Geo Siegwart unter Mitwirkung von Moritz Cordes und Friedrich Reinmuth[*]

WS 2012/2013

Denkwerkzeuge

Eine Vorschule der Philosophie

---

[*] Diese Version der "Denkwerkzeuge" stellt eine Überarbeitung des 2002ff. von Geo Siegwart verfertigten Skriptums dar, für die Moritz Cordes und Friedrich Reinmuth eine Anpassung von Kap. 4 und 5 an den in Cordes, M.; Reinmuth, F.: Ein Redehandlungskalkül. Ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens nebst Metatheorie. Version 2.0. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00532643/en/. Greifswald 2011, entwickelten Kalkül vorgenommen sowie kleinere Korrekturen und Anpassungen in den restlichen Kapiteln durchgeführt haben. Der vorliegende Text begleitet die Vorlesungen zur „Logische Propädeutik“ ab dem WS 2012/2013. Er ist vornehmlich zum Gebrauch der Studierenden bestimmt.

Es gibt keine elementare Philosophie.
Der philosophische See hat keine flachen Ufer.

Peter F. Strawson

1. Die philosophische Vorschule

Womit soll der Anfang des Philosophierens gemacht werden? Mit dem Erwerb welcher Fertigkeiten sollen diejenigen beginnen, die die Kunst des Philosophierens erlernen möchten? Wer so fragt, unterstellt, dass die Aneignung philosophischer Fertigkeiten der Planung, der vorausschauenden Organisation und Ordnung durch die Lehrenden und die Lernenden bedarf. Sie unterscheidet sich insoweit nicht von dem Erwerb handwerklicher Künste, z.B. der Kunst des Schreinerns, des Heilens oder des Kochens.

Womit soll der Anfang des Philosophierens gemacht werden? Dieser Frage kann nicht nur ein erwerbsbezogener, sondern auch ein systematischer Sinn gegeben werden. Auch hier hilft die Analogie mit handwerklichen Kompetenzen weiter: Wer einen anspruchsvollen Einbauschrank schreinert, wer einen komplizierten Bruch behandelt oder wer eine labile Sauce bindet, der wird (resp. sollte) die einschlägigen Werkzeuge und Materialien kennen und beherrschen. Ebenso gibt es beim Philosophieren Instrumente und Verfahren, deren Kenntnis und Beherrschung für solides und insbesondere gutes Philosophieren unverzichtbar scheint, völlig gleichgültig, welches besondere – ethische, ästhetische, ontologische usw. – Problem gerade zu bearbeiten ist.

Die Anfänge in der Erwerbsordnung fallen mit jenen der Vollzugsordnung zusammen: Die Mittel und Verfahren, die in jedem philosophischen Vollzug benötigt werden, sollten auch diejenigen sein, die im philosophischen Noviziat, der Vorschule der Philosophie, zu vermitteln sind. – In Aufnahme überkommener Redegepflogenheiten mag man diese Anfänge mit den Titeln „Erste Philosophie“ („prima philosophia“) oder auch – etwas missverständlich – „Fundamentalphilosophie“ („philosophia fundamentalis“) versehen.

Während es auf der Hand liegt, worin die Anfänge der Schreiner- oder Kochkunst bestehen, versteht es sich nicht von selbst, welches die Formen und die Inhalte der Ersten Philosophie sind. In der Folge ist diese Aufgabe anzugehen. Zu ihrer Erledigung ist eine wenigstens provisorische Kenntnis einiger Zwecke und Eigentümlichkeiten des Philosophierens gefordert. Das geforderte vorläufige Wissen wird bereitgestellt, indem zunächst Beispiele für den philosophischen Vollzug vorgeführt werden (1.1). Über die Analyse des exemplarischen Materials lassen sich dann die gewünschten Einsichten gewinnen; auf diesem Hintergrund wird die Frage nach der Gestalt und den Inhalten des Anfangs und der darauf zu gründenden Fortsetzung beantwortbar (1.2). Anschließend soll das Programm der philosophischen Vorschule präsentiert werden (1.3). Endlich sind einige Literaturempfehlungen für das ergänzende und vertiefende Studium auszusprechen (1.4).

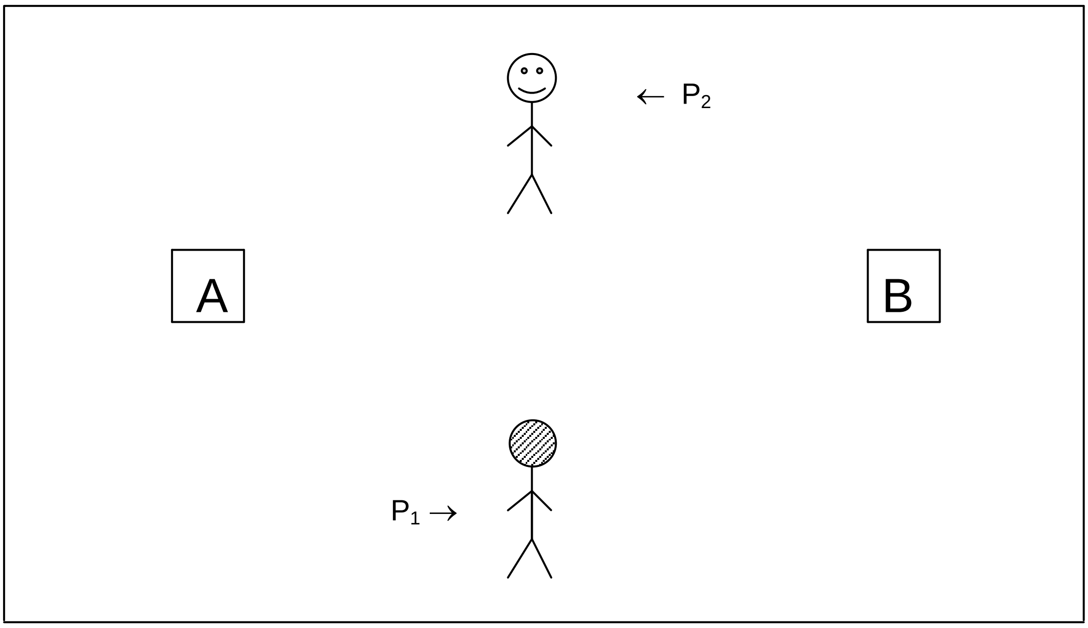
1.1. Beispiele für den philosophischen Vollzug

Das erste Beispiel für den philosophischen Vollzug befasst sich mit einer aus dem Alltag vertrauten Wahrnehmungssituation. Es wird gezeigt, wie sich eine paradoxe Erkenntnislage mit elementaren Mitteln auflösen lässt (1.1.1). Im zweiten Exempel wird die Aufmerksamkeit auf das Schließen, eine ständig und meist unbewusst vollzogene Redehandlung, gelenkt (1.1.2). Das dritte Beispiel greift eine Frage auf, die auch der Laie in Sachen Philosophie spontan als „philosophisch“ apostrophieren würde: Warum gibt es überhaupt etwas – und nicht vielmehr nichts? (1.1.3). Schließlich kommt in der vierten und letzten Beispielvorführung eine häufig geäußerte moralphilosophische Intuition, die Unantastbarkeit des Lebens, auf den Prüfstand (1.1.4).

1.1.1. Rechts/Links: Verdeckte Bezugspunkte

Ausgangspunkt der ersten Beispielbetrachtung ist die unter [1] skizzierte elementare räumliche Wahrnehmungssituation: Zwei Gegenstände A und B befinden sich im Wahrnehmungsfeld der Personen P_1 und P_2:

[1]



P_1 formuliert als Resultat seiner Beobachtung die Aussage:

[2] a) A liegt links von B,

während P_2 feststellt:

b) A liegt rechts von B.

An dieser Stelle spürt man bereits, dass ›etwas schief gelaufen ist‹. Der ›Unfall‹ lässt sich so aufschlüsseln: Mit b) gilt wegen Asymmetrie der Relation des Rechtsliegens:

c) nicht: B liegt rechts von A.

Die Rechtsrelation, d.h. die durch den Ausdruck '..liegt rechts von..' ausgedrückte Beziehung, ist asymmetrisch, weil für beliebige Gegebenheiten *x*, *y* gilt: Wenn *x* rechts von *y* liegt, dann liegt *y* nicht rechts von *x*. Die Asymmetrie einer Relation besteht gerade in ihrer Unumkehrbarkeit. Weitere Beispiele für asymmetrische Beziehungen sind etwa die Vater-, und die Kleinerrelation; wenn etwa *x* kleiner ist als *y* ist, dann ist *y* nicht kleiner als *x*.

Da ferner Rechts- und Linksliegen zueinander konvers sind, resultiert aus c) durch passende Folgerungsschritte:

d) nicht: A liegt links von B.

Zur Erläuterung der Konversität zwischen der Links- und der Rechtsrelation: Die Linksrelation ist Konverse der Rechtsrelation (und umgekehrt), weil für beliebige Gegebenheiten *x*, *y* gilt: *x* liegt genau dann links von *y*, wenn *y* rechts von *x* liegt. Weitere Beispiele für zueinander konverse Beziehungen bilden die Elter- und die Kindrelation, die Größer- und die Kleinerrelation sowie die Verhältnisse des Liebens und des Geliebtwerdens.

Die Aussagen 'A liegt links von B' und 'nicht: A liegt links von B' bilden, konjunktiv zusammengefasst, d.h. durch das Wort 'und' verbunden, einen <u>Widerspruch</u>, eine <u>Kontradiktion</u>: 'A liegt links von B und (nicht: A liegt links von B)'.

Da der Widerspruch sich aus (jedenfalls beim ersten Zusehen) unproblematischen Gründen auf seriösen Schlusswegen ergibt, sieht sich der Betrachter mit einem <u>Paradox</u> konfrontiert. Findet in einem Disput, wie im Beispielsfall leicht vorstellbar, jeder Bestandteil einer Kontradiktion Verfechter, dann treten diese in eine <u>Kontroverse</u> ein.

Wie könnte ein Betrachter, wenn er die übergeordnete Rolle des Streitschlichters übernimmt, das Paradox auflösen und erklären, auf welchem Wege sollten die Kontrahenten P_1 und P_2 ihren Streit beilegen? Schon beim ersten Analyseanlauf drängt sich die Möglichkeit auf, <u>den</u>

Bezug auf die beiden Beobachter P_1 und P_2 ausdrücklich zu machen: Die Kontrahenten sind eben nicht nur außenstehende Beobachter einer räumlichen Konstellation, sondern gehören ihr auch an. Man vollzieht dies im Übrigen nach, wenn man zur Überprüfung der Aussage des Beobachters P_2 die Skizze oder sich selbst – wenigstens ›im Geiste‹ – umdreht. Unter Hinzunahme des bislang verdeckten Beobachterfaktors ergibt sich zunächst:

[3] a) A liegt links von B bezüglich P_1.

b) A liegt rechts von B bezüglich P_2.

Aus der zweiten Aussage folgt mit Asymmetrie bezüglich der beiden ersten, d.h. der durch ‘A‘ und ‘B‘ besetzten, Stellen:

c) nicht: B liegt rechts von A bezüglich P_2,

und Konversität des Rechts- und Linksliegens bezüglich der beiden ersten Stellen liefert lediglich:

d) nicht: A liegt links von B bezüglich P_2.

Die Aussagen ‘A liegt links von B bezüglich P_1’ und ‘nicht: A liegt links von B bezüglich P_2’ bilden in ihrer konjunktiven Zusammenfassung keinen Widerspruch, da die zweite eben nicht die Negation der ersten ist. Dies liegt daran, dass bei der ersten ‘P_1’, bei der zweiten jedoch ‘P_2’ der letzte Teilausdruck ist.

Die Kontroverse wird als eine nur scheinbare erklärt und aufgelöst, das Paradox verschwindet: Indem der zunächst vergessene Bezug auf den Beobachter, allgemein gesprochen: auf einen vordem verdeckten Bezugspunkt bzw. impliziten Parameter, zur Geltung gebracht wird, kann die kognitive Turbulenz, die Verwirrung vom Erkenntnisgeschäft, in ihrer Entstehung durchschaubar gemacht und dadurch behoben werden.

Aus der im Beispiel erfolgreichen Taktik kann eine allgemeine Vorschrift, eine Maxime, gewonnen werden; deren einfachste Formulierung lautet:

[4] Entschärfe kognitive Turbulenzen (wenn möglich) durch Angabe verdeckter Bezugspunkte!

Die kognitiven Turbulenzen umfassen nicht nur Paradoxien und Kontroversen, sondern auch ›schwierige‹, ›außergewöhnliche‹ Erkenntnissituationen bzw. Erkenntnisstörungen aller Art. Der Klammerzusatz gibt zu verstehen, dass die Maxime nicht immer erfolgreich arbeitet: Sie stellt nur ein Utensil aus einem umfangreichen Arsenal zum Umgang mit Engpässen im Erkenntnisgeschäft dar.

Benutzt man das elementare Vokabular der Rationalen Grammatik (↑3.2), dann liest sich [4], die Maxime der Stelligkeitserhöhung, kurz: die Stelligkeitsmaxime, so:

[4]* Entschärfe kognitive Turbulenzen (wenn möglich) durch Stelligkeitserhöhung der beteiligten Prädikatoren!

Die in der linken Spalte notierten Redeteile sind Beispiele für zweistellige, die rechts befindlichen exemplifizieren die zugeordneten dreistelligen Prädikatoren:

[5] a) ..liegt links von.. → ..liegt links von..bezüglich..
b) ..liegt rechts von.. → ..liegt rechts von..bezüglich..

Die unter [4] bzw. [4]* provisorisch formulierte Stelligkeitsmaxime ist also im Beispiel so benutzt worden, dass ein Übergang von zwei- zu dreistelligen Prädikatoren erfolgt. Prädikatoren sind – erläutert im Sinne der Schnellverständigung – Redeteile, die zu Recht oder zu Unrecht von Gegenständen ausgesagt werden: ‘..ist eine Frau’ ist ein einstelliger Prädikator, der zu Recht von Xanthippe und zu Unrecht von Sokrates ausgesagt wird. ‘..liegt zwischen..und..’ ist ein dreistelliger Prädikator, der zu Recht von (in dieser Reihenfolge!) Köln, München und Hamburg, und nur zu Unrecht von (in dieser Reihenfolge!) München, Köln und Hamburg ausgesagt wird.

Diagnose und Therapie des obigen Miniaturparadoxes sollten nicht dazu veranlassen, bei Rechts-Links-Lokalisierungen fortan in allen Redezusammenhängen den dreistelligen Prädikator zu verwenden. In der Mehrzahl der Situationen – z.B. dann, wenn die Betrachter nebeneinander stehen oder sich unschwer und ›automatisch‹ in die Position des Mitbetrachters versetzen – ist die Verwendung der zweistelligen Prädikatoren nicht nur nicht paradoxerzeugend, sondern auch unmissverständlich und – um von nicht entstehenden Nachteilen zu erreichbaren Vorzügen überzugehen – auch weitaus ökonomischer. Die Stelligkeitsmaxime gilt hier eben nur für den Störungsfall; im Sinne einer Anweisung zur durchgehenden ›Rede nach Vorschrift‹ wäre sie grob missverstanden.

Wem die Behandlung des Rechts-Links-Paradoxes einleuchtet, der braucht noch keineswegs davon überzeugt zu sein, dass der Stelligkeitsmaxime ein weiterer, d.h. ein über einfache Lokalisierungskontexte hinausgehender, Anwendungsbereich zuzuschreiben ist. Um dies mit Beispielen zu verdeutlichen, ist auf zwei für die Handlungsorganisation und -

beurteilung wichtige Gruppen verdeckter Bezugspunkte, die Zweck- und die Maßstabparameter, hinzuweisen.

Zweckparameter: Man ist es gewohnt, Gegebenheiten aller Art – Personen, Einstellungen, Institutionen, Handlungen, Verfahren, Erkenntnisse, Geräte usf. – als wichtig oder unwichtig, bedeutend oder unbedeutend, verzichtbar oder unverzichtbar usf. zu beurteilen. Einige dieser scheinbar ›absoluten‹ Beurteilungsmittel sind unter [6] notiert, und zwar so, dass der durch Hinzufügung von ‘un‘ gebildete Negatprädikator und in der rechten Spalte sogleich das stelligkeitserhöhte Redemittel, ebenfalls positiv wie negativ, beigegeben wird; in jeder Zeile finden sich demnach vier Prädikatoren:

[6] a) ..ist (un)wichtig → ..ist (un)wichtig für..
b) ..ist (un)verzichtbar → ..ist (un)verzichtbar für/zum..
c) ..ist (un)tauglich → ..ist (un)tauglich für/zum..
d) ..ist (un)erwünscht → ..ist (un)erwünscht für/zum..
e) ..ist (un)brauchbar → ..ist (un)brauchbar für/zum..
f) ..ist (in)exakt → ..ist (zu in)exakt [genug] für/zum..

Zu jedem dieser Redemittel gibt es zahlreiche (zumindest partielle) Synonyme: So wird z.B. für a) ‘(un)wichtig’ auch ‘(un)bedeutend’, ‘(ir)relevant’, für b) ‘(un)verzichtbar’ auch ‘(un)entbehrlich’, ‘(un)ersetzlich’, für c) ‘(un)tauglich’ auch ‘wertvoll’ resp. ‘wertlos’ auch ‘nützlich’ resp. ‘unnütz’ und ‘(un)dienlich’, für f) ‘(in)exakt’ auch ‘(un)präzise’, ‘(un)genau’ verwendet. Die Synonymendichte zeigt die hohe Präsenz dieser Prädikatoren in der Beurteilungspraxis an.

Es liegt nun auf der Hand, dass Gegebenheiten welcher Art auch immer nicht schon ›in sich‹ (un)wichtig, (un)tauglich, (un)verzichtbar usf. sind, sondern nur, insoweit sie in bestimmte Zweck-Mittel-Verhältnisse einbezogen werden; und was bei der einen Zweckvorgabe unentbehrlich ist, kann bei einer anderen hochgradig unerwünscht sein: Würmer mögen z.B. unverzichtbar sein zum Angeln, sind aber schon verzichtbar bei Folgetätigkeiten wie der Zubereitung der Angelbeute. Weiter werden z.B. Messungen häufig als exakt oder inexakt beurteilt. Aber auch hier wird immer ein Zweck unterstellt: Für das Verlegen eines Teppichbodens ist es exakt genug, die Grundfläche eines Raumes in Metern und Zentimetern anzugeben; mit Mikrometern zu arbeiten bedeutete hier keineswegs eine Verbesserung des Ergebnisses, sondern wäre nur eine völlig unnötige Komplikation.

Kontroversen, die durch Rückgriff auf implizite Zweckparameter bewältigbar sind, entstehen in der Regel dann, wenn die Parteien irrigerweise einen gemeinsam akzeptierten Zweck unterstellen, auf den hin Mittelkandidaten dann beurteilt werden. Da jedoch die Zweckgemeinsamkeit fehlt, erfolgt eine widersprüchliche Beurteilung des Kandidaten mit einem einstelligen Prädikator, die wiederum durch Markierung der verschiedenen Zwecke, d.h. durch Benutzung eines zweistelligen Prädikators, aufgelöst werden kann. Etwaige Folgekontroversen werden sich dann gewöhnlich auf die zu akzeptierenden Zwecke beziehen.

Maßstabparameter: Handlungen und Handlungsergebnisse (gelegentlich auch Fertigkeiten von Agenten und Agenten selbst) werden häufig als gültig oder ungültig, korrekt oder inkorrekt, erfolgreich oder erfolglos usf. beurteilt; Beispiele für solche Prädikatoren sind unter [7] notiert:

[7] a) ..ist (un)gültig → ..ist (un)gültig gemäß..
b) ..ist (in)korrekt → ..ist (in)korrekt gemäß..
c) ..ist erfolgreich/-los → ..ist erfolgreich/-los bezüglich..
d) ..ist ge-/misslungen → ..ist ge-/misslungen relativ auf..

Bei einstelliger Verwendung ist stets ein impliziter, d.h. nicht als solcher benannter, Maßstab am Werke. Maßstäbe können etwa von einzelnen Kriterien oder ganzen Kriteriensystemen, einzelnen Regeln oder Regelwerken gebildet werden. Bezeichnungen für Maßstäbe sind dann passende Besetzungen für die zweite Stelle des zweistelligen Prädikators.

Maßstäbe sind in der Regel nicht ohne Alternative, und je nach akzeptiertem Maßstab variiert die Beurteilung: Wann die vorgetragene Argumentation (un)gültig ist, wann die angelegte Garderobe (in)korrekt ist, wann die Sauce ge-/misslungen ist, ergibt sich nach dem je unterstellten Maßstab. Auch hier ist im Kontroversenfall der Maßstab kenntlich zu machen, auf den sich dann mögliche Folgedispute gewöhnlich beziehen. – Routinisiert man im übrigen die Taktik, auf die versteckten Maßstäbe abzustellen, dann wird man, anbei geredet, einer ungünstigen Beurteilung eigener Handlungen, Produkte oder Handlungskompetenzen nur noch entnehmen können, dass es für den Beurteilenden hohe Zeit ist, die Güte des von ihm angelegten Maßstabs zu überdenken.

An dieser Stelle wird die Behandlung des ersten Beispiels für den philosophischen Vollzug, des Stelligkeitsbeispiels, mit einer Übung zum Abschluss kommen. Die Systematisierung des gesamten Problemfeldes wird späteren Überlegungen vorbehalten; dort stehen dann bequeme und präzise Artikulationsmittel bereit (↑3.4.3).

Ü1 a) Die Herleitung des Paradoxes geht aus von [2]a) und [2]b). Dabei wird b) mit Asymmetrie und Konversität so umgeformt, dass sich die Negation von a) ergibt. Ein alternativer Weg hält b) stabil und geht von a) wiederum über Asymmetrie und Konversität zur Negation von b). Skizzieren Sie diesen Pfad!

b) Suchen Sie drei weitere Beispiele für Situationen, in denen sich Paradoxien/Kontroversen durch unterstellige Prädikatorenverwendung ergeben!

c) Betrachten Sie den Slogan: „Wir alle sind Ausländer, fast überall“. Wie hängt seine Pointe mit der Stelligkeit von Prädikatoren zusammen? Beginnen Sie dabei mit der Untersuchung der Aussage „Helmut Kohl ist Ausländer“. Welcher implizite Parameter ist unterstellt, wenn die Aussage wahr ist, welcher ist wirksam, wenn sie falsch ist?

