache um die Definition Γ und den Prädikator Φ gemäß DP übergeht.

V_5 wird nun zunächst um die Definition eines männlich-Prädikators erweitert. Dieser soll einstellig sein, und die Gestalt

männlich(..)

haben. Damit ist auch die Inventarerweiterung von V_5 um diesen Prädikator, V_6, vorgegeben. Dieser Prädikator wird nun auf die V_5-Variable 'x' angewendet. Das Ergebnis ist die atomare Definiendumformel

männlich(x),

wobei die Forderung der paarweisen Verschiedenheit der $\xi_1,\ldots,\xi_n$ trivialerweise erfüllt ist, da $n = 1$ ist.*

Inhaltlich soll gelten, dass genau diejenigen Dinge männlich sind, die nicht weiblich sind. Dementsprechend wird als Definiensformel Δ die V_5-Formel

* Die Forderung der paarweisen Verschiedenheit der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ mit $n \geq 1$ bedeutet, dass für alle i, j mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ gilt: Wenn $i \neq j$, dann ist ξ_i von ξ_j verschieden. Geht es wie im vorliegenden Fall nur um eine Variable ξ_1 und ist somit $n = 1$, dann ist diese Forderung trivialerweise erfüllt: Seien nämlich $1 \leq i \leq 1$ und $1 \leq j \leq 1$. Dann gilt $1 = i = j = 1$. Nimmt man nun an, dass $i \neq j$, so gilt unter dieser Annahme (trivialerweise), dass ξ_i verschieden von ξ_j ist. Also gilt für alle i, j mit $1 \leq i \leq 1$ und $1 \leq j \leq 1$: Wenn $i \neq j$, dann ist auch ξ_i verschieden von ξ_j.

$\neg$weiblich(x),

gewählt, von der auch gilt, dass in ihr nur 'x' frei ist und dass sie keinen V_5-Parameter zum Teilterm hat.

Die Definitionsaussage wird nun gebildet, indem zunächst die Definitionsformel, die Bisubjunktion aus 'männlich(x)' und '$\neg$weiblich(x)',

männlich(x) $\leftrightarrow$ $\neg$weiblich(x),

gebildet und auf diese sodann der x-bindende Universalquantor '$\bigwedge x$___' angewendet wird.

Daraus resultiert bereits die Definitionsaussage

$\bigwedge x$(männlich(x) $\leftrightarrow$ $\neg$weiblich(x)).

Nun ist zu prüfen, ob das Regelantezedens von DP erfüllt ist. Dazu noch einmal DP:

(DP) Wenn:

a) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sind paarweise verschiedene Variablen von S ($n \geq 1$),
b) S' ist eine Inventarerweiterung von S um den n-stelligen Prädikator Φ,
c) Δ ist eine Formel von S, für die gilt:
ca) in Δ sind höchstens $\xi_1, \ldots, \xi_n$ frei,
cb) in Δ ist kein S-Parameter Teilterm,
d) Γ ist eine Aussage der Form:
$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta)$,

dann darf man Γ in S' definitorisch setzen.

(Zu a): 'x' ist eine V_5-Variable, damit ist die Forderung mit 'x' für ξ_1 erfüllt. (Zu b): V_6 ist die Inventarerweiterung von V_5 um den einstelligen Prädikator 'männlich(..)' (Zu c): '$\neg$weiblich(x)' ist eine V_5-Formel, für die gilt, dass (ca) in ihr nur 'x' frei ist und (cb) sie keinen V_5-Parameter zum Teilterm hat.

(Zu d): '$\bigwedge x$(männlich(x) $\leftrightarrow$ $\neg$weiblich(x)' hat die verlangte Form:

männlich(x) $\leftrightarrow$ $\neg$weiblich(x)

ist die Bisubjunktion aus der atomaren Formel 'männlich(x)', dem Ergebnis der Anwendung des zu definierenden einstelligen Prädikators 'männlich(..)' auf die Variable 'x', und '$\neg$weiblich(x)', der – unter (Zu c) geprüften – Formel. Ferner ist

$\bigwedge x$(männlich(x) $\leftrightarrow$ $\neg$weiblich(x))

die Universalquantifikation dieser Bisubjunktion bzgl. 'x', womit diese Aussage insgesamt die unter d) verlangte Form hat.

Da also das Regelantezedens von DP erfüllt ist, darf die Aussage in V_6 als Definition gesetzt werden:

[3.5] DEF $\bigwedge x$(männlich(x) $\leftrightarrow$ $\neg$weiblich(x)),

womit zu V_7, der Erweiterung von V_5 um die Definition $[3.5]_A$ und den einstelligen Prädikator 'männlich(..)' gemäß DP, übergegangen wird.

Als nächstes wird ein Prädikator eingeführt, der es erlaubt, (einfacher und eingängiger) darüber zu sprechen, dass jemand jemandes Kind ist. Dieser Prädikator soll die Gestalt

Kind-von(.., ..)

haben und zweistellig sein. Damit ist wiederum die Inventarerweiterung von V_7 um diesen Prädikator, V_8, vorgegeben. Der Prädikator wird nun auf die voneinander verschiedenen V_7-Variablen 'x' und 'y' angewendet, woraus die atomare Definiendumformel

Kind-von(x, y)

resultiert.

Inhaltlich soll gelten, dass jemand genau dann Kind von jemand ist, wenn der letztere Elter des ersteren ist: 'Kind-von(.., ..)' soll also ein zu 'Elter-von(.., ..)' konverser Prädikator sein (↑ 2.4, D: 6.2.3). Daher wird für das Definiens Δ die V_7-Formel

Elter-von(y, x),

gewählt, für die auch gilt, dass in ihr nur 'x' und 'y' frei sind und dass sie keinen V_7-Parameter zum Teilterm hat.

Um die Definitionsaussage zu erhalten, wird zunächst die Bisubjunktion aus 'Kind-von(x, y)' und 'Elter-von(y, x)', die Definitionsformel

Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x),

gebildet.

Auf diese Formel ist sodann der 'y'-bindende Universalquantor '$\bigwedge y$___' anzuwenden, womit man die Quantorformel

$\bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x))

erhält. Auf diese Quantorformel ist nun noch der 'x'-bindende Universalquantor '$\bigwedge x$___' anzuwenden; das Ergebnis ist die Definitionsaussage

$\bigwedge x \bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x)).

Nun ist wieder zu prüfen, ob das Regelantezedens von DP erfüllt ist. Dies ist der Fall: (Zu a) 'x' und 'y' sind voneinander verschiedene V_7-Variablen. (Zu b) V_8 ist die Inventarerweiterung von V_7 um den zweistelligen Prädikator 'Kind-von(.., ..)'. (Zu c) 'Elter-von(y, x)' ist eine V_7-Formel, für die gilt, dass (ca) in ihr nur 'x' und 'y' frei sind und (cb) kein V_7-Parameter Teilterm ist.

(Zu d) '$\bigwedge x \bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x))' hat die verlangte Form: Zunächst ist die Formel

Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x)

die Bisubjunktion aus der atomaren Formel 'Kind-von(x, y)', dem Ergebnis der Anwendung des einzuführenden Prädikators 'Kind-von(.., ..)' auf die Variablen 'x' und 'y', und der (unter (Zu c) geprüften) Formel 'Elter-von(y, x)'.

Sodann ist die Formel

$\bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x))

das Ergebnis der Anwendung des 'y'-bindenden Universalquantors '$\bigwedge y$___' auf diese Bisubjunktion. Schlussendlich ist

$\bigwedge x \bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x))

die Universalquantifikation von '$\bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x))' bzgl. 'x'. Die Definitionsaussage hat also insgesamt die unter d) verlangte Form.

Da also das Regelantezedens von DP erfüllt ist, darf man die Aussage in V_8 als Definition setzen:

[3.6] DEF $\bigwedge x \bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x))

und so zu V_9, der Erweiterung von V_7 um die Definition $[3.6]_A$ und den zweistelligen Prädikator 'Kind-von(.., ..)' gemäß DP, übergehen.

Nun werden im ›Schnellverfahren‹ weitere Erweiterungen um Definitionen von Prädikatoren und diese Prädikatoren selbst gemäß DP vorgenommen. V_{10} sei die Inventarerweiterung von V_9 um den zweistelligen Prädikator 'Vater-von(.., ..)'. Dieser soll so eingeführt werden, dass jemand genau dann Vater von jemand ist, wenn ersterer Elter des letzteren und männlich ist. Dementsprechend wird als Definitionsaussage die Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y$(Vater-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(x, y) $\wedge$ männlich(x)),

gewählt, die nach DP in V_{10} als Definition gesetzt werden darf:

[3.7] DEF $\bigwedge x \bigwedge y$(Vater-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(x, y) $\wedge$ männlich(x)),

womit man zu V_{11}, der Erweiterung von V_9 um die Definition $[3.7]_A$ und den zweistelligen Prädikator 'Vater-von(.., ..)' gemäß DP übergeht.

In völlig analoger Weise wird sodann mit der Setzung

[3.8] DEF $\bigwedge x \bigwedge y$(Mutter-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(x, y) $\wedge$ weiblich(x))

in V_{12}, der Inventarerweiterung von V_{11} um den zweistelligen Prädikator 'Mutter-von(.., ..)', zu V_{13}, der Erweiterung von V_{11} um die Definition $[3.8]_A$ und den zweistelligen Prädikator 'Mutter-von(.., ..)' gemäß DP, übergegangen.

Dieselbe Prozedur wird wiederholt, indem man mit der Setzung

[3.9] DEF $\bigwedge x \bigwedge y$(Tochter-von(x, y) $\leftrightarrow$ Kind-von(x, y) $\wedge$ weiblich(x))

in V_{14}, der Inventarerweiterung von V_{13} um den zweistelligen Prädikator 'Tochter-von(.., ..)', zu V_{15}, der Erweiterung von V_{13} um die Definition $[3.9]_A$ und den zweistelligen Prädikator 'Tochter-von(.., ..)' gemäß DP, übergeht.

Zuletzt wird dann zu V_{17}, der Erweiterung von V_{15} um die Definition $[3.10]_A$ und den zweistelligen Prädikators 'Sohn-von(.., ..)' gemäß DP, übergegangen, indem in V_{16}, der Inventarerweiterung von V_{15} um diesen Prädikator, die Setzung

[3.10] DEF $\bigwedge x \bigwedge y$(Sohn-von(x, y) $\leftrightarrow$ Kind-von(x, y) $\wedge$ männlich(x))

vorgenommen wird.

Damit soll der Ausbau der axiomatischen Basis beendet sein. Von nun wird 'V' verwendet, um sich auf V_{17} zu beziehen. Das folgende Theorem beschreibt das Verhältnis von V zu V_5:

(3-1) **Theorem.** *Verhältnis von V und V_5*

V ist eine Erweiterung von V_5 um die Definitionen $[3.5]_A$, $[3.6]_A$, $[3.7]_A$, $[3.8]_A$, $[3.9]_A$ und $[3.10]_A$ und die Prädikatoren 'männlich(..)', 'Kind-von(.., ..)', 'Vater-von(.., ..)', 'Mutter-von(.., ..)', 'Tochter-von(.., ..)' und 'Sohn-von(.., ..)' gemäß DP.

Beweisansatz: Zunächst sind V_5 und V ADS-Sprachen und V eine Erweiterung von V_5 um die Definitionen $[3.5]_A$, $[3.6]_A$, $[3.7]_A$, $[3.8]_A$, $[3.9]_A$ und $[3.10]_A$ und die Prädikatoren 'männlich(..)', 'Kind-von(.., ..)', 'Vater-von(.., ..)', 'Mutter-von(.., ..)', 'Tochter-von(.., ..)' und 'Sohn-von(.., ..)' und DP eine Definitionsregel von V_5.

Sodann gilt mit

$A_1 = [3.5]_A$, $A_2 = [3.6]_A$, $A_3 = [3.7]_A$, $A_4 = [3.8]_A$, $A_5 = [3.9]_A$ und $A_6 = [3.10]_A$

sowie

μ_1 = 'männlich(..)', μ_2 = 'Kind-von(.., ..)', μ_3 = 'Vater-von(.., ..)', μ_4 = 'Mutter-von(.., ..)',

μ_5 = 'Tochter-von(.., ..)' und μ_6 = 'Sohn-von(.., ..)'

sowie

$S_0 = V_5$, $S_1 = V_7$, $S_2 = V_9$, $S_3 = V_{11}$, $S_4 = V_{13}$, $S_5 = V_{15}$ und $S_6 = V$,

dass die Folge $S_0, \ldots, S_6$ eine Folge von ADS-Sprachen ist, für die gilt: $S_0 = V_5$ und $S_6 = V$ und für alle i ($1 \leq i \leq 6$) gilt: S_i ist eine Erweiterung von S_{i-1} um die Definition A_i und den Prädikator μ_i und es gibt ein S' (nämlich $V_{(i+\text{Vorgänger-von}(i)+5)}$), so dass S' eine Inventarerweiterung von $S_{i\text{-}1}$ um den Prädikator μ_i ist und A_i in S' gemäß DP als Definition gesetzt werden darf. ■

In den Übungsaufgaben soll V (weiter) gebraucht werden, d.h. die eingeführten Ausdrücke und die axiomatisch und definitorisch gesetzten Aussagen sollen verwendet werden, um weitere Aussagen über Verwandtschaftsverhältnisse zu beweisen. Ziel ist es dabei nicht, neue Erkenntnisse über solche Verhältnisse zu gewinnen, sondern das Beweisen und insbesondere das Anziehen von Axiomen und Definitionen in Beweisen zu üben. Insbesondere wird V aber im Folgenden als Beispiel für eine korrekt aufgebaute Sprache dienen, in der alle Definitionen den nun zu betrachtenden formalen Ansprüchen an Definitionen genügen.

Die folgenden zwei Tabellen geben noch einmal einen Überblick über die Axiome und Definitionen von V sowie über die Entwicklung von V aus L*:

[3.11] *Übersicht über die Axiome und Definitionen von* V

Axiome:

$[3.1]_A$ $\bigwedge x(\bigvee y(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(y)) \wedge \bigvee z(\text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg\text{weiblich}(z)))$

$[3.2]_A$ $\bigwedge x\bigwedge y\bigwedge z\bigwedge v(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{Elter-von}(z, x) \wedge \text{Elter-von}(v, x) \rightarrow y = z \vee y = v \vee z = v)$

$[3.3]_A$ $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Elter-von}(x, y) \rightarrow \neg\text{Elter-von}(y, x))$

$[3.4]_A$ $\neg\text{weiblich(o)} \wedge (\text{Elter-von(i, o)} \wedge \text{weiblich(i)}) \wedge (\text{Elter-von(h, o)} \wedge \neg\text{weiblich(h)})$

Definitionen:

$[3.5]_A$ $\bigwedge x(\text{männlich}(x) \leftrightarrow \neg\text{weiblich}(x))$

$[3.6]_A$ $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Kind-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(y, x))$

$[3.7]_A$ $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Vater-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(x, y) \wedge \text{männlich}(x))$

$[3.8]_A$ $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Mutter-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x))$

$[3.9]_A$ $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Tochter-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x))$

$[3.10]_A$ $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Sohn-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{männlich}(x))$

[3.12] *Von L* zu V*

Sprache	**Erweiterungsverhältnis**
Von L zu V_5*	
L*	Ausgangssprache
V_0	Inventarerweiterung von L* um die Prädikatoren 'Elter-von(.., ..)' und 'weiblich(..)'
V_1	Erweiterung von V_0 um das Axiom $[3.1]_A$
V_2	Erweiterung von V_1 um das Axiom $[3.2]_A$
V_3	Erweiterung von V_2 um das Axiom $[3.3]_A$
V_4	Inventarerweiterung von V_3 um die Individuenkonstanten 'o', 'h' und 'i'
V_5	Erweiterung von V_4 um das Axiom $[3.4]_A$ und

	Erweiterung von L* um die Axiome $[3.1]_A$, $[3.2]_A$, $[3.3]_A$, $[3.4]_A$, die Prädikatoren 'Elter-von(.., ..)' und 'weiblich(..)' und die Individuenkonstanten 'o', 'h' und 'i'
Von V_5 zu V	
V_6	Inventarerweiterung von V_5 um den Prädikator 'männlich(..)'
V_7	Erweiterung von V_5 um die Definition $[3.5]_A$ und den Prädikator 'männlich(..)' gemäß DP
V_8	Inventarerweiterung von V_7 um den Prädikator 'Kind-von(.., ..)'
V_9	Erweiterung von V_7 um die Definition $[3.6]_A$ und den Prädikator 'Kind-von(.., ..)' gemäß DP
V_{10}	Inventarerweiterung von V_9 um den Prädikator 'Vater-von(.., ..)'
V_{11}	Erweiterung von V_9 um die Definition $[3.7]_A$ und den Prädikator 'Vater-von(.., ..)' gemäß DP
V_{12}	Inventarerweiterung von V_{11} um den Prädikator 'Mutter-von(.., ..)'
V_{13}	Erweiterung von V_{11} um die Definition $[3.8]_A$ und den Prädikator 'Mutter-von(.., ..)' gemäß DP
V_{14}	Inventarerweiterung von V_{13} um den Prädikator 'Tochter-von(.., ..)'
V_{15}	Erweiterung von V_{13} um die Definition $[3.9]_A$ und den Prädikator 'Tochter-von(.., ..)' gemäß DP
V_{16}	Inventarerweiterung von V_{15} um den Prädikator 'Sohn-von(.., ..)'
V	Erweiterung von V_{15} um die Definition $[3.10]_A$ und den Prädikator 'Sohn-von(..)' gemäß DP und Erweiterung von V_5 um die Definitionen $[3.5]_A$, $[3.6]_A$, $[3.7]_A$, $[3.8]_A$, $[3.9]_A$, und $[3.10]_A$ und die Prädikatoren 'männlich(..)', 'Kind-von(.., ..)', 'Vater-von(.., ..)', 'Mutter-von(.., ..)', 'Tochter-von(.., ..)' und 'Sohn-von(.., ..)' gemäß DP.