1.1.2. Für alle/Es gibt: Überkletterte Zäune

Über einige Handlungsformen wird ausgiebig nachgedacht, während andere meist vor den Toren der Aufmerksamkeit bleiben. Zu den letzteren zählt für gewöhnlich das <u>Folgern</u> oder <u>Schließen</u>: (Fast) immer jedoch, wenn Worte wie ‘also’, ‘mithin’, ‘infolgedessen’, ‘deshalb’ und viele hier ungenannte bedeutungsgleiche Redeteile Verwendung finden, vollziehen Autoren Folgerungen. Geschlossen wird <u>also</u> ständig, in Argumentationen, Reflexionen, Disputen, Widerlegungen, Erklärungen, hypothetischen Betrachtungen u.v.a.m.; und indem der letzte Satz geäußert worden ist, konnte ihm eine bestätigende Instanz hinzugefügt werden.

Folgern ist keine Angelegenheit freihändiger Beliebigkeit. Wer z.B. die unter [8] notierte Satzfolge äußert, folgert korrekt:

[8] Da Wenn Moby Dick ein Wal ist, dann ist er ein Säuger.
Da Moby Dick ist ein Wal.
Also Moby Dick ist ein Säuger.

Der Übergang von den Prämissen, den Aussagen der beiden ersten Zeilen, zur Konklusion, der Aussage in der letzten Zeile, ist nicht zu beanstanden. Er hat folgende Form:

[8]* Da Wenn p, dann q.

Da p.

Also q.

Wer hingegen die Redesequenz [9] äußert, folgert inkorrekt:

[9] Da Wenn Moby Dick eine Katze ist, dann ist er ein Säuger.

Da Moby Dick ist ein Säuger.

Also Moby Dick ist eine Katze.

Hier ist zwischen den Prämissen und der Konklusion ein Zaun zu ziehen; und wer hier gleichwohl folgert, überklettert den Zaun, folgert inkorrekt. Diesem Übergang korrespondiert die Form:

[9]* Da Wenn p, dann q.

Da q.

Also p.

An [9] lässt sich auch ablesen, warum ein derartiger Übergang inkorrekt ist: Die Prämissen sind wahr, die Konklusion ist aber falsch; korrekte Schlüsse dürfen jedoch nicht von wahren zu falschen Aussagen führen, sondern müssen die Wahrheit der Prämissen an die Konklusion weitergeben und damit diese Eigenschaft bewahren; das korrekte Schließen ist wahrheitserblich bzw. wahrheitskonservativ.

Wenn, wie unterstellt, unstrittig ist, dass aus Beliebigem nicht Beliebiges folgen darf, stellt sich die Frage, welche Aussagen aus welchen Aussagen gefolgert werden dürfen. In der Metapher: Wo stehen Schlusszäune? Wo ist freier Durchgang zu gewähren? Da diese Fragen sich nicht von selbst erledigen, wird ihnen seit den philosophischen Anfängen eine eigene Wissenschaft, die Logik (im engeren Sinne), zugeordnet. Die Notwendigkeit einer eigenen Disziplin wird unmittelbar nachvollziehbar bei der Betrachtung komplizierterer Schlüsse. Man betrachte den unter [10] notierten Übergang:

[10] Da Es gibt eine ganze Zahl x, die kleiner ist als jede positive ganze Zahl y.
Also Für jede positive ganze Zahl y gibt es eine ganze Zahl x, so dass x kleiner ist als y.

Dieser Übergang ist korrekt; die allgemeine Form solcher Übergänge ist unter [11] notiert:

[11] Da Es gibt ein F-Ding x, das in R zu jedem G-Ding y steht.
Also Für jedes G-Ding y gibt es ein F-Ding x, so dass x in R zu y steht.

Dabei entspricht dem F- bzw. G-Sein die Eigenschaft, eine ganze bzw. eine positive ganze Zahl zu sein; dem Stehen in R korrespondiert das Kleinersein. – Ausdrücke wie ‘für jedes’ und ‘es gibt (ein)’ zeigen die (groben) quantitativen Verhältnisse an und heißen deshalb (grobe) Quantoren; ‘für jedes y’ bzw. ‘für alle y’ ist der Universalquantor; ‘es gibt ein x’ bzw. ‘für wenigstens ein y’ ist der Partikularquantor; die notierte Schlussform ist der Quantorentausch. Partikular- und Universalquantor tauschen ihren Platz. In Frage stehe nun, ob ein solcher Quantorentausch auch bei umgekehrter Reihenfolge der Quantoren möglich ist, ob also auch Übergänge korrekt sind, deren allgemeine Form unter [12] notiert ist:

[12] Da Für jedes G-Ding y gibt es ein F-Ding x, so dass x in R zu y steht.
Also Es gibt ein F-Ding x, das in R zu jedem G-Ding y steht.

Die Inkorrektheit dieser Form macht man sich klar durch ein Gegenbeispiel, d.h. eine Instanz von [12], deren Prämissen wahr sind, deren Konklusion aber falsch ist:

[13] Da Für jede ganze Zahl y gibt es eine positive ganze Zahl x, so dass x größer ist als y.
Also Es gibt eine positive ganze Zahl x, die größer ist als jede ganze Zahl y.

[13] entsteht aus [12] durch folgende Zuordnungen: Dem F-Sein entspricht die Eigenschaft, eine positive ganze Zahl zu sein, dem G-Sein entspricht die Eigenschaft, eine ganze Zahl zu sein; dem Stehen in R korrespondiert das Größersein. Die Prämisse ist wahr: Zu jeder ganzen Zahl gibt es (nicht nur) eine positive ganze Zahl, die größer ist als sie. Eine positive ganze Zahl, die größer wäre als jede ganze Zahl, wäre jedoch größer als sie selbst und größer als alle ihr nachfolgenden Zahlen; das ist arithmetisch falsch. – Noch ein Gegenbeispiel für die Klientel mit Abneigung gegen Zahlenverhältnisse: Daraus, dass jeder Mensch einen Kopf zwischen den Schultern hat, kann man nicht folgern, dass es wenigstens einen Kopf gibt, den jeder Mensch zwischen seinen Schultern hat. Um durch ein weiteres Beispiel philosophisches

Terrain zu betreten: Daraus, dass jedes Ereignis eine Ursache hat, die es bewirkt, folgt nicht, dass es wenigstens eine Ursache gibt, die jedes Ereignis bewirkt.

Interesse gewinnt dieser Fehlschluss deshalb, weil er häufig und unbemerkt an Schlüsselstellen von (dann ungültigen) Argumentationen auftritt. Dazu zwei weitere Illustrationen: (i) Viele Auffassungen vom Handeln gehen davon aus, dass mit jeder Handlung ein, genauer: wenigstens ein, Zweck verfolgt wird. Man liest das Skriptum, um logische Fertigkeiten zu gewinnen, um die Klausur zu bestehen. Man raucht, um sich zu entspannen, man sät, um zu ernten, man fährt nach X, um Y zu treffen usf. Für das Folgende wird Plausibilität dieser Ansätze unterstellt. Man betrachte nun aber folgenden Schluss:

[14] Da Für jede Handlung *h* gibt es einen Zweck *z*, so dass *z* mit *h* verfolgt wird.

Also Es gibt einen Zweck *z*, so dass *z* mit jeder Handlung *h* verfolgt wird.

Wer so schließt, liefert eine Instanz von [12], überklettert also einen Zaun. Wer den Fehlschluss nicht bemerkt und die Prämisse akzeptiert, wird auch zur Konklusion stehen. In der Wendung ‘es gibt ein(e/n)’ steckt ferner eine folgenreiche Zweideutigkeit. Diese kann man sich durch Unterstreichung vor Augen führen: ‘es <u>gibt</u> ein(e/n)’ steht ‘es gibt <u>ein(e/n)</u>’ gegenüber. Die erste Ausdrucksverbindung liest man im Sinne der Vereindeutigung besser als ‘es gibt <u>wenigstens</u> ein(e/n)’; die zweite wird deutlicher in der Lesart ‘es gibt <u>genau</u> ein(e/n)’. Der Partikularquantor ist also vom Einsquantor zu unterscheiden; ihre Verwechselung stellt eine Quantorenkonfusion dar.

Zurück zum Beispiel: Wer so schließt, muss die Frage akzeptieren, welches denn <u>der Zweck</u> ist, der mit jeder Handlung verfolgt wird. Aber ehe man nun den an dieser Stelle angesagten Einladungen zu weltanschaulichen Reisen folgt – häufig wird ‘Zweck’ noch durch ‘Sinn’ und ‘verfolgt’ durch ‘realisiert’ ersetzt – , sollte man, philosophisch instruiert, den windigen Reiseunternehmern die rote Karte mit dem Eintrag „Überkletterter Zaun“ vorhalten.

(ii) Ein zweites, bewusst extrem gewähltes Beispiel: Es ist eine logische Wahrheit, dass jeder Gegenstand mit sich identisch ist; und daraus lässt sich korrekt folgern, dass es zu jedem Gegenstand einen Gegenstand gibt, der mit ihm identisch ist. Der folgende Schluss wählt diese Wahrheit als Prämisse:

[15] Da Für alle *x* gibt es wenigstens ein *y*, so dass *x* mit *y* identisch ist.

Also Es gibt wenigstens ein *y*, so dass für alle *x* gilt: *x* ist mit *y* identisch.

Dabei wird neuerlich – fast – derselbe Zaun überklettert: Dem in R-Stehen korrespondiert das Identischsein; die Gegebenheiten *x* und *y* werden jedoch nicht weiter ausgesondert, sondern sind beliebig. Wenn alles mit etwas identisch ist, folgt daraus keineswegs, dass es einen Gegenstand gibt, der mit allem identisch ist. Letzteres besagt nämlich, anders gelesen, dass es wenigstens und höchstens, also genau ein Ding gibt: Neben *y* kann es nämlich kein von *y* verschiedenes Ding *x* geben, da alle *x* mit *y* identisch sind. Damit ist insbesondere auch der Autor mit seinen Lesern identisch, die sich auch ihrerseits nicht voneinander unterscheiden. Der Ausgangspunkt war eine unstrittige logische Wahrheit, am Ende der Reise steht der Monismus, die sehr wohl bestreitbare Auffassung also, nach der, salopp geredet, das, was weniger als alles ist, auch schon nichts ist.

Ü2 a) Suchen Sie eine weitere Gegeninstanz zu dem unter [12] notierten Schema!

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die folgenden Schlüsse inkorrekt sind! Ein Gegenbeispiel ist dabei eine Redesequenz, die dieselbe Form hat, deren Prämissen wahr und deren Konklusion falsch ist.

ba) Da Greifswald ist eine Hansestadt.

Also Greifswald ist eine Hansestadt und Essen liegt in Nordrhein-Westfalen.

bb) Da Greifswald ist eine Hansestadt oder Greifswald ist eine Universitätsstadt.

Also Greifswald ist eine Universitätsstadt.

bc) Da Es gibt Gegenstände, die rot sind, und es gibt Gegenstände, die rund sind.

Also Es gibt Gegenstände, die rot und rund sind!

1.1.3. Etwas/Nichts: Entglittene Fragen

Während die Offenlegung verdeckter Bezugspunkte und das Ziehen von Folgerungszäunen in beliebigen kognitiven Geschäften vorkommt – und damit eben auch in der Philosophie – , soll nun, wiederum exemplarisch, eine als genuin philosophisch geltende Problemstellung studiert werden. Es ist nämlich dem Vorurteil entgegenzutreten, dass philosophische Analyse im hier vorgeführten und zur Nachahmung empfohlenen Stil gerade bei den ›wirklichen‹,

›substantiellen‹, ›ernsten‹ und ›tiefen‹ philosophischen Problemen nichts auszurichten vermag.

Zu erörtern ist eine Frage, die zu den Kostbarkeiten der Metaphysik gerechnet wird und der deshalb auch der Titel „Sanctissimum der Metaphysik" zuerkannt worden ist. Seit Leibniz sie 1697 erstmals formulierte, hat sie eine anhaltend beeindruckende Konjunktur vorzuweisen. Sie lautet:

[16] Warum gibt es überhaupt etwas – und nicht vielmehr nichts?

Es ist insbesondere Betroffenheit, ja geradezu Erschütterung, die dieser Frage ihre Karriere sicherte. Ein Philosoph allerdings, der derlei Gefühle an die Stelle von Analyse und (Re)Konstruktion setzt, taugt ebensoviel wie ein Klempner, der in Anbetracht eines Rohrbruchs gebannt in die austretenden Wassermassen starrt. Das gilt, anbei bemerkt, auch und insbesondere dann, wenn es sich um die Bearbeitung moralphilosophischer Fragen handelt, um Fragen also, bei deren Behandlung Betroffenheit oft mit Kompetenz und analytische Distanz mit Inkompetenz verwechselt wird (↑1.1.4). – Es ist also ohne Umschweife zu den Werkzeugen zu greifen!

Vorgegeben ist eine Warum-Frage. Warum-Fragen verlangen als Antworten Erklärungen – und Erklärungen sind umgekehrt Antworten auf Warum-Fragen: Warum fällt der Barometerstand? Der Barometerstand fällt, weil Sturm aufzieht. Die Weil-Phrase liefert die Erklärung. Genauer: Die Weil-Phrase liefert gemeinsam mit meteorologischen und messtheoretischen Unterstellungen, kurz: mit einer Hintergrundtheorie, die Erklärung.

Die mit der Hintergrundtheorie gegebene Hierarchie ist wesentlich: Obwohl nämlich relativ auf diese Theorie gilt, dass der Barometerstand genau dann fällt, wenn Sturm aufzieht, wäre die Verlautbarung ‘weil der Barometerstand fällt‘ keineswegs als Antwort auf die Frage ‘Warum zieht Sturm auf?‘ zu akzeptieren.

Ferner muss das zu Erklärende wahr sein. Wird uns die Frage gestellt, warum Bananen gerade sind, dann sinnen wir nicht auf eine Antwort, sondern weisen die Frage zurück. In Erklärungen geht es also nicht – wie etwa in Beweisen – darum, Wahrheiten allererst zu etablieren, sondern lediglich darum, schon feststehende, anderweitig gewonnene Wahrheiten in ein System von Wahrheiten einzufügen.

Wie hinter allen Fragen steht auch hinter Warum-Fragen genau ein Fragezeichen. Wird damit aber auch genau eine Frage aufgeworfen? – Zunächst eine scheinbar eindeutige, im abendländischen Kulturkreis aus der Schöpfungserzählung wohlbekannte Warum-Frage:

[17] Warum aß Adam den Apfel?

Die unter [18] notierten Antworten:

[18] a) weil Adam keine Lust hatte, ihn zu malen,
b) weil die Schlange keine Äpfel mochte,
c) weil die Schlange die Banane, die er vorgezogen hätte, versteckt hat,

machen klar, dass in der Ausgangsfrage wenigstens drei Fragen stecken, auch hier helfen die Unterstreichungen weiter:

[19] a) Warum aß Adam den Apfel – und warf ihn nicht weg, malte ihn nicht,...?
b) Warum aß Adam den Apfel – und nicht vielmehr die Schlange, Gott,...?
c) Warum aß Adam den Apfel – und nicht vielmehr die Banane, die Kiwi,...?

Erst durch die hinter dem Gedankenstrich notierten kontrastiven Elemente wird deutlich, was zu erklären ist; und der Fragesteller präsupponiert auch, dass die kontrastiven Elemente falsch sind: Denn hätte Adam sowohl den Apfel als auch die Banane gegessen, wäre die Frage ‘Warum aß Adam den Apfel – und nicht vielmehr die Banane?‘ zurückzuweisen.

Damit sind noch nicht alle Eigenarten von Warum-Fragen zutage getreten. Zur Hebung einer weiteren ist nochmals die Frage ‘Warum aß Adam den Apfel – und nicht vielmehr die Schlange, Gott...?‘ nebst einem Auszug aus der Antwortpalette zu betrachten:

[20] a) weil die Schlange keine Äpfel mochte,
b) weil Adam Menschsein schlechthin darstellt und Gott nur durch Adams Sündenfall sein Heilswerk ausführen konnte,
c) weil nur Adams Speichelproduktion durch Aussehen und Duft des Apfels so angeregt war, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8 zubeißen musste.

Die erste Erklärung entstammt dem Alltag, die zweite ist theologischer, die dritte ist ernährungsphysiologischer Natur. Was jeweils als relevante Erklärung zählt, kann nur den Erwartungen der Fragesteller und der darin unterstellten Hintergrundtheorie entnommen werden.

Mit diesen allgemeinen Instruktionen zum Erklären ist die unter [16] aufgeschriebene Leibniz-Frage zu inspizieren: Ein kontrastives Element ist bereits mitgenannt – und es scheint keine weiteren kontrastiven Elemente zu geben; schon das weist auf den außergewöhnlichen Charakter der Frage hin.

Als Hintergrundtheorie fungiert (irgend)eine metaphysische Konzeption: Die Möglichkeit, dass [16] lediglich eine elliptische, d.h. stark verkürzte, Fassung eines ›konkreteren‹ Problems darstellt und damit in den Zuständigkeitsbereich einer entsprechend spezielleren Wissenschaft fällt, ist definitiv auszuschließen.

Ferner präsupponiert die Frage, dass das zu Erklärende wahr sein muss, die kontrastiven Elemente aber falsch. Die erwähnten Faktoren lauten unter Vernachlässigung stilistischer Elemente:

[21] a) es gibt etwas.
b) es gibt nichts.

Das Explanandum, das zu Erklärende, scheint – würde graduierende Rede hier Sinn machen – so wahr und das kontrastive Element so falsch, dass die Frage nach Wahrheit und Falschheit sich zu erübrigen scheint. Gleichwohl soll hier das Problem aufgeworfen werden, wie man über Wahrheit/Falschheit dieser Aussagen entscheiden könnte. Dieses Anliegen führt zwangsweise auf das Problem der Bedeutung der verwendeten Ausdrücke; und damit steht man bei der Frage, welches denn die Teilausdrücke von Explanandum und kontrastivem Element sind.

Die (an dieser Stelle ohne weitere Erläuterung benutzte) Standardanalyse – die bei vielen anderen Vorkommen der Ausdrücke ‘etwas’, ‘nichts’ und ‘es gibt’ bewährte Analyse – würde [21] so paraphrasieren:

[22] a) Es gibt ein *x*: *x* ist identisch mit *x*.
b) Nicht: Es gibt ein *x*: *x* ist identisch mit *x*.

Die erste Aussage ist eine identitätslogische Wahrheit; eine Variante kam bereits bei der Erörterung des Monismus ins Spiel (↑1.1.2.) Die zweite ist logisch falsch; und in beiden Fällen wird überhaupt nicht nach Erklärungen gefragt, sondern nur nach Beweisen und Widerlegungen. Insbesondere würde in diesem Feld kein Metaphysiker auf Erklärungssuche gehen; das läge schlichtweg außerhalb seines ›Geschäftsbereichs‹.

Hält man an der Standardanalyse fest, muß man die Frage aufgeben: Eine hoch gehandelte interrogative Irritation wäre aus der Welt geschafft! Umgekehrt kann man jedoch – unter anderen Prämissen – auch zu dem Schluss kommen, dass die Standardanalyse bei gerade diesem Vorkommen der Schlüsselausdrücke versagt; dann ist man jedoch gehalten, eine Alternative anzubieten: Man gibt es nicht auf, den Nagel in die Wand zu schlagen, weil der Stiel des Hammers morsch ist; zu suchen ist vielmehr ein Hammer mit intaktem Stiel, ein besseres, d.h. zweckmäßigeres, Werkzeug. Eine alternative Analyse könnte etwa so lauten:

[23] a) Es gibt ein *x*: *x* existiert.
b) Nicht: Es gibt ein *x*: *x* existiert.

Wer [23] akzeptieren möchte, steht allerdings vor der Aufgabe anzugeben, was er mit dem Vexierwort ‘existieren’ meint, denn nur dann ist feststellbar, ob die Präsuppositionen der Warum-Frage zutreffen. Derartige Fragestellungen verlangen eine Explikation der Bedeutung des Wortes ‘existiert‘. – Die Literatur kennt viele andere Deutungen, Lesarten, Varianten. Die prominenteste lautet so:

[24] a) Die Welt existiert.
b) Nicht: Die Welt existiert.

Wer die Leibniz-Frage aufwirft und damit [24] anzielt, legt allerdings weite Wege zwischen das, was er sagt, und das, was er (mutmaßlich) meint. Gleichwohl hat er damit nicht alle Minen hinter sich gelassen: Wie sein Vorgänger muss er dartun, wie er den zusätzlichen Ausdruck ‘existiert’ zu verwenden gedenkt; überdies hat er eine Erläuterung für die Vokabel 'die Welt' anzubieten. Die – wie später gesagt wird (↑3.2.1, 7.) – Individuenkonstante ‘die Welt’ könnte, entlang der Idee, dass die Welt eben alles, aber auch wirklich alles (außer sich selbst) als Teil enthalten soll, etwa so eingeführt werden:

[25] Die Welt = dasjenige *x*, das alle von *x* verschiedenen *y* zum Teil hat.

‘dasjenige *x*’, der Kennzeichnungsquantor (↑3.3.2, 7.), ist allerdings ein notorischer Querulant. Schon eine elementare Intuition geht fehl. Sie lautet:

[26] Dasjenige *x*, das ein so und so ist, ist (eben) ein so und so.

Die kleinste natürliche Zahl ist kleinste natürliche Zahl und der höchste Berg Deutschlands ist eben höchster Berg Deutschlands! Schließlich soll eine Eigenschaft, mit deren Hilfe wir einen Gegenstand von allen anderen unterschieden, dem unterschiedenen Gegenstand auch zukommen! Was könnte plausibler sein? Aber gilt etwa auch:

[27] Dasjenige *x*, das größte natürliche Zahl ist, ist größte natürliche Zahl.

Träfe [27] zu, dann gäbe es eine größte natürliche Zahl – und die Negation dieser Aussage ist bekanntlich arithmetisch beweisbar. Insgesamt würde also gelten:

[28] Es existiert ein *x*: *x* ist größte natürliche Zahl.

Nicht: Es existiert ein *x*: *x* ist größte natürliche Zahl.

Wiederum wäre man bei einem Widerspruch angelangt! – Aber auch wenn man die allgemeinen Probleme um den Kennzeichnungsquantor bewältigt, bleiben die anderen Teile der vorgeschlagenen Weltdefinition, allen voran der Ausdruck ‘..hat .. zum Teil‘, zu etablieren: Was wären, so würde der philosophische Profi sofort fragen, passende Einsetzungen für die universalquantifizierten Variablen: Nominatoren für Individuen, Gegenstände, Sachverhalte, Tatsachen, Ereignisse, Zustände, Prozesse, Elementarteilchen usf.? Anders gefragt: Welcher Art sind die Gegebenheiten, die Teile der Welt sind? Wie umfassend, so würde der Profi nachsetzen, ist der Universalquantor – auf dem Hintergrund der Antinomiengefährdung ›universaler‹ Größen – anzusetzen? Wie wäre außerdem der Prädikator ‘...ist Teil von...’ einzuführen? Fragen über Fragen! Wer die Debatten, die die Beantwortung dieser Fragen begleiten, kennt und überdies die Standards der Begriffsbildung durchzusetzen gewillt ist, wird niemanden um die Bearbeitung dieser Folgeaufgaben beneiden.

Man ist es, so das Fazit, gewohnt, Warum-Fragen aufzuwerfen und ohne Umstände zu ihrer Beantwortung überzugehen – und die Leibniz-Frage sieht zunächst wie eine gewöhnliche Warum-Frage aus. Normale Warum-Fragen, auch solche mit 'Etwas' und 'Nichts', sind fest im Griff, die Leibniz-Frage ist entglitten: Es bleibt – jedenfalls auf Basis der hier zu Beispielzwecken vorgeführten Untersuchungen – unklar, was denn erfragt wird, was überhaupt Kandidat einer einschlägigen Klärungsbemühung sein könnte.

An dieser Stelle sind zwei Warnschilder aufzurichten: <u>Erstens</u> ist nicht zu dem Verdacht zu ermuntern, dass <u>alle</u> handelsüblichen Deutungen die genannten oder ähnliche Schwierigkeiten auf sich ziehen. Um diesen Verdacht zu erhärten, müssten eben alle vorliegenden Deutungsvorschläge inspiziert werden. Selbst wenn eine solche Inspektion einen negativen Ausgang hätte, wäre es verfehlt, aus de facto gescheiterten Versuchen schon auf die Unmöglichkeit des Gelingens eines jeden zukünftigen Anlaufs zu schließen. Wer so schlösse, überkletterte einen Zaun – siehe dazu Absatz 1.1.2!

Und noch viel ferner sollte es <u>zweitens</u> liegen, Sinnlosigkeitsverdikten Vorschub zu leisten: Denn zum einen lässt sich gegenüber einem nicht klar identifizierten Gebilde ein solches Urteil kaum geltend machen; und zum anderen ist ‘sinnlos’ ein Ausdruck mit verstecktem

Maßstabparameter, über dessen Verwendung im jeweiligen Kontext erst zu befinden wäre – siehe dazu 1.1.1!

Die Haltung indes, die hiermit gegenüber der Leibniz-Frage – wie auch gegenüber anderen durch sie hier nur repräsentierten ›großen‹ Fragen – empfohlen wird, ist diese: Keinen Antworten beitreten, insbesondere: keine ›weltanschaulichen‹ Positionen beziehen, und keiner Beurteilung der Frage z.B. als unbeantwortbar oder gar sinnlos zustimmen, bevor die/eine grammatische Struktur und die/eine Bedeutung der verwendeten Ausdrücke nach den später etablierten Regeln der Kunst gesichert ist! Man sollte derartige Gebilde nicht als ›beantwortungsfertige‹ Fragen behandeln, sondern eher als <u>Frageprovisorien</u>, aus denen man über meist langwierige und in aller Regel alternativenreiche Prozesse der grammatischen Strukturierung und Bedeutungszuweisung (vielleicht) eine oder (in der Regel) mehrere Fragen bilden kann (↑12., 16.). – Das hier Gemeinte verdeutlicht sich die Leserin am besten dadurch, dass sie den nächsten Absatz in einem interrogativen Licht liest, so also, als ginge es um die Klärung der Frage, ob das Leben unantastbar ist.

Ü3 a) Geben Sie Beispiele für Warum-Fragen, die wegen falscher Fragepräsuppositionen zurückzuweisen sind!

b) Suchen Sie Warum-Fragen, die sich nach dem Muster von [18] bearbeiten lassen!

c) Suchen Sie Warum-Fragen, die sich nach dem Muster von [20] bearbeiten lassen!

d) Geben Sie weitere Beispiele dafür, dass die unter [26] notierte Intuition scheitert!

1.1.4. Antastbar/Unantastbar: Moralphilosophische Klärungen

Beim letzten Beispiel für den philosophischen Vollzug wird über eine Debatte in einem moralphilosophischen Arbeitskreis berichtet. Geprüft, d.h. auf Sinn, Begründbarkeit und Konsequenzen untersucht, wird folgende These:

[29] Das Leben ist unantastbar.

Zum Start meldet sich ein Skeptiker zu Wort. Als enttäuschter, aber klug gewordener Kenner philosophischer Auseinandersetzungen fordert er, man möge zunächst die Bedeutung der an der These hauptsächlich beteiligten Redemittel, nämlich der Worte ‘das Leben‘ und ‘unantastbar‘, klären. Er korrigiert sich sofort: Es sei ihm sehr wohl klar, dass diese Redeteile (wie die meisten philosophischen Wörter) mehrere Bedeutungen aufweisen; und er bittet – aus naheliegenden Gründen – darum, dass man sich bei beiden Worten auf ein Verständnis festlegt, um so eine eindeutige These zum (eben dadurch erst) gemeinsamen Thema zu haben.

Ein zweiter Teilnehmer, der stets um ›konstruktive‹ Auseinandersetzungen bemüht ist und mehr oder minder die Rolle eines Mentors spielt, nimmt das Votum des Skeptikers auf. Er schlägt vor, die Wendung ‘das Leben‘ im Sinne von ‘alle Lebewesen‘ zu verstehen:

[29]* Alle Lebewesen sind unantastbar.

Der Skeptiker akzeptiert diese zweite Lesart, weist aber – mit Blick auf anwesende Erstsemester – vorsorglich darauf hin, dass eine solche Deutung nicht in allen Redezusammenhängen möglich ist. Nimmt man etwa Aussagen wie ‘So ist das Leben‘, ‘Das ist mein Leben‘ oder ‘Sie schenkte ihm im August das Leben‘, dann verletzt man mit Paraphrasen wie ‘So sind alle Lebewesen‘, ‘Das sind alle meine Lebewesen‘ oder ‘Sie schenkte ihm im August alle Lebewesen‘ den Sinn der Ausgangsaussage.

Nach dieser allgemein akzeptierten Warnung wendet man sich dem zweiten Redeteil zu, dem Wort ‘unantastbar‘. Einigkeit herrscht darüber, dass das direkte Verständnis im Sinne von ‘unberührbar‘ nicht einschlägig ist. Ein anwesender Psychologiestudent schlägt vor, Unantastbarkeit im Sinne der Nichtbeeinträchtigung des jeweiligen Lebensplans aufzufassen. Umständlicher, aber vielleicht etwas genauer:

[29]$^+$ Für alle Lebewesen gilt, dass ihr Lebensplan nicht beeinträchtigt werden darf.

Dieser Vorschlag ruft wiederum den Skeptiker auf den Plan, der gleich zwei Bedenken vorträgt. Zum einen: Mit der Ersetzung von ‘unantastbar‘ durch ‘unbeinträchtigbar‘ sei wirklich kein Klärungsfortschritt erzielt; es handle sich vielmehr um ein glattes obscurum per obscurius! Ein dunkles Wort werde durch ein noch dunkleres ersetzt! Zum andern: Von Lebensplänen könne man prinzipiell nur bei reflexionsfähigen Wesen sprechen, aber nicht bei Fliegen und Sumpfdotterblumen; wer Lebenspläne besitze, müsse sich Ziele setzen und Mittel zum Erreichen dieser Ziele aussondern können. Über diese hätten auch manche reflexionsfähige Wesen keinen Lebensplan und andere wechselten diesen wie ihre Schuhe; damit wäre die Rede von dem Lebensplan ohnedies nicht berechtigt.

In Anbetracht dieser Schwierigkeit weist der Mentor darauf hin, dass man sich gegenwärtig erst in einer Explorationsphase befinde: Man suche nach allgemein mitvollziehbaren Deutungen einer Aussage. An diesem Punkt könne man auf (wenigstens) zwei Weisen fortfahren. Erstens: Man könne Rettungsversuche für die vorgeschlagene Deutung starten, indem man z.B. von Lebensplänen tatsächlich nur in Bezug auf reflexionsfähige Lebewesen spricht, bei den übrigen Lebewesen aber z.B. von einem artgerechten Umgang. Die These hätte dann zwei Teile: Für nicht reflexionsfähige Lebewesen wird der artgerechte Umgang gefordert, bei den reflexionsfähigen darf der Lebensplan nicht beeinträchtigt werden. Damit wäre zumindest eine vom Skeptiker vorgetragene Schwierigkeit behoben; natürlich müsse noch geklärt werden, worin die Beeinträchtigung von Lebensplänen bestehen könnte. Zweitens: Man könne nach einer anderen Deutung von ‘unantastbar‘ Ausschau halten und die These unter dieser Interpretation untersuchen. Eine geradezu ›handfeste‹ Lesart bestünde etwa darin, Unantastbarkeit im Sinne des Tötungsverbots zu deuten: Kein Lebewesen darf getötet werden. Näher an früheren Formulierungen wäre:

[29]° Für alle Lebewesen gilt: es ist verboten, diese zu töten.

Da alle an der Debatte Beteiligten diese Fassung der Unantastbarkeitsthese in der Folge erörtern wollen, greift an dieser Stelle eine logisch versierte Kommilitonin ein. Sie hebt zunächst hervor, dass ‘töten‘ ein Handlungsverb ist, bislang aber die handelnde Instanz in den Formulierungen noch gar nicht zur Geltung gebracht worden ist: Jemand tötet jemanden. Von der Logischen Grammatik her müsse man ‘töten‘ als (wenigstens) zweistelligen Prädikator ansetzen: ‘..tötet..‘. Sodann schlägt die Logikerin vor, die Aussage im Sinn der Logischen Grammatik übersichtlicher zu strukturieren und dabei z.B. den Textindikator ’diese‘ durch eine Variable zu ersetzen. Beide Vorschläge setzt sie um, indem sie folgende Reformulierung vorschlägt:

[29]** Für alle *x* : Wenn *x* ein Lebewesen ist, dann gilt für alle *y*: es ist verboten, dass *y* tötet *x*.

Bei diesem Entwicklungsstand weist der Skeptiker darauf hin, dass es in der Sprache unseres Alltags völlig unüblich ist, vom Töten von Pflanzen zu sprechen: Man fälle Bäume, mähe Getreidehalme und pflücke oder schneide Blumen, aber dies sei kein Töten von Bäumen, Getreidehalmen und Blumen. Vergleichend führt er an, dass man zwar von einem Massaker in einer Menschenmenge, nicht aber von einem Massaker in einem Tulpenbeet sprechen könne. Ihm sei gedient, wenn man unter ‘Lebewesen‘ Tiere oder Menschen verstehe; und natürlich beuge es allen Missverständnissen vor, wenn man das auch ausdrücklich macht:

[29]$^{++}$Für alle *x* : Wenn *x* ein Mensch oder ein Tier ist, dann gilt für alle *y* : es ist verboten, dass *y* tötet *x*.

Damit scheint die These erstmals in eine Form gebracht, die nicht mehr nach weiterer Bedeutungsklärung verlangt, sondern auf Haltbarkeit untersucht werden kann. Der in der Bedeutungs- bzw. Problementwicklung zurückgelegte Weg kann so dargestellt werden:

[30] Bedeutungsentwicklung

[29] Das Leben ist unantastbar.

↓

[29]* Alle Lebewesen sind unantastbar.

[29]° Für alle Lebewesen gilt:
es ist verboten, sie zu töten.

[29]$^{+}$ Für alle Lebewesen gilt,
dass Ihr Lebensplan nicht
beeinträchtigt werden darf.

↓

[29]** Für alle *x*: Wenn *x* ein Lebewesen ist,
dann gilt für alle *y*: es ist verboten,
dass *y* tötet *x*.

↓

[29]$^{++}$ Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch oder
ein Tier ist, dann gilt für alle *y*: es ist verboten,
dass *y* tötet *x*.

Der Mentor hat gleich seine Sympathie für die These erkennen lassen und sich damit dem Angriff einer Teilnehmerin, die bekennende Vegetarierin ist, ausgesetzt: Wie er es mit diesem Tötungsverbot zusammenbringe, dass er heute Nachmittag noch unter vernehmlichen Genussbekundungen ein riesiges Steak verzehrt habe; mit dieser Handlung verwickle er sich doch in einen glatten Widerspruch!

Widersprüche – hier greift die Logikerin neuerlich ein und schafft damit dem Mentor eine kurze Atempause – bestünden aus der Verbindung einer Aussage und ihrer Negation. Hier aber habe man es mit einer Handlung und einer (probehalber übernommenen) Überzeugung zu tun. Man solle deshalb besser so reden, dass eine Handlung einer Überzeugung zuwiderlaufe; und dieses Zuwiderlaufen müsse man dann letztlich so erklären, dass die die

Handlung legitimierende Überzeugung im Widerspruch zu obigem Tötungsverbot stehe; und das sei – wie immer die Einzelheiten dieses Klärungsprozesses aussehen – zweifellos erwartbar.

Die Reaktion des Mentors kommt nun prompt: Er schwächt die These ab, indem er nur noch Menschen als die Gegebenheiten ansieht, für die das Tötungsverbot Geltung haben soll. Seine modifizierte These lautet also:

[31] Für alle *x* : Wenn *x* ein Mensch ist, dann gilt für alle *y* : es ist verboten, dass *y* tötet *x*.

Die Vegetarierin nimmt diesen Rückzug keineswegs hin. Sie erinnert den Mentor an ein Einverständnis, das in einer früheren Debattenrunde hergestellt worden ist: Tötungsverbot bestehe prinzipiell gegenüber allen leidensfähigen Wesen:

[32] Für alle *x* : Wenn *x* ein leidensfähiges Wesen ist, dann gilt für alle *y* : es ist verboten, dass *y* tötet *x*.

Unter einer naheliegenden Prämisse ergebe sich dadurch die uneingeschränkte Aussage $[29]^{++}$. Wer zu einer Überzeugung stehe, müsse auch deren Konsequenzen akzeptieren; und deshalb sei der Mentor gehalten, $[29]^{++}$ ohne Wenn und Aber anzunehmen. Sollten ferner den Worten Taten folgen, habe er überdies in das Lager der praktizierenden Vegetarier überzutreten. – An dieser für den Mentor überaus heiklen Stelle möge der Bericht über die Unantastbarkeitsdebatte abbrechen! Die Übung nimmt zwei Folgeprobleme auf!

Ü4 a) Welches ist die naheliegende Prämisse, mit deren Hilfe aus [32] die Aussage $[29]^{++}$ folgt?

b) Wie müsste die Aussage [31] in möglichst sparsamer Weise modifiziert werden, damit sie das Verbot der Selbsttötung nicht mehr einschließt?

c) Wie müsste die Aussage [31] in möglichst sparsamer Weise modifiziert werden, damit sie das Verbot der Tötung in Notwehr nicht mehr einschließt?

1.2. Zum Zweck der philosophischen Vorschule

Die vier Beispiele für den philosophischen Vollzug mögen (hinreichend) repräsentativ für die folgende Analyse sein. Diese zielt zunächst auf die Feststellung, dass Philosophieren eine durchgehend sprachliche Tätigkeit ist und erläutert ferner einige Besonderheiten (1.2.1). Sodann kann die Eingangsfrage nach dem Anfang des Philosophierens neuerlich aufgenommen werden: Die methodisch aufgefasste Sprachphilosophie bzw. die in einem weiten Sinne genommene Logik ist als Erste Philosophie auszuzeichnen (1.2.2).

1.2.1. Zur Analyse des exemplarischen Vollzugs

Im Links-Rechts-Beispiel entsteht eine paradoxe Situation als Ergebnis von über Wahrnehmungen zustande gekommenen Feststellungen bzw. aufgrund des gezielten Schließens aus diesen Feststellungen. Der Philosoph beschreibt dieses Paradox. Er unterstellt mit Gründen seine Unerwünschtheit und er schlägt schließlich eine Auflösung vor.

Im Überkletterte-Zäune-Beispiel gilt die Aufmerksamkeit einer bestimmten, alle unsere Tätigkeiten durchdringenden, Redehandlung, dem Folgern oder Schließen. Es wird verdeutlicht, dass die inkorrekte Exekution dieser Handlung in hohem Maße unerwünschte Folgen hat, und dass, allgemein gesprochen, hinsichtlich dieses Redevollzugs erheblicher Reglementierungsbedarf besteht.

Paradoxe Situationen entstehen in allen Erkenntnisfeldern, und deshalb auch in der Philosophie. Die Folgerungshandlung spielt in den übrigen Beispielen ebenfalls eine zentrale Rolle, ebenso wie in allen kognitiven Bemühungen, also auch in der Philosophie. Im Etwas-Nichts-Exempel wird nun eine Erkenntnishandlung erörtert, die in dieser Instanziierung nur in der Philosophie vorkommt. Die Analyse fragt zunächst ganz allgemein nach den Bedingungen des Warum-Fragens, um sich dann, mit offenem Ausgang, der Frage zu widmen, wie man aus dem Frageprovisorium eine bearbeitbare Frage bilden könnte.

Das Antastbar-Unantastbar-Beispiel hat mit dem Etwas-Nichts-Exempel einen wichtigen Zug gemeinsam: Es geht über weite Strecken um mögliche Bedeutungen der zentralen Ausdrücke, um Verständnismöglichkeiten, Sinnzuschreibungen. Die Entwicklung des Szenarios kommt jedoch insofern ein Stück weiter, als schließlich eine These verfügbar ist, die sich mit Sinn auf ihre Konsequenzen und damit auch auf (Un)Verträglichkeiten untersuchen und erörtern lässt. Der Auszug aus einer moralphilosophischen Debatte verdeutlicht auch, dass sich die Arbeit in diesem Feld in wesentlichen Zügen nicht von den Bemühungen in anderen philosophischen Gebieten unterscheidet.

Einseitig sind die meisten Beispiele insofern, als weder nur (philosophische oder nichtphilosophische) Redehandlungen noch nur Handlungen und ihre Ingredienzien zum philosophischen Thema werden können. Dessen ungeachtet lässt sich aber festhalten: Wenn die obigen Vorführungen philosophisches Tun exemplifizieren, dann steht außer Frage, dass Philosophieren ein durchgängig sprachlicher Vollzug ist: Kein Zug im philosophischen Spiel entbehrt der sprachlichen Verfasstheit! Gleichgültig, worüber man redet, man redet darüber! Diese Feststellung bedürfte auch dann keiner Modifikation, wenn beliebige weitere Beispiele als Grundlage herangezogen würden. Wer philosophiert, vollzieht Redehandlungen wie das Behaupten, Fragen, Folgern und Bestreiten und bringt damit Wahrheits- und Falschheitsansprüche zur Geltung; und im Vollzug dieser Redehandlungen werden einzelne Ausdrücke verwendet; ferner sind diese Redehandlungen häufig zu Redesequenzen, z.B. zu Erklärungen, Begründungen, Beweisen, Disputen usf. verknüpft. Auch Tätigkeiten wie das Vergleichen, Unterscheiden, Kritisieren, Abgrenzen, Charakterisieren, Fundieren, Entfalten, Entwickeln, Spekulieren, Plausibilisieren, Abstrahieren, (Re-) bzw. (De-)Konstruieren, Analysieren usf. sind durchgängig sprachlich verfasst.

All dies – so ist nicht nur einzuräumen, sondern ausdrücklich hervorzuheben – stellt lediglich eine notwendige Bedingung des Philosophierens dar, jedoch keine hinreichende, und damit erst recht keine vollständige. Auch alle übrigen Wissenschaften vollziehen sich, ebenso wie das lebensweltliche Erkennen, notwendig sprachlich; und es ist umgekehrt keineswegs nur die Erkenntnistätigkeit, die sprachlich verfasst ist.

Obgleich bereits das prinzipielle Faktum der sprachlichen Verfasstheit des Philosophierens zur Beantwortung der Frage nach den Anfängen des Philosophierens zureicht, mag die Betrachtung der Beispiele die Eigenart der philosophischen Redehandlungen etwas verdeutlichen. Das Philosophieren ist nicht nur eine sprachlich verfasste Tätigkeit, sondern thematisiert auch solche sprachlichen Vollzüge (und damit auch die eigenen Akte). Dazu wird – zum ersten – eine grammatische Terminologie benötigt: Man erinnere sich an die Verwendung der Ausdrücke ‘Ausdruck’, ‘Redeteil’, ‘Konjunktor’, ‘Teilausdruck’, ‘Variable‘, ‘Aussage’, ‘Widerspruch’, ‘Negation’, ‘Prädikator’, ‘Negatprädikator’, ‘Kennzeichnungsquantor’, ‘Zweistelligkeit’, ‘Universalquantor’, ‘Existenzquantor’ usf. Außerdem muss eine redehandlungsbezügliche Terminologie im weitesten Sinne bereitstehen, also Ausdrücke wie ‘Redehandlung’, ‘Behauptung’, ‘These‘, ‘Folgerung’, ‘Schlussregel’, ‘Prämisse’, ‘Konklusion‘, ‘Grund’, ‘Beweis’, ‘Widerlegung’, ‘Kontroverse’, ‘Disput’, ‘Diskurs’, ‘Wahrheit/Falschheit’, ‘Bedeutung‘, ‘Sinn‘, ‘Verständnis‘ usf. Natürlich hängen die beiden grob unterschiedenen Begriffsmannschaften engstens zusammen: Die erste wird nur entwickelt, um im Zusammenwirken mit der zweiten die Redehandlungen und alles darin Involvierte zum Thema machen zu können.

1.2.2. *Sprachphilosophie/Logik als Erste Philosophie*

Womit soll nun der Anfang des Philosophierens in Erwerbs- und Vollzugsordnung gemacht werden? Will man eine komplexe Tätigkeit organisieren, dann mag man als generelle Orientierung folgende Maxime setzen: Mache den Anfang mit dem, was für die Gestaltung des gesamten Vollzugs unverzichtbar ist, was ferner im Fortgang die Hilfen maximiert und mögliche Revisionen minimiert! – Da das Philosophieren im Vollzug von Redehandlungen besteht, ist als Erste Philosophie eine elementare Verständigung über das Redehandeln anzusetzen. Gibt man diesem Projekt den Titel ‘Sprachphilosophie’ bzw. ‘Logik’, dann ist damit die Sprachphilosophie/Logik als Erste Philosophie ausgezeichnet.

Die geforderte elementare Verständigung umfasst alle mit den Redehandlungen, insbesondere den kognitiven Redehandlungen, aufgeworfenen Fragen, auch und an vorderer Stelle die normativen Problemstellungen. In allen vorgeführten Beispielen spielten z.B. Widersprüche eine zentrale Rolle. Unterstellt war stets, dass Widersprüche nicht beweisbar sein dürfen und dass im Falle des Auftretens von auch nur plausibel scheinenden Widersprüchen allemal eine Revision angesagt ist. Warum ist das so? Und was ist an Widersprüchen eigentlich so fatal? Das sind Fragen, die in sehr grundsätzlicher Weise auf die Gestaltung der Folgerungshandlung und damit das ›Innenleben‹ aller Diskurssorten zielen. Bei der elementaren Verständigung geht es also nicht etwa nur darum, aus dem Kontinuum der Rede eine Handlung wie das Schließen als eigene ›Einheit‹ herauszuheben; auch die Frage, wie man diese Handlung reglementieren soll und im Blick auf welche Zwecke eine solche Gestaltung gerechtfertigt werden kann, steht zur Debatte!