Übung 3.3

Beweisen Sie die folgenden Aussagen in V:

(i) $\bigwedge x(\text{männlich}(x) \vee \text{weiblich}(x))$

(ii) $\neg\bigvee x(\text{männlich}(x) \wedge \text{weiblich}(x))$

(iii) $\bigwedge x \bigvee y \bigvee z(\text{Vater-von}(y, x) \wedge \text{Mutter-von}(z, x))$

(iv) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(\text{Vater-von}(x, y) \wedge \text{Vater-von}(z, y) \rightarrow x = z)$

(v) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(\text{Mutter-von}(x, y) \wedge \text{Mutter-von}(z, y) \rightarrow x = z)$

(vi) $\bigwedge x \bigvee y(\text{Tochter-von}(x, y) \vee \text{Sohn-von}(x, y))$

(vii) $\bigwedge x(\text{Mutter-von}(x, \text{o}) \rightarrow x = \text{i})$

(viii) $\bigwedge x(\text{Vater-von}(x, \text{o}) \rightarrow x = \text{h})$

(ix) $\bigwedge x(\text{Sohn-von}(\text{o}, x) \rightarrow x = \text{i} \vee x = \text{h})$

Übung 3.4

Zeigen Sie, dass die definitorischen Setzungen unter [3.7], [3.8], [3.9] und [3.10] gemäß DP korrekt sind (d.h., dass jeweils das Regelantezedens von DP erfüllt ist).

Übung 3.5

Legen Sie eine Tabelle im Stil von [3.12] an, in der Sie für jede Sprache ein spezifisches Erweiterungsverhältnis eintragen, das in [3.12] nicht aufgeführt ist.

4 Formale Ansprüche an Definitionen

Definitionen sollen die Verwendung des definierten Ausdrucks vollständig für alle Kontexte regulieren – der definierte Ausdruck soll eliminierbar sein und Definitionen sollen deswegen dem Kriterium der Eliminierbarkeit genügen (4.1). Definitionen sollen nur die Verwendung des definierten Ausdrucks regulieren, nicht aber die Bedeutung anderer Ausdrücke ›heimlich‹ verändern – Definitionen sollen dem Kriterium der Nichtkreativität genügen, d.h., die Erweiterung der jeweiligen Ausgangssprache um die Definition und den definierten Ausdruck soll eine konservative Erweiterung der Ausgangssprache sein (4.2).

Definitorische Erweiterungen einer Sprache um neue Ausdrücke sind Erweiterungen, bei denen die neuen Ausdrücke so eingeführt sind, dass sie eliminierbar sind und dass die Erweiterung konservativ ist. Regelgemäße Setzungen von Definitionen nach DP, DFB, und DIB führen zu definitorischen Erweiterungen, aber nicht alle definitorischen Erweiterungen kommen durch Setzung von Definitionen zu Stande (4.3).

4.1 Eliminierbarkeit

4.1.1 Der einfache Fall

Eliminierbarkeit eines atomaren Ausdrucks in einer Sprache S^* relativ auf eine Sprache S, die diesen Ausdruck nicht enthält, ist in erster Näherung gegeben, wenn in S^* zu jeder S^*-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ existiert, so dass die Bisubjunktion aus Γ' und Γ in S^* beweisbar ist. Genauer wird für LE-Sprachen festgelegt:

(4-1) **Definition.** *Eliminierbarkeit atomarer Ausdrücke*

Die atomaren Ausdrücke μ_1 *(der Kategorie* K_1 *und der Stelligkeit* s_1*), …,* μ_n *(der Kategorie* K_n *und der Stelligkeit* s_n*) sind* S*-eliminierbar in* S^* (Kurz: $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *sind in* S^* *relativ auf* S *eliminierbar*)

gdw

S ist eine LE-Sprache und S^* ist eine LE-Sprache und

(i) Es gibt ein S', so dass S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist und S^* eine Erweiterung von S' ist,

(ii) Für alle S^*-Aussagen Γ' gilt: Es gibt es eine S-Aussage Γ, so dass die Bisubjunktion aus Γ' und Γ in S^* beweisbar ist.

Das folgende Theorem gibt eine Spezialisierung für ADS-Sprachen:

(4-2) **Theorem.** *Eliminierbarkeit atomarer Ausdrücke in ADS-Sprachen*

Wenn S und S^* ADS-Sprachen sind, dann:

Die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) sind S-eliminierbar in S^*

gdw

(i) Es gibt ein S', so dass S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist und S^* eine Erweiterung von S' ist,

(ii) Für alle S^*-Aussagen Γ' gibt es eine S-Aussage Γ, so dass:

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$$

Beweisansatz: Ergibt sich mit Theorem (2-24) und Definition (4-1). ■

Als Beispiel betrachte man zunächst die LE-Sprachen L* und V_1 sowie den einstelligen V_1-Prädikator 'weiblich(..)'. Dieser ist in V_1 nicht L*-eliminierbar: Zwar ist Klausel (i) von Definition (4-1) erfüllt, aber es gibt nicht zu jeder V_1-Aussage Γ', eine L*-Aussage Γ, so dass die Bisubjunktion aus Γ' und Γ in V_1 beweisbar ist. Insbesondere gibt es zu der V_1-Aussage 'weiblich(x)' keine L*-Aussage Γ, so dass die Bisubjunktion aus 'weiblich(x)' und Γ in V_1 beweisbar ist.

Betrachtet man dagegen die LE-Sprachen V_7 und V_5 sowie den einstelligen V_7-Prädikator 'männlich(..)', dann gilt, dass 'männlich(..)' in V_7 relativ auf V_5 eliminierbar ist. Insbesondere ist in V_7 die Bisubjunktion aus 'männlich(x)' und der V_5-Aussage '¬weiblich(x)' beweisbar: Die Bisubjunktion ist umstandslos durch UB aus der Definition von 'männlich(..)' zu gewinnen.

Definitionen sollen nun allgemein so sein, dass der durch die Definition eingeführte Ausdruck in seiner Verwendung vollständig – für alle Kontexte – reguliert ist, d.h. so, dass der definierte Ausdruck in der um die Definition und den definierten Ausdruck erweiterten Sprache relativ auf die Ausgangssprache eliminierbar ist – sie sollen dem Kriterium der Eliminierbarkeit genügen. Dazu wird festgelegt:

(4-3) **Definition.** *Kriterium der Eliminierbarkeit*

A *genügt dem Kriterium der Eliminierbarkeit bezüglich $\mathcal{S}$ und des atomaren Ausdrucks* μ *(der Kategorie $\mathcal{K}$ und der Stelligkeit s)*
gdw
$\mathcal{S}$ ist eine ADS-Sprache und es gibt ein $\mathcal{S}'$, so dass
(i) $\mathcal{S}'$ ist eine Inventarerweiterung von $\mathcal{S}$ um den atomaren Ausdruck μ (der Kategorie $\mathcal{K}$ und der Stelligkeit *s*),
(ii) A ist eine $\mathcal{S}'$-Aussage und
(iii) Für alle $\mathcal{S}'$-Aussagen Γ' existiert eine $\mathcal{S}$-Aussage Γ, so dass:

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } \mathcal{S}\} \cup \{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$$

Genügt eine Aussage A bezüglich einer ADS-Sprache $\mathcal{S}$ und eines atomaren Ausdrucks μ dem Kriterium der Eliminierbarkeit und ist $\mathcal{S}$* eine Erweiterung von $\mathcal{S}$ um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ, dann ist μ in $\mathcal{S}$* $\mathcal{S}$-eliminierbar:

(4-4) **Theorem.** *Kriterium der Eliminierbarkeit und Eliminierbarkeit*

Wenn A bezüglich $\mathcal{S}$ und des atomaren Ausdrucks μ dem Kriterium der Eliminierbarkeit genügt und $\mathcal{S}$* eine Erweiterung von $\mathcal{S}$ um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ ist, dann ist μ in $\mathcal{S}$* relativ auf $\mathcal{S}$ eliminierbar.

Beweisansatz: Genüge A bezüglich S und des atomaren Ausdrucks μ dem Kriterium der Eliminierbarkeit und sei S* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ. Dann ergibt sich aus der Annahme, dass A bezüglich S und μ dem Kriterium der Eliminierbarkeit genügt und Definition (4-3), dass S eine ADS-Sprache und mithin auch eine LE-Sprache ist und dass es ein $\mathcal{S}'$ gibt, so dass $\mathcal{S}'$ eine Inventarerweiterung von S um den atomaren Ausdruck μ ist und es für alle $\mathcal{S}'$-Aussagen Γ' eine S-Aussage Γ gibt, so dass

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \cup \{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$$

Sodann ergibt sich aus der Annahme, dass S* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ ist, mit Definition (2-45), dass auch S* eine ADS- und somit eine LE-Sprache ist und dass es ein $\mathcal{S}''$ gibt, so dass $\mathcal{S}''$ eine Inventarerweiterung von S um den atomaren Ausdruck μ ist und S* eine Erweiterung von S'' um die Definition A ist. Seien nun S' und S'' wie verlangt.

Dann sind S' und S'' Inventarerweiterungen von S um den atomaren Ausdruck μ und somit gilt mit Theorem (2-12), dass S' und S'' identisch sind. Damit ist dann S* eine Erweiterung von S' um die Definition A. Daraus ergibt sich mit Definition (2-41), dass das Inventar von S* gleich dem Inventar von S' ist. Damit gilt für alle B:

B ist eine S'-Aussage
gdw
B ist eine S*-Aussage

Ferner ergibt sich nach Definition (2-8) daraus, dass S' eine Inventarerweiterung von S um den atomaren Ausdruck μ ist, dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S'$\}$ =
$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\}$

und mit Definition (2-41) ergibt sich daraus, dass S* eine Erweiterung von S' um die Definition A ist, dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S*$\}$ =
$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S'$\} \cup \{A\}$,

woraus sich insgesamt ergibt, dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S*$\}$ =
$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \cup \{A\}$.

Sei nun Γ' eine S*-Aussage. Dann ist Γ' eine S'-Aussage. Dann gibt es dementsprechend eine S-Aussage Γ, so dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \cup \{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$.

Damit gibt es aber eine S-Aussage Γ, so dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S*$\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$.

Da S* eine ADS-Sprache ist, gilt dann mit Theorem (2-24), dass es eine S-Aussage Γ gibt, so dass $\Gamma' \leftrightarrow \Gamma$ in S* beweisbar ist. Also gilt für alle S*-Aussagen Γ': Es gibt eine S-Aussage Γ, so dass $\Gamma' \leftrightarrow \Gamma$ in S* beweisbar ist. Damit ergibt sich insgesamt, dass S* und S LE-Sprachen sind und es mit S' eine Inventarerweiterung S' von S um μ gibt, so dass S* eine Erweiterung von S' ist, und dass es zu jeder S*-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ gibt, so dass die Bisubjunktion von Γ' und Γ in S* beweisbar ist. Damit ist nach Definition (4-1) μ in S* relativ auf S eliminierbar.
■

Glücklicherweise muss man nicht immer eigens prüfen, ob ein Definitionskandidat dem Kriterium der Eliminierbarkeit genügt, denn es gilt das folgende, hier vorgezogen notierte Theorem:

(4-6) **Theorem.** DP *garantiert Eliminierbarkeit*

(i) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S ist, dann genügt A bezüglich S und Φ dem Kriterium der Eliminierbarkeit.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S ist, dann ist Φ in S^* S-eliminierbar.

D.h., beim korrekten Definieren nach DP muss nicht eigens geprüft werden, ob ein Definitionskandidat dem Kriterium der Eliminierbarkeit genügt. Für die in Kapitel 6 etablierten Definitionsregeln gelten entsprechende Theoreme, so dass (bezogen auf die hiesigen Definitionsregeln) allgemein gilt: Beim regelgemäßen Definieren ist Eliminierbarkeit des definierten Ausdrucks relativ auf die Ausgangssprache gegeben.

Dieser Zusammenhang soll nun für die Definition von Prädikatoren gemäß DP näher erläutert werden. Zunächst gilt:

(4-5) **Theorem.** *Vorbereitungstheorem für Theorem* (4-6)

Ist S eine LE-Sprache, Φ ein n-stelliger S-Prädikator, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ paarweise verschiedene S-Variablen, Δ eine parameterfreie S-Formel, in der höchstens $\xi_1, \ldots, \xi_n$ frei sind und die Φ nicht zum Teilausdruck hat, und A eine S-Aussage der Form:

$\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta)$,

dann gilt: Es gibt zu jeder S-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ, die Φ nicht zum Teilausdruck hat, so dass $\{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$.

Beweisansatz: Sei S eine LE-Sprache, Φ ein n-stelliger S-Prädikator, Δ eine parameterfreie S-Formel, in der höchstens die paarweise verschiedenen S-Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ frei sind und die Φ nicht zum Teilausdruck hat, und A eine S-Aussage der Form:

$$\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta).$$

Dann gilt: Es gibt zu jeder S-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ, die Φ nicht zum Teilausdruck hat, so dass $\{A\} \vdash (\Gamma' \leftrightarrow \Gamma)$. Sei nämlich Γ' eine S-Aussage. Dann ist Φ Teilausdruck von Γ' oder nicht. Im zweiten Fall ist Γ' selbst eine S-Aussage, die Φ nicht zum Teilausdruck hat, und es gilt $\vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma'$ und damit $\{A\} \vdash (\Gamma' \leftrightarrow \Gamma')$. Im zweiten Fall ist also Γ' selbst die gesuchte Aussage.

Sei nun Φ Teilausdruck von Γ'. Unter den gemachten Voraussetzungen kann dann jede Teilformel $\Phi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ (mit beliebigen S-Termen $\theta_1, \ldots, \theta_n$) von Γ' durch eine S-Formel Δ' ersetzt werden, so dass für das Ergebnis dieser Ersetzung, Γ, gilt:

$$\{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$$

Dabei ist für eine gegebene Teilformel $\Phi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ von Γ' Δ' jeweils eine Formel, die aus Δ dadurch entsteht, dass in Δ die Terme $\theta_1, \ldots, \theta_n$ in passender Weise für die Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ substituiert werden. ■

Eine derartige *Elimination von* Φ *in* Γ' *bzgl.* A kann durch eine Ableitung von $\Gamma' \leftrightarrow \Gamma$ für eine entsprechende Aussage Γ aus {A} erfolgen. Falls $\Gamma' \leftrightarrow \Gamma$ nicht bereits eine Instanz von A ist, wird dabei Γ' in der Links-Rechts-Richtung der Ableitung der Bisubjunktion unter Ausnutzung von A in eine Φ-freie Aussage Γ überführt, während man mit der Rechts-Links-Richtung prüft, ob die Überführung von Γ' in Γ bzgl. A korrekt vorgenommen wurde.

Man betrachte dazu folgendes Beispiel: 'männlich(..)' ist ein einstelliger V_6-Prädikator und '¬weiblich(x)' ist eine parameterfreie V_6-Formel, in der nur 'x' frei ist. Ferner ist die V_6-Aussage '$\bigwedge x$(männlich(x) ↔ ¬weiblich(x))' eine Aussage, wie sie in Theorem (4-5) verlangt wird. Dementsprechend gilt, dass es zu jeder V_6-Aussage Γ' eine V_6-Aussage Γ gibt, die 'männlich(..)' nicht zum Teilausdruck hat – und die somit eine V_5-Aussage ist –, so dass gilt:

{'$\bigwedge x$(männlich(x) ↔ ¬weiblich(x))'} $\vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$.