Zur Missverständnisprophylaxe sind einige Ergänzungen für ›Kenner‹ angesagt: (i) Die hier unterlegte Auffassung von Sprachphilosophie ist – zum einen – neutral gegenüber der Unterscheidung zwischen normal- und idealsprachlich ausgelegter (Sprach)Philosophie: Wer die hier dargestellte Auffassung teilt, ist bei konkreten philosophischen Problemen noch nicht von vornherein gehalten, diese mit normal- oder idealsprachlichen Mitteln (dieser oder jener Provenienz) anzugehen. Sie trifft – zum anderen – Unterscheidungen, die beide Tendenzen benötigen, in aller Regel aber nicht selbst entwickeln und zur Geltung bringen.

(ii) Sprachphilosophie wird nicht als ›Bindestrich-Philosophie‹ aufgefasst, der die Aufgabe zufällt, alle mit dem Sprachthema verbindbaren Topoi philosophischer Relevanz abzuarbeiten: Die Rolle der Sprache zur Expression emotionaler Tiefen- und Höhenlagen mag in der Bindestrich-Sprachphilosophie, in der Anthropologie oder Ästhetik verhandelt werden; sie stellt jedoch kein Thema der Sprachphilosophie als Erster Philosophie dar.

(iii) Auch die fachwissenschaftliche Tätigkeit lässt sich, wie schon erwähnt, als Vollzug von Redehandlungen konzipieren. Insoweit die Sprachphilosophie sich mit Redehandlungen überhaupt und insbesondere auch in normativer Hinsicht befasst, darf sie nicht nur als „prima philosophia“ gelten, sondern auch als „prima scientia“: Die philosophische Vorschule ist auch Propädeutik für das wissenschaftliche Arbeiten und in diesem (gut scholastischen) Sinne „scientia scientiarum“.

(iv) Die Überlegung verlangt insofern nach Erweiterung, als der Erkenntnisvollzug sich nicht in Fachwissenschaften und Philosophie erschöpft; diese gehören gemeinsam dem sonderweltlichen Feld an, dem das umfassende und fundierende lebensweltliche Erkennen gegenübersteht (↑13.). Da jedwedes Erkennen sprachlich verfasst ist und auch das Wünschen, Wählen, Wollen und Entscheiden von zuvor getroffenen Unterscheidungen getragen wird, kommt der „Vorschule der Philosophie“ ein schlechterdings unbeschränktes Einsatzfeld zu. „Vorschule der Philosophie“ ist also im Sinne des genitivus subjectivus wie auch des genitivus objectivus zu lesen: die von der Philosophie für alle Erkenntnisvollzüge veranstaltete Vorschule und (damit auch) die für die Philosophie ins Werk gesetzte Vorschule. – Das hier nur angedeutete Konzept von Philosophie, insbesondere das Geflecht von Vollzug, Störung, Reflexion und reflektiertem Neuvollzug wird erst abschließend ausgearbeitet (↑16.).

(v) Der propagierte Ansatz läuft nicht darauf hinaus, dass, wann und worüber auch immer philosophiert wird, ipso facto Sprachphilosophie betrieben wird, nach dem Muster: In der Ethik wird nicht mehr gesagt, was unter welchen Umständen zu tun oder zu lassen erlaubt, geboten, verboten, empfohlen ist; lediglich die Bedeutung der Redeteile ‘tun’, ‘unterlassen’, ‘geboten’, ‘verboten’ usf. steht zur Verhandlung. In der Religionsphilosophie geht der Streit nicht darüber, ob Gott existiert oder nicht, ob ihm diese oder jene Eigenschaften zukommen oder nicht; lediglich Bedeutung und mögliche Bedeutungsverleihung hinsichtlich der Redeteile ‘Gott’, ‘existiert’, ‘allmächtig’ usf. ist zu erörtern.

Ganz im Gegenteil: Weiterhin wird – um im ersten Beispiel zu bleiben – Ethik betrieben; und das geschieht, indem die erwähnten Ausdrücke in kognitiven Redehandlungen verwendet werden. Aber die ›zweiten‹ Philosophien werden anders exekutiert, nämlich sprachphilosophisch bzw. logisch aufgeklärt und instrumentiert: Ehe etwa das handlungsbezogene und ge- sowie verbietendende Vokabular in der Ethik ›schlicht‹, ›wild‹ und ›naiv‹ – und damit in bekannte unrentable Kontroversen führend – benutzt wird, muss es nach den Regeln der Kunst aufgeklärt und bereitgestellt werden; dann erst – und nun fernab von hinderlichen Scheingefechten – kann man in das von Sprachphilosophie sehr wohl zu unterscheidende moralphilosophische Geschäft eintreten.

1.3. Das Programm der philosophischen Vorschule

Wie bei jedem größeren Lehr- und Lernprojekt ist es – für beide Parteien – hilfreich, vorab einen Eindruck von den Stationen des zurückzulegenden Weges zu geben (1.3.1). Hinweise zum Umgang mit diesem Text und damit zur erfolgeichen Absolvierung der philosophischen Vorschule leiten zu den Literaturempfehlungen über (1.3.2). – Für die Anfängerin werden zahlreiche Ausdrücke in der folgenden Übersicht neu und unverständlich sein; es empfiehlt sich zur Herstellung von Überschaubarkeit und zur Erleichterung der eigenen Platzierung, nach Bearbeitung der einzelnen Kapitel sowie am Ende des Textes nochmals auf diesen Überblick zurückzukommen.

1.3.1. Die Stationen der Durchführung

Zunächst ist der Gesamtansatz in seinen leitenden Intuitionen plausibel zu machen: Was sind Redehandlungen? Aus welchen Momenten sind sie aufgebaut? Wie gelangt man zu der Idee, Redehandlungen seien von Regeln geleitet? Was legt es nahe, Sprachen als Regelwerke für Redehandlungen anzusetzen, denen eine entsprechende Grammatik vorangestellt ist. Wie lassen sich das Wahrheits- und das Bedeutungsthema lokalisieren in der Landschaft, die in Beantwortung der vorstehenden Fragen gezeichnet wird? Das Weitere geht von diesem Umriss ins Detail (2.).

Sodann ist der erste Faktor von Sprachen, die Grammatik, einer detaillierten Betrachtung zuzuführen. Nach einer Auszeichnung der Rationalen oder Logischen Grammatik aus der Fülle der Kategorisierungsofferten für Redeteile wird die Standardgrammatik erster Stufe vorgestellt. Die atomaren Kategorien werden ausführlich erläutert. Insbesondere finden die Konzepte des offenen und geschlossenen Terms sowie der offenen und geschlossenen Formel Präzisierung. Dabei lässt sich auch ein erster Eindruck vom induktiven bzw. rekursiven Vorgehen gewinnen, das, anbei bemerkt, auch bei Programmiersprachen eine Schlüsselrolle spielt (3.).

Der dritte Durchführungsschritt konzentriert sich auf die Folgerungsregeln und damit auf die Verwendungsregeln für die Junktoren, Quantoren und den Identitätsprädikator. Für jedes logische Zeichen wird zweierlei spezifiziert: Unter welchen Bedingungen kann man auf eine Aussage schließen, deren Hauptoperator das zu regulierende logische Zeichen ist? Was kann man aus einer Aussage schließen, deren Hauptoperator das zu regulierende logische Zeichen ist? Die Formulierung und Erläuterung solcher Einführungs- und Beseitigungsregeln wird ergänzt durch die Einübung in ihre Benutzung, d.h. durch den Beweis erster logischer Wahrheiten (4.).

Die Beherrschung der logischen (Grund)Regeln ist eine Sache, die Fertigkeit, sich über Folgerungsverhältnisse zu verständigen, eine andere. Es ist die zuletzt erwähnte Kompetenz, die im vierten Durchführungsschritt in Anfängen zu vermitteln ist. Dabei wird auf den Zusammenhang von Folgerungsregeln und Folgerungsrelation besondere Aufmerksamkeit gerichtet. Auf Basis des Folgerungsbegriffs können weitere metalogische Konzepte wie etwa ‘Konsistenz�‘ und ‘Abhängigkeit‘ bereitgestellt werden. – Der Kontext legt außerdem einige Ergänzungen nahe: Das Folgern wird verkürzt durch die sogenannten zulässigen Regeln, die Methode der Gegenbeispiele erlaubt die Diagnose des „non-sequitur“. Da der Gedanke der Einzigkeit in vielen Kontexten eine zentrale Rolle spielt, wird auch der Einsquantor im Detail vorgestellt. Der in einem Zusatz platzierte Hinweis auf alternative logische Regelwerke öffnet ein Tor zur Philosophie der Logik (5.).

Die beiden soeben vorgestellten Kapitel betreffen die Logik, d.h. (letztlich) einige Junktoren, Quantoren und den aufgrund seines formalen Status ausgezeichneten Identitätsprädikator. Mit Junktoren und Quantoren lassen sich, wie in der Rationalen Grammatik beschrieben, molekulare Aussagen aus atomaren aufbauen. Die atomaren Aussagen sind aus Nominatoren und Prädikatoren zusammengesetzt. Die über die bloßen grammatischen Eigenschaften hinausgehenden Besonderheiten dieser Redeteile bzw. der mit ihrer Verwendung vollzogenen Redeteilhandlungen der Nomination und Prädikation sind in den beiden Folgekapiteln zu behandeln.

Was ist die Aufgabe der Prädikation innerhalb einer Redehandlung? Welche Arten von Prädikatoren sind unter nichtgrammatischer Rücksicht zu unterscheiden? Wie lässt sich das Prädikatorennetz beschreiben? Wie lassen sich die formalen Eigenschaften von Prädikatoren – etwa die schon verwendete Asymmetrie (↑1.1.1) – in systematischer Absicht erfassen? Wie verhalten sich Prädikatoren zu Begriffen und Eigenschaften? Im Kontext der Beantwortung dieser Fragen kann auch das altehrwürdige Universalienproblem aufgenommen werden (6.).

Prädikatoren können Gegenständen nur dann beigelegt werden, wenn diese in der Rede Vertretung finden. Nominatoren sind derartige Vertreter für Gegenstände. Drei Formen der Nomination und entsprechend drei Typen von Nominatoren – Benennen durch Eigennamen, Anzeigen durch Indikatoren, Beschreiben durch deskriptive Nominatoren – sind zu unterscheiden und in ihrem Zusammenhang zu untersuchen; die Analyse und Rekonstruktion von Kennzeichnungen, einer Unterklasse der beschreibenden Nominatoren, bildet einen Schwerpunkt (7.).

Redehandlungen sind in der Regel in Rede(handlungs)sequenzen eingebettet; und die Regeln für Redehandlungen, an vorderster Stelle die Folgerungsregeln, nehmen ausdrücklich Bezug auf Konstellationen, die durch den Vollzug weiterer Redehandlungen herbeigeführt werden können. Aus dem Spektrum der Redesequenzen sind die Diskurse auszugrenzen, d.h. die Sequenzen, deren Glieder ausschließlich kognitive Redehandlungen sind. Vor dem Hintergrund einer groben Sortierung der Diskurse sind Argumentationen, Begründungen und Beweise im Detail zu studieren. Im Zentrum steht dabei die Frage nach den Ansatzpunkten für die kritische Auseinandersetzung mit vorgelegten Argumentationen (8.).

Die von einer breiten Mehrheit getragene Auffassung, Philosophieren bestehe wesentlich oder gar ausschließlich im Studium oder in der Deutung überkommener (älterer oder neuerer) Textbestände, wird in der Folge nicht geteilt. Die philosophische Ausbildung zielt nicht auf die Erzeugung philosophiehistorischer Experten. Dennoch kann auch diese Tätigkeit erheblich profitieren von der Fertigkeit, Diskurse ›in Normalform‹ zu überführen in Diskurse ›in Explizitform‹. Diese Fertigkeit wird in drei Schritten vermittelt: Zuordnung grammatisch-logischer Strukturen zu gebrauchssprachlichen Gebilden, exemplarische Überführung explizitgefasster Diskurse in normalgefasste (=Dekonstruktion) und exemplarische Überführung normalgefasster Diskurse in eine Explizitfassung (=Rekonstruktion); für den letzten Schritt dienen u.a. prominente philosophische Texte als Beispiel. Die Behandlung der Leibniz-Frage bietet diesbezüglich einen Vorgeschmack (9.).

In allen ihrem Thema nach skizzierten Kapiteln werden Prädikatoren und Mitglieder anderer Ausdruckssorten erläutert, gelegentlich auch förmlich definiert. Verwiesen sei etwa auf die Fixierung der grammatischen Begrifflichkeit oder auf die Etablierung der logischen Redeteile. Diese Praxis der Bedeutungsfestlegung ist erwartungsgemäß keine Angelegenheit freihändiger Beliebigkeit. Die drei folgenden Kapitel widmen sich der Frage nach den Bedingungen der korrekten Bedeutungsfixierung, der Einführung.

Ausdrücke, so die allgemeine Bestimmung, werden mit Bedeutung versehen, indem spezifiziert wird, wie sie in Redehandlungen korrekt verwendet werden. Verschiedene Einführungsformen können unterschieden werden, insbesondere die definitorische und die nicht-definitorische Einführung. Das Startkapitel zur Einführungslehre behandelt neben den Grundlagen die nicht-definitorischen Formen: die operationale und die axiomatische Einführung (10.).

Die Definition stellt die mit Abstand am besten untersuchte Einführungsform dar. Zwischen (meta- bzw. konstruktionssprachlichen) Definitionsschemata und (objekt- bzw. konstruktsprachlichen) Definitionen wird strikt unterschieden. Für alle grammatischen

Kategorien (mit Ausnahme der Performatoren) sind Definitionsregeln zu formulieren und zu erläutern. Besonderes Gewicht liegt auf der systematisierenden Wirkung eines strikt definitorischen Vorgehens (11.).

In allen sprachlich verfassten Vollzügen, den lebens- wie den sonderweltlichen, entsteht häufig der Bedarf, bereits in Verwendung befindliche Ausdrücke neuerlich zu etablieren, und zwar mit Rücksicht auf die schon bestehenden Gepflogenheiten. Der Ausdruck ‘Die Welt‘ wird nicht etwa ›freiweg‹, sondern in Anknüpfung an schon gegebene Bedeutungen etabliert. Solche Einführungen sind explikativer Natur. Sie spielen in den Sozial-, Rechts- und Kulturwissenschaften eine besonders wichtige Rolle. In der Philosophie stehen fast ausschließlich explikative Einführungen an; und alle Kandidaten können auf ein bewegtes Vorleben zurückblicken. Die besondere Aufmerksamkeit gilt den explikationsanbahnenden Tätigkeiten (12.).

Ein eher theoretisch ausgelegtes Kapitel nimmt die bereits bei der Errichtung der sprachphilosophischen Plattform hergestellten Verbindungen zwischen Wahrheit und Bedeutung neuerlich auf. Zunächst sind die Vorfragen zur Wahrheit zu beantworten: Wovon sagt man wie, es sei wahr bzw. falsch? Was sind die Kriterien, Bedingungen, Definitionen, Regeln der Wahrheit und wie ist ihr Zusammenhang zu beschreiben? Sodann stehen die Hauptfragen an: Inwieweit wird mit den Wegen des alethischen Vollzugs die Bedeutung von Ausdrücken fixiert, und umgekehrt? Nach welchen Prinzipien hat die Bedeutungsfixierung resp. die Festlegung der Wahrheitsbedingungen zu erfolgen? – Vor diesem Szenario werden dann die Begriffe des lebens- und sonderweltlichen Erkennens resp. Wissens porträtiert. Damit ergibt sich auch der Grund zu den wissenschaftsphilosophischen Erörterungen der Folgekapitel (13.).

Die analytisch-strukturellen Wissenschaften werden an einer gebräuchlichen, umfassenden, gut entwickelten und untersuchten Klassensprache, jener von Neumann, Bernays und Gödel mit Urelementen (= NBGU) exemplifiziert. In Rechtfertigung der axiomatischen Basis wird dabei ein Faden aufgenommen, der bereits mit der Erörterung der Stufenerhöhung in der Rationalen Grammatik (↑3.3.3) ausgelegt und an mehreren Stellen (↑6.) weitergesponnen worden ist. Die Entwicklung von NBGU erfolgt kursorisch; hervorgehoben wird die Tatsache, dass derartige Klassensprachen die Rolle übernommen haben, die vordem der „Allgemeinen Metaphysik“ („metaphysica generalis“) zugewiesen worden ist (14.).

Philosophische Anstrengungen umfassen gewöhnlich drei Phasen: den heuristisch-assoziativen Anfang, die Festigung und gegebenenfalls Korrektur der Startintuitionen durch Beispiele und schließlich die begriffliche Bearbeitung. Mit der Konstruktion und dem Gebrauch von NBGU soll bezüglich der analytisch-strukturellen Wissenschaften Präsenz in der zweiten Phase dokumentiert werden. Um dieses Ziel auch für die empirisch-synthetischen Wissenschaften zu erreichen, wird eine Zeitsprache konstruiert und gebraucht; auf der Herausstellung des empirischen Gehaltes und damit der speziellen Ausgestaltung der operationalen Bedeutungsfestlegung liegt besonderes Gewicht (15.).

Der vorliegende Text ist, wie oben erläutert (↑1.2), eine Vorschule der Philosophie im Sinne des objektiven wie des subjektiven Genitivs. Im Schlusskapitel werden beide Fälle zusammengeführt, indem das Erarbeitete auf philosophische Problemstände Anwendung findet. Überdies steht die in den vorangehenden Kapiteln nur rhapsodisch aufgegriffene Wozu-Frage, die Frage nach Sinn und Zweck der Philosophie, zur abschließenden Beantwortung an. Es liegt nahe, in diesem Kontext einige prinzipielle Überlegungen zu Funktion und Form sowie Gliederung und Aufbau der Philosophie vorzulegen; dabei lässt sich auch der Beschäftigung mit der Geschichte der Philosophie ihr Platz anweisen (16.).

1.3.2. Arbeitshinweise

Die vorliegende Vorschule bietet die systematische Entfaltung <u>einer</u> (sprach)philosophischen bzw. logischen Position. Sie zielt <u>nicht</u> auf eine umfassende Darstellung des gegebenen Konzeptionenspektrums, weder in dia- noch in synchroner Rücksicht. Die systematischen Darlegungen werden auch <u>nicht</u> historisch-kritisch angebahnt oder begleitet: Es finden sich also auch keine Auseinandersetzungen mit anderen Ansätzen.

Damit soll die positive und negative historische ›Vermittlung‹ der dargelegten Position keineswegs geleugnet werden: Wie jede philosophische Auffassung ruht sie auf ganzen Traditionsketten und setzt sich – mit Gründen – von anderen Auffassungslinien ab (↑16.). Für Hörer/Leser, die an einer externen Lokalisierung des Dargelegten interessiert sind, bedeutet das, dass sie die hier nicht gebotenen Kenntnisse <u>anderweitig</u> erwerben müssen. Die am Ende der Kapitel angefügten Literaturlisten geben diesbezüglich erste Hinweise auf alternative Positionen und auf einschlägige Kontroversen.

Im Zentrum der Arbeit stehen die Lektüre des Textes und – insbesondere – die sorgfältige Lösung der Übungsaufgaben. Die Leserin muss die Beobachterperspektive zugunsten der Teilnehmerperspektive verlassen; wer sich in absehbarer Zeit seines Verstandes „ohne Leitung eines anderen“ bedienen will, muss <u>sich</u> zunächst – unter Leitung von anderen – <u>üben</u>. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben hat <u>schriftlich</u> zu erfolgen. Philosophieren ist eine Tätigkeit, die unter dem <u>Verschriftlichungsschock</u> steht: Was sich mündlich oder ›in

Gedanken‹ recht plausibel anhört und dem Autor (und oft genug auch seinen Zuhörern) als ausgesprochen leicht darstellbar und auch erfassbar erscheint, verliert rapide an Plausibilität, wenn es Schritt für Schritt zu Papier gebracht wird; schon dieser Vorgang ist überaus schmerzhaft. Die nochmalige zeitversetzte Lektüre enthüllt dann meist weitere Schwächen des (ersten) schriftlichen Versuchs.

Die Lösung einer Aufgabe wird im Übrigen nicht dadurch zu Papier/auf den Bildschirm gebracht, dass man sich Stichworte notiert – obwohl das oft ein erster Schritt sein wird. Sie besteht vielmehr in der satzhaften Ausformulierung! Wer sich hier das Motto “Das große Werk ist getan, der Rest wird sich finden.“ zu eigen macht und auf die detaillierte Ausformulierung verzichtet, ist auch schon aus dem philosophischen Geschäft ins Lager der Assoziierer und Schwadronierer gewechselt. – Auch alle bei der Lektüre entstehenden Fragen sollten selbstredend eine schriftliche Fassung finden: Erst dadurch wird dem Fragesteller in aller Regel klar, was bzw. wonach er fragt oder was er tun muss, um klarzulegen, wonach er fragt.

Vorschulen lassen sich nicht axiomatisieren. Wäre dies möglich, so wären sie für Einsteiger, also für ihre eigentlichen Adressaten, nicht mehr absolvierbar. Als bewältigbare Aufgabe leben sie in extremer Weise von Vor- und Rückgriffen; und häufig genug muss Plausibilität bittweise unterstellt und die Leserin um Geduld ersucht werden. Ohne die verständige und wohlwollende Mitarbeit der Adressaten gelangt man nicht einmal auf den Weg, geschweige denn zum Ziel. – Um die ersten Erfolgserwartungen auf realistischem Boden zu halten, ist ferner festzuhalten, dass der Erwerb logischer Fertigkeiten eher dem Violin- als dem Klavierlernen gleicht: Man hat eine längere Durststrecke zu bewältigen, ehe sich erste Erfolge einstellen.

Im Übrigen – und davor kann keine noch so ausgeklügelte pastorale Veranstaltung den Leser bewahren – ist auch der Eintritt in die philosophische Vorschule ein Sprung in den philosophischen See; und diesbezüglich greift der Slogan dieses Kapitels: „Es gibt keine elementare Philosophie. Der philosophische See hat keine flachen Ufer“.

1.4. Literatur

Dummett, M.: Ursprünge der analytischen Philosophie; Frankfurt/Main 1988.

Dieses Werk entwickelt die Idee des „linguistic turn“, und damit den Gedanken einer methodenliefernden Sprachphilosophie, aus ihren (näheren) historischen Wurzeln (Husserl, Frege, Brentano); empfehlenswert nicht nur als historisch-kritische Ergänzung zu 1.2. Dummett ist auch eine Leitfigur des konstruktiven Philosophierens.

Føllesdal, D./Walle, L./Elster, J.: Rationale Argumentation. Ein Grundkurs in Argumentations- und Wissenschaftstheorie; Berlin/New York 1988 [O: Argumentasjonsteori og vitenskopsfilosofi; Oslo 1977]

Empfehlenswert insbesondere wegen der wissenschaftsphilosophischen Kapitel III – VI, die eine gute Ergänzung zu den Kapiteln 13-15 darstellen. Die Stoffgliederung ist allerdings eher rhapsodisch: Sie folgt keinem (erkennbaren) einheitlichen Leitfaden.

Kamlah, W./Lorenzen, P.: Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens; Mannheim 1996^3.

Der deutschsprachige Propädeutikklassiker ist zum einen empfehlenswert für ein geistes- bzw. kulturwissenschaftlich orientiertes Publikum: Die „Einleitung“ entwickelt für dieses Klientel in einfühlsamer Weise den Gedanken der Ersten Philosophie; hier finden sich auch überzeugende Ausführungen zur Abkehr von der „Bildungssprache“, d.h. zur Abkehr von der philosophischen Normalität. Das Werk entwickelt, obwohl in eher intuitiver Manier, zum anderen (fast) den Gesamtstoff dieses Kurses. – Zur näheren Rezeption nicht empfehlenswert ist die im letzten Kapitel entwickelte dialogische Logik: Diese besitzt kaum Kontakt zur diskursiven Praxis, insbesondere nicht zum dialogischen Teil derselben.

Kraml, H.: Sprachphilosophie I und II (Vorlesungstyposkript WS 92/93 und SS 93 an der Geisteswissenschaftlichen Fakultät der Universität Innsbruck)

Kraml behandelt die Themen des vorliegenden Kurses aus einer ähnlichen philosophischen Grundeinstellung, folgt aber einer anderen didaktischen Konzeption. Er legt ein Musterbeispiel klarer und verständlicher philosophischer Prosa auf einem informellen Darstellungsniveau vor. Der gesamte erste Teil ist insofern komplementär, als dort eine Erklärung der Sprachgenese vorgelegt wird.

Lorenzen, P.: Methodisches Denken; Frankfurt/Main 1974.

Lorenzen, P.: Konstruktive Wissenschaftstheorie; Frankfurt/Main 1974

Im ersten Sammelwerk sind die Beiträge „Collegium Logicum“ (S.7-23), „Methodisches Denken“ (S.24-59), „Logische Strukturen in der Sprache“ (S.60-69) sowie „Logik und Grammatik“ (S.70-80) einschlägig. Aus dem zweiten Sammelband sind insbesondere die Essays „Logik und Hermeneutik“ (S.11-21) sowie „Regeln vernünftigen Argumentierens“ (S.47-97) zu empfehlen. Alle Texte stellen vorzügliche Werbungen für die methodische Einstellung dar.

Rosenberg, J.F.: Philosophieren. Ein Handbuch für Anfänger; Frankfurt/m. 1986 [O: The Practice of Philosophy. A Handbook for Beginners; Englewood Cliffs New Jersey 1984]

Rosenberg entfaltet – wie der vorliegende Text – eine ausdrücklich handwerkliche Auffassung der Philosophie, die insbesondere in den Kapiteln 5-11 als Ergänzung zu den hier bereitgestellten Instrumenten benutzt werden kann, um die Distanz zur philosophisch üblichen Arbeit zu überbrücken.

Stegmüller, W.: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie I; Stuttgart 1989^{7}.

Stegmüller, W.: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie II; Stuttgart 1987^{8}.

Stegmüller gilt zu Recht als ausgezeichneter Darsteller analytischer Positionen und Autoren. Beide Werke sind zur Beleuchtung des historischen Hintergrunds bzw. der begleitenden Debatten der im Kurs entfalteten Auffassung hilfreich: In „Hauptströmungen I“ sind die Kapitel IX bis XI zu empfehlen, „Hauptströmungen II“ ist als Ganzes einschlägig.

Tugendhat, E.: Vorlesungen zur Einführung in die sprachanalytische Philosophie; Frankfurt/Main 1987^{4}.

Die „Vorlesungen“ eignen sich vor allem für Leser, die von klassischen philosophischen Problemstellungen herkommen und sich die Frage vorlegen, warum sie sich eine sprachphilosophische Zugriffsweise aneignen sollen; der gesamte I. Teil ist der Auseinandersetzung mit dem seins- und bewusstseinsphilosophischen Paradigma und damit genau dieser Frage gewidmet.

Tugendhat, E./ Wolff U.: Logisch-semantische Propädeutik; Stuttgart 1986.

Tugendhat und Wolff vollbringen in einem kleinen Text ein didaktisches Meisterwerk, indem sie Hauptthemen der Sprachphilosophie und (Philosophie der) Logik in leicht nachvollziehbarer Weise darstellen. Das Werk zeigt auch, wie historisch-kritische Bildung der sachlich-systematischen Arbeit dienlich gemacht werden kann: Die schlussendlich bezogene Position wird in der Regel am historisch kritischen Durchgang entwickelt.

2. Das Rahmenwerk: Rede – Sprache – Wahrheit – Bedeutung 38

Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache.
...
Zwei Wörter haben dieselbe Bedeutung, wenn für ihre Verwendung dieselben Regeln gelten.

Ludwig Wittgenstein

2. Das Rahmenwerk: Rede – Sprache – Wahrheit – Bedeutung

Das zweite Kapitel legt in intuitiv-exemplarischer Weise den Gesamtansatz dar. Es soll deutlich werden, dass es sich lohnen könnte, den angedeuteten Weg zu beschreiten. Detaillierte begriffliche Arbeit ist dazu weder nötig noch dienlich. Sie wäre überdies auch nicht möglich: Die zu einem solchen Unternehmen benötigten (Rede)Mittel können erst nach und nach bereitgestellt werden.

Zunächst ist zu verdeutlichen, Handlungen welcher Art die Redehandlungen darstellen und aus welchen Momenten sie aufgebaut sind (2.1). Sodann ist darzutun, dass der Vollzug von Redehandlungen keine Angelegenheit freihändiger Beliebigkeit darstellt, sondern unter Regeln steht, die gemeinsam die jeweilige Sprache bilden (2.2). Redehandlungen finden in einer Umgebung statt; die Umgebungsfaktoren, wie etwa Autor, Adressat, Kontext und Situation, sind kenntlich zu machen (2.3). Endlich kann kursorisch erläutert werden, wie von dieser Plattform aus Wahrheit und Bedeutung, die ›vornehmen‹ Themen der Theoretischen Philosophie, erreichbar sind (2.4).

2.1 Die Redehandlung und ihre Momente

Zunächst ist über Beispiele ein Vorverständnis bezüglich der Redehandlungen herzustellen (2.1.1), an denen sich sodann zwei Momente, ein performatives und ein propositionales, unterscheiden lassen (2.1.2). Diese Differenzierung wird gefestigt anhand des scheiternden Verstehens (2.1.3). Wenn an Redehandlungen zwei Momente unterscheidbar sind, dann sollte man dafür bei den Redemitteln eigene grammatische Kategorien bereithalten, Performator und Aussage, die dann Teilausdrücke des jeweiligen Satzes darstellen (2.1.4). Um die aufs Prinzipielle zielenden Überlegungen von gebrauchssprachlichen Zufälligkeiten und Besonderheiten frei zu halten, ist sodann eine Standardform des Satzes zu etablieren (2.1.5). Die Unterscheidung von Teilausdrücken des Satzes wird durch die Unterscheidung von Teilhandlungen der Redehandlung, von Performation und Proposition, parallelisiert (2.1.6). Redehandlungen können ihrerseits in endliche Folgen aus Redehandlungen eingehen; derartige Sequenzen sind abschließend zu betrachten (2.1.7).

2.1.1 Redehandlungen: Exemplarische Erläuterungen

Durch den Vollzug geeigneter Redehandlungen kann man z.B. eine These aufstellen, um eine Gefälligkeit bitten, die Unterlassung einer Handlung anraten, bislang in Abrede Gestelltes einräumen, jemanden zu etwas ernennen, einen Schluss ziehen, eine Mitteilung machen, etwas auf Indizien gestützt vermuten, ein Vorhaben untersagen, ein Problem aufwerfen, sich für einen Fauxpas entschuldigen, eine Auskunft geben – und anderes mehr!

Die Vielfalt der Redehandlungsmöglichkeiten und der damit realisierbaren Ziele ist Teil des Variantenreichtums des Handlungsspektrums und der handelnd verfolgten Zwecke im allgemeinen: Wer redet, der handelt; und Redehandlungen sind mit den sonstigen, den nichtsprachlichen Vollzügen in mannigfacher Weise verflochten. Hand- und Mundwerk bilden gemeinsam den Lebensvollzug. Zugleich kann das Redehandeln in die Rolle des ›Spiegels‹ für Handlungen jedweder Sorte treten: Denn redend lassen sich Akte aller Art zum Thema machen. Nicht zuletzt können die Redehandlungen selbst als Gegenstand von Redehandlungen auftreten. Auf dieser Möglichkeit beruhen die hier vorgetragenen Überlegungen.

Die angefangene Reihe der Beispiele für Redehandlungen dürfte von sich aus zur Fortsetzung anregen und Sicherheit bei der Anlage einer Liste mit Gegenbeispielen geben:

Ü1 a) Zählen Sie weitere Redehandlungen auf.

b) Nennen Sie Handlungen, die keine Redehandlungen sind.

A fortiori sind alle Gegebenheiten, die keine Handlungen sind, auch keine Redehandlungen. Weniger offensichtlich ist die Antwort auf die Frage, Gebilde welcher Art Redehandlungen näherhin darstellen, aus welchen Teilen sie zusammengesetzt sind, welche Zwecke mit ihnen gewöhnlich verfolgt werden, welche Rolle sie in Handlungssequenzen spielen usf. Auch hier ist von Beispielen auszugehen: Indem ein Autor die unter [1] notierten Zeichenverbindungen äußert, vollzieht er – bei geeigneter Umgebung – jeweils eine Redehandlung:

[1] a) Es gilt, dass niemand sein eigener Vater ist.

b) Ich empfehle die Beendigung der Lektüre dieses Machwerks!

c) Trifft es zu, dass alle Philosophen Vampire sind?

d) Bitte ein Bit!

Im Einzelnen wird, eine passende Äußerungsumgebung unterstellt, eine Behauptungs-, eine Empfehlungs-, eine Frage- und eine Bitthandlung vollzogen.

2.1.2 Performatives versus propositionales Moment

An Redehandlungen lassen sich zwei Momente, ein performatives und ein propositionales, unterscheiden: Wer a) äußert, stellt – bei passender Umgebung – eine Behauptung auf (performatives Moment); behauptet wird dabei, dass niemand sein eigener Vater ist (propositionales Moment). Der Autor drückt das performative Moment durch Verwendung von ‘Es gilt’ aus, bei der (hier immer schriftsprachlichen) Äußerung unterstützt vom Punkt ‘.’. Das propositionale Moment findet durch die Ausdruckseinheit ‘dass niemand sein eigener Vater ist’ Mitteilung. – Wer b) äußert, empfiehlt (performatives Moment), die Lektüre dieses Machwerks einzustellen (propositionales Moment). Zum Ausdruck des performativen Momentes dient ‘Ich empfehle’, sekundiert vom Ausrufezeichen ‘!’. Das propositionale Moment wird durch die Zeichenverbindung ‘die Beendigung der Lektüre dieses Werks’ übermittelt. – Wer c) äußert, wirft eine Ob-Frage auf (performatives Moment); erfragt wird dabei, ob die Eigenschaft des Vampirseins allen Philosophen zukommt (propositionales Moment). Zum Ausdruck des performativen Moments dient die Wendung ‘Trifft es zu’ in Verbindung mit dem Fragezeichen ‘?’. Das propositionale Moment findet durch die Zeichenverbindung ‘dass alle Philosophen Vampire sind’ Übermittlung. – Wer d) äußert, gibt einer Bitte Ausdruck (performatives Moment), in der schriftsprachlichen Realisierung durch ‘Bitte’ und ‘!’ signalisiert; gebeten wird dabei um einen unter Kennern geschätzten Gerstensaft (propositionales Moment). Der Inhalt der Bitte wird durch Verwendung der Wortreihe ‘ein Bit’ übermittelt.

In der folgenden Tabelle findet sich die Zeichenverbindung für das performative Moment unterstrichen, die Ausdrücke für das propositionale Moment erscheinen normal:

[1]* a) Es gilt, dass niemand sein eigener Vater ist.
b) Ich empfehle die Einstellung der Lektüre dieses Machwerks!
c) Trifft es zu, dass alle Philosophen Vampire sind?
d) Bitte ein Bit!

Ü2 Vergegenwärtigen Sie sich weitere Zeichenverbindungen, durch die bei passender Umgebung Redehandlungen vollzogen werden können, und führen Sie eine analoge Zergliederung in performatives und propositionales Moment durch!

Bei unverfänglicher und ›normaler‹ Verwendung des Ausdrucks ‘meinen’ (↑2.1.3) lässt sich das exemplarisch Vorgeführte allgemein so formulieren: Mit der Zeichenverbindung für das performative Moment zeigt der Autor an, wie, in welchem Modus, mit welcher Kraft er den Inhalt meint. Mit der Wortreihe für das propositionale Moment lässt er den Rezipienten wissen, was er meint, was der Ge- bzw. Inhalt des in dem und dem Modus Gemeinten ist.

Spricht man, wie oben geschehen, die durch Äußerung von a),...,d) vollzogenen Redehandlungen als Behauptung, Empfehlung, Frage und Bitte an, so legt man dabei das performative Moment zugrunde. Die gesamte Redehandlung wird im Ausgang vom performativen Moment charakterisiert. Differenzierungen im propositionalen Moment machen es möglich, Redehandlungen auch von dorther unterscheidbar zu machen, z.B. als elementare, konjunktive oder universalquantifizierende Redehandlung (↑3.2.3).

Performatives und propositionales Moment verweisen aufeinander. Auf die – nicht durch Umgebungsfaktoren ergänzbare - Verlautbarung von ‘Ich empfehle’ wird ein Rezipient allenfalls mit der Äußerung von ‘Was empfiehlst Du denn nun?’ reagieren. Umgekehrt kann auf die – wiederum nicht aus der Kenntnis der Umgebung zu vervollständigende – Mitteilung von ‘dass niemand sein eigener Vater ist’ die Gegenfrage nur lauten, wie in aller Welt dies denn gemeint sei. Beide Fragen zielen auf die Komplettierung des vorliegenden Redehandlungsfragments. Erst wenn sowohl performatives als auch propositionales Moment vorliegen, kann der Rezipient eine vollständige Verstehensleistung erbringen und auf dieser Basis in qualifizierter Weise reagieren, indem er, um in den Beispielen zu bleiben, der Behauptung zustimmt oder sie bestreitet und der Empfehlung folgt oder sie unbeachtet lässt.

Insofern erst die Gegebenheit beider Momente eine qualifizierte Reaktion – und nicht nur ein Nachsetzen bezüglich Modus oder Inhalt – erlaubt, bildet die Redehandlung bzw. das Geäußerte eine vollständige und eigenständige Kommunikationseinheit; da sich intuitiv keine kleineren Kommunikationseinheiten mit dieser Eigenschaft auszeichnen lassen, ist auch die Rede von der kleinsten vollständigen Kommunikationseinheit berechtigt: Eine Redehandlung stellt einen eigenständigen „Zug im Sprachspiel“ (Wittgenstein) dar.

2.1.3 Performatives und propositionales Moment im scheiternden Verstehen

Ein Rezipient versteht nach dem Ausgeführten eine Redehandlung bzw. das Geäußerte nur dann vollständig, wenn er beide Momente versteht, wenn er also versteht, in welchem Modus der Autor welchen Gehalt meint. - Entsprechend sind auch beim scheiternden Verstehen eine performative und eine propositionale Komponente zu unterscheiden: Das vollständige Verstehen der gesamten Redehandlung scheitert schon dann, wenn eines der beiden Momente nicht verstanden wird.

In einem groben Zugriff werden zwei Formen scheiternden Verstehens unterscheidbar: das Nichtverstehen bzw. – resultativ gesehen – das Unverständnis und das Missverstehen bzw. – in Ergebnissicht – das Missverständnis. Der in einem Missverständnis befangene Rezipient geht irrigerweise davon aus, dass sein Verstehensversuch gelungen ist – und vollzieht (sprachliche und nichtsprachliche) Folgehandlungen auf der Basis seines nicht bemerkten Scheiterns bzw. seines nur gewähnten Verstehens. Der von Unverständnis geschlagene Rezipient weiß um sein Scheitern und kann seinen Zustand durch gezieltes Rückfragen zu verbessern suchen. Das Nichtverstehen von performativem und propositionalem Moment schlägt sich in verschiedenen Typen von Rückfragen nieder. Mit Fragen wie ‘Wie meinst Du das?’, ‘Welches ist der Modus Deiner Äußerung?’ oder (spezieller) ‘Ist das als eine Behauptung oder lediglich als eine Vermutung zu verstehen?’, ‘Ist das eine Bitte oder aber ein Befehl?’ kann der (nun die Rolle des Autors übernehmende vormalige) Rezipient versuchen, seinen Mangel an Verständnis bezüglich des performativen Momentes zu beheben.

Mit Fragen wie ‘Was meinst Du eigentlich?’ oder (spezieller) ‘Soll das eine universale Aussage sein oder nicht?’, ‘Was hat man unter diesem Teilausdruck zu verstehen?’ lässt sich propositionales Unverständnis artikulieren. Beispiel: In einer Debatte über landsmannschaftliche Eigenarten äußert ein Autor die Ausdrucksverbindung ‘Der Bayer ist königstreu’. Hier lassen sich leicht Umstände ausdenken, in denen man mit ‘Ist das eine Vermutung oder eine Behauptung?’ sein performatives Unverständnis artikulieren kann, während man mit ‘Meinst Du wirklich alle Bayern oder nur alle typischen Bayern oder viele Bayern oder genügen schon ein paar Hundert’ sein propositionales Unverständnis zum Ausdruck bringen kann, das in diesem Falle genauer ein Unverständnis bzgl. der quantitativen Verhältnisse ist. Der so befragte Autor kann durch Antworten wie ‘Es handelt sich lediglich um eine Vermutung’ und ‘Eigentlich meine ich nicht alle, sondern nur die meisten Bayern’ die vorgebrachten Verständniswünsche – wenigstens vorläufig – befriedigen. Durch diese Erläuterungen wird zugleich deutlich, welche Leistung zu erbringen ist, um die Redehandlung als korrekte oder inkorrekte ansprechen zu können (↑2.2).

Ü3 Fingieren Sie Redeumgebungen, d.h. denken Sie sich Redeumgebungen aus, die Anlass zu performativem und propositionalem Unverständnis geben, und formulieren und beantworten Sie verständnissuchende Fragen!

Sind es beim Unverständnis die verschiedenen Frage(type)n, die die Unterscheidbarkeit von propositionalem und performativem Moment verdeutlichen, so sind beim Missverstehen allein die Folgehandlungen des Rezipienten, Redehandlungen und andere, aufschlussreich, um der Unterscheidung von performativem und propositionalem Moment weitere Plausibilität zu verleihen. Wer z.B. eine strenge Begründung fordert, wo nur der Aufweis von Indizien angezeigt ist, missversteht eine Vermutung als Behauptung. Wer eine auszuführende Handlung bedenkenlos und mit bestem Gewissen unterlässt, missversteht ein Gebot als Empfehlung. – Wer hingegen auf die Äußerung von ‘Der Bayer ist königstreu’, aufgefasst als ‘Die meisten Bayern sind königstreu’, in widerlegender Absicht mit Hinweis auf einen gewissen Franz reagiert, der, obwohl Bayer, bekennender Antiroyalist ist, missversteht eine Fast-alle-Quantifikation als strikte Universalaussage.

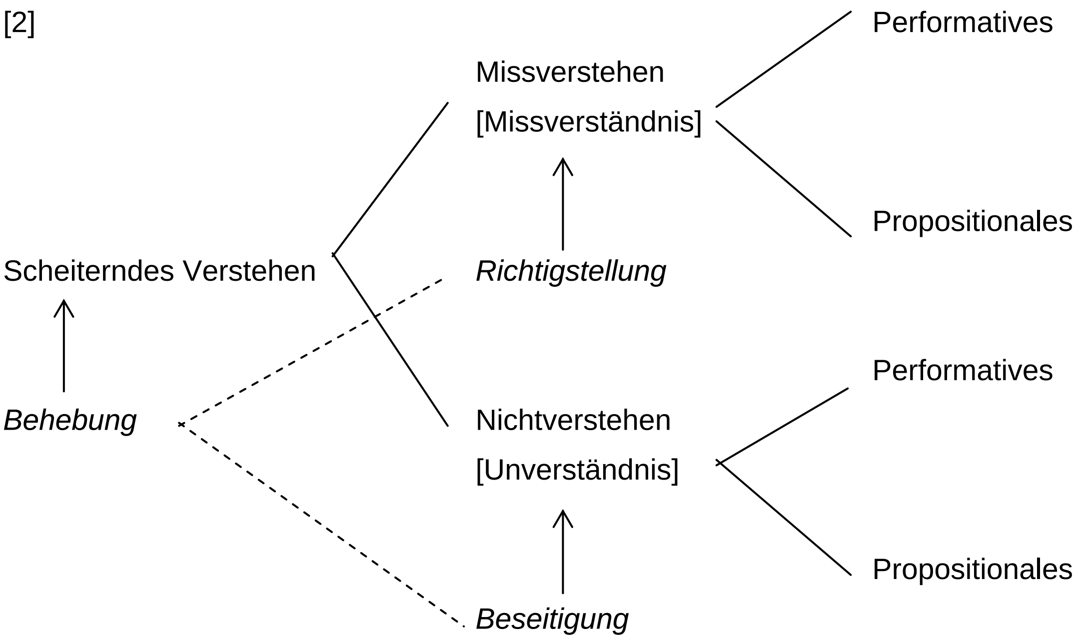
Ü4 Fingieren Sie Redehandlungen und Umgebungen, die Anlass zu performativem und propositionalem Missverständnis geben, und beschreiben Sie Folgehandlungen, an denen das performative und propositionale Missverständnis abzulesen ist!

Wer die Verständlichkeit seiner Rede garantieren möchte, um so dem Scheitern des Verstehens und allen Folgemissständen vorzubeugen, wird sie so gestalten, dass beide Momente von den Adressaten leicht erkennbar sind: Er wird seine Redehandlungen performativ und propositional für den je intendierten Adressaten zugänglich vollziehen.