Als Beispiel für die Elimination von 'männlich(..)' in einer Aussage bzgl. '$\bigwedge x$(männlich(x) ↔ ¬weiblich(x))' betrachte man die folgende Ableitung, welche die Elimination von 'männlich(..)' in

$\bigvee u$(männlich(u) ∧ $\bigvee w$(Elter-von(u, w) ∧ ¬männlich(w)))

bzgl. '$\bigwedge x$(männlich(x) ↔ ¬weiblich(x))' zeigt:

[4.1] *Eliminations-Beispiel*

1	Sei_{1}	$\bigwedge x$(männlich(x) ↔ ¬weiblich(x))	
2	$\text{Sei}_{1,2}$	$\bigvee u$(männlich(u) ∧ $\bigvee w$(Elter-von(u, w) ∧ ¬männlich(w)))	
3	$\text{Sei}_{1,2,3}$	männlich(u) ∧ $\bigvee w$(Elter-von(u, w) ∧ ¬männlich(w))	
4	$\text{Also}_{1,2,3}$	männlich(u)	| KB; 3
5	$\text{Also}_{1,2,3}$	männlich(u) ↔ ¬weiblich(u)	| UB; 1
6	$\text{Also}_{1,2,3}$	¬weiblich(u)	| BB; 4, 5
7	$\text{Also}_{1,2,3}$	$\bigvee w$(Elter-von(u, w) ∧ ¬männlich(w))	| KB; 3
8	$\text{Sei}_{1,2,3,8}$	Elter-von(u, w) ∧ ¬männlich(w)	
9	$\text{Also}_{1,2,3,8}$	Elter-von(u, w)	| KB; 8
10	$\text{Also}_{1,2,3,8}$	¬männlich(w)	| KB; 8
11	$\text{Wäre}_{1,2,3,8,11}$	¬weiblich(w)	
12	$\text{Also}_{1,2,3,8,11}$	männlich(w) ↔ ¬weiblich(w)	| UB; 1
13	$\text{Also}_{1,2,3,8,11}$	männlich(w)	| BB; 11, 12

14	Also$_{1,2,3,8,11}$	¬männlich(w)	| W; 10
15	Also$_{1,2,3,8}$	¬¬weiblich(w)	| NE; 11-14
16	Also$_{1,2,3,8}$	Elter-von(u, w) ∧ ¬¬weiblich(w)	| KE; 9, 15
17	Also$_{1,2,3,8}$	⋁*w*(Elter-von(u, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*))	| PE; 16
18	Also$_{1,2,3}$	⋁*w*(Elter-von(u, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*))	| PB; 7, 8-17
19	Also$_{1,2,3}$	¬weiblich(u) ∧ ⋁*w*(Elter-von(u, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*))	| KE; 6, 18
20	Also$_{1,2,3}$	⋁*u*(¬weiblich(*u*) ∧ ⋁*w*(Elter-von(*u*, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*)))	| PE; 19
21	Also$_{1,2}$	⋁*u*(¬weiblich(*u*) ∧ ⋁*w*(Elter-von(*u*, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*)))	| PB; 2, 3-20
22	Also$_{1}$	⋁*u*(männlich(*u*) ∧ ⋁*w*(Elter-von(*u*, *w*) ∧ ¬männlich(*w*))) → ⋁*u*(¬weiblich(*u*) ∧ ⋁*w*(Elter-von(*u*, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*)))	| SE; 2-21
23	Sei$_{1,23}$	⋁*u*(¬weiblich(*u*) ∧ ⋁*w*(Elter-von(*u*, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*)))	
24	Sei$_{1,23,24}$	¬weiblich(v) ∧ ⋁*w*(Elter-von(v, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*))	
25	Also$_{1,23,24}$	¬weiblich(v)	| KB; 24
26	Also$_{1,23,24}$	männlich(v) ↔ ¬weiblich(v)	| UB; 1
27	Also$_{1,23,24}$	männlich(v)	| BB; 25, 26
28	Also$_{1,23,24}$	⋁*w*(Elter-von(v, *w*) ∧ ¬¬weiblich(*w*))	| KB; 24
29	Sei$_{1,23,24,29}$	Elter-von(v, z) ∧ ¬¬weiblich(z)	
30	Also$_{1,23,24,29}$	Elter-von(v, z)	| KB; 29
31	Also$_{1,23,24,29}$	¬¬weiblich(z)	| KB; 29
32	Wäre$_{1,23,24,29,32}$	männlich(z)	
33	Also$_{1,23,24,29,32}$	männlich(z) ↔ ¬weiblich(z)	| UB; 1
34	Also$_{1,23,24,29,32}$	¬weiblich(z)	| BB; 32, 33
35	Also$_{1,23,24,29,32}$	¬¬weiblich(z)	| W; 31
36	Also$_{1,23,24,29}$	¬männlich(z)	| NE; 32-35
37	Also$_{1,23,24,29}$	Elter-von(v, z) ∧ ¬männlich(z)	| KE; 30, 36
38	Also$_{1,23,24,29}$	⋁*w*(Elter-von(v, *w*) ∧ ¬männlich(*w*))	| PE; 37
39	Also$_{1,23,24}$	⋁*w*(Elter-von(v, *w*) ∧ ¬männlich(*w*))	| PB; 28, 29-38
40	Also$_{1,23,24}$	männlich(v) ∧ ⋁*w*(Elter-von(v, *w*) ∧ ¬männlich(*w*))	| KE; 27, 39
41	Also$_{1,23,24}$	⋁*u*(männlich(*u*) ∧ ⋁*w*(Elter-von(*u*, *w*) ∧ ¬männlich(*w*)))	| PE; 40

42	$\text{Also}_{1,23}$	$\bigvee u(\text{männlich}(u) \wedge \bigvee w(\text{Elter-von}(u, w) \wedge \neg\text{männlich}(w)))$	| PB; 23, 24-41
43	Also_{1}	$\bigvee u(\neg\text{weiblich}(u) \wedge \bigvee w(\text{Elter-von}(u, w) \wedge \neg\neg\text{weiblich}(w)))$ $\rightarrow$ $\bigvee u(\text{männlich}(u) \wedge \bigvee w(\text{Elter-von}(u, w) \wedge \neg\text{männlich}(w)))$	| SE; 23-42
44	Also_{1}	$\bigvee u(\text{männlich}(u) \wedge \bigvee w(\text{Elter-von}(u, w) \wedge \neg\text{männlich}(w)))$ $\leftrightarrow$ $\bigvee u(\neg\text{weiblich}(u) \wedge \bigvee w(\text{Elter-von}(u, w) \wedge \neg\neg\text{weiblich}(w)))$	| BE; 22, 43

Wie man sieht, findet die eigentliche Eliminationsarbeit in der Links-Rechts-Richtung der Ableitung der Bisubjunktion statt, indem die Ausgangsaussage unter Ausnutzung von '$\bigwedge x(\text{männlich}(x) \leftrightarrow \neg\text{weiblich}(x))$' in eine Aussage überführt wird, in der die einschlägigen 'Teilformeln' 'männlich(u)' und 'männlich(w)' durch die Formeln '$\neg$weiblich(u)' und '$\neg$weiblich(w)' ersetzt sind. Mit der Rechts-Links-Richtung wird dann nur noch geprüft, ob die Überführung korrekt erfolgt ist.

Mit Theorem (4-5) ergibt sich nun das gewünschte Theorem:

(4-6) **Theorem.** DP *garantiert Eliminierbarkeit*

(i) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S ist, dann genügt A bezüglich S und Φ dem Kriterium der Eliminierbarkeit.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S ist, dann ist Φ in S^* S-eliminierbar.

Beweisansatz: Sei S* eine Erweiterung von S um die Definition A und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S. Mit Theorem (2-50) gilt dann, dass S, S* ADS-Sprachen sind und S* eine Erweiterung von S um die Definition A und den Prädikator Φ ist, DP eine Definitionsregel von S ist und es ein S' gibt, so dass S' eine Inventarerweiterung von S um den Prädikator Φ ist und A in S' gemäß DP als Definition gesetzt werden darf.

Sei nun S' so wie verlangt. Dann hat A die Gestalt

$$\bigwedge\xi_1 \ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta),$$

wobei Δ eine parameterfreie S-Formel ist, in der höchstens $\xi_1, \ldots, \xi_n$ frei sind. Sodann gilt für alle B:

B ist eine S-Aussage
gdw
B ist eine S'-Aussage, die Φ nicht zum Teilausdruck hat
gdw
B ist eine S*-Aussage, die Φ nicht zum Teilausdruck hat.

Damit gilt insbesondere auch, dass Δ eine S'-Aussage ist, die Φ nicht zum Teilausdruck hat.

Nun zu (i): Sei Γ' eine S'-Aussage. Dann gilt mit Theorem (4-5), dass es eine S'-Aussage Γ gibt, so dass Φ kein Teilausdruck von Γ ist und

$$\{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$$

Sei Γ so. Dann gilt:

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \cup \{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$$

Sodann ist Γ eine S'-Aussage, die Φ nicht zum Teilausdruck hat und damit auch eine S-Aussage. Also gibt es eine S-Aussage Γ, so dass

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \cup \{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$$

Damit gibt es für jede S'-Aussage Γ' eine entsprechende S-Aussage Γ. Damit ergibt sich insgesamt: S ist eine ADS-Sprache und es gibt ein *S*', so dass Klausel (i) und (ii) von Definition (4-3) erfüllt sind und somit genügt A bezüglich S und Φ dem Kriterium der Eliminierbarkeit.

Nun zu (ii). S* ist eine Erweiterung von S um die Definition A und den Prädikator Φ und nach (i) genügt A bezüglich S und Φ dem Kriterium der Eliminierbarkeit. Daraus ergibt sich mit Theorem (4-4), dass Φ in S* relativ auf S eliminierbar ist. ■

Man betrachte dazu folgendes Beispiel: V_7 ist die Erweiterung von V_5 um die Definition '⋀*x*(männlich(*x*) ↔ ¬weiblich(*x*))' und den einstelligen Prädikator 'männlich(..)' gemäß DP. Also ist nach Theorem (4-6) 'männlich(..)' in V_7 relativ auf V_5 eliminierbar. Tatsächlich ergibt sich mit Theorem (4-5) und der Tatsache, dass das Inventar von V_7 gleich dem Inventar von V_6, der Inventarerweiterung von V_5 um den einstelligen Prädikator 'männlich(..)' ist, dass es für jede V_7-Aussage Γ' eine V_5-Aussage Γ gibt, so dass gilt

$$\{\text{'}\bigwedge x(\text{männlich}(x) \leftrightarrow \neg\text{weiblich}(x))\text{'}\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma,$$

womit natürlich auch die Bisubjunktion aus den beiden fraglichen Aussagen in V_7 beweisbar ist.

Die vorangehenden Betrachtungen haben verdeutlicht, dass und wie die vollständige Regulierung der Verwendung eines Prädikators durch eine Definition gemäß DP gewährleistet, dass der betreffende Prädikator in einer Erweiterung einer Sprache um die Definition und den Prädikator eliminierbar ist. Die aufgeführten Zusammenhänge zwischen regelgemäßen

Definitionen und der Eliminierbarkeit der definierten Ausdrücke gelten aber nicht nur für die Definition von Prädikatoren gemäß DP, sondern – wie eingangs erwähnt – auch für die regelgemäße Definition anderer atomarer Ausdrücke, nämlich Funktoren und Individuenkonstanten gemäß den in Kap. 6 etablierten Definitionsregeln DFB und DIB.

Nach diesen Regeln haben Definitionsaussagen für n-stellige Funktoren φ die Gestalt

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n\bigwedge\omega(\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \omega \leftrightarrow \Delta),$$

wobei Δ eine parameterfreie Formel der Ausgangssprache ist, die dementsprechend φ nicht zum Teilausdruck hat und in der höchstens die paarweise verschiedenen Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$, ω frei sind (↑ 6.1), während Definitionsaussagen für Individuenkonstanten α die Gestalt

$$\bigwedge\omega(\alpha = \omega \leftrightarrow \Delta)$$

haben, wobei Δ eine parameterfreie Formel der Ausgangssprache ist, die dementsprechend α nicht zum Teilausdruck hat und in der höchstens ω frei ist (↑ 6.2).

Das folgende, ohne Beweisansatz notierte Theorem besagt, dass für derartige Aussagen Analoga zu Theorem (4-5) gelten:

(4-7) **Theorem.** *Vorbereitungstheorem für Theorem* (4-8)

(i) Ist S eine LE-Sprache, φ ein n-stelliger S-Funktor, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, ω paarweise verschiedene S-Variablen, Δ eine parameterfreie S-Formel, in der höchstens $\xi_1, \ldots, \xi_n$, ω frei sind und die φ nicht zum Teilausdruck hat, und A eine S-Aussage der Form:
$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n\bigwedge\omega(\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \omega \leftrightarrow \Delta)$,
dann gilt: Es gibt zu jeder S-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ, die φ nicht zum Teilausdruck hat, so dass $\{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$.

(ii) Ist S eine LE-Sprache, α eine S-Individuenkonstante, ω eine S-Variable, Δ eine parameterfreie S-Formel, in der höchstens ω frei ist und die α nicht zum Teilausdruck hat, und A eine S-Aussage der Form: $\bigwedge\omega(\alpha = \omega \leftrightarrow \Delta)$,
dann gilt: Es gibt zu jeder S-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ, die α nicht zum Teilausdruck hat, so dass $\{A\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$.

Damit ergeben sich dann analoge Resultate zu den obigen Ergebnissen, so dass insgesamt gilt:

(4-8) **Theorem.** DP, DFB, DIB *garantieren Eliminierbarkeit*

(i) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist, dann genügt A bezüglich S und μ dem Kriterium der Eliminierbarkeit.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist, dann ist μ in S^* S-eliminierbar.

4.1.2 Von der Endsprache zur Ausgangssprache

Mit den erreichten Resultaten lässt sich zeigen, dass in einer ADS-Sprache, die aus der schrittweisen Erweiterung einer anderen ADS-Sprache durch die Einführung neuer Ausdrücke mit Definitionen, die gemäß DP, DFB, DIB zulässig sind, resultiert, die definierten Ausdrücke relativ auf die Ausgangssprache eliminierbar sind. Zunächst gilt nämlich das folgende Theorem, das eine Verallgemeinerung der Theoreme (4-5) und (4-7) darstellt:

(4-9) **Theorem.** *Vorbereitungstheorem für Theorem* (4-10)
Wenn S* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist,
dann gibt es zu jeder S*-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ, so dass $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$.

Beweisansatz: Sei S* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S.

Mit Definition (2-49) gilt dann, dass S, S* ADS-Sprachen sind und S* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist, DP, DFB, DIB Definitionsregeln von S sind und es eine Folge $S_0, \ldots, S_n$ von ADS-Sprachen gibt, so dass S_0 = S und S_n = S* und für alle i ($1 \leq i \leq n$) gilt: S_i ist eine Erweiterung von S_{i-1} um die Definition A_i und den atomaren Ausdruck μ_i und es gibt ein S', so dass S' eine Inventarerweiterung von S_{i-1} um den atomaren Ausdruck μ_i der Kategorie K_i ist und A_i in S'gemäß DP oder DFB oder DIB als Definition gesetzt werden darf.

Seien nun $S_0, \ldots, S_n$ wie verlangt. Dann gilt für jedes i ($1 \leq i \leq n$), dass μ_i eine S_i-Individuenkonstante α oder ein r-stelliger S_i-Prädikator Φ oder ein r-stelliger S_i-Funktor φ ist. Sodann gilt für jedes i ($1 \leq i \leq n$), dass kein μ_j mit $i \leq j \leq n$ ein Ausdruck von S_{i-1} ist und dass das Inventar von S_i gleich dem Inventar der Inventarerweiterung von S_{i-1} um μ_i ist. Sodann gilt für alle i ($1 \leq i \leq n$), dass A_i ein S_i-Aussage ist, die für μ_i und eine die entsprechenden Voraussetzungen erfüllende S_{i-1}-Formel Δ_i die jeweils passende Gestalt

$\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_r(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_r) \leftrightarrow \Delta_i)$

bzw.

$\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_r \bigwedge\omega(\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \omega \leftrightarrow \Delta_i)$

bzw.

$\bigwedge\omega(\alpha = \omega \leftrightarrow \Delta_i)$

hat.

Dann ergibt sich aus den Voraussetzungen mit den Theoremen (4-5) und (4-7) für jedes S_i ($1 \leq i \leq n$), dass es zu jeder S_i-Aussage Γ' eine S_{i-1}-Aussage Γ gibt, so dass $\{A_i\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$.

Geht man nun für ein i ($1 \leq i \leq n$) von einer S_i-Aussage Γ' aus, dann kann man diese Überführungen von S_i in S_{i-1}-Aussagen nacheinander ausführen, bis man bei einer S_0-Aussage Γ angekommen ist, für die gilt:

$\{A_1, \ldots, A_i\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$

D.h., für jedes S_i ($1 \leq i \leq n$) gilt, dass es zu jeder S_i-Aussage Γ' eine S_0-Aussage Γ gibt, so dass $\{A_1, \ldots, A_i\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$. Damit gilt insbesondere auch, dass es zu jeder S_n-Aussage Γ' eine S_0-Aussage Γ gibt, so dass

$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$

Nun ist $S_0 = S$ und $S_n = S^*$ und damit ergibt sich, dass es zu jeder S^*-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ gibt, so dass $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$. ■

Mit Theorem (4-9) ergibt sich dann das das folgende Theorem:

(4-10) **Theorem.** *Allgemeines Eliminierbarkeitstheorem für* DP, DFB, DIB

Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist,
dann sind die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) in S^* relativ auf S eliminierbar.

Beweisansatz: Sei S* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S.

Mit Definition (2-49) gilt dann dass S, S* ADS-Sprachen sind und:

$\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \{A \mid A \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\}$

und mit Theorem (4-9) gilt dann, dass es zu jeder S*-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ gibt, so dass

$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma,$

woraus sich insgesamt ergibt, dass es zu jeder S*-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ gibt, so dass

$\{A \mid A \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma,$

und somit, dass es zu jeder S-Aussage Γ' eine S*-Aussage Γ gibt, so dass die Bisubjunktion aus Γ' und Γ in S* beweisbar ist.