Bei der Behebung des scheiternden Verstehens, d.h. bei der Verständnisherstellung – sowohl bei der Richtigstellung eines Missverständnisses als auch bei der Beseitigung von Unverständnis – spielen Redehandlungen wiederum eine wesentliche Rolle. Artikuliert ein Rezipient sein Verständnis einer Redehandlung oder einer Redehandlungssequenz oder kommentiert ein Autor aus gegebenem Anlass seine Vollzüge, dann legen sie – redend – eine Interpretation, eine Deutung von Handlungen bzw. Handlungsresultaten vor. Die Vokabeln ‘meinen’ und ‘sagen’ sowie ihre Ableitungen werden – vor jeder philosophischen Spezialuntersuchung – eingesetzt, wenn es um die Artikulation von scheiterndem Verstehen und um die Verständnisherstellung zu tun ist. Auch in der Miss- und Unverständnisprophylaxe haben sie ein wichtiges Einsatzfeld.

Die Ausführungen zum scheiternden Verstehen von Redehandlungen bzw. des in Redehandlungen Geäußerten lassen sich in folgendem Schaubild wiedergeben:

[2]



Weitere Differenzierungen im propositionalen Moment erlauben entsprechende Unterscheidungen des scheiternden Verstehens, wie etwa das prädikative, nominative oder quantorale Miss- oder Unverständnis, die später gemeinsam mit dem jeweiligen Redeteil behandelt werden. – Verstehen als Leistung des Adressaten bzw. Rezipienten ist keine Angelegenheit des Alles oder Nichts, sondern stets eine des Mehr oder Weniger. Das ergibt sich schon aus dem arbeitsteiligen Charakter der Rede (↑2.3.2). Wer eine komplexe Aussage beweisen kann, hat sie sicherlich in einem vollkommenen Sinn verstanden. Aber auch diejenige, die einen Teil des Beweises liefern kann und den Rest versteht, hat ein gerütteltes Maß an Verständnis der behaupteten Aussage vorzuweisen; und – der Leser möge das Spektrum vervollständigen – auch der, der das logische Gerüst der Aussage in dem Sinn kennt, dass er in vielen Kontexten mit den verwendeten logischen Redeteilen umgehen kann, hat ein Verständnis der Aussage vorzuweisen, wenn auch kein vollständiges.

Eine Zweideutigkeit ist an dieser Stelle zu markieren: Ein Gebilde kann unverständlich in einem adressatenbezogenen subjektiven und einem sprachbezogenen objektiven Sinne sein: Was für diesen oder jenen Rezipienten unverständlich ist, braucht diesen Zug für andere Rezipienten keineswegs aufzuweisen. Ist ein Gebilde objektiv unverständlich – hier soll hinfort der Ausdruck ‘unverstehbar’ benutzt werden – kann kein verstehensbemühter Agent zu einem Verständnis kommen: Wenn etwa Gebilde gegen semantische oder grammatische Regeln verstoßen, also bedeutungslos oder nicht wohlgeformt sind, sind sie als unverstehbar anzusprechen.– Der Aufweis von Verstehbarkeitsillusionen zählt zu den zentralen kritischen Aufgaben der Philosophie (↑16).

2.1.4 Kategorisierung: Satz – Performator – Aussage

Bislang war bezüglich des Geäußerten undifferenziert von Ausdrücken, Ausdrucksverbindungen, Redemitteln usf. die Rede. Wenn es jedoch plausibel ist, an Redehandlungen zwei Momente zu unterscheiden, dann sollte man bezüglich der Redemittel für beide Momente eine eigene grammatische Ausdruckskategorie bereitstellen.

Zum Ausdruck des performativen Anteils diene der Performator; die Wendungen ‘Es gilt’ und der Punkt ‘.’, ‘Ich empfehle’ und das Ausrufezeichen ‘!’, ‘Trifft es zu’ und das Fragezeichen ‘?’, ‘Bitte’ und das Ausrufezeichen ‘!’ fungieren in den Beispielen als Performatoren, und zwar als Behauptungs-, Empfehlungs-, Frage- und Bittperformator. – Um ganz allgemein über Performatoren sprechen zu können, wird im Weiteren das große griechische Xi (Ξ) als Mitteilungszeichen verwendet; statt von Performatoren ist in der Literatur gelegentlich auch von Modifikatoren oder Illokutionssignalen die Rede.

Zum Ausdruck des propositionalen Momentes diene die Aussage; die Wendungen ‘dass niemand sein eigener Vater ist’, ‘die Beendigung der Lektüre dieses Machwerks’, ‘dass alle Philosophen Vampire sind’, ‘ein Bit’ fungieren in unseren Beispielen als Aussage. Um ganz allgemein über Aussagen (später: über Formeln) sprechen zu können, werden im weiteren die großen griechischen Buchstaben Alpha (Α), Beta (Β), Gamma (Γ), Delta (Δ), nötigenfalls indiziert, verwendet.

Das insgesamt in einer Redehandlung Geäußerte soll ein Satz sein. Sätze sind demnach die unter [1] a),...,d) notierten Gebilde. Um über Sätze allgemein sprechen zu können, wird der große griechische Buchstabe Sigma (Σ) verwendet. Danach ist auch klar, dass Sätze Σ zusammengesetzt sind aus einem Performator Ξ und einer Aussage Γ. Umgekehrt sind Performatoren und Aussagen Teilausdrücke des Satzes. Mit Blick auf den Aufbau einer einheitlichen grammatischen Terminologie (↑3.) soll so gesprochen werden: Ein Satz Σ entsteht aus der Anwendung eines Performators Ξ auf eine Aussage Γ. –

Die hier geübte Verwendung von ‘Satz’ und ‘Aussage’ stimmt nicht mit den Gepflogenheiten in Linguistik und Sprachphilosophie überein. Generell werden diese und andere hier verwendete Vokabeln nicht von allen Autoren in gleicher Weise verwendet – ebenso wenig wie etwa der Ausdruck ‘Emotion‘ von Psychologen immer gleich gebraucht wird. Aus dieser terminologischen Lage folgt (unter normativen Zusatzprämissen) zweierlei: Ein Autor sollte den von ihm bevorzugten Gebrauch klar umreißen – und sich daran halten. Ein Adressat sollte die entsprechende Festlegung zur Kenntnis nehmen – und bei Lektüre nicht irgendein anderes Verständnis unterstellen!

Das Sprechen über sprachliche Gegebenheiten – Redehandlungen, Sätze, Ausdrücke, Aussagen usf. – erfolgt seinerseits stets in einer Sprache. Die Sprache, über die gesprochen wird, ist die Objektsprache. Die Sprache, in der über die objektsprachlichen Gegebenheiten gesprochen wird, ist die Metasprache (zur jeweiligen Objektsprache). Wird ein einzelnes Zeichen zum Gegentand der Rede, dann werden häufig Anführungsnamen benutzt. Diese werden dadurch gebildet, dass man das jeweilige Zeichen in einfache Anführungszeichen setzt. Um allgemein über Zeichen einer bestimmten Sorte nachzudenken, verwendet man die jeweils erläuterten griechischen Buchstaben.

Denkt man sich den Performator als ein Gebilde, das durch die Aussage zu einem Satz ergänzt wird, dann liegt es nahe, diese Ergänzungsfähigkeit eigens zu signalisieren, indem man den Performator durch eine horizontale Linie als Anzeiger für eine Aussage ergänzt. Statt ‘Es gilt’ wäre also ‘Es gilt___‘ zu notieren. Ein Satz Σ entsteht dann dadurch, dass die durch den waagerechten Platzhalter angedeutete freie Stelle des Performators durch eine Aussage besetzt wird. Der Waagerechte dient auch im Fortgang als Anzeiger einer freien Stelle für Aussagen bzw. (allgemeiner) für Formeln. – Ersetzt man in einem Satz einen Performator resp. eine Aussage durch einen anderen Performator oder eine andere Aussage, so fällt das neu entstandene Gebilde wieder unter die Kategorie der Sätze.

Später werden die Performatoren unter die Operatoren subsumiert, die Aussagen unter die Operanden, die Sätze unter die Operata. Operata entstehen jeweils dadurch, dass Operanden an die *n* freien Stellen von Operatoren gesetzt werden bzw. dass Operatoren auf *n* Operanden angewendet werden; dabei ist *n* eine positive natürliche Zahl. – Die Performatoren sind dann als einstellige, aussagenbestimmende und satzerzeugende Operatoren zu charakterisieren (↑3.3.1). Sätze sind solche Operata, die ihrerseits nicht operandenfähig sind: Sie können nicht an freie Stellen irgendwelcher Operatoren treten.

Der Performator ist ein atomarer Ausdruck: Er ist nicht zerlegbar in Teilausdrücke, d.h. in solche Ausdrücke, die ihrerseits einer Kategorie der hier leitenden Grammatik angehören. Der Hinweis, der Performator ‘Trifft es zu’ bestehe doch immerhin aus drei wohlunterschiedenen Wörtern, erlaubt es, den Punkt zu verdeutlichen: Die uns geläufige traditionelle Grammatik ›sieht‹ hier drei Wörter, wobei jedes einzelne Wort weiterer Bestimmung innerhalb dieser Grammatik fähig ist. So ist etwa ‘es’ ein unpersönliches Fürwort. Die im Weiteren entfaltete Rationale Grammatik betrachtet die Wendung lediglich in ihrer Funktion als Ausdruck des performativen Moments; und diese Funktion nehmen die drei Worte gemeinsam wahr. Die Wendung ist demnach atomar und die drei Worte der traditionellen Grammatik werden nicht als Teilausdrücke, sondern als (unselbständige) Ausdrucksteile eines atomaren Ausdrucks ›gelesen‹; man mag sich dies zusätzlich markieren, indem man die einzelnen Wörter von ‘Trifft es zu’ durch Bindestriche zusammenfasst. Insgesamt ergibt sich dann: ‘Trifft-es-zu__’ (↑3.3.1). Diese Verbindungstaktik zur Signalisierung der Atomarität soll in der Folge beibehalten werden.

Die Aussage ist stets ein molekularer Ausdruck. Sie ist zerlegbar in Ausdrücke, die ihrerseits wiederum Kategorien der hier veranschlagten Grammatik angehören, sie ist, umgekehrt formuliert, aus Teilausdrücken (und nicht bloß aus Ausdrucksteilen) aufgebaut. Die Aussage ‘Sokrates ist ein Vampir’ enthält z.B. den Eigennamen ‘Sokrates’ und den einstelligen Prädikator ‘..ist ein Vampir’ als Teilausdrücke. – Die Art des Aufbaus von Aussagen variiert nach dem gewählten Typ der Rationalen Grammatik (↑3.3.5).

2.1.5 Standardform und Standardisierung

Propositionales und performatives Moment finden in den Gebrauchssprachen, d.h. in der Alltagssprache, in der Bildungssprache, in den handwerklichen, wissenschaftlichen und sonstigen Fachsprachen, in vielfacher, in der Regel nur aus Umgebungsfaktoren zu ermittelnder Weise Ausdruck. So dienen verschiedene Performatoren dem Ausdruck desselben performativen Momentes, und ein Zeichen mag zur Übermittlung verschiedener performativer Momente taugen. Schrift- und lautsprachliche Realisierungen kennen diverse Varianten, und aus Gesten muss häufig sowohl der propositionale wie auch der performative Gehalt unter Zuziehung der Umgebungsfaktoren gewonnen werden: So mag ein Nicken als Zustimmung oder (in anderen Kulturen) als Ablehnung gedeutet werden; und dasjenige, dem zugestimmt wird, ergibt sich dem Rezipienten aus vorangehenden Verlautbarungen, dem Praetext. Ein besonders dramatisches Beispiel ist das Senken des Daumens durch den Cäsar.

Um bei prinzipiellen Betrachtungen – und um diese geht es vornehmlich – nicht an Zufälligkeiten der gebrauchssprachlichen Realisierung der Sätze gebunden zu sein, ist eine Standardform zu etablieren: Der Satz Σ wird so dargestellt, dass links der Performator Ξ und rechts die Aussage Δ notiert wird; die Gepflogenheit, den Operator links von seinen Operanden zu notieren, wird später beibehalten (↑3.2, 3.3).

[1]** Satz Σ

	Performator Ξ	Aussage Δ
a)	Es-gilt	niemand ist sein eigener Vater
b)	Ich-empfehle	die Lektüre dieses Machwerks wird eingestellt
c)	Trifft-es-zu	alle Philosophen sind Vampire
d)	Ich-bitte	ich bekomme ein Bit

Die Satzzeichen sind getilgt; ebenso die Wendung ‘dass’. Die Überführung einer gebrauchssprachlichen Verlautbarung in die Standardform, die Standardisierung, muss als nichttriviale Aufgabe angesehen werden, die das zu standardisierende Gebilde mannigfachen Veränderungen unterwirft. – Ist man mit der Konstruktion einer Sprache (↑2.2.4) beschäftigt, dann wird man seine Festlegung so treffen, dass Sätze von vornherein dieser (oder einer anderen) Standardform genügen.

Die verschlungenen und in der Regel durch den Willen zu Kürze und Bequemlichkeit veranlassten und insoweit auch rechtfertigbaren gebrauchssprachlichen Wege zur Realisierung der Momente einer Redehandlung führen gelegentlich, wenn auch nicht häufig, zu Irritationen, d.h. zu scheiterndem Verstehen, schon in der Redepraxis: Hier greifen die Mittel der Verständnisherstellung. Die elliptische Ausdrucksweise beirrt aber insbesondere die zugeordneten analytischen Bemühungen. Die Erläuterung der Umgebungsfaktoren gibt Gelegenheit, für den Umgang mit gebrauchssprachlichen Gebilden zwei Maximen zu formulieren (↑2.3.5). Die hermeneutischen Überlegungen (↑9.) sowie die Behandlung der Wahrheitsthematik geben später Anlass zu entsprechenden Fallstudien (↑13.).

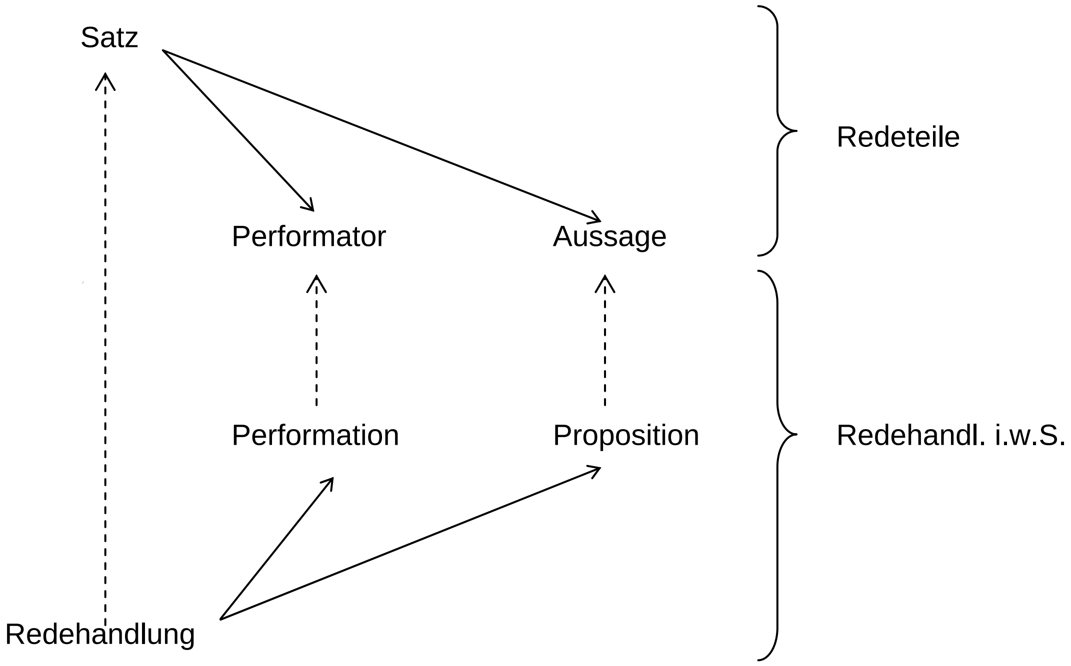
2.1.6 Teilhandlungen von Redehandlungen: Performation und Proposition

Verwendet ein Autor einen Satz Σ, dann vollzieht er eine Redehandlung. An einem Satz lassen sich, wie vorgeführt, Teilausdrücke unterscheiden: der Performator als Operator und die Aussage als Operand. Die in die Satzverwendung eingebetteten Verwendungen von Performator und Aussage sollen entsprechend als Teilhandlungen der gesamten Redehandlung angesprochen werden. Die Verwendung des Performators ist die Performation, die Verwendung der Aussage die Proposition. Die Proposition ist die Operandumhandlung, die

Performation die Operatorhandlung. – Der Ausdruck ’Proposition‘ findet hier in einem unüblichen Sinn Verwendung (↑13.).

Trifft man die unten ausgedehnte (↑2.1.7) terminologische Entscheidung, die Teilhandlungen von Redehandlungen und die Redehandlungen selbst den Redehandlungen im weiten Sinne zu subsumieren, dann ergeben sich folgende spiegelbildliche Zuordnungen zwischen dem Part der Redehandlungen i.w.S. und der Seite der Redemittel:

[3]



Der gestrichelte Pfeil ist so zu lesen: Die und die Redehandlungen i.w.S. werden vollzogen durch Verwendung der und der Redeteile. Der durchgezogene Pfeil indiziert den Aufbau des Pfeilursprungs aus den Pfeilenden.

Ebenso wie der Satz aus Performator und Aussage aufgebaut ist, zerfällt die Redehandlung in Performation und Proposition. Da der Performator einer atomaren Kategorie angehört, die Performation in der Verwendung des Performators besteht, ist die Performation eine atomare Teilhandlung. Da Aussagen einer molekularen Kategorie angehören, die Proposition in der Verwendung einer Aussage besteht, stellt sie eine molekulare Teilhandlung dar: Ebenso wie die Aussage in weitere Teilausdrücke zerfällt, ist die Proposition aus weiteren Teilhandlungen aufgebaut. Die (einfachste) elementare Aussage, z.B. ‘Sokrates ist ein Philosoph’ zerfällt in den einstelligen Prädikator ‘...ist ein Philosoph’ und den Nominator ‘Sokrates’; die Proposition ist entsprechend aus den Teilhandlungen der Prädikation, der Verwendung des Prädikators, und der Nomination, der Verwendung des Nominators, aufgebaut. – Die Teilhandlungen einer Redehandlung sind, wie die genauere Analyse von Regeln zeigen wird (↑4., 6., 7.), keine eigenständigen „Züge im Sprachspiel“.

2.1.7 Sequenzen aus Redehandlungen

Redehandlungen im Zuge intuitiver Näherung als kleinste vollständige Kommunikationseinheiten anzusprechen, verweist auf größere, umfassendere Komplexe. Dispute, Erzählungen, Verhöre, Gebete, Predigten, häusliche Streitereien, Abwägungen, Beratungen, Beweise, Argumentationen, Erklärungen und anderes mehr sind (unsortierte) Beispiele für derartige endliche Folgen von, d.h. Sequenzen aus Redehandlungen; das dabei jeweils Geäußerte sind – gemäß der vorgenommenen Zuordnung – Satzsequenzen bzw. Texte. Die Glieder einer Redehandlungssequenz sind Redehandlungen; diese besitzen zwar Teilhandlungen, sind aber ihrerseits keine Teilhandlungen, sondern Glieder der Redehandlungssequenz. Redehandlungs- und Satzsequenzen (in Standardform) sind einander eineindeutig zugeordnet; und Ausführungen über die eine Seite lassen sich mit Routineänderungen unschwer auf die andere übertragen. Im Folgenden werden im Sinne der terminologischen Auflockerung die Ausdrücke ‘Sequenz’ und ‘endliche Folge’ als füreinander ersetzbar behandelt.

Man betrachte zum Beispiel die Redehandlung des Schließens/Folgerns (↑1.1.2): Autoren schließen, von Ausnahmen abgesehen, stets aus Aussagen auf eine (dann als Operand des Folgerungsperformators vorkommende) Aussage. Die Aussagen, aus denen man schließt, werden durch andere Redehandlungen, z.B. durch Annahmen, Anziehungen oder selbst wiederum Folgerungen als Prämissen bereitgestellt. Das Folgern ist demnach ›naturgemäß‹ in Sequenzen von Redehandlungen eingebettet, ebenso wie das gerade erwähnte Annehmen oder Anziehen. Man betrachte – zweites Beispiel – eine Bezweiflung: Diese macht nur dann Sinn, wenn zuvor ein Autor eine starke oder schwache affirmative Redehandlung bezüglich der bezweifelten Aussage, z.B. eine Vermutung, vollzogen hat. Üblicherweise wird der Diskurs dann z.B. durch stützende Redehandlungen fortgeführt, auf die sich Zustimmungen oder weitere Bezweiflungen beziehen können.

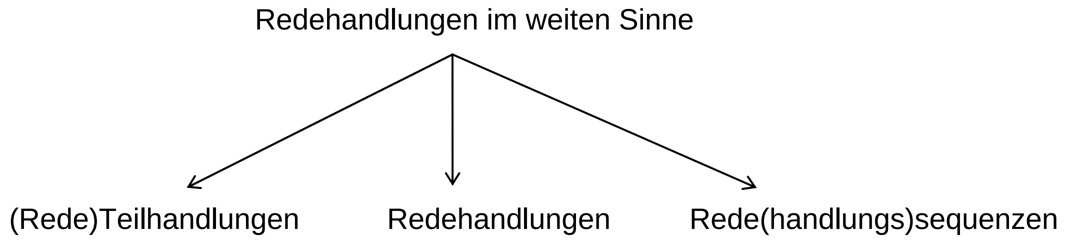
Aus der Gesamtklasse der Redesequenzen werden später diejenigen ausgesondert, die ausschließlich kognitive Redehandlungen als Glieder haben, die Diskurse. Das Behaupten, Folgern, Vermuten, Dahinstellen, Fragen, Bestreiten sind kognitive Redehandlungen. Das Auffordern, Empfehlen, Versprechen, Erlauben, Verbieten sind Beispiele für nichtkognitive Redehandlungen. Insbesondere der Diskurstyp der Argumentationen wird exemplarisch studiert. Erklärungen, Dispute, Gedankenexperimente sind weitere Diskurstypen (↑8.). Diskurse können als Teilsequenz in Redesequenzen vorkommen, in denen auch nichtkognitive Redehandlungen gegeben sind: Man denke etwa an eine auf Empfehlungen abzielende Beratung, bei der zunächst durch kognitive Redehandlungen der Ist-Zustand und das Präferenzenkataster der Klientel erhoben wird. Überdies können Redesequenzen als Teilsequenz in Handlungssequenzen vorkommen, die auch von Redehandlungen verschiedene Handlungen enthalten: Das Einkaufen lässt sich als eine Handlungssequenz fassen, das in den letzten Gliedern, oft auch in Zwischengliedern, gewöhnlich eine Redesequenz enthält.

Ü5 Bilden Sie (i) ein Beispiel für einen Diskurs, (ii) ein Beispiel für eine Redesequenz, die einen Diskurs als Teilsequenz enthält, (iii) ein Beispiel für eine Handlungssequenz, die eine Redesequenz als Teilsequenz enthält, die ihrerseits einen Diskurs als Teilsequenz enthält!