Nun ergibt sich aus den Annahmen auch, dass S und S* LE-Sprachen sind und dass es eine Inventarerweiterung S' von S um $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt, so dass S* eine Erweiterung von S' ist, womit sich dann mit Definition (4-1) ergibt, dass $\mu_1, \ldots, \mu_n$ in S* relativ auf S eliminierbar sind. ■

Man betrachte dazu das Beispiel V (wozu man sich am besten die Übersichten [3.11] und [3.12] ins Gedächtnis ruft): V ist eine Erweiterung von V_5 um die Definitionen $[3.5]_A$, $[3.6]_A$, $[3.7]_A$, $[3.8]_A$, $[3.9]_A$, $[3.10]_A$ und die Prädikatoren 'männlich(..)', 'Kind-von(.., ..)', 'Vater-von(.., ..)', 'Mutter-von(.., ..)', 'Tochter-von(.., ..)' und 'Sohn-von(.., ..)' gemäß DP. Wählt man nun die V-Aussage

$\text{Sohn-von}(o, i) \wedge \bigwedge x(\text{Mutter-von}(x, o) \rightarrow x = i) \wedge \bigvee y(\text{Tochter-von}(i, y) \wedge \text{Vater-von}(y, i))$

als Beispielaussage, so lässt sich der Beweisansatz zu Theorem (4-9) wie folgt nachvollziehen. Zunächst bekommt man folgende Einzelübergänge:

- mit $[3.10]_A$ von V zu V_{15}

$\{\text{'}\bigwedge x \bigwedge y(\text{Sohn-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{männlich}(x))\text{'}\} \vdash$
$\text{'}\,(\text{Sohn-von}(o, i) \wedge \bigwedge x(\text{Mutter-von}(x, o) \rightarrow x = i) \wedge \bigvee y(\text{Tochter-von}(i, y) \wedge \text{Vater-von}(y, i))$
$\leftrightarrow$
$\text{Kind-von}(o, i) \wedge \text{männlich}(o) \wedge \bigwedge x(\text{Mutter-von}(x, o) \rightarrow x = i)$
$\wedge \bigvee y(\text{Tochter-von}(i, y) \wedge \text{Vater-von}(y, i)))\text{ '}$

- mit $[3.9]_A$ von V_{15} zu V_{13}

$\{\text{'}\bigwedge x \bigwedge y(\text{Tochter-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x))\text{'}\} \vdash$
$\text{'}(\text{Kind-von}(o, i) \wedge \text{männlich}(o) \wedge \bigwedge x(\text{Mutter-von}(x, o) \rightarrow x = i) \wedge$
$\bigvee y(\text{Tochter-von}(i, y) \wedge \text{Vater-von}(y, i))$
$\leftrightarrow$
$\text{Kind-von}(o, i) \wedge \text{männlich}(o) \wedge \bigwedge x(\text{Mutter-von}(x, o) \rightarrow x = i)$
$\wedge \bigvee y(\text{Kind-von}(i, y) \wedge \text{weiblich}(i) \wedge \text{Vater-von}(y, i)))\text{'}$

- mit $[3.8]_A$ von V_{13} zu V_{11}

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Mutter-von(x, y) ↔ Elter-von(x, y) ∧ weiblich(x))'} ⊢
'(Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) → x = i)
∧ $\bigvee y$(Kind-von(i, y) ∧ weiblich(i) ∧ Vater-von(y, i))
↔
Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)
∧ $\bigvee y$(Kind-von(i, y) ∧ weiblich(i) ∧ Vater-von(y, i)))'

- mit $[3.7]_A$ von V_{11} zu V_9

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Vater-von(x, y) ↔ Elter-von(x, y) ∧ männlich(x))'} ⊢
' (Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)
∧ $\bigvee y$(Kind-von(i, y) ∧ weiblich(i) ∧ Vater-von(y, i))
↔
Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)
∧ $\bigvee y$(Kind-von(i, y) ∧ weiblich(i) ∧ Elter-von(y, i) ∧ männlich(y)))'

- mit $[3.6]_A$ von V_9 zu V_7

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Kind-von(x, y) ↔ Elter-von(y, x))'} ⊢
' (Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)
∧ $\bigvee y$(Kind-von(i, y) ∧ weiblich(i) ∧ Elter-von(y, i) ∧ männlich(y))
↔
Elter-von(i, o) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)
∧ $\bigvee y$(Elter-von(y, i) ∧ weiblich(i) ∧ Elter-von(y, i) ∧ männlich(y)))'

- mit $[3.5]_A$ von V_7 zu V_5

{'$\bigwedge x$(männlich(x) ↔ ¬weiblich(x))'} ⊢
'(Elter-von(i, o) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)
∧ $\bigvee y$(Elter-von(y, i) ∧ weiblich(i) ∧ Elter-von(y, i) ∧ männlich(y))
↔
Elter-von(i, o) ∧ ¬weiblich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)
∧ $\bigvee y$(Elter-von(y, i) ∧ weiblich(i) ∧ Elter-von(y, i) ∧ ¬weiblich(y)))'

Kombiniert man nun diese Übergänge kommt man

- mit $[3.10]_A$ von V zu V_{15}

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Sohn-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ männlich(x))'} ⊢
'(Sohn-von(o, i) ∧ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) → x = i) ∧ $\bigvee y$(Tochter-von(i, y) ∧ Vater-von(y, i))
↔
Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) → x = i) ∧
$\bigvee y$(Tochter-von(i, y) ∧ Vater-von(y, i)))'

- mit $[3.10]_A$ und $[3.9]_A$ von V zu V_{13}

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Sohn-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ männlich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Tochter-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ weiblich(x))'} ⊢

' (Sohn-von(o, i) ∧ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) → x = i) ∧ $\bigvee y$(Tochter-von(i, y) ∧ Vater-von(y, i))

↔

Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) → x = i)

∧ $\bigvee y$(Kind-von(i, y) ∧ weiblich(i) ∧ Vater-von(y, i)))'

○ mit $[3.10]_A$, $[3.9]_A$ und $[3.8]_A$ von V zu V_{11}

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Sohn-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ männlich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Tochter-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ weiblich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Mutter-von(x, y) ↔ Elter-von(x, y) ∧ weiblich(x))'} ⊢

'(Sohn-von(o, i) ∧ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) → x = i) ∧ $\bigvee y$(Tochter-von(i, y) ∧ Vater-von(y, i))

↔

Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)

∧ $\bigvee y$(Kind-von(i, y) ∧ weiblich(i) ∧ Vater-von(y, i)))'

○ mit $[3.10]_A$, $[3.9]_A$, $[3.8]_A$ und $[3.7]_A$ von V zu V_9

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Sohn-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ männlich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Tochter-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ weiblich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Mutter-von(x, y) ↔ Elter-von(x, y) ∧ weiblich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Vater-von(x, y) ↔ Elter-von(x, y) ∧ männlich(x))'} ⊢

'(Sohn-von(o, i) ∧ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) → x = i) ∧ $\bigvee y$(Tochter-von(i, y) ∧ Vater-von(y, i))

↔

Kind-von(o, i) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)

∧ $\bigvee y$(Kind-von(i, y) ∧ weiblich(i) ∧ Elter-von(y, i) ∧ männlich(y)))'

○ mit $[3.10]_A$, $[3.9]_A$, $[3.8]_A$, $[3.7]_A$ und $[3.6]_A$ von V zu V_7

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Sohn-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ männlich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Tochter-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ weiblich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Mutter-von(x, y) ↔ Elter-von(x, y) ∧ weiblich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Vater-von(x, y) ↔ Elter-von(x, y) ∧ männlich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Kind-von(x, y) ↔ Elter-von(y, x))'} ⊢

'(Sohn-von(o, i) ∧ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) → x = i) ∧ $\bigvee y$(Tochter-von(i, y) ∧ Vater-von(y, i))

↔

Elter-von(i, o) ∧ männlich(o) ∧ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) ∧ weiblich(x) → x = i)

∧ $\bigvee y$(Elter-von(y, i) ∧ weiblich(i) ∧ Elter-von(y, i) ∧ männlich(y)))'

○ und letztendlich mit $[3.10]_A$, $[3.9]_A$, $[3.8]_A$, $[3.7]_A$, $[3.6]_A$ und $[3.5]_A$ von V zu V_5

{'$\bigwedge x \bigwedge y$(Sohn-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ männlich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Tochter-von(x, y) ↔ Kind-von(x, y) ∧ weiblich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Mutter-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(x, y) $\wedge$ weiblich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Vater-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(x, y) $\wedge$ männlich(x))',

'$\bigwedge x \bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\leftrightarrow$ Elter-von(y, x))',

'$\bigwedge x$(männlich(x) $\leftrightarrow$ $\neg$weiblich(x))'} $\vdash$

'(Sohn-von(o, i) $\wedge$ $\bigwedge x$(Mutter-von(x, o) $\rightarrow$ x = i) $\wedge$ $\bigvee y$(Tochter-von(i, y) $\wedge$ Vater-von(y, i))

$\leftrightarrow$

Elter-von(i, o) $\wedge$ $\neg$weiblich(o) $\wedge$ $\bigwedge x$(Elter-von(x, o) $\wedge$ weiblich(x) $\rightarrow$ x = i)

$\wedge$ $\bigvee y$(Elter-von(y, i) $\wedge$ weiblich(i) $\wedge$ Elter-von(y, i) $\wedge$ $\neg$weiblich(y)))'

So wie hier exemplarisch vorgeführt, gibt es nach Theorem (4-9) zu jeder V-Aussage Γ' eine V_5-Aussage Γ, so dass

{$[3.10]_A$, $[3.9]_A$, $[3.8]_A$, $[3.7]_A$, $[3.6]_A$, $[3.5]_A$} $\vdash$ Γ' $\leftrightarrow$ Γ.

Am Beispiel sollte auch verdeutlicht werden, dass unter den entsprechenden Voraussetzungen ein solches Γ mit Hilfe der entsprechenden A_1, …, A_n zu einem vorgegeben Γ' – durch wiederholte Elimination – effektiv konstruiert werden kann.

Dass eine Regulierung der Verwendung für alle Kontexte, wie sie mit Definitionen gemäß DP, DFB und DIB geleistet wird, wünschenswert ist, hängt u.a. mit dem Problem der unentscheidbaren Aussagen zusammen. Die folgenden Definitionen regulieren die (Un)Entscheidbarkeitsrede für LE-Sprachen:

(4-11) **Definition.** *In einer Sprache unentscheidbare Aussage*
Γ ist genau dann unentscheidbar in S, wenn S eine LE-Sprache und Γ eine S-Aussage ist und weder Γ noch ¬Γ in S beweisbar sind.

(4-12) **Definition.** *In einer Sprache entscheidbare Aussage*
Γ ist genau dann entscheidbar in S, wenn S eine LE-Sprache und Γ eine S-Aussage ist und Γ oder ¬Γ in S beweisbar sind.

Für ADS-Sprachen gilt:

(4-13) **Theorem.** *(Un)Entscheidbarkeit in ADS-Sprachen*
Wenn S eine ADS-Sprache und Γ eine S-Aussage ist, dann ist Γ genau dann (un)entscheidbar in S, wenn Γ (un)entscheidbar durch {Δ | Δ ist Axiom oder Definition von S} ist.

Viele der Aussagen, die in einer gegeben Sprache unentscheidbar sind, sind nicht ›an sich‹ interessant. Dies gilt beispielsweise für viele Aussagen, die Parameter enthalten. So wird keine der hier entwickelten Verwandtschaftssprachen die Aussage 'weiblich(x)' entscheiden, ohne dass uns dies kümmern würde (zumindest sollte es uns nicht kümmern) – derartige Aussagen interessieren nicht an sich, sondern nur in bestimmten Ableitungsverhältnissen:

Parameter sind eben nur dazu gedacht, in einem bestimmten Folgerungszusammenhang unspezifisch, aber fest gewählte Gebilde zu vertreten, sie dienen aber nicht zur dauerhaften Bezugnahme auf bestimmte Individuen, an deren Eigenschaften wir Interesse hätten.

Anders sieht es aus, wenn eine Aussage unentscheidbar ist, die in dem Sinne interessant ist, dass wir wissen wollen, ob sie gilt oder nicht. So könnte uns etwa die V-Aussage '$\forall x$ Vater-von(o, x)' interessieren, obwohl sie in V nicht entscheidbar ist. Ist nun Γ eine Aussage, die nicht entscheidbar, aber interessant ist, dann verbringt man oft viel Arbeit mit Beweis- und Widerlegungsversuchen, bis man endlich merkt (und nachweisen kann!), dass die Aussage unentscheidbar ist.

Γ *und* Γ' *sind in* S *äquivalent* genau dann, wenn S eine Sprache ist und Γ, Γ' S-Aussagen sind und die Bisubjunktion aus Γ und Γ' in S beweisbar ist. Indem nun eine regelgemäße Definition die Verwendung des definierten Ausdrucks für alle Kontexte reguliert und so seine Eliminierbarkeit sicherstellt, ist es ausgeschlossen, dass es in der um die Definition erweiterten Sprache unentscheidbare Aussagen gibt, die in dem Sinne ›neu‹ sind, dass sie nicht in der erweiterten Sprache zu bereits in der Ausgangssprache unentscheidbaren Aussagen äquivalent sind:

(4-14) **Theorem.** *Regelgemäße Definitionen verhindern ›neue‹ unentscheidbare Aussagen*

Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist,
dann gibt es zu jeder S^*-Aussage Γ', die in S^* unentscheidbar ist, eine S-Aussage Γ, so dass Γ' und Γ in S^* äquivalent sind und Γ bereits in S unentscheidbar ist.

Beweisansatz: Sei S* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S. Dann sind S* und S ADS-Sprachen und ferner gilt mit Theorem (4-9), dass es zu jeder S*-Aussage Γ' eine S-Aussage Γ gibt, so dass $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$. Sei nun B' eine in S* unentscheidbare S*-Aussage. Dann gibt es eine S-Aussage B, so dass

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B' \leftrightarrow B.$$

Sei B so. Wäre nun B in S entscheidbar, dann würde gelten:

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \vdash B$$

oder

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \vdash \neg B$$

Nun ergibt sich aber aus der Voraussetzung, dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S^*\} =$

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\} \cup \{A_1, \ldots, A_n\}$

Damit gilt dann zunächst:

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S^*\} \vdash B$

oder

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S^*\} \vdash \neg B$.

Sodann gilt wegen $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B' \leftrightarrow B$, dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S^*\} \vdash B' \leftrightarrow B$,

und damit, dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S^*\} \vdash B'$

oder

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S^*\} \vdash \neg B'$,

was im Widerspruch zu der Annahme steht, dass B' in S* unentscheidbar ist.

Also ist B in S nicht entscheidbar, und da S eine LE-Sprache und B eine S-Aussage ist, ist B unentscheidbar in S. Sodann ergibt sich mit $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S^*\} \vdash B' \leftrightarrow B$, dass $B' \leftrightarrow B$ in S* beweisbar ist. Also ist B' in S* zu einer S-Aussage B äquivalent, die bereits in S nicht entscheidbar ist. ■

Bezogen auf das obige Beispiel ist etwa '$\forall x$ Vater-von(o, x)' in V zu der V_5 Aussage '$\forall x$(Elter-von(o, x) $\wedge$ $\neg$weiblich(o))' äquivalent, die bereits in V_5 nicht entscheidbar war.

Übung 4.1

Das Parallelenaxiom der Euklidischen Geometrie und die Kontinuumshypothese von CANTOR sind zwei prominente Beispiele für in einer Sprache unentscheidbare, aber interessante Aussagen. Wann wurde erkannt, dass das Parallelenaxiom nicht durch die restlichen Axiome der Euklidischen Geometrie entschieden wird, und wann wurde erkannt, dass die Kontinuumshypothese nicht durch die Axiome der ZERMELO-FRAENKEL-Mengenlehre entschieden wird?

Übung 4.2

L** sei die Inventarerweiterung von L* um den Prädikator 'Elter-von(.., ..)'. Dann ist V_0 eine Inventarerweiterung von L** um 'weiblich(..)'. Dann ist 'weiblich(..)' in V_1 nicht L**-eliminierbar. Kann es sein, dass es eine parameterfreie L**-Formel Δ gibt, in der nur eine Variable ω frei ist, so dass die Aussage

$\bigwedge\omega(\text{weiblich}(\omega) \leftrightarrow \Delta)$

in V_1 beweisbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Übung 4.3

'Kind-von(.., ..)' ist in V_8 nicht V_7-eliminierbar. Kann es sein, dass es eine V_7-Aussage $\Delta°$ gibt, die an Parametern nur zwei paarweise verschiedene Parameter β_1 und β_2 zum Teilterm hat, so dass die Bisubjunktion aus 'Kind-von(β_1, β_2)' und $\Delta°$ aus der Menge der Axiome und Definitionen von V_8 ableitbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Übung 4.4

a) Eliminieren Sie 'Kind-von(.., ..)' in den folgenden V-Aussagen bzgl. der V-Definition dieses Prädikators (d.h.: Leiten Sie aus der Einermenge der V-Definition dieses Prädikators die Bisubjunktion aus der vorgegebenen Aussage und einer V-Aussage Γ, die 'Kind-von(.., ..)' nicht zum Teilausdruck hat, ab):

(i) $\bigvee x \bigvee y$ Kind-von(x, y)

(ii) Kind-von(o, h) $\wedge$ $\neg$Kind-von(h, o)

b) Eliminieren Sie 'Sohn-von(.., ..)' in den folgenden V-Aussagen bzgl. der V-Definition dieses Prädikators:

(i) $\bigvee x \bigvee y$(Sohn-von(o, x) $\wedge$ Sohn-von(x, y) $\wedge$ männlich(y))

(ii) $\neg\bigvee x$ Sohn-von(i, x)

c) Eliminieren Sie 'Tochter-von(.., ..)' in den folgenden V-Aussagen bzgl. der V-Definition dieses Prädikators:

(i) $\bigvee x \bigvee y$(Sohn-von(o, x) $\wedge$ Tochter-von(x, y) $\wedge$ männlich(y))

(ii) $\bigwedge x(\bigvee y$ Mutter-von(x, y) $\rightarrow \bigvee z$ Tochter-von(x, z))

Übung 4.5

a) Sei V_{16}* die Erweiterung von V_{16} um die Definition

$\bigwedge x \bigwedge y$(Kind-von(x, y) $\rightarrow$ (Sohn-von(x, y) $\leftrightarrow$ Kind-von(x, y) $\wedge$ männlich(x))).