Die Fassung als Sequenz, d.h. als endliche Folge, erlaubt den Zugriff auf das jeweils *n*-te Glied der Sequenz und die zur Charakterisierung oft hilfreiche formale Strukturierung von Handlungssequenzen in die Anfangs- oder Eröffnungshandlung, die Zwischen- oder Fortsetzungshandlungen und die Schluss- oder Endhandlung. Der Anfangshandlung geht keine Handlung (in der unterlegten Sequenz) voran, wohl aber den Zwischenhandlungen; und der Schlusshandlung folgt keine Handlung (in der jeweiligen Sequenz). – Eine Argumentation (↑8.) wird z.B. durch eine Behauptung eröffnet und eine Erklärung durch eine Warum-Frage (↑1.1.3). Es folgen Annahme-, Anziehungs- und Folgerungshandlungen. Die Endhandlung ist im Falle einer Argumentation oder einer Erklärung stets eine Folgerungshandlung.

Subsumiert man auch die Redesequenzen unter die Redehandlungen i.w.S. und schließt man diese Klasse damit ab, dann ergibt sich folgende Übersicht:

[4]



Der Suggestion der Klammern folgend, werden Redeteilhandlungen in der Folge kurz als ‘Teilhandlungen’ angesprochen und Redehandlungssequenzen als ‘Redesequenzen’.

Ü6 Suchen Sie zu den drei erreichten Endpunkten von Schaubild [4] Beispiele, die sich aus dem Text ergeben!

Wie Redehandlungen, ihre Teilhandlungen und die Redesequenzen im Einzelnen zusammenspielen, insbesondere wie die mit ihnen typischerweise verfolgbaren Zwecke zusammengehen, wird später ausführlich und immer wieder zum Thema. – Im Sinne des besseren Verstehens des schon Verstandenen wird empfohlen, die ausgezeichneten Zeilen [8] bis [13| des Kapitels 1. neuerlich zu betrachten; dort sind die entsprechenden Sätze bereits aus der Performator-Aussage-Perspektive in Standardform notiert.

2.2 Sprache: Einheit aus Performatorik und Grammatik

An Redehandlungen bzw. Sätzen, so das Zwischenergebnis, lassen sich Performation und Proposition bzw. Performator und Aussage unterscheiden. Nun ist das Verhältnis der Unterschiedenen in den Mittelpunkt zu rücken: Zunächst ist diesbezüglich Unbeliebigkeit festzustellen (2.2.1). Sodann werden Regeln als allgemeine Form der Antwort auf die Frage präsentiert, welches performative mit welchem propositionalen Moment zusammengeht (2.2.2). Ausgehend von einem Vorbegriff der Sprache als Reglement von Redehandlungen, wird diese sodann als Einheit aus Grammatik und Performatorik bestimmt (2.2.3). Bezüglich einer Sprache sind wenigstens sechs Tätigkeiten zu unterscheiden; dies geschieht abschließend im Stenostil (2.2.4).

2.2.1 Die Unbeliebigkeit im Verhältnis von Performation und Proposition

Die Inspektion des Verhältnisses von performativem und propositionalem Moment führt zu zwei Feststellungen: Einerseits kann derselbe propositionale Gehalt mit verschiedenen performativen Momenten auftreten. So mögen Autoren die Aussage ‘niemand ist sein eigener Vater’ mit behauptender, schließender, fragender, zustimmender usf. Kraft äußern:

[5] a) Es gilt
b) Also
c) Trifft es zu Niemand ist sein eigener Vater
d) Ich stimme zu
... ...

Andererseits kann derselbe performative Modus verschiedene propositionale Gehalte aufnehmen. So lassen sich etwa die Aussagen ‘niemand ist sein eigener Vater’, ‘Sokrates ist ein Philosoph’, ‘Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere’, ‘Essen bietet ausgezeichnete Einkaufsmöglichkeiten’ alle mit behauptender Kraft äußern:

[6] a) Niemand ist sein eigener Vater
Es gilt b) Sokrates ist ein Philosoph
c) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere
d) Essen bietet ausgezeichnete Einkaufsmöglichkeiten
.. ...

Insgesamt gilt: Ein propositionaler Gehalt ist mit verschiedenen Kräften kombinierbar, und umgekehrt kann ein performativer Modus verschiedene propositionale Gehalte aufnehmen.

Die Kombinierbarkeit eines propositionalen Gehaltes mit verschiedenen Modi sowie umgekehrt die Aufnahmefähigkeit eines Modus für verschiedene propositionale Gehalte führt zwanglos und zwangsweise auf die Frage, ob Modi und propositionale Gehalte sich beliebig zusammenstellen lassen. Anders: Kann jede Performation mit jeder Proposition in einer Redehandlung zusammengehen? Ist jeder Performator mit jeder Aussage kombinierbar? Oder in der Terminologie des Meinens: Kann ein Autor beliebige propositionale Gehalte beliebig meinen?

Man macht sich an Beispielen deutlich, dass diese Frage zu verneinen ist, soweit sie den *korrekten* Vollzug von Redehandlungen betrifft. Es ist gerade der Witz des korrekten Behauptens, dass etliche Aussagen außerhalb des Behauptbaren angesiedelt sind; und es ist inkorrekt, eine undurchführbare Handlung zu empfehlen. Ebenso ist es, wie schon gesehen (↑1.1.2), die Pointe des korrekten Schließens, dass eben nicht alles aus allem geschlossen werden darf, und korrekt prognostizieren bzw. retrodizieren lässt sich nur Zukünftiges resp. Vergangenes. Einen Delinquenten ordnungsgemäß verurteilen kann nur ein Richter nach ordentlichem Prozess, und zu dogmatischen Verlautbarungen ist der normale katholische Christenmensch nicht in der Lage. Kurz: Das Verhältnis der beiden Momente einer korrekten Redehandlung ist unbeliebig. Damit ist ein normativer Gesichtspunkt in die Betrachtung aufgenommen!

Ü7 Verdeutlichen Sie sich an weiteren Redehandlungen die Unbeliebigkeit im Verhältnis von Performation und Proposition!

2.2.2 Regeln für Redehandlungen

Wenn nun erstens dieselbe performative Kraft mit verschiedenen propositionalen Gehalten verknüpfbar ist, wenn zweitens und umgekehrt derselbe propositionale Gehalt mit verschiedener performativer Kraft geäußert werden kann, wenn drittens jedoch propositionaler Gehalt und performative Kraft sich korrekterweise nicht beliebig verknüpfen lassen, dann ist zu fragen: Welche Performatoren dürfen/sollen/... auf welche Aussagen angewendet werden bzw. welche Performationen dürfen/sollen/... mit welcher Proposition in einer Redehandlung zusammen ausgeführt werden bzw. – inhaltlicher – was kann/soll/... ein Autor wie meinen, mit welcher Kraft dürfen/sollen/... welche propositionalen Gehalte geäußert werden bzw. – in globalem Zugriff – welche Redehandlungen darf/soll/... man unter welchen Bedingungen vollziehen?

Die Frage ist offenkundig nur gesondert für die einzelnen Arten von Redehandlungen zu bearbeiten. Zunächst sind einige Antwortbeispiele zu vergegenwärtigen:

[7] a) Wenn es eine Begründung für eine Aussage Δ gibt, dann darf man Δ behaupten.

b) Wenn H eine von S durchführbare und im wohlverstandenen Eigeninteresse von S liegende Handlung ist, dann darf man S die Durchführung von H empfehlen.

c) Wenn es eine Begründung für die Negation einer Aussage Γ gibt, dann darf man Γ bestreiten.

d) Wenn eine Aussage Γ Konsequenz einer von einem Disputanten S_1 akzeptierten Aussagenmenge X ist und der Kodisputant S_2 die Konzessionsfrage bzgl. Γ aufwirft, dann ist S_1 gehalten, Γ zu konzedieren.

e) Wenn Indizien für/gegen die Plausibilität einer Aussage Γ vorliegen, dann darf man Γ bis auf weiteres vermuten/bezweifeln.

f) Wenn man eine Universalaussage gewonnen hat, dann darf man jede ihrer Instanzen folgern.

Für die materialen Antwortangebote lässt sich eine gemeinsame allgemeine Form, nämlich die Form der Regel, vorsehen. Wenn anzugeben ist, unter welchen Bedingungen welche Redehandlungen vollzogen werden dürfen/sollen/..., dann lässt sich den einzelnen Antworten eine gemeinsame Form aufprägen: Wenn das und das der Fall ist, dann darf/soll ein Autor die und die Redehandlung vollziehen. Der Wenn-Teil ist das Regelantezedens, der Dann-Teil bildet das Regelsukzedens. Das Verhältnis von Redehandlung, Redezweck und Redehandlungsregel wird exemplarisch und systematisch erst später zum Thema (↑).

2.2.3 Sprache: Einheit aus Performatorik und Grammatik

Wenn Regeln jene Instanzen sind, die spezifizieren, unter welchen Umständen man welche Redehandlungen vollziehen darf/soll, dann liegt es in der Linie der angebahnten Auffassung von Sprachen als Systemen der Redeorganisation, diese für die hier leitenden Zwecke kurzerhand mit dem Reglement zu identifizieren, das die für die jeweilige Sprache typischen

Redehandlungen anleitet: Sprachen – so die Einstiegsbestimmung – sind Systeme von Redehandlungsregeln, Redehandlungsreglements.

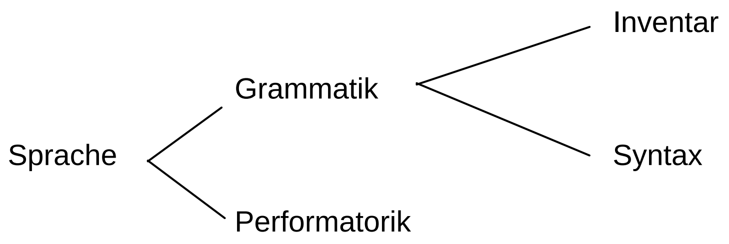
Die einzelnen Elemente von Sprachen, die die Redehandlungen regierenden Regeln, nehmen, wie sich an der Beispielliste ablesen lässt (↑[7]), in ihrem Antezedens und ihrem Sukzedens auf Ausdrücke dieser Sprachen, insbesondere auf Aussagen und Texte bestimmter Arten, Bezug. Dieser Umstand zeigt einen Charakterisierungsbedarf an: Welche Ausdrucksverbindungen sind (wohlgeformte) Gebilde der jeweiligen Sprache, welche Sorten von Ausdrucksverbindungen sind zu unterscheiden usf.? Das Ergebnis solcher Bestimmungen ist die Grammatik der jeweiligen Sprache. Hebt man von der Grammatik das auf diese zurückgreifende Regelwerk als Performatorik ab, dann lassen sich Sprachen – in Differenzierung der Einstiegsbestimmung – als Einheiten aus Grammatik und Performatorik begreifen. – Die Bezeichnung ‘Performatorik’ wird gewählt, weil jede Redehandlungsregel wenigstens die Verwendung des für sie einschlägigen Performators reglementiert.

Die Grammatik muss zwei Sorten von Informationen bereithalten: Zum einen ist anzugeben, welches die (relativ auf den kategorialen Rahmen) atomaren Gebilde sein sollen, die in den atomaren Kategorien zusammengefasst werden; diese Information ist dem Inventar der Sprache zu entnehmen. Zum andern muss spezifiziert werden, wie sich aus den atomaren Gebilden die molekularen Verbindungen, die in den molekularen Kategorien deponiert werden, ergeben; diese Information bietet die Syntax der Sprache.

Jede Sprache enthält die atomare Kategorie der Performatoren und die molekularen Kategorien der Sätze und Aussagen. Aus atomaren und molekularen Teilen welcher Art Aussagen auf welchem Wege aufgebaut sind, variiert von Sprache zu Sprache und zeichnet sie unter grammatischer Rücksicht aus (↑3.3).

Insgesamt lassen sich Sprachen – in für die hier leitenden Zwecke zureichender Weise – als Einheiten aus Grammatik und Performatorik bestimmen, wobei die Grammatik ihrerseits in Inventar und Syntax zerfällt:

[8]



Bei der exemplarischen Behandlung analytischer und synthetischer Wissenschaften wird diese Sprachkonzeption exemplifiziert (↑14., 15.).

2.2.4 Tätigkeiten bezüglich einer Sprache

Die Unterscheidung von sechs Tätigkeiten bezüglich einer Sprache ist zur Lokalisierung und differenzierten Behandlung zahlreicher methodenbezogener Problemstellungen unerlässlich. Zu unterscheiden ist zwischen dem Gebrauch, dem Erwerb, der Konstitution, der Erschließung, der Analyse und der Rechtfertigung einer Sprache; auch Kombinationen aus diesen Tätigkeiten sind möglich und üblich.

Ein Autor gebraucht eine Sprache, wenn er sie korrekt oder inkorrekt gebraucht. Korrekter Gebrauch liegt vor, wenn der Autor gemäß der Performatorik der jeweiligen Sprache agiert. Das wiederum ist der Fall, wenn er Sätze äußert, deren Aussagen den jeweiligen Regelbedingungen genügen. Widrigenfalls ist inkorrekter Gebrauch gegeben. So wird z.B. mit der Äußerung von ‘Es gilt, dass niemand sein eigener Vater ist’ bei Zugrundelegung der oben notierten Behauptungsregel (↑[7]a)) in der deutschen Sprache eine korrekte Behauptung vollzogen; wer hingegen die Aussage ‘mancher ist sein eigener Vater’ durch Äußerung eines passenden Satzes behauptet, vollzieht eine inkorrekte Behauptung und bietet damit ein Beispiel für inkorrekten Sprachgebrauch.

Wenn ein Autor eine Redehandlung durch Äußerung eines Satzes vollzieht, dann verwendet er sämtliche Teilausdrücke dieses Satzes. Was als Teilausdruck zählt, ergibt sich aus der unterlegten Grammatik. Ist die Redehandlung (in)korrekt, dann werden alle Teilausdrücke des Satzes (in)korrekt verwendet. Die erwähnten Beispiele führen u.a. die (in)korrekte Verwendung des Teilausdrucks ‘Vater’ vor.

Agenten erwerben eine Sprache, wenn sie die Fertigkeit gewinnen, diese Sprache korrekt zu gebrauchen; dabei eignen sie sich die korrekte Verwendung der einzelnen Ausdrücke an. Mit dem Spracherwerb wachsen sie in die jeweilige Sprachgemeinschaft hinein. Bei den meisten Sprachen, bei der Gebrauchssprache des Alltags, aber auch bei handwerklichen und laborwissenschaftlichen Fachsprachen, sind der Erwerb sprachlicher und nichtsprachlicher Fähigkeiten ineinander verwoben. ‘Erwerben’ umfasst dabei sowohl ‘Sich-Instandsetzen’ als auch ‘Instandgesetztwerden’: Manchmal erfolgt der Spracherwerb mit Lehrern im weitesten Sinn, gelegentlich autodidaktisch und oft sowohl fremd- wie selbstvermittelt. Das Erlernen der Primärsprache erfolgt (wenigstens in den Anfangsstadien) stets ohne eine Erwerbssprache. Beherrscht man hingegen bereits eine Sprache, so kann diese mit Gewinn beim Erwerb von Zweitsprachen, etwa beim Erlernen einer Fremdsprache oder einer Wissenschaftssprache, eingesetzt werden. Der Grad der erreichten Sprachbeherrschung lässt sich am sprachlichen und sprachbezogenen Handeln ablesen.

Sprachen werden konstituiert oder konstruiert, indem zunächst die Grammatik und sodann die Performatorik der Sprache hergestellt wird. Anzugeben ist mithin, Gebilde welcher Art Ausdrücke der Sprache sind, und unter welchen Umständen sie im Vollzug von Redehandlungen korrekt verwendet werden. Im Zuge der Konstitution werden die atomaren Ausdrücke dieser Sprache eingeführt. Die Konstitution der Performatorik erfolgt demnach durch Setzen von Redehandlungsregeln. – Da der Gebrauch der Sprache vorgegebenen Zwecken dient, ist die Sprache in zweckrealisierender Weise zu konstituieren: Aus den Zwecken ergeben sich Richtlinien der Konstitution.

Wer eine Sprache L_1 konstituiert, trifft Festlegungen und setzt Regeln als Handlungsanleitungen, vollzieht also seinerseits in einer Sprache L_2 Redehandlungen: Das Konstituieren einer Sprache ist – anders als der Spracherwerb – stets an eine Sprache, die Konstitutionssprache, gebunden. Damit stellt sich die Frage nach der Stärke der Konstitutionssprache: Welche Redemittel muss eine Konstruktionssprache bereithalten, um zur Konstitution einer so und so beschaffenen Sprache zu taugen? – Diese Fragestellung bietet einen aufschlussreichen Einteilungsgesichtspunkt für Programme der Konstitution bzw. Konstruktion (insbesondere) von (Wissenschafts)Sprachen.

Da die Konstitutionssprache L_2 vor der konstituierten Sprache L_1 verfügbar sein muss, stellt sich die Frage, wie L_2 ihrerseits zustande gekommen ist. Bei Strafe des infiniten Regresses können nicht alle Konstitutionssprachen ihrerseits konstituierte Sprachen sein. Bei der Genese von Sprachen ist neben der konstitutionellen eine nichtkonstitutionelle Form anzunehmen. Sprachen kommen nicht nur durch ausdrückliche Anfertigung zustande, sondern auch so, dass sich die verschiedenen Handlungsmöglichkeiten allmählich unter miteinander kooperierenden, gemeinsam Zwecke verfolgenden und Interessen teilenden Agenten einspielen, wie das auch bei nichtsprachlichen Handlungsformen der Fall ist.

Die meisten Gebrauchssprachen, die Sprache des Alltags ebenso wie die wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Fachsprachen, sind vollständig oder zu großen Teilen über nichtkonstitutionelle Genese zustande gekommen. Bei den zuletzt genannten Sprachen liegt in der Regel gemischte Genese vor. Sprachen konstitutioneller Genese finden sich vornehmlich in wissenschaftlichen Kontexten; sie dienen oft allein dem Zweck der Analyse im Sinne des

Objektseins für Analysen. – Unter Verwendung der Konventionssprechweise lässt sich formulieren: Bei konstitutioneller Genese kommen Sprachen durch explizite Konvention zustande, bei nichtkonstitutioneller durch implizite; bei gemischter Genese sind explizite wie implizite Konventionen am Werk.

Da die meisten Sprachen sich nichtkonstitutioneller Genese verdanken, sind sie nur mittelbar, d.h. über die Ergebnisse bzw. Spuren ihres Gebrauchs, gegeben. Sie müssen daher im Bedarfsfall erschlossen werden, indem den Gebrauchsresultaten eine Grammatik und eine Performatorik zugeordnet wird: Durch Veranschlagung welcher grammatischen Kategorialität gelingt es, alle und nur die Zeichengebilde zu erzeugen, die die Autoren als Ausdrücke dieser Sprache betrachten? Welches sind die Regeln, die den Vollzug genau der korrekten Redehandlungen ermöglichen? Zur Erschließung wird eine Erschließungssprache benötigt. Die Spracherschließung ist überdies ein alternativenhaltiges Unternehmen und stets eine Angelegenheit des Grades. Von faktisch gebrauchten Sprachen werden meist für die jeweilige Untersuchung interessante Fragmente erschlossen. – Indem man Sprachen erschließt, ermittelt man die Bedeutung der atomaren Ausdrücke dieser Sprache.

Ist eine Sprache – sei es per Konstitution oder Erschließung – gegeben, dann lässt sie sich zum Gegenstand der Analyse machen. Dazu benötigt man eine Analysesprache, die sich in weiten Teilen mit Konstitutions- und Erschließungssprache überschneidet. Häufig bezieht sich die Analyse auch auf mehrere unter einem Gesichtspunkt gleiche Sprachen, z.B. auf Sprachen mit gleicher Grammatik oder auf Sprachen, die ein bezüglich einer Redehandlung gleiches Reglement aufweisen.

Redend verfolgen Autoren Zwecke. Das, was redend gebraucht oder verwendet wird, die Sprache oder Teile derselben, kann mithin als Mittel zum Erreichen solcher Zwecke angesehen werden. Der Nachweis, dass die Sprache oder ihre Teile, die Grammatik, die Performatorik, Regelgruppen oder Regeln und einzelne Ausdrücke, die intendierten Zwecke (tatsächlich, wahrscheinlich, mutmaßlich, eher als eine so und so beschaffene Alternative **..** usf.) herbeizuführen erlauben, ist die Rechtfertigung der Sprache. Diese unterliegt der Zweck-Mittel-Rationalität. Rechtfertigungsfragen ergeben sich z.B. dann in augenfälliger Weise, wenn gut bearbeitete Regelwerke – man denke etwa an die Folgerungsreglements – miteinander konkurrieren oder wenn man das Problem aufwirft, warum Sprachen überhaupt widerspruchsfrei oder doch nichttrivialisierbar sein sollen (↑5., 10.).

Häufig werden die Tätigkeiten hintereinandergeschaltet: Man konstruiert oder erschließt eine Sprache, um sie sodann zu analysieren und man führt die Analyse durch, um für die anschließende Rechtfertigung von geklärtem Terrain ausgehen zu können.

Ü8 Die soeben erläuterte Unterscheidung von sechs Tätigkeiten fasst Sprache wesentlich als ein Mittel auf. Weisen Sie an anderen Mitteln, z.B. an Geräten wie einem Hammer, Korkenzieher, Messer usf., das Unterscheidungssextett nach!

2.3 Redehandlungen in ihrer Umgebung

Die meisten der nachfolgend erläuterten Redemittel befinden sich vorangehend schon in Verwendung. Das erhoffte rechte Verständnis soll durch die folgenden Darlegungen stabilisiert, Unverständnis soll beseitigt und Missverständnis korrigiert werden. – Autoren richten Redehandlungen an Adressaten, die nicht immer mit den Rezipienten identisch sind: Autoren, Adressaten und Rezipienten sind die Redeagenten (2.3.1). Alle diejenigen, die imstande sind, als Redeagenten bezüglich einer Sprache aufzutreten, bilden die Sprachgemeinschaft (2.3.2). Isoliert man eine Redehandlung i.w.S. oder die zugehörige Ausdrucksverbindung zu weiterer Betrachtung, dann ist ihr Prae-, Post- und Kontext zu unterscheiden (2.3.3). Der Vollzug und die Rezeption von Redehandlungen erfolgen stets in bestimmten Situationen. Die Redeagenten, die Texte und die Situation bilden zusammen die Umgebung einer Redehandlung i.w.S. bzw. der zugeordneten Ausdrucksverbindung (2.3.4). Insbesondere gebrauchssprachliche Verlautbarungen sind hochgradig umgebungssensitiv. Zwei Maximen, die Naturierungs- und die Relativierungsmaxime, leiten den weiteren Umgang mit der Umgebungssensitivität an (2.3.5).