Dann ist 'Sohn-von(.., ..)' in V_{16}* nicht relativ auf V_{15} eliminierbar. Geben Sie eine V_{16}*-Aussage Γ" an, die an Parametern nur zwei paarweise verschiedene Parameter β_1 und β_2 zum Teilterm hat und zu der es keine V_{15}-Aussage $\Delta°$ gibt, so dass $\Delta°$ an Parametern nur β_1 und

β_2 zum Teilterm hat und die Bisubjunktion aus Γ' und Δ° in V_{16}* beweisbar ist. Begründen Sie Ihre Angabe.

b) Sei V_{14}* die Erweiterung von V_{14} um die Definition

$$\bigwedge x \bigwedge y(\text{Tochter-von}(x, y) \rightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x)).$$

Dann ist 'Tochter-von(.., ..)' in V_{14}* nicht relativ auf V_{13}-eliminierbar. Gibt es eine parameterfreie V_{13}-Formel Δ, in der höchstens paarweise verschiedene Variablen ξ_1, ξ_2 frei sind, so dass die Aussage

$$\bigwedge \xi_1 \bigwedge \xi_2(\text{Tochter-von}(\xi_1, \xi_2) \leftrightarrow \Delta)$$

in V_{14}* beweisbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Sei V_8* die Erweiterung von V_8 um die Definition

$$\bigwedge x(\bigvee y \text{ Kind-von}(x, y) \leftrightarrow \bigvee y \text{ Elter-von}(y, x)).$$

Dann gilt, dass es keine V_7-Aussage Γ gibt, so dass die Bisubjunktion aus 'Kind-von(x, y)' und Γ in V_8* beweisbar ist. Ist 'Kind-von(.., ..)' in V_8* relativ auf V_7 eliminierbar? Genügt '$\bigwedge x(\bigvee y$ Kind-von$(x, y) \leftrightarrow \bigvee y$ Elter-von$(y, x))$' dem Kriterium der Eliminierbarkeit bzgl. V_7 und 'Kind-von(.., ..)'? Begründen Sie Ihre Antworten.

d) Sei V_{13}* die Erweiterung von V_{13} um die Definition

$$\bigwedge x \bigwedge y((\text{Tochter-von}(x, y) \vee \text{Sohn-von}(x, y))$$
$$\leftrightarrow$$
$$(\text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x)) \vee (\text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{männlich}(x)))$$

und die zweistelligen Prädikatoren 'Sohn-von(.., ..)' und 'Tochter-von(.., ..)'. Dann sind weder 'Tochter-von(.., ..)' noch 'Sohn-von(.., ..)' in V_{13}* relativ auf V_{13} eliminierbar.

Gibt es eine parameterfreie V_{13}-Formel Δ, in der höchstens zwei paarweise verschiedene Variablen ξ_1, ξ_2 frei sind, so dass eine Aussage der in Theorem (4-5) verlangten Art für 'Tochter-von(.., ..)' in V_{13}* beweisbar ist, und gibt es eine parameterfreie V_{13}-Formel $\hat{\Delta}$, in der höchstens zwei Variablen ξ_1, ξ_2 frei sind, so dass eine Aussage der in Theorem (4-5) verlangten Art für 'Sohn-von(.., ..)' in V_{13}* beweisbar ist? Begründen Sie Ihre Antworten.

e) Sei V* die Erweiterung von V um die Definition

$$\bigwedge x(\text{zeugte-sich-selbst}(x, x) \leftrightarrow \text{Vater-von}(x, x))$$

und den zweistelligen Prädikator 'zeugte-sich-selbst(.., ..)'. Dann ist 'zeugte-sich-selbst(.., ..)' in V* nicht V-eliminierbar. Geben Sie eine V*-Aussage Γ' an, die an Parametern nur zwei paarweise verschiedene Parameter β_1 und β_2 zum Teilterm hat und zu der es keine V-Aussage Δ gibt, so dass Δ an Parametern nur β_1 und β_2 zum Teilterm hat und die Bisubjunktion aus Γ' und Δ in V* beweisbar ist. Begründen Sie Ihre Angabe.

Übung 4.6

a) Geben sie zu den folgenden V-Aussagen V_5-Aussagen an, so dass jeweils die Bisubjunktion aus der V-Aussage und der V_5-Aussage in V beweisbar ist, und führen Sie einen Beweis, der dies zeigt:

(i) $\bigvee x(\text{Kind-von}(x, \text{i}) \wedge \neg\, x = \text{o})$

(ii) $\bigvee y \bigvee z(\text{Sohn-von}(\text{h}, z) \wedge \text{Sohn-von}(y, z) \wedge \neg y = \text{h})$

b) Die Aussagen unter a) sind in V nicht entscheidbar. Begründen Sie, warum die von Ihnen gefundenen V_5-Aussagen – unter der Voraussetzung, dass Sie a) korrekt gelöst haben – in V_5 nicht entscheidbar sein können.

4.2 Nichtkreativität und Konservativität

Definitionen sollen nicht nur die Verwendung des definierten Ausdrucks für alle Kontexte regulieren, also die Eliminierbarkeit des definierten Ausdrucks relativ auf die Ausgangssprache garantieren, sondern sie sollen auch nur die Verwendung des definierten Ausdrucks regulieren – Definitionen sollen nichtkreativ sein bzw. dem Kriterium der Nichtkreativität genügen. Dazu wird festgelegt:

(4-15) **Definition.** *Kriterium der Nichtkreativität*

A *genügt dem Kriterium der Nichtkreativität bezüglich* S
gdw
S ist eine ADS-Sprache und es gibt ein S', so dass

(i) S' ist gleich S
oder
S' ist eine Inventarerweiterung von S um atomare Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n),

(ii) A ist eine S'-Aussage und

(iii) Für alle S-Aussagen Γ gilt: Wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\} \cup \{A\} \vdash \Gamma$, dann $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $S\} \vdash \Gamma$.

Nicht nur im Zusammenhang mit Definitionen redet man davon, dass eine Sprache eine konservative Erweiterung einer anderen Sprache ist, wenn sich in der erweiterten Sprache keine Aussagen der Ausgangssprache beweisen lassen, die nicht bereits in dieser selbst beweisbar waren. Dazu wird festgelegt:

(4-16) **Definition.** *Konservative Erweiterung*

S ist eine konservative Erweiterung von S*

gdw

S* ist eine Erweiterung von S und für alle S-Aussagen Γ gilt: Wenn Γ in S* beweisbar ist, dann ist Γ in S beweisbar.

Das folgende Theorem besagt, dass in einer konservativen Erweiterung einer Sprache genau die Aussagen der Ausgangssprache beweisbar sind, die in der Ausgangssprache selbst beweisbar sind:

(4-17) **Theorem.** *Konservative Erweiterung und Beweisbarkeit von Aussagen der Ausgangssprache*

Wenn S* eine konservative Erweiterung von S ist, dann gilt für alle S-Aussagen Γ:

Γ ist in S* beweisbar gdw Γ ist in S beweisbar.

Beweisansatz: Sei S* eine konservative Erweiterung von S. Dann ergibt sich aus Definition (4-16), dass S* eine Erweiterung von S ist und dass für alle S-Aussagen Γ gilt: Wenn Γ in S* beweisbar ist, dann ist Γ in S beweisbar. Sodann ergibt sich daraus, dass S* eine Erweiterung von S ist, und Theorem (2-4), dass für alle S-Aussagen Γ gilt: Wenn Γ in S beweisbar ist, dann ist Γ auch in S* beweisbar. Damit gilt dann für alle S-Aussagen Γ: Γ ist genau dann in S* beweisbar, wenn Γ in S beweisbar ist. ■

Das folgende Theorem besagt, dass eine konservative Erweiterung einer Sprache genau dann inkonsistent ist, wenn die Ausgangssprache inkonsistent ist:

(4-18) **Theorem.** *Konservative Erweiterung und Inkonsistenz*

Wenn S* eine konservative Erweiterung von S ist, dann:

S* ist eine inkonsistente LE-Sprache gdw S ist eine inkonsistente LE-Sprache.

Beweisansatz: Sei S* eine konservative Erweiterung von S. Dann ergibt sich zunächst aus Definition (4-16), dass S* eine Erweiterung von S ist, womit S* und S LE-Sprachen sind. Sei nun S* eine inkonsistente LE-Sprache. Dann gibt es nach Definitionen (2-36) und (2-37) eine S*-Aussage Δ', so dass sowohl Δ' als auch ¬Δ' in S* beweisbar sind. Sei Δ' so. Da dann in S* auch (Δ' ∧ ¬Δ') → Γ für beliebige S*-Aussagen Γ beweisbar ist, ist in S* jede S*-Aussage Γ beweisbar.

Nun gibt es (da S eine LE-Sprache ist und S* eine Erweiterung von S ist) eine S-Aussage Δ, die auch eine S*-Aussage ist. Sei $Δ^\#$ so gewählt. Dann sind in S* sowohl $Δ^\#$ als auch $¬Δ^\#$ beweisbar. Beide Aussagen sind aber S-Aussagen und somit (da S* eine konservative Erweiterung von S ist) bereits in S beweisbar. Also ist S eine inkonsistente LE-Sprache.

Sei nun S eine inkonsistente LE-Sprache. Dann gibt es eine S-Aussage Δ, so dass sowohl Δ als auch ¬Δ in S-beweisbar sind. Sei Δ so. Da nun S* eine Erweiterung von S ist, gilt damit, dass Δ und ¬Δ in S* beweisbar sind und somit ist auch S* eine inkonsistente LE-Sprache. ■

Ist S^* eine konservative Erweiterung von S, dann gilt mit (4-18) auch, dass S^* genau dann konsistent ist, wenn S konsistent ist:

(4-19) **Theorem.** *Konservative Erweiterung und Konsistenz*
Wenn S^* eine konservative Erweiterung von S ist, dann:
S^* ist eine konsistente LE-Sprache gdw S ist eine konsistente LE-Sprache.

Beweisansatz: Sei S* eine konservative Erweiterung von S. Dann ergibt sich zunächst aus Definition (4-16), dass S* eine Erweiterung von S ist, womit S* und S LE-Sprachen sind. Sei nun S* eine konsistente LE-Sprache. Dann ist nach Definition (2-37) S* keine inkonsistente LE-Sprache. Dann ist mit Theorem (4-18) S keine inkonsistente LE-Sprache. Dann ist mit Theorem (2-38) S eine konsistente LE-Sprache. Die Rechts-Links-Richtung zeigt man analog. ■

Geht man also von einer konsistenten LE-Sprache S zu einer konservativen Erweiterung S^* von S über, dann stellt sich die Konsistenzfrage für S^* nicht. Ist dagegen S^* eine Erweiterung von S, aber keine konservative Erweiterung von S, dann stellt sich die Konsistenzfrage.

Das nächste Theorem stellt einen Zusammenhang zwischen dem Kriterium der Nichtkreativität und konservativen Erweiterungen her:

(4-20) **Theorem.** *Kriterium der Nichtkreativität und Konservativität von Erweiterungen*
Wenn A bezüglich S dem Kriterium der Nichtkreativität genügt und S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ ist, dann ist S^* eine konservative Erweiterung von S.

Beweisansatz: Genüge A bezüglich S dem Kriterium der Nichtkreativität und sei S* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ. Dann ergibt sich aus der Annahme, dass A bezüglich S dem Kriterium der Nichtkreativität genügt und Definition (4-15), dass S eine ADS-Sprache ist und dass es ein S' gibt, so dass S' gleich S ist oder dass S' eine Erweiterung von S um atomare Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist, A eine S'-Aussage ist und für alle S-Aussagen gilt: Wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \cup \{A\} \vdash \Gamma$, dann $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$. Sei S' so wie verlangt. Nun ergibt sich daraus, dass S* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ ist, mit den Definitionen (2-28) und (2-32), dass S* eine ADS-Sprache ist und dass

{Δ | Δ ist Axiom oder Definition von S*}

=

{Δ | Δ ist Axiom oder Definition von S} ∪ {A}.

Also gilt für alle S-Aussagen Γ: Wenn {Δ | Δ ist Axiom oder Definition von S*} ⊢ Γ, dann {Δ | Δ ist Axiom oder Definition von S} ⊢ Γ. Da S und S* ADS-Sprachen sind, gilt damit für alle S-Aussagen Γ: Wenn Γ in S* beweisbar ist, dann ist Γ in S beweisbar. Sodann ergibt sich aus den Annahmen, dass S* eine Erweiterung von S ist. Damit gilt dann mit Definition (4-16), dass S* eine konservative Erweiterung von S ist. ■

Erfreulicherweise gilt nun:

(4-21) **Theorem.** DP *garantiert Nichtkreativität*

(i) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S ist, dann genügt A bezüglich S dem Kriterium der Nichtkreativität.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S ist, dann ist S^* eine konservative Erweiterung von S.

Beweisansatz: Sei S* eine Erweiterung von S um die Definition A und den n-stelligen Prädikator Φ gemäß der Definitionsregel DP von S. Mit Theorem (2-50) gilt dann, dass S, S* ADS-Sprachen sind und S* eine Erweiterung von S um die Definition A und den Prädikator Φ ist, DP eine Definitionsregel von S ist und es ein S^+ gibt, so dass S^+ eine Inventarerweiterung von S um den Prädikator Φ ist und A in S^+ gemäß DP als Definition gesetzt werden darf. Sei S^+ wie verlangt. Dann ist A eine S^+-Aussage der Gestalt

$$\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta),$$

wobei Δ eine parameterfreie S-Formel ist, in der höchstens $\xi_1, \ldots, \xi_n$ frei sind.

Zu (i): Sei nun Γ eine S-Aussage und gelte {Δ | Δ ist Axiom oder Definition von S} ∪ {A} ⊢ Γ. Damit gibt es eine Ableitung $\mathfrak{A}$ von Γ aus {Δ | Δ ist Axiom oder Definition von S} ∪ {A}. Sei $\mathfrak{A}$ so. Dann lässt sich Φ in den Satzaussagen aller Glieder von $\mathfrak{A}$ so eliminieren, dass ein $\mathfrak{A}'$ resultiert, das eine Ableitung von Γ aus

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \cup \{\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n(\Delta \leftrightarrow \Delta)\}$$

ist. Damit gilt dann:

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von S}\} \cup \{\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n(\Delta \leftrightarrow \Delta)\} \vdash \Gamma.$$

Nun gilt aber auch $\vdash \bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n(\Delta \leftrightarrow \Delta)$ und damit

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$.

Also gilt für alle S-Aussagen Γ: Wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \cup \{A\} \vdash \Gamma$, dann $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$. Also gibt es mit S^+ ein S', so dass S' gleich S ist oder S' eine Inventarerweiterung von S um einen atomaren Redeteil (nämlich Φ) ist, A eine S'-Aussage ist und für alle S-Aussagen Γ gilt: Wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \cup \{A\} \vdash \Gamma$, dann $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$. Somit genügt A gemäß Definition (4-15) bezüglich S dem Kriterium der Nichtkreativität.

Nun zu (ii). S* ist eine Erweiterung von S um die Definition A und den Prädikator Φ und nach (i) genügt A bezüglich S dem Kriterium der Nichtkreativität. Daraus ergibt sich mit Theorem (4-20), dass S* eine konservative Erweiterung von S ist. ■

Wieder lässt sich für DFB und DIB das Gleiche zeigen (wenn auch nicht völlig analog!), so dass insgesamt gilt:

(4-22) **Theorem.** DP, DFB, DIB *garantieren Nichtkreativität*

(i) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist, dann genügt A bezüglich S dem Kriterium der Nichtkreativität.

(ii) Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definition A und den atomaren Ausdruck μ gemäß der Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist, dann ist S^* eine konservative Erweiterung von S.

Man beachte, dass die Relation der konservativen Erweiterung für LE-Sprachen transitiv ist:

(4-23) **Theorem.** *Transitivität der konservativen Erweiterung*

Wenn S^* eine konservative Erweiterung von S' und S' eine konservative Erweiterung von S ist, dann ist S^* eine konservative Erweiterung von S.

Wie die Eliminierbarkeit regelgemäß definierter Ausdrücke so setzt sich damit auch die Konservativität regelgemäßen Definierens von Erweiterung zu Erweiterung fort. Insbesondere gilt:

(4-24) **Theorem.** *Allgemeines Konservativitätstheorem für* DP, DFB, DIB

Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist, dann ist S^* eine konservative Erweiterung von S.

In den folgenden Übungen und in Kapitel 5.1 wird gezeigt, wie umgekehrt Verstöße gegen DP dazu führen können, dass Erweiterungen um Definitionen (und atomare Ausdrücke) keine konservativen Erweiterungen der Ausgangssprache sind.

Übung 4.7

a) Die L*-Aussage '$\bigvee x \bigvee y \neg x = y$' ist in L* nicht beweisbar. Weisen Sie nach, dass V_1 keine konservative Erweiterung von L* ist.

b) $L^\#$ sei die Erweiterung von L* um das Axiom '$\bigvee x \bigvee y \bigvee z(\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg y = z)$'. Begründen Sie, dass $L^\#$ keine konservative Erweiterung von L* ist.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse von Übung 3.2, um zu begründen, dass V_1 keine konservative Erweiterung von V_0 ist, V_2 keine konservative Erweiterung von V_1 ist, V_3 keine konservative Erweiterung von V_2 und V_5 keine konservative Erweiterung von V_4 ist.

Übung 4.8

V° sei die Erweiterung von V um die Definition

$$\bigwedge x(\text{Tochter-von-Inge}(x) \leftrightarrow \text{Tochter-von}(x, \text{i})) \wedge \bigvee x\ \text{Tochter-von-Inge}(x).$$

und den Prädikator 'Tochter-von-Inge(..)'. Begründen Sie unter Verwendung der Informationen aus Übung 4.6, dass V° keine konservative Erweiterung von V ist.

Übung 4.9

$V_6^\#$ sei die Erweiterung von V_6 um die Definition '$\bigwedge x(\text{männlich}(x) \wedge \neg\text{weiblich}(x))$'. Weisen Sie nach, dass $V_6^\#$ keine konservative Erweiterung von V_5 ist.

Übung 4.10

$V^\S$ sei die Erweiterung von V um die Definition '$\bigwedge x \bigwedge y(\text{Tochter}(x) \leftrightarrow \text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(x))$'. Weisen Sie nach, dass $V^\S$ keine konservative Erweiterung von V ist. Dabei können Sie voraussetzen, dass V eine konsistente LE-Sprache und eine ADS-Sprache ist.

4.3 Definitorische Erweiterung

Definitionen sollen insgesamt zu definitorischen Erweiterungen führen: Definierte Ausdrücke sollen eliminierbar sein und die Erweiterung um Definitionen und die definierten Ausdrücke soll eine konservative Erweiterung der Ausgangssprache sein. Dazu wird festgelegt:

(4-25) **Definition.** *Definitorische Erweiterung*

S ist eine definitorische Erweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n)*

gdw

S* ist eine Erweiterung von S und

(i) Es gibt ein S', so dass S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist und das Inventar von S* gleich dem Inventar von S' ist,

(ii) Die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) sind S-eliminierbar in S*,

(iii) S* ist eine konservative Erweiterung von S.

Das folgende Theorem gibt Auskunft über einen hier interessanten Spezialfall:

(4-26) **Theorem.** *Definitorische Erweiterung bei passendem Erweiterungsverhältnis*

Wenn S* eine Erweiterung von S ist und es ein S' gibt, so dass S' eine Inventarerweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) ist und das Inventar von S* gleich dem Inventar von S' ist, dann:

S* ist eine definitorische Erweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n)

gdw

(i) Die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) sind S-eliminierbar in S* und

(ii) S* ist eine konservative Erweiterung von S.

Nicht jede definitorische Erweiterung findet durch das Setzen von Definitionen statt. Man erweitere etwa das Inventar von L um den zweistelligen (exklusiven) Disjunktor '___$\dot{\vee}$___' (lies: "entweder__, oder__") und setze folgende Einführungs- und Beseitigungsregeln:

(DE) Wenn man die Bisubjunktion aus einer Aussage A und der Negation einer Aussage B gewonnen hat, dann darf man die Disjunktion aus A und B folgern.

(DB) Wenn man die Disjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, dann darf man die Bisubjunktion aus A und der Negation von B folgern.

Die resultierende Erweiterung ist dann eine definitorische Erweiterung von L um den zweistelligen Junktor '___$\dot{\vee}$___'.

Ferner resultiert nicht jede Setzung einer Definition in einer definitorischen Erweiterung der Ausgangssprache (man betrachte dazu die Ergebnisse der Übungen zu 4.1 und 4.2); allerdings gilt folgender erfreulicher Zusammenhang:

(4-27) **Theorem.** DP, DFB, DIB *garantieren definitorische Erweiterungen*

Wenn S^* eine Erweiterung von S um die Definitionen A_1, …, A_n und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S ist,
dann ist S^* eine definitorische Erweiterung von S um die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n).

DP, DFB und DIB garantieren damit, dass regelgemäße Definitionen zumindest in formaler Hinsicht genau das leisten, was sie leisten sollen: Sie regeln die Verwendung des definierten Ausdrucks für alle Kontexte und garantieren seine Ersetzbarkeit durch Grundausdrücke (Eliminierbarkeit). Sie legen nur die Verwendung des definierten Ausdrucks fest und verändern nicht ›heimlich‹ die Bedeutung anderer Ausdrücke oder verursachen gar die Inkonsistenz der erweiterten Sprache (Konservativität bzw. Nichtkreativität).

Die Relation der definitorischen Erweiterung ist für LE-Sprachen bezüglich der ersten und zweiten Stelle transitiv:

(4-28) **Theorem.** *Transitivität der definitorischen Erweiterung*

Wenn S^* eine definitorische Erweiterung von S' um die atomaren Ausdrücke μ_1, …, μ_n ist und S' eine definitorische Erweiterung von S um die atomaren Ausdrücke ν_1, …, ν_r ist, dann ist S^* eine definitorische Erweiterung von S um die atomaren Ausdrücke ν_1, …, ν_r und μ_1, …, μ_n.

Aus der *Benutzer-Perspektive* erlauben definitorische Erweiterungen eine saubere begriffliche Zusammenfassung bereits in einer Sprache ausdrückbarer Zusammenhänge und eine größere Handlichkeit der Sprache im Gebrauch bei gesicherter formaler Korrektheit.

Aus einer *Betrachter-Perspektive* zeichnen sich definitorische Erweiterungen dabei gleichzeitig dadurch aus, dass sie eine gewisse Überschaubarkeit in der metatheoretischen Untersuchung garantieren. Ist etwa S^* eine definitorische Erweiterung von S um atomare Ausdrücke, dann ist S^* auch eine konservative Erweiterung von S. Damit kann etwa ein Konsistenznachweis für S^* erfolgen, indem ein entsprechender Nachweis für S durchgeführt wird, denn wenn S^* eine konservative Erweiterung von S ist, dann gilt nach Theorem (4-18): Wenn S konsistent ist, dann ist auch S^* konsistent.

Eine wesentliche Erhöhung der Überschaubarkeit für metatheoretische Untersuchungen lässt sich erreichen, wenn noch weitere Informationen zur Verfügung stehen, die es erlauben, Untersuchungen einer Sprache S^+ auf Untersuchungen einer Ausgangssprache S zu reduzieren.

Sei etwa S* eine Erweiterung von S um die Definitionen $A_1, \ldots, A_n$ und die atomaren Ausdrücke μ_1 (der Kategorie K_1 und der Stelligkeit s_1), …, μ_n (der Kategorie K_n und der Stelligkeit s_n) gemäß den Definitionsregeln DP, DFB, DIB von S. Angenommen, man fragt sich, ob eine S*-Aussage Γ' in S* beweisbar ist.

Dann kann man sich oft viel Arbeit sparen, indem man mit Hilfe von $A_1, \ldots, A_n$ die Ausdrücke $\mu_1, \ldots, \mu_n$ aus Γ' eliminiert (↑ 4.1.2). Für die so gewonnene S-Aussage Γ gilt dann

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma.$$

Sodann ergibt sich aus den gemachten Voraussetzungen, dass S* und S ADS-Sprachen sind, dass Γ genau dann in S* beweisbar ist, wenn Γ in S beweisbar ist, und dass

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\} =$$
$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S\} \cup \{A_1, \ldots, A_n\}$$

Damit gilt dann insgesamt:

Γ' ist in S^* beweisbar

gdw

$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\} \vdash \Gamma'$

gdw

$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\} \vdash \Gamma$

gdw

$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S\} \vdash \Gamma$

Sei nämlich Γ' in S* beweisbar. Dann gilt

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\} \vdash \Gamma'$$

Da nun auch gilt: $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$ und $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\}$ ergibt sich:

$$\{\Delta \mid \Delta \text{ ist Axiom oder Definition von } S^*\} \vdash \Gamma$$

und damit, dass Γ in S* beweisbar ist. Damit ist Γ auch in S beweisbar und somit gilt, dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$.

Gelte nun umgekehrt, dass

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S$\} \vdash \Gamma$.

Dann ist Γ in S und somit in S* beweisbar, woraus sich ergibt:

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S*$\} \vdash \Gamma$,

woraus sich mit $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \Gamma' \leftrightarrow \Gamma$ wieder ergibt:

$\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von S*$\} \vdash \Gamma'$.

Damit gilt schlussendlich, dass Γ' in S* beweisbar ist.

Man kann also die Frage, ob Γ' in S* beweisbar ist, auf die Frage reduzieren, ob Γ aus der Menge der Axiome und Definitionen von S folgt. Dabei gilt, dass die letztere Frage oft wesentlich einfacher zu beantworten ist als die erstere. So macht es etwa einen beträchtlichen Unterschied, ob man für eine Non-Sequitur-Diagnose alle 10 Axiome und Definitionen von V (mit 11 materialen Teilausdrücken) interpretieren muss oder ob man sich auf die vier V-Axiome (mit fünf materialen Teilausdrücken) beschränken kann.

Übung 4.11

Die Sprachen seien jeweils wie in den Übungen zu 4.1 und 4.2 vorgegeben. Begründen Sie unter Rückgriff auf die dortigen Ergebnisse bzw. Aufgabenstellungen:

a) V_1 ist keine definitorische Erweiterung von L* um die Prädikatoren 'weiblich(..)' und 'Elter-von(.., ..)' (vgl. Übung 4.7 a)).

b) V_8 ist keine definitorische Erweiterung von V_7 um den Prädikator 'Kind-von(.., ..)' (vgl. Übung 4.3).

c) V_{13}* ist keine definitorische Erweiterung von V_{13} um die Prädikatoren 'Tochter-von(.., ..)' und 'Sohn-von(.., ..)' (vgl. Übung 4.5 d)).

d) V* ist keine definitorische Erweiterung von V um den zweistelligen Prädikator 'zeugte-sich-selbst(.., ..)' (vgl. Übung 4.5 e)).

e) V° ist keine definitorische Erweiterung von V um den Prädikator 'Tochter-von-Inge(..)' (vgl. Übung 4.8).

f) $V_6^{\#}$ ist keine definitorische Erweiterung von V_5 um den Prädikator 'männlich(..)' (vgl. Übung 4.9).

g) $V^{\S}$ ist keine definitorische Erweiterung von V um den Prädikator 'Cousin(..)' (vgl. Übung 4.10).

Übung 4.12 (*nach* Absolvierung von D: 5.2.1 zu bearbeiten)

a) Zeigen Sie, dass die folgenden V_5-Aussagen in V_5 nicht entscheidbar sind:

(i) $\bigvee x$(Elter-von(i, x) $\wedge \neg\, x =$ o)

(ii) $\bigvee y \bigvee z$((Elter-von(z, h) $\wedge$ ¬weiblich(h)) $\wedge$ (Elter-von(z, y) $\wedge$ ¬weiblich(y)) $\wedge \neg y =$ h)

b) Begründen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von a) und Übung 4.6 a), dass die V-Aussagen

(i) $\bigvee x$(Kind-von(x, i) $\wedge \neg\, x =$ o)

(ii) $\bigvee y \bigvee z$(Sohn-von(h, z) $\wedge$ Sohn-von(y, z) $\wedge \neg y =$ h)

in V nicht entscheidbar sind.

5 Zur unbedingten Definition von Prädikatoren

In diesem Kapitel soll zunächst ein gewisses Verständnis für die Funktionsweise von DP, einer Version der üblichen Regel für die Explizit- oder unbedingte Definition von Prädikatoren, erreicht werden. Dazu wird insbesondere erläutert, wie Verstöße gegen die einzelnen Regelklauseln dazu führen können, dass der Kandidat für eine Definitionsaussage das Kriterium der Eliminierbarkeit oder Nichtkreativität nicht erfüllt bzw. dass die Erweiterung der Ausgangssprache um diesen Kandidaten und atomare Ausdrücke nicht wie gewünscht eine definitorische Erweiterung ist (5.1). Sodann sollen Sie das Definieren von Prädikatoren gemäß DP einüben (5.2).

5.1 Erläuterung der Regel

Zunächst noch einmal die Regel, deren einzelne Klauseln im Anschluss zunächst kursorisch und dann ausführlicher erläutert werden:

(DP) Wenn:

a) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sind paarweise verschiedene Variablen von S ($n \geq 1$),

b) S' ist eine Inventarerweiterung von S um den n-stelligen Prädikator Φ,

c) Δ ist eine Formel von S, für die gilt:

ca) in Δ sind höchstens $\xi_1, \ldots, \xi_n$ frei,

cb) in Δ ist kein S-Parameter Teilterm,

d) Γ ist eine Aussage der Form:

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta),$$

dann darf man Γ in S' definitorisch setzen.

5.1.1 Kursorische Erläuterungen

Zu (d): Die Definitionsaussage muss die Gestalt einer (mehrfach) universalquantifizierten Bisubjunktion haben (*Eliminierbarkeit und Nichtkreativität!*).

Zu (d): Die Definiendumformel muss eine atomare Formel sein; d.h., auf der linken Seite der Bisubjunktion darf keine molekulare Formel stehen (*Eliminierbarkeit!*).

Zu (a): In der Definiendumformel kommt jede Variable, die vorkommt, genau einmal vor (*Eliminierbarkeit!*).

Zu (c): Das Definiens ist eine Formel der Ausgangssprache (*Eliminierbarkeit!*).

Zu (ca): Im Definiens kommen höchstens die Variablen frei vor, die auch in der Definiendumformel vorkommen (*Nichtkreativität!*).

Zu (cb): Im Definiens kommt kein Parameter vor (*Anziehbarkeit!*).

Zu (b): Das Definiendum ist kein Ausdruck der Ausgangssprache; das Definiendum muss neu sein (*Nichtkreativität!*).

5.1.2 Ausführliche Erläuterungen

Zu (d): Die Definitionsaussage muss die Gestalt einer (mehrfach) universalquantifizierten Bisubjunktion haben. Hat eine Aussage Γ nicht die verlangte Form der (mehrfach) universalquantifizierten Bisubjunktion, dann genügt Γ unter Umständen nicht dem Kriterium der Eliminierbarkeit oder nicht dem Kriterium der Nichtkreativität – die Eliminierbarkeit des Definiendums oder die Konservativität der Erweiterung sind unter Umständen gefährdet. Beispielsweise ist bei Aussagen der Form

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\mathrm{B} \rightarrow (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta))$$

die Eliminierbarkeit gefährdet.

Dazu betrachte man V_{16}*, die Erweiterung von V_{16} um die Definition

$$\bigwedge x\bigwedge y(\text{Kind-von}(x, y) \rightarrow (\text{Sohn-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{männlich}(x))).$$

Dann ist 'Sohn-von(.., ..)' in V_{16}* nicht relativ auf V_{15} eliminierbar. Falls nämlich für geschlossene V_{16}*-Terme θ_1, θ_2 nicht schon die Aussage 'Kind-von(θ_1, θ_2)' beweisbar ist, lässt sich auch die Bisubjunktion

$$\text{Sohn-von}(\theta_1, \theta_2) \leftrightarrow \text{Kind-von}(\theta_1, \theta_2) \wedge \text{männlich}(\theta_1)$$

nicht gewinnen, mit der 'Sohn-von(.., ..)' in 'Sohn-von(θ_1, θ_2)' eliminierbar wäre.

Ist 'Kind-von(θ_1, θ_2)' in V_{16}* nicht beweisbar, dann ist ferner 'Sohn-von(θ_1, θ_2)' in V_{16}* nicht entscheidbar und es gibt keine V_{15}-Aussage B, die in V_{16}* zu 'Sohn-von(θ_1, θ_2)' äquivalent ist. 'Sohn-von(θ_1, θ_2)' ist dann also eine ›neue‹ unentscheidbare Aussage. So ist etwa 'Sohn-von(i, o)' eine solche ›neue‹ unentscheidbare Aussage, da eben 'Kind-von(i, o)' in V_{16}* nicht beweisbar ist: 'Sohn-von(i, o)' ist in V_{16}* nicht entscheidbar und 'Sohn-von(i, o)' ist in V_{16}* zu keiner V_{15}-Aussage äquivalent.*

Ebenso ist die Eliminierbarkeit gefährdet, wenn eine Definitionsaussage Γ die Form

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \rightarrow \Delta)$$

hat. Sei etwa V_{14}* die Erweiterung von V_{14} um die Definition

$$\bigwedge x\bigwedge y(\text{Tochter-von}(x, y) \rightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x)).$$

Dann ist 'Tochter-von(.., ..)' in V_{14}* nicht relativ auf V_{13}-eliminierbar. So kann man zwar in V_{14}* beweisen:

$$\bigvee y\ \text{Tochter-von}(\text{i}, y) \rightarrow \bigvee y(\text{Kind-von}(\text{i}, y) \wedge \text{weiblich}(\text{i})),$$

aber man kann in V_{14}* nicht beweisen:

$$\bigvee y(\text{Kind-von}(\text{i}, y) \wedge \text{weiblich}(\text{i})) \rightarrow \bigvee y\ \text{Tochter-von}(\text{i}, y).$$

'$\bigvee y$ Tochter-von(i, y)' ist vielmehr eine ›neue‹ unentscheidbare Aussage. Allgemein ist jede Aussage der Art 'Tochter-von(θ_1, θ_2)' in V_{14}* eine ›neue‹ unentscheidbare Aussage, wenn in V_{14}* nicht die Aussage '$\neg$(Kind-von(θ_1, θ_2) $\wedge$ weiblich(θ_1))' beweisbar ist.