2.3.1 Redeagenten: Autor - Adressat - Rezipient

Autor einer Redehandlung ist der-/die-/dasjenige, der/die/das die Redehandlung vollzieht. Je nach Art der Redehandlung ist vom Behauptungs-, Aufforderungs-, Empfehlungs-, Verbotsautor usf. die Rede. Der Autor einer Redehandlung ist zugleich Autor der mitvollzogenen Teilhandlungen. Bei Autoren denkt man zunächst und naheliegenderweise an Personen; aber auch andere Agenturen mit Redepotential, z.B. Kollektive, Institutionen, Gruppen, Parteien usf., können als Autoren fungieren.

Diese Ausgangsbestimmung ist zunächst so zu erweitern, dass auch von Autoren von Redesequenzen gesprochen werden darf. Je nach Art der Redesequenz ist von Beweis-, Begründungs-, Erklärungsautoren usf. die Rede. Weiter sollen nicht nur Handlungen, sondern auch die Redeteile als Handlungsutensilien bzw. die Ergebnisse, die Sätze oder Texte, einen Autor haben. – Für ‘Autor’ findet sich oft auch das (dann aber nicht mehr nur auf den akustischen Realisierungsmodus abstellende) Wort ‘Sprecher’.

Die Kenntnis der Eigenarten des Autors, insbesondere seine kognitiv-volitive Gesamtbefindlichkeit mit ihrer Vorgeschichte, können für das Verständnis mancher der von ihm vollzogenen Redehandlungen hilfreich, in manchen Fällen sogar unentbehrlich sein; es gibt allerdings auch Redehandlungen und Sprachen – wie die später vornehmlich betrachteten Wissenschaftssprachen – in denen dieser Faktor keine Rolle spielt.

Redehandlungen sind von ihrem Autor gerichtet. Diejenigen, an die sie gerichtet sind, sind die Adressaten der Redehandlung. Auch hier soll erweiternd vom Adressat von Redesequenzen und vom Adressat der jeweiligen Sätze oder Texte die Rede sein. Adressaten müssen ebenso wenig wie Autoren Einzelpersonen sein. Der Autor selbst kann ebenfalls zu den Adressaten zählen. Im Grenzfall, etwa beim Selbstgespräch, dem Monolog, dem Denken, fallen Autor und Adressat zusammen. – Das Wissen über Unterstellungen des Autors, Eigenarten des Adressaten betreffend, insbesondere über seine kognitiv-volitive Gesamtbefindlichkeit, kann für das Verständnis der Redehandlung oder der Redehandlungssequenz bzw. der Sätze oder Texte hilfreich, gelegentlich auch unentbehrlich sein. Für die später im Mittelpunkt stehenden Wissenschaftssprachen lässt sich dieser Gesichtspunkt wiederum ausblenden.

Nicht alle Redehandlungen erreichen ihre Adressaten und häufig gelangen Redehandlungen zu anderen, nichtintendierten Agenten. Zwischen Adressaten und denen, die die Redehandlung tatsächlich erreicht, den Rezipienten, ist also zu unterscheiden. Von Rezipienten soll ebenfalls bezüglich ganzer Redesequenzen und der jeweiligen Sätze bzw. Texte die Rede sein. Das Nichterreichen des intendierten Kreises und das Erreichen nichtintendierter Agenturen ist damit so formulierbar: Die Menge der Adressaten und Rezipienten kann auseinanderfallen, gelegentlich sogar ohne gemeinsames Element sein. Die alltägliche Kommunikation bietet ebenso wie die Geistesgeschichte Exemplifizierungen in Hülle und Fülle. Beispiel: Thomas von Aquin verfasst die „Summa contra Gentiles“ für die im arabischen Kulturkreis missionierenden Mitbrüder aus dem Dominikanerorden, denen damit die Adressatenrolle zukommt. De facto gelesen wird dieser Text seit seiner Abfassungszeit bis auf den heutigen Tag und wohl darüber hinaus auch und mehrheitlich von einem nicht-dominikanischen Lektorium. Der Rezipientenkreis ist also weitaus umfassender als die Klasse der Adressaten; ähnliches lässt sich an allen denkgeschichtlich wirkungsstarken Texten feststellen.

Die Rezipienten, die der Autor nicht als Adressaten angezielt hat, müssen oft außergewöhnliche Verstehensleistungen erbringen, die sich gelegentlich in verschlungenen Interpretationstraditionen dokumentieren. Die Unterschiede in den kognitiv-volitiven Profilen von Autor und Rezipient, die Differenzen in ihren ›Horizonten‹, zählen zu den Ursachen für das Entstehen und Fortwähren von Un- und Missverständnis (↑9.).

Autoren nehmen häufig auf sich und auf ihre Adressaten Bezug, aber auch auf solche Agenten, die weder mit dem Autor noch dem Adressaten identisch sind. Dafür hält die Gebrauchssprache agentensensitive Redeteile wie ‘ich’, ‘Du’/’Sie’, ‘er’, ‘wir’, ‘Ihr’, ‘sie’ bereit: Mit ‘ich’ kann der Autor etwa auf sich Bezug nehmen, mit ‘Du’/’Sie’ auf den Adressaten. Verschiedene Autoren nehmen mit der Verwendung solcher Vokabeln demnach auf verschiedene Agenten Bezug, der Gegenstand der Bezugnahme wechselt in systematischer Weise (↑7.). Neben den Personalpronomina zählen auch die Possessivpronomina zu den indirekt agentensensitiven Redeteilen. Durch die Verwendung von ‘Dein Hemd’ in ‘Bitte lasse Dein Hemd an!’ nimmt der Autor der Bitte auf ein Kleidungsstück des Adressaten Bezug. Der Redeteil ‘Dein Hemd’ enthält mit ‘Dein’ einen agentensensitiven Anteil.

Ü9 Fingieren Sie verschiedene Agenten zu der durch Äußerung von ‘Du sollst mein Diener sein!’ vollzogenen Redehandlung!

Gebrauchssprachen sind stets agentensensitiv: Sie enthalten – in einer anderen Terminologie – agentenbezügliche Indikatoren. Man benötigt einfache, d.h. von Eigennamen und Kennzeichnungen verschiedene, Redemittel, um auf sich oder Adressaten oder dann verschiedene Dritte Bezug zu nehmen. Viele explizit konstruierte Wissenschaftssprachen, z.B. die arithmetischen oder die mereologischen, kommen ohne solche Redeteile aus.

2.3.2 Die Sprachgemeinschaft

Die Sprach(gebrauchs)gemeinschaft ist der Zusammenschluss all der Agenten, die ›prinzipiell und potentiell‹ in der Lage sind, die Agentenrollen zu übernehmen; häufig ist auch von der Kommunikationsgemeinschaft die Rede. Die Mitglieder der Kommunikationsgemeinschaft teilen die in der jeweiligen Sprache vorgesehenen Redehandlungsmöglichkeiten bzw. das dafür bereitgestellte Vokabular; und nur für Mitglieder der Kommunikationsgemeinschaften sind die jeweiligen Redehandlungen bzw. Sätze usf. verstehbar, mitteilbar und kommunizierbar. Da Redehandlungen stets ›part and parcel‹ von Handlungssequenzen und -netzen sind, die (letztlich) auf Lebensbewältigung angelegt sind, gilt: Sprachgemeinschaften stellen stets Lebensbewältigungsgemeinschaften dar.

Da, wie betont, der Redevollzug allemal Teil und Stütze des Lebensvollzugs insgesamt darstellt, seinen Part im Ensemble der Vollzüge spielt, spiegeln die sprachlichen Möglichkeiten die sonstigen lebensweltlichen Bedürfnisse und Fähigkeiten wider. Augenfällige und daher in der Literatur oft und auch mit Recht angeführte Beispiele sind etwa die Differenzierungen, die Zigarrenroller bei Brauntönen vornehmen. Die Beispiele liegen allerdings so nahe, dass man sie übersieht und lieber zu geographisch entfernten Sprachgemeinschaften blickt: Eine Vokabel wie ‘Bildschirm’ oder ‘Telefon’ ist spezifisch für technisierte Sprachgemeinschaften;

noch etwa im 18. Jahrhundert bestand kein Bedarf an Unterscheidungen und Subsumtionen, die mit ihrer Hilfe erbracht werden können. Typisch für eine Sprachgemeinschaft sind aber auch die jeweils vorgesehenen institutionellen Redehandlungen, z.B. das Verurteilen, Ernennen oder Lossprechen. Zwar finden sich alle Sprachgemeinschaften durchdringende Redeteile, z.B. solche für nahe stehende Personen, für Ess- und Trinkbares usf.; dennoch sind sowohl in dia- wie auch in synchroner Sicht erhebliche Unterschiede zwischen den einzelnen Sprachen festzustellen.

Mitglied in einer Sprachgemeinschaft ist man stets ›in Graden‹: Sprachbeherrschung ist, wie schon den Bemerkungen zum Verstehen entnehmbar, keine Angelegenheit des Alles oder Nichts, sondern eine des Mehr oder Weniger. Das ergibt sich einerseits schon daraus, dass man allmählich in eine Sprachgemeinschaft hineinwächst, indem man die Sprache Zug um Zug erwirbt. Andererseits stellt eine realistische Gebrauchssprache ein so weitverzweigtes Gebilde dar, dass hier, wie auch in anderen lebensweltlichen Vollzügen, Arbeitsteilung angesagt ist. Zwar können die meisten Autoren der deutschen Gebrauchssprache korrekt fragen, ob dieser oder jener Baum eine Ulme ist; zu einer korrekten Feststellung sind in schwierigen Fällen aber nur einige Spezialisten, etwa Förster oder Botaniker, in der Lage. Zwar kann auch der Weinliebhaber fragen, nach wie vielen Jahren die Tannine in dem eben gekosteten Wein abgebaut sein werden; zu einer verlässlichen Prognose ist indes nur der professionelle Verkoster imstande. Auch bezüglich der Benutzung von Eigennamen herrscht Arbeitsteilung: Bergbewohner sind in der Benutzung von Eigennamen für ihre Gipfel weitaus kompetenter als der Tourist, der es nach einigen Wochen zur Konstatierung einiger einfacher Identitätsaussagen bringt. Das durch die sprachliche Arbeitsteilung gegebene Kompetenzgefälle bezüglich der korrekten Verwendung der Vokabeln eines bestimmten Bereichs ist eine weitere Ursache von Miss- und vor allem Unverständnis.

2.3.3 Praetext – Posttext – Kontext

Isoliert man aus einer Redesequenz/einem Text eine Teilsequenz/einen Teiltext bzw. aus einer Redehandlung/einem Satz eine Teilhandlung/einen Teilausdruck bzw. aus einer (molekularen) Teilhandlung/einem (molekularen) Teilausdruck eine Teilhandlung/einen Teilausdruck bzw. aus einer atomaren Teilhandlung/einem atomaren Teilausdruck einen Handlungsteil/einen Ausdrucksteil, dann ist das jeweils Vorangehende, Vollzüge oder Texte, der <u>Praetext</u>, das jeweils Folgende, Vollzüge oder Texte, der <u>Posttext</u>; der Zusammenschluss von Prae- und Posttext ist der <u>Kontext</u>. Die X-Text-Prädikatoren sollen im Übrigen transitiv verwendet werden: Wenn der Satz Σ etwa Kontext des Teilausdrucks μ ist, seinerseits aber den Text T zum Kontext hat, dann soll auch μ in T als Kontext eingebettet sein.

Kürze und Bequemlichkeit bringen es mit sich, dass Gebrauchssprachen über eine Fülle von Redemitteln verfügen, deren Bezug sich allein aus dem Kontext ergibt. Für diese kontextsensitiven Redemittel einige Beispiele: Mit ‘Er hat es tatsächlich getan’ bezieht sich der Autor auf eine im Praetext wenigstens einmal beschriebene, angezeigte oder benannte Person und Handlung. Mit ‘Das Weitere bringt einige Schwierigkeiten mit sich’ bezieht sich der Redner auf die dem Auditorium in der Folge zugemuteten Verlautbarungen. Durch Verwendung der Prosentenz ‘das’ in ‘Ja, das ist wahr’ kann ein Autor eine Zustimmung vollziehen, ohne die Aussage, der die Zustimmung gilt, eigens zu wiederholen. Prosentenzen sind Ausdrucksverbindungen unterhalb der Aussageebene, die in der Kommunikation für eine Aussage stehen. Mit ‘All dies ist unzutreffend’ kann man eine durch ‘all dies’ vertretene Konjunktion von Aussagen verwerfen. Welches die Aussage ist bzw. welches die Aussagen sind, denen zugestimmt bzw. die verworfen werden, ergibt sich allein aus dem Praetext – und variiert entsprechend.

Ü10 Geben Sie weitere Beispiele für das kontextsensitive Vokabular!

Während die Gebrauchssprache, wie gesagt, ausgiebig von kontextsensitiven Redeteilen Gebrauch macht, verfügen explizit konstruierte Wissenschaftssprachen über derartige Redemittel meist nicht.

2.3.4 Situation und Umgebung

Der Vollzug von Redehandlungen, einer einzigen oder einer Sequenz, erfolgt in einer bestimmten Situation, die immer auch durch Raumstelle und Zeitpunkt charakterisierbar ist; Analoges gilt für die Rezeption. Autor- und Rezeptionssituation bilden gemeinsam die kommunikative Gesamtsituation. Wird etwa ein Text von verschiedenen Rezipienten zur Kenntnis genommen, so ergeben sich jeweils neue Gesamtsituationen.

Wiederum hält die Gebrauchssprache zum Zweck der Kürze und Bequemlichkeit eine Reihe von Redemitteln bereit, deren Bezug sich allein aus der jeweiligen Situation ergibt: ‘hier’, ‘dort’ und ‘drüben’ sind Beispiele für Situationssensitiva, mit denen man sich auf Raumstellen bezieht, während Autoren mit ‘früher’, ‘jetzt’, ‘heute’, ‘später’ situationsabhängig auf Zeitpunkte bzw. -passagen Bezug nehmen. Die angeführten Ausdrücke werden auch als Raum- und Zeitindikatoren angesprochen.

Ü11 Geben Sie Beispiele für situationssensitive Redeteile!

Wiederum gilt: In explizit konstruierten Wissenschaftssprachen spielen Situationssensitiva keine Rolle, während die Gebrauchssprache ausgiebigen Gebrauch von ihnen macht.

Die Umgebung einer Redehandlung i.w.S. bzw. eines Ausdrucks i.w.S., d.h. eines Textes, Satzes, Teilausdrucks, Ausdruckteils, baut sich auf aus Kontext, Gesamtsituation und Agenten. Agenten-, kontext- und situationssensitive Ausdrücke sind damit auch umgebungssensitiv.

2.3.5 Zur Bewältigung der Umgebungssensitivität

Gebrauchssprachliche Gebilde sind, wie festgestellt, in der Regel in hohem Grade umgebungssensitiv. Meist lassen erst Umgebungsfaktoren erkennen, worauf Autoren sich beziehen, wie ein allgemeiner Ausdruck verwendet wird, in welchem Modus eine Proposition gemeint ist usf. Die Umgebungssensitivität geht also weit über die ausdrückliche Verwendung von Umgebungssensitiva hinaus. Die Unterstellbarkeit der Kenntnis der für das Verständnis jeweils bedeutsamen Umgebungsfaktoren ermöglicht meist erst effiziente Kommunikationswege.

Durch das Fingieren einer passenden Umgebung kann man auch eine beim ersten Hinhören nonsensnahe Rede wie ‘Ich bin geboren worden’ mit gutem Sinn führen: Man stelle sich im Jahr 2025 ein Einstellungsgespräch für Mitarbeiter mit PC-Einsatz vor. Zur Welt kommen Menschen mittlerweile entweder nach längerer Phase in einer Nährflüssigkeit im Labor oder wie bislang durch Geburt. Wer geboren wird, zeigt keine oft zur Arbeitsunfähigkeit führende Allergie, die die Laborkinder bei der Bildschirmarbeit quält. Die Information ‘Ich bin geboren’ unterscheidet die Art des Zur-Welt-Kommens, sie ist wichtig für den Einsteller und – gegebenenfalls – hilfreich für den Kandidaten. Aus der Möglichkeit, für jede Verlautbarung durch Fiktion einer geeigneten Umgebung gänzlich andere und neue Verständnismöglichkeiten zu schaffen, erklärt sich auch die vorstehend notorisch eingesetzte Klausel ‘bei passender Umgebung’.

Ü12 Denken Sie sich einen weiteren Satz aus, der erst mit der Einbettung in eine passende Umgebung einen Sinn bekommt! – Beschreiben Sie diese Umgebung!

Die herausgestellte Umgebungssensitivität ist unstrittig; gleichwohl findet sie bei der Analyse gebrauchssprachlicher Gebilde oft nicht die geforderte Aufmerksamkeit. So versucht man derartige Objekte gelegentlich ›denaturiert‹, d.h. ohne eine dazugehörige Umgebung, zu betrachten, oder man entwickelt die Überlegungen bei stillschweigender Voraussetzung einer Umgebung. In beiden Fällen sind die Analyseergebnisse nur unter Beifügung bestimmter Umgebungen annehmbar; etliche Kontroversen in Linguistik und Sprachphilosophie wären durch Spezifizierung der einschlägigen Umgebungsfaktoren vermeid- bzw. behebbar. Die Naturierungsmaxime verlangt deshalb, bei der Analyse gebrauchssprachlicher Gebilde stets eine Umgebung bzw. die jeweils bedeutsamen Umgebungsfaktoren zu spezifizieren. Entnimmt man das Gebilde einer ›wirklichen‹ Umgebung, dann ist diese zu beschreiben; ansonsten müssen passende Umgebungen fingiert werden.

Ein ebenfalls verbreiteter Mangel bei der Analyse gebrauchssprachlicher Gebilde liegt darin, dass Thesen hinsichtlich grammatischer Eigenart und Verwendbarkeit bestimmter Redeteile, die nur für einige Umgebungstypen gelten, oft – meist unbewusst – mit universaler Reichweite ausgestattet werden. Prominente Beispiele aus der philosophischen Debatte sind Verlautbarungen zur Existenz- und zur Wahrheitsrede: ‘Existenz’ soll stets Prädikator zweiter Stufe (↑3.4.2) und ‘wahr’ nie ›reales‹ Prädikat sein (↑12.). Die ebenfalls mit kontroversenvorbeugender und -behebender Kraft ausgestattete Relativierungsmaxime verlangt demgegenüber, dass man generalisierende Thesen bezüglich gebrauchssprachlicher Gebilde an die einschlägigen Umgebungstypen zurückbindet.

2.4 Vorblick: Wahrheit und Bedeutung

Alle Aufmerksamkeit galt bislang den Redehandlungen, ihren Szenarien und den Sprachen, die als Systeme der solche Handlungen regierenden Regeln aufgefasst werden. Das Bedeutungsthema dürfte im Ausgang von dieser Plattform noch als erreichbar gelten. Wie man indes von diesen Anfängen zu dem unter dem Titel ‘Wahrheit’ stehenden Komplex gelangt, lässt sich für den Einsteiger, dessen ›natürliche‹ Einstellung meist von konkurrierenden Zugangsweisen, insbesondere der gemeinplätzigen realistischen Korrespondenzintuition, geprägt ist, ungleich schwerer einsehen.

Um die vermuteten Verständnishindernisse auszuräumen, ist dem Wahrheitsthema zunächst sein ›Sitz im Leben‹ anzuweisen (2.4.1). Mit den Wahr- und Falschperformationen bzw. den sie leitenden Kriterien wird das zum Gegenstand, was wir im lebens- und sonderweltlichen Vollzug beständig tun bzw. beanspruchen (2.4.2 und 2.4.3). Der Philosoph, der sich diese Praxis als Wahrheitstheoretiker zum Gegenstand macht, vollzieht hingegen Wahr- und Falschprädikationen (2.4.4); die dazu benötigten Prädikatoren stellt er durch Wahr- und Falschheitsdefinitionen bereit (2.4.5). Der exemplarisch vorgeführte (2.4.6) und begrifflich angedeutete (2.4.7) Zusammenhang zwischen Wahrheit und Bedeutung stellt sich so dar, dass die Fixierung der Bedeutung von Ausdrücken und die Spezifizierung der Wahrheitskriterien nur zwei Seiten einer Medaille sind.

2.4.1 Wahrheit: Zum ›Sitz im Leben‹

Menschen bewältigen ihr Leben im Rahmen der Zweck-Mittel-Rationalität. Um die handelnd verfolgten Zwecke zu erreichen, benötigt man Wahrheiten als Orientierungspunkte: Was diesen unerträglichen Lärm macht, ist, so die erste Wahrheit des Tages, der Wecker. Er steht – zweite Wahrheit – auf dem Nachttisch. Mit Knopfdruck – dritte Wahrheit – wäre die Ruhe wiederhergestellt. Eben dieser Zustand – vierte Wahrheit – ist gewünscht. Die Betätigung des einschlägigen Teils beschließt erfolgreich die Handlungssequenz.

Wahrheiten fließen in all unser Handeln ein, nicht nur in das Ausführen, sondern auch in das Unterlassen: Um einer Einladung nicht zu folgen, muss man über Erkenntnisse dahingehend verfügen, Handlungen welcher Art man zu welchem Zeitpunkt unterlassen muss bzw. darf. Dieses Involviertsein von Wahrheiten gilt ferner nicht nur für ein auf Überleben oder besseres Leben zielendes Handeln: Auch zum Vollzug ›destruktiver‹ Akte benötigt der Akteur wahre Überzeugungen: Der beflissene Selbstmörder hatte sich eine falsche Auffassung über die geforderte Dicke des Stricks und sein Gewicht gebildet – und muss nun das unerwünschte Leben fürs erste in Gips fortsetzen, ehe er, besser instruiert, neuerlich zur Selbsttilgung antritt. Die Rede von Zweck und Mittel ist also formal und unterschiebt nicht schon bestimmte materiale Zwecke.

Ü13 Beschreiben oder fingieren Sie gelingende Handlungen und stellen Sie die von den Agenten vorzunehmenden Wahrvollzüge (oder Übernahmen von Wahrvollzügen) heraus! – Beschreiben oder fingieren Sie aufgrund inkorrekter Wahrvollzüge (oder Übernahmen inkorrekter Wahrvollzüge) misslingende Handlungen!

Zwar handeln wir gelegentlich auch erfolgreich, wenn Irrtümer glücklich zusammenspielen: Irrtümlich geht der Reisende davon aus, dass der Zug von Essen nach Greifswald von Gleis 6 (statt von Gleis 9) abfährt; und da er zusätzlich Gleis 6 mit Gleis 9 verwechselt, erreicht er dennoch das Reiseziel. Aber diese Zufälle sind selten und mit Hilfe korrekter