Andere Abweichungen von der verlangten Form können die Konservativität gefährden: Hat eine Aussage Γ etwa die Form

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta) \wedge \bigvee\xi_1\ldots\bigvee\xi_n\ \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

oder

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \wedge \Delta),$$

dann ist unter Umständen die Konservativität der Erweiterung gefährdet, man erinnere sich an Übung 4.8 und Übung 4.9.

Allgemein gilt: Ist S eine Sprache, S' eine Inventarerweiterung von S um einen n-stelligen Prädikator Φ und A eine Aussage, die gemäß DP in S' als Definition von Φ gesetzt werden

* Unter der Voraussetzung, dass B eine parameterfreie Formel von S ist und es eine Inventarerweiterung von S um den n-stelligen Prädikator Φ gibt, in der $\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta)$ gemäß DP als Definition gesetzt werden dürfte, ist jedoch das Kriterium der Nichtkreativität auf jeden Fall erfüllt. Liberalisierte Definitionsreglements lassen auch die Setzung von Aussagen $\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n(\text{B} \rightarrow (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Delta))$, die die angegeben Bedingungen erfüllen, als sogenannten *bedingten Definitionen* zu. Mit solchen bedingten Definitionen wird dann die Anwendung des Definiendums nicht mehr für alle, sondern nur noch die B-Kontexte definiert. Bedingte Definitionen werden von manchen Autoren u.a. dann bevorzugt, wenn die Anwendung der definierten Prädikate auf Dinge, die keine B-Dinge sind, (für diese Autoren) nicht interessant oder nicht erwünscht ist. Bei der Definition von Funktoren (↑ 6.1) kommen bedingte Definitionen sodann zum Einsatz, wenn die in den Definitionsregeln für die unbedingte Definition dieser Ausdrücke geforderte Einzigkeit unmittelbar nur für einen bestimmten Bereich gegeben ist und die Wahl eines sogenannten Ersatzreferenten für eine unbedingte Definition nicht erwünscht ist.

darf, und A* eine beliebige $\mathcal{S}'$-Aussage, dann gilt: Wenn $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $\mathcal{S}\} \cup \{A^*\} \vdash A$, aber $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $\mathcal{S}\} \cup \{A\} \nvdash A^*$, dann ist Φ zwar in der Erweiterung von $\mathcal{S}$ um die Definition A* und den Prädikator Φ $\mathcal{S}$-eliminierbar, aber diese Erweiterung keine konservative Erweiterung von $\mathcal{S}$. Wenn dagegen $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $\mathcal{S}\} \cup \{A\} \vdash A^*$, aber $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $\mathcal{S}\} \cup \{A^*\} \nvdash A$, dann ist die Erweiterung von $\mathcal{S}$ um die Definition A* und den Prädikator Φ zwar eine konservative Erweiterung von $\mathcal{S}$, aber Φ in dieser Erweiterung nicht $\mathcal{S}$-eliminierbar. Gilt dagegen $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $\mathcal{S}\} \cup \{A^*\} \vdash A$ und $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $\mathcal{S}\} \cup \{A\} \vdash A^*$, dann ist Φ in der Erweiterung von $\mathcal{S}$ um die Definition A* und den Prädikator Φ $\mathcal{S}$-eliminierbar und diese Erweiterung eine konservative Erweiterung von $\mathcal{S}$.* Gilt $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $\mathcal{S}\} \cup \{A^*\} \nvdash A$ und $\{\Delta \mid \Delta$ ist Axiom oder Definition von $\mathcal{S}\} \cup \{A\} \nvdash A^*$, dann muss eigens untersucht werden, ob Φ in der Erweiterung von $\mathcal{S}$ um die Definition A* und den Prädikator Φ $\mathcal{S}$-eliminierbar ist und ob diese Erweiterung eine konservative Erweiterung von $\mathcal{S}$ ist.

Zu (d): Die Definiendumformel muss eine atomare Formel sein; d.h., auf der linken Seite der Bisubjunktion darf keine molekulare Formel stehen. Ist diese Bedingung verletzt, dann erfüllt der Definitionskandidat unter Umständen nicht das Kriterium der Eliminierbarkeit – die Eliminierbarkeit des Definiendums in der Erweiterung der Ausgangssprache ist unter Umständen nicht mehr gegeben.

Man betrachte etwa die V_8-Aussage

[5.1] $\bigwedge x(\bigvee y$ Kind-von$(x, y) \leftrightarrow \bigvee y$ Elter-von$(y, x))$.

Sei V_8* die Erweiterung von V_8 um die Definition [5.1]. Dann ist 'Kind-von(.., ..)' in V_8* nicht V_7-eliminierbar. D.h., [5.1] genügt dem Kriterium der Eliminierbarkeit bzgl. V_7 und 'Kind-von(.., ..)' nicht.

Insbesondere gibt es keine V_7-Aussage Γ, so dass die Bisubjunktion aus 'Kind-von(x, y)' und Γ in V_8* beweisbar wäre. Es wurde nämlich gar nicht definiert, was es heißen soll, dass eine beliebige Gegebenheit Kind einer beliebigen anderen Gegebenheit ist, vielmehr wurde

* Analoge Zusammenhänge gelten auch für die Definition von Individuenkonstanten nach DIB und von Funktoren nach DFB. Dieser Umstand lässt sich ausnutzen, um gegenüber DP, DIB und DFB zulässige Definitionsregeln für bestimmte Ausdrücke (etwa Relations- und Funktionsbezeichnungen in Mengensprachen) zu formulieren, die die Definition der betroffenen Ausdrücke vereinfachen.

nur festgelegt, dass jemand genau dann Kind von *irgendjemandem* sein soll, wenn es *irgendjemanden* gibt, der sein Elter ist.

[5.1] sollte zwar in einer material adäquaten Verwandtschaftssprache beweisbar sein (und ist etwa in V_9 auch beweisbar), aber [5.1] sagt eben – material gesprochen – etwas über die Eigenschaften *eines* Gebildes und nicht über eine Relation zwischen *zwei* Gebilden aus. Aussagen der Art 'Kind-von(θ_1, θ_2)' sind in V_8* ›neue‹ unentscheidbare Aussagen.

Zur Veranschaulichung betrachte man die V_8*-Aussage

[5.2] Kind-von(o, h).

Angenommen, man will 'Kind-von(.., ..)' in [5.2] unter Ausnutzung von [5.1] eliminieren. Dann müsste man versuchen [5.1] passend zu instanziieren. Dies scheitert jedoch daran, dass die Stelle, an der 'h' eingesetzt werden müsste, in der Definiendumformel von einer gebundenen Variablen besetzt ist. Man bekommt also mit UB nur:

$$\bigvee y \text{ Kind-von}(o, y) \leftrightarrow \bigvee y \text{ Elter-von}(y, o)$$

In dieser Aussage wird aber von Hans nichts gesagt, sie sagt nur, dass Otto genau dann Kind von irgendjemandem – etwa Hans – ist, wenn irgendjemand – etwa Inge – Elter von Otto ist.

Als weiteres Beispiel für die Gefährdung der Eliminierbarkeit durch molekulare Definiendumformeln betrachte man die V_{16}-Aussage

[5.3] $\bigwedge x \bigwedge y(\text{Sohn-von}(x, y) \wedge \text{männlich}(x) \leftrightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{männlich}(x))$,

für die ebenfalls gilt, dass sie in einer material adäquaten Verwandtschaftssprache beweisbar sein sollte und in V beweisbar ist. Auch diese Aussage erfüllt jedoch das Kriterium der Eliminierbarkeit bzgl. V_{15} und 'Sohn-von(.., ..)' nicht.

[5.3] legt nämlich nicht fest, was es heißt, dass eine beliebige Gegebenheit Sohn einer beliebigen Gegebenheit ist, sondern dass eine beliebige Gegebenheit genau dann Sohn einer beliebigen Gegebenheit *und* männlich ist, wenn sie Kind der zweiten Gegebenheit und männlich ist.

So lässt sich etwa in $V_{16}^{\bullet}$, der Erweiterung von V_{16} um die Definition [5.3], beweisen:

$$\neg \bigvee y(\text{Sohn-von}(i, y) \wedge \text{männlich}(i)),$$

da sich in V_{16}* '¬männlich(i)' beweisen lässt, aber die Aussage

$$\neg \bigvee y \text{ Sohn-von}(i, y)$$

ist in $V_{16}^{\bullet}$ weder entscheidbar noch zu einer V_{15}-Aussage äquivalent. Da Inge nicht männlich ist, wird sie eben von der in [5.3] angegeben Äquivalenz bzgl. ihres (Nicht)Sohnseins gar nicht erfasst. Allgemeiner gilt für alle Aussagen der Art 'Sohn-von(θ_1, θ_2)', dass sie ›neue‹ unentscheidbare Aussagen in $V_{16}^{\bullet}$ sind, wenn 'männlich(θ_1)' in $V_{16}^{\bullet}$ nicht beweisbar ist.

Zu (a): In der Definiendumformel kommt jede Variable, die vorkommt, genau einmal vor. Ist diese Bedingung verletzt, dann erfüllt der Definitionskandidat ebenfalls unter Umständen nicht das Kriterium der Eliminierbarkeit – die Eliminierbarkeit des Definiendums in der Erweiterung der Ausgangssprache ist unter Umständen nicht mehr gegeben.

Sei etwa V* die Erweiterung von V um die Definition

$$\bigwedge x(\text{zeugte-sich-selbst}(x, x) \leftrightarrow \text{Vater-von}(x, x))$$

und den zweistelligen Prädikator 'zeugte-sich-selbst(.., ..)'. Dann ist 'zeugte-sich-selbst(.., ..)' in V* nicht V-eliminierbar. Da hier nämlich in der Definiendumformel dieselbe Variable mehrfach vorkommt, ist Eliminierbarkeit nur noch für Kontexte gegeben, in denen an den Stellen, an denen die Variable in der Definiendumformel auftritt, derselbe Term substituiert werden darf. Wiederum geraten damit ›neue‹ unentscheidbare Aussagen in die Sprache, nämlich alle Aussagen der Art 'zeugte-sich-selbst(θ_1, θ_2)', bei denen '$\theta_1 = \theta_2$' in V* nicht beweisbar ist.

Zu (c): Das Definiens ist eine Formel der Ausgangssprache. Damit gilt insbesondere: Alle atomaren Teilausdrücke des Definiens sind Ausdrücke der Ausgangssprache. Treten in einer Definition neben dem Definiendum weitere neue Ausdrücke auf, so genügt der Definitionskandidat unter Umständen nicht dem Kriterium der Eliminierbarkeit – die Eliminierbarkeit des Definiendums (und der weiteren neuen Ausdrücke) in der erweiterten Sprache relativ auf die Ausgangssprache ist gefährdet.

Sei etwa $V^{\hat{}}$ die Inventarerweiterung von L* um die zweistelligen Prädikatoren 'Kind-von(.., ..)' und 'Elter-von(.., ..)'. Dann genügt die $V^{\hat{}}$-Aussage

[5.4] $\bigwedge x \bigwedge y(\text{Kind-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(y, x))$

nicht dem Kriterium der Eliminierbarkeit bzgl. L* und 'Kind-von(.., ..)' (resp. 'Elter-von(.., ..)') und keiner der beiden Ausdrücke ist in der Erweiterung von $V^{\hat{}}$ um die Definition [5.4] relativ auf L* eliminierbar.

Bemerkung: Diese Bedingung steht dem traditionellen Verbot der Definition durch ›dunkle‹ Definiensausdrücke, die selber nicht ausreichend in ihrer Verwendung geklärt sind, nahe.

Zu (ca): Im Definiens kommen höchstens die Variablen frei vor, die auch in der Definiendumformel vorkommen. Ist diese Bedingung verletzt, dann genügt der Definitionskandidat unter Umständen nicht dem Kriterium der Nichtkreativität – die Erweiterung um den Defintionskandidaten und das Definiendum ist eventuell nicht konservativ.

Sei $V^{\square}$ die Erweiterung von V um die Definition

[5.5] ⋀*x*⋀*y*(Vater(*x*) ↔ Vater-von(*x*, *y*))

und den einstelligen Prädikator 'Vater(..)'. Dann ist $V^{\square}$ keine konservative Erweiterung von V. So ist etwa in V die V-Aussage '⋀*y* Vater-von(h, *y*)' nicht beweisbar. Man betrachte nun folgenden $V^{\square}$-Beweis:

[5.6]

0	Es-gilt	⋀*y* Vater-von(h, *y*)	
1	Da	¬weiblich(o) ∧ (Elter-von(i, o) ∧ weiblich(i)) ∧ (Elter-von(h, o) ∧ ¬weiblich(h))	| Ax. $[3.4]_A$
2	Da	⋀*x*(männlich(*x*) ↔ ¬weiblich(*x*))	| Def. $[3.5]_A$
3	Da	⋀*x*⋀*y*(Vater-von(*x*, *y*) ↔ Elter-von(*x*, *y*) ∧ männlich(*x*))	| Def. $[3.7]_A$
4	Da	⋀*x*⋀*y*(Vater(*x*) ↔ Vater-von(*x*, *y*))	| Def. [5.5]
5	Also	Elter-von(h, o) ∧ ¬weiblich(h)	| KB; 1
6	Also	Elter-von(h, o)	| KB; 5
7	Also	¬weiblich(h)	| KB; 5
8	Also	männlich(h) ↔ ¬weiblich(h)	| UB; 2
9	Also	männlich(h)	| BB; 7, 8
10	Also	Elter-von(h, o) ∧ männlich(h)	| KE; 6, 9
11	Also	⋀*y*(Vater-von(h, *y*) ↔ Elter-von(h, *y*) ∧ männlich(h))	| UB; 3
12	Also	Vater-von(h, o) ↔ Elter-von(h, o) ∧ männlich(h)	| UB; 11
13	Also	Vater-von(h, o)	| BB; 10, 12
14	Also	⋀*y*(Vater(h) ↔ Vater-von(h, *y*))	| UB; 4
15	Also	Vater(h) ↔ Vater-von(h, o)	| UB; 14
16	Also	Vater(h)	| BB; 13, 15
17	Also	⋀*y*(Vater(h) ↔ Vater-von(h, *y*))	| UB; 4
18	Also	Vater(h) ↔ Vater-von(h, y)	| UB; 17
19	Also	Vater-von(h, y)	| BB; 16, 18
20	Also	⋀*y* Vater-von(h, *y*)	| UE; 19

Zunächst ergibt sich daraus, dass die V-Aussage '⋀*y* Vater-von(h, *y*)' in V nicht, in $V^{\square}$ aber sehr wohl beweisbar ist, dass $V^{\square}$ keine konservative Erweiterung von V ist. Darüber hinaus ist $V^{\square}$ aber sogar in der stärkst möglichen Weise nicht-konservativ bzgl. V: $V^{\square}$ ist inkonsistent und beweist damit jede $V^{\square}$ und jede V-Aussage: Da $V^{\square}$ eine Erweiterung von V ist, ist in $V^{\square}$

nämlich jede V-Aussage beweisbar, die in V beweisbar ist, insbesondere auch die Aussage '$\neg\bigwedge y$ Vater-von(h, y)'. Damit ist in $V^{\square}$ insgesamt eine Aussage und ihre Negation beweisbar.

Bemerkung: Die Forderung, dass im Definiens höchstens die Variablen frei vorkommen dürfen, die auch in der Definiendumformel vorkommen, bedeutet nicht, dass im Definiens jede freie Variable höchstens einmal vorkommen darf: Solange im Definiens höchstens die Variablen frei vorkommen, die in der Definiendumformel vorkommen, können sie im Definiens beliebig häufig auftreten. Sei etwa $V^{\wedge}$ die Inventarerweiterung von V um den zweistelligen Prädikator 'Onkel-von(.., ..)'. Dann darf die $V^{\wedge}$-Aussage

$$\bigwedge x \bigwedge y(\text{Onkel-von}(x, y)$$
$$\leftrightarrow$$
$$\bigvee u(\neg u = x \wedge \text{Kind-von}(y, u) \wedge \bigvee v(\text{Kind-von}(u, v) \wedge \text{Kind-von}(x, v))) \wedge \text{männlich}(x))$$

gemäß DP in $V^{\wedge}$ als Definition gesetzt werden.

Zu (cb): Im Definiens kommt kein Parameter vor. Ist diese Bedingung verletzt, dann darf die Aussage, auch wenn sie als Definition gesetzt ist, nicht angezogen werden. Damit führt eine solche Setzung zu einer Erweiterung, in der der definierte Ausdruck u.U. nicht eliminierbar ist. Wäre auch die Anziehung von Aussagen, die Parameter enthalten gestattet, dann würde eine Verletzung dieser Bedingung überdies dazu führen, dass der Definitionskandidat unter Umständen nicht dem Kriterium der Nichtkreativität genügt.

Zu (b): Das Definiendum ist kein Ausdruck der Ausgangssprache; das Definiendum muss neu sein. Ist diese Bedingung verletzt, dann genügt der Definitionskandidat unter Umständen nicht dem Kriterium der Nichtkreativität – die Erweiterung um den Definitionskandidaten und das Definiendum ist eventuell nicht konservativ.

Man betrachte dazu die V_{10}-Aussage

[5.7] $\bigwedge x \bigwedge y(\text{Vater-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(x, y))$

Dann gilt zunächst, dass [5.7] gemäß DP in V_{10} als Definition gesetzt werden darf – [5.7] ist zwar keine material adäquate Definition von 'Vater-von(.., ..)', aber rein formal wäre das Setzen von [5.7] als Definition in V_{10} korrekt. Insbesondere genügt [5.7] dem Kriterium der Nichtkreativität bzgl. V_9.

Ganz anders sieht die Situation aus, wenn man V_{11}, in der 'Vater-von(.., ..)' ja bereits durch die Definition $[3.7]_A$ reguliert ist, um [5.7] als ›zusätzliche‹ Definition von 'Vater-von(.., ..)' zu $V_{11}^{\rceil}$ erweitert. Zunächst ist dann $V_{11}^{\rceil}$ keine konservative Erweiterung von V_{11}, denn [5.7] ist eine V_{11}-Aussage, die in V_{11} nicht, in $V_{11}^{\rceil}$ aber sehr wohl beweisbar ist. Überdies ist $V_{11}^{\rceil}$ aber auch inkonsistent, denn in V_{11} ist die Negation von [5.7] beweisbar. Da $V_{11}^{\rceil}$ eine Erweiterung von V_{11} ist, ist damit in $V_{11}^{\rceil}$ eine Aussage und ihre Negation beweisbar.

Bemerkung 1: In der Wissenschaftspraxis ist die so genannte *Mehrfachdefinition* von Ausdrücken (die durch DP, DFB und DIB kategorisch ausgeschlossen wird) recht häufig anzutreffen. Von einer *harmlosen Mehrfachdefinition* spricht man in einem solchen Fall, wenn die ›zusätzliche‹ Definition in der Ausgangssprache bereits beweisbar ist.

Sei etwa V_{11}^{+} die Erweiterung von V_{11} um die Definition

[5.8] $\bigwedge x \bigwedge y(\text{Vater-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Elter-von}(x, y) \wedge \neg\text{weiblich}(x))$.

Dann ist [5.8] in V_{11} bereits beweisbar (tatsächlich ist [5.8] in V_{10} zur V_{11}-Definition von 'Vater-von(.., ..)' äquivalent und hätte genauso gut als Definition gewählt werden können). Damit ist nicht nur V_{11}^{+} eine konservative Erweiterung von V_{11}, sondern in V_{11}^{+} und V_{11} sind sogar genau dieselben V_{11}-Aussagen (bzw. V_{11}^{+}-Aussagen) beweisbar.

Obwohl es harmlose Mehrfachdefinitionen gibt, schließen die Definitionsregeln Mehrfachdefinitionen generell aus, da sichergestellt sein soll, dass jede regelgemäße Definition das Kriterium der Nichtkreativität erfüllt und da jede Mehrfachdefinition entweder harmlos – und damit überflüssig – oder aber kreativ ist.

Bemerkung 2: In der wissenschaftlichen und lebensweltlichen Praxis gibt es ›umkämpfte Ausdrücke‹, deren korrekte Verwendung umstritten ist. Dabei ist es durchaus legitim, vorliegende Regulierungsvorschläge zu kritisieren und eigene Vorschläge dagegenzusetzen. Unredlich ist es dagegen, eigene Neuregulierungen auf die Sprachen anderer zu übertragen und deren Aussagen nachträglich mit Hilfe der eigenen Neuregulierung umzuinterpretieren.

Bemerkung 3: Die Forderung der Neuheit des Definiendums schließt zirkuläre Definitionsketten aus. Das traditionelle Verbot zirkulärer Definitionsketten ist in der Praxis insbesondere auch dann relevant, wenn Definitionen explikativen und dabei auch informativen Charakter haben sollen. Man vergegenwärtige sich etwa ein Wörterbuch, dass 'Mensch' durch 'Person' und 'Person' durch 'Mensch' erläutert. Falls man nicht bereits vor Benutzung eines solchen Wörterbuches wusste, wie einer der beiden Ausdrücke korrekt verwendet wird, wird man es auch nach der Benutzung nicht (im vielleicht erhofften Umfang) wissen.

Übung 5.1

Welche der folgenden Aussagen (entsprechender Erweiterungen von V) dürfen in keiner Erweiterung von V als Definition gemäß DP gesetzt werden? Begründen Sie Ihre Angaben. Verwenden Sie dabei die Formulierungen aus den vorangehenden Erläuterungen (etwa: 'die Definiendumformel ist keine atomare Formel', 'die Variablen in der Definiendumformel sind nicht paarweise verschieden'). Geben Sie jeweils an, welchem Kriterium die jeweilige Aussage unter Umständen nicht genügt:

a) $\bigwedge x(\bigvee y$ Kind-von$(y, x) \rightarrow$ (Mutter$(x) \leftrightarrow \bigvee u$ Mutter-von$(x, u)))$

b) $\bigwedge x \bigwedge y($Tante-von(x, y)

$\rightarrow$

$\bigvee u(\neg u = x \wedge$ Elter-von(u, y)

$\wedge \bigvee v($Elter-von$(v, u) \wedge$ Elter-von$(v, x))) \wedge$ weiblich$(x))$

c) $\bigwedge x($Tochter-von-Otto$(x) \leftrightarrow$ Elter-von$(o, x) \wedge$ weiblich$(x)) \wedge \bigvee x$ Tochter-von-Otto(x)

d) $\bigwedge x \bigwedge y($Tante-von(x, y)

$\wedge$

$\bigvee u(\neg u = x \wedge$ Elter-von(u, y)

$\wedge \bigvee v($Elter-von$(v, u) \wedge$ Elter-von$(v, x))) \wedge$ weiblich$(x))$

e) $\bigwedge x \bigwedge y($Tante-von$(x, y) \vee$ Onkel-von(x, y)

$\leftrightarrow$

$\bigvee u(\neg u = x \wedge$ Elter-von(u, y)

$\wedge \bigvee v($Elter-von$(v, u) \wedge$ Elter-von$(v, x))) \wedge ($weiblich$(x) \vee$ männlich$(x)))$

f) $\bigwedge x($Gebar-sich-selbst$(x) \leftrightarrow$ Mutter-von$(x, x))$

g) $\bigwedge x \bigwedge y($Onkel(x)

$\leftrightarrow$

$\bigvee u(\neg u = x \wedge$ Elter-von(u, y)

$\wedge \bigvee v($Elter-von$(v, u) \wedge$ Elter-von$(v, x))) \wedge$ männlich$(x))$

h) $\bigwedge x($Nichte$(x) \leftrightarrow \bigvee y($Tante-von$(y, x) \vee$ Onkel-von$(y, x)))$

Übung 5.2

a) $V_{13}^{\#}$ sei die Inventarerweiterung von V_{13} um den einstelligen Prädikator 'Mutter(..)'. Weisen Sie nach, dass die $V_{13}^{\#}$-Aussage '$\bigwedge x \bigwedge y($Mutter$(x) \leftrightarrow$ Mutter-von$(x, y))$' dem Kriterium der Nichtkreativität bzgl. V_{13} nicht genügt.

b) $V^{\#}$ sei die Inventarerweiterung von V um den zweistelligen Prädikator 'Großvater-von(.., ..)'. Zeigen Sie, dass die $V^{\#}$-Aussage

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z($Großvater-von$(x, y) \leftrightarrow$ Elter-von$(z, y) \wedge$ Elter-von$(x, z))$

dem Kriterium der Nichtkreativität bzgl. V nicht genügt.

c) Überlegen Sie sich eine formal korrekte und material adäquate $V_{13}^{\#}$ -Definitionsaussage für 'Mutter(..)'.

d) Überlegen Sie sich eine formal korrekte und material adäquate $V^{\#}$-Definitionsaussage für 'Großvater-von(.., ..)'.

5.2 Regelgemäß Definieren

(*Übungskapitel*)

Im Folgenden sollen Sie das Definieren von Prädikatoren gemäß DP einüben. Ausgangssprache ist dabei die ADS-Sprache V^2, deren Inventar gleich dem Inventar der Inventarerweiterung von L* um die zweistelligen Prädikatoren 'Sohn-von(.., ..)' und 'Tochter-von(.., ..)' ist und in der genau die folgenden Setzungssätze enthalten sind:

[5.9] AXIOM $\bigwedge x(\bigvee y\ \text{Sohn-von}(x, y) \vee \bigvee y\ \text{Tochter-von}(x, y))$

[5.10] AXIOM $\bigwedge x\ \neg(\bigvee y\ \text{Sohn-von}(x, y) \wedge \bigvee y\ \text{Tochter-von}(x, y))$

Übung 5.3

Definieren Sie nacheinander 'männlich(..)', 'weiblich(..)' und 'Kind-von(.., ..)' gemäß DP, so dass folgende Aussagen in der entstehenden Erweiterung von V^2, V^{2}*, beweisbar sind und zeigen Sie dies durch entsprechende Beweise:

a) $\bigwedge x(\text{männlich}(x) \vee \text{weiblich}(x))$

b) $\neg\bigvee x(\text{männlich}(x) \wedge \text{weiblich}(x))$

c) $\bigwedge x(\text{männlich}(x) \leftrightarrow \neg\text{weiblich}(x))$

d) $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Tochter-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(x))$

e) $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Sohn-von}(x, y) \leftrightarrow \text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{männlich}(x))$

V^2+ sei nun die Erweiterung von V^{2}*, die durch folgende Setzungen entsteht:

[5.11] AXIOM $\bigwedge x(\bigvee y(\text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{weiblich}(y)) \wedge \bigvee z(\text{Kind-von}(x, z) \wedge \text{männlich}(z)))$

[5.12] AXIOM $\bigwedge x\bigwedge y\bigwedge z\bigwedge v(\text{Kind-von}(x, y) \wedge \text{Kind-von}(x, z) \wedge \text{Kind-von}(x, v)$

$$\rightarrow$$

$$y = z \vee y = v \vee z = v)$$

[5.13] AXIOM $\bigwedge x\bigwedge y(\text{Kind-von}(x, y) \rightarrow \neg\text{Kind-von}(y, x))$

Übung 5.4

Definieren Sie im Ausgang von V^2+ 'Elter-von(.., ..)' gemäß DP, so dass die folgenden Aussagen in der entstehenden Erweiterung von V^2+ beweisbar sind, und zeigen Sie dies durch entsprechende Beweise:

a) $\bigwedge x(\bigvee y(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{weiblich}(y)) \wedge \bigvee z(\text{Elter-von}(z, x) \wedge \neg\text{weiblich}(z)))$

b) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \bigwedge v(\text{Elter-von}(y, x) \wedge \text{Elter-von}(z, x) \wedge \text{Elter-von}(v, x) \rightarrow z = y \vee z = v \vee y = v)$

c) $\bigwedge x \bigwedge y(\text{Elter-von}(x, y) \rightarrow \neg\text{Elter-von}(y, x))$

Übung 5.5

Definieren Sie im Ausgang von der letzten Erweiterung nacheinander 'Vater-von(.., ..)' und 'Mutter-von(.., ..)' gemäß DP, so dass die folgenden Aussagen in der entstehenden Erweiterung beweisbar sind, und zeigen Sie dies durch entsprechende Beweise:

a) $\bigwedge x \bigvee y \bigvee z(\text{Vater-von}(y, x) \wedge \text{Mutter-von}(z, x))$

b) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(\text{Vater-von}(x, y) \wedge \text{Vater-von}(z, y) \rightarrow x = z)$

c) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(\text{Mutter-von}(x, y) \wedge \text{Mutter-von}(z, y) \rightarrow x = z)$

d) $\bigwedge x \bigvee y(\text{Vater-von}(y, x) \wedge \bigwedge z(\text{Vater-von}(z, x) \rightarrow z = y))$

e) $\bigwedge x \bigvee y(\text{Mutter-von}(y, x) \wedge \bigwedge z(\text{Mutter-von}(z, x) \rightarrow z = y))$

6 Zur Definition von Funktoren und Individuenkonstanten

6.1 Funktoren

(**DFB**) *Regel für die Definition von Funktoren durch universalquantifizierte Bisubjunktionen*

Wenn:

a) $\xi_1, \ldots, \xi_n, \omega$ sind paarweise verschiedene Variablen von S ($n \geq 1$),

b) S' ist eine Inventarerweiterung von S um den n-stelligen Funktor φ,

c) Δ ist eine Formel von S, für die gilt:

ca) in Δ sind höchstens $\xi_1, \ldots, \xi_n, \omega$ frei,

cb) in Δ ist kein S-Parameter Teilterm,

d) in S ist die Aussage: $\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n\bigvee\omega(\Delta \wedge \bigwedge\zeta([\zeta, \omega, \Delta] \rightarrow \zeta = \omega))$ beweisbar (wobei ζ eine von $\xi_1, \ldots, \xi_n, \omega$ verschiedene S-Variable ist, die kein Teilterm von Δ ist),

e) Γ ist eine Aussage der Form:

$$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n\bigwedge\omega(\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \omega \leftrightarrow \Delta),$$

dann darf man Γ in S' definitorisch setzen.

6.2 Individuenkonstanten

(**DIB**) *Regel für die Definition von Individuenkonstanten durch universalquantifizierte Bisubjunktionen*

Wenn:

a) ω ist eine Variable von S,

b) S' ist eine Inventarerweiterung von S um die Individuenkonstante α,

c) Δ ist eine Formel von S, für die gilt:

ca) in Δ ist höchstens ω frei,

cb) in Δ ist kein S-Parameter Teilterm,

d) in S ist die Aussage: $\bigvee\omega(\Delta \wedge \bigwedge\zeta([\zeta, \omega, \Delta] \rightarrow \zeta = \omega))$ beweisbar (wobei ζ eine von ω verschiedene S-Variable ist, die kein Teilterm von Δ ist),

e) Γ ist eine Aussage der Form:

$$\bigwedge\omega(\alpha = \omega \leftrightarrow \Delta),$$

dann darf man Γ in S' definitorisch setzen.

Noch auszuführen.

Literatur

CARNAP, R. (1960): Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. 2. Aufl. Wien: Springer.

- Teil II bietet eine nach wie vor lesenswerte Einführung in den Aufbau verschiedener Sprachen.

BELNAP, N. (1993): On Rigorous Definitions. *Philosophical Studies 72.2/3*, 115–146.

- Konzise Darstellung und Reflexion des definitionstheoretischen Standards.

EBBINGHAUS, H.-D.; FLUM, J.; THOMAS, W. (1996): Einführung in die mathematische Logik. 4. Aufl. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl. (Spektrum-Hochschultaschenbuch).

- Kap. VIII, § 3, bietet Beweise zu den Ergebnissen aus Kap. 4. Ist für Anfänger nur bedingt geeignet.

HINST, P. (1997/1998): Logischer Grundkurs I. Logische Propädeutik und Mengenlehre. Unveröffentlichtes Manuskript, 1997/1998, München, S. 163-178.

- Entwicklung der hier vorausgesetzten Erweiterungsbegriffe für die mengentheoretische Sprache NBGU. Das gesamte Skript ist lesenswert und zum Selbststudium geeignet!

KALISH, D.; MONTAGUE, R.; MAR, G. (1980): *Logic. Techniques of formal reasoning*. 2nd ed. San Diego, Ca: Harcourt Brace Jovanovich.

- Kap. X, XI bieten eine Einführung in den Aufbau formaler Sprachen (bzw. Theorien). Kap. XI ist insbesondere auch der Ort, um sich über die Definition von Quantifikatoren und Junktoren zu informieren.

KLEINKNECHT, R. (1979): Grundlagen der modernen Definitionstheorie. Königstein/Ts.: Scriptor-Verl.

- Umfassende Aufarbeitung der modernen Definitionstheorie auf hohem begrifflichen Niveau. Ist für Anfänger nur bedingt geeignet.

SAVIGNY, E. V. (1973): Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren : Übungen zum Selbststudium. München: Dt. Taschenbuch-Verl.

- Hervorragendes Übungsbuch, um die Kunst des Definierens im Selbststudium zu erlernen.

SUPPES, P. (1980): Definition. In: Speck, Josef; Acham, Karl (Hg.): Handbuch wissenschaftstheoretischer Begriffe. 3 Bände. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht, Bd. 1, S. 124–129.

- Konzise und nachvollziehbare Entwicklung der wichtigsten definitionstheoretischen Begrifflichkeiten.

SIEGWART, G. (1999): Begriffsbildung. In: Sandkühler, Hans Jörg (Hg.): Enzyklopädie Philosophie. 2 Bände. Hamburg: Meiner, Bd. 1, S. 130–144.

- Bietet eine zugängliche philosophische Aufarbeitung des Begriffsbildungskomplexes und enthält zahlreiche weiterführende Literaturhinweise, auch zu anderen Verfahren der Begriffsbildung.

SIEGWART, G. (1999): Identität. In: Sandkühler, Hans Jörg (Hg.): Enzyklopädie Philosophie. 2 Bände. Hamburg: Meiner, Bd. 1, S. 130–144.

- Enthält genauere Informationen zu Einführungsmöglichkeiten für einen Identitätsprädikator.

SIEGWART, G. unter Mitwirkung von CORDES, M. und REINMUTH, F. (2012ff): Denkwerkzeuge. Eine Vorschule der Philosophie.

– Kapitel 1-5 entwickeln den Rahmen für die hiesige Präsentation der Definitionslehre.

SUPPES, P. (1999): Introduction to logic. Mineola, NY: Dover Publ.

– Kap. 8 bietet eine klare und sehr gut zum Selbststudium geeignete Einführung in die Definitionstheorie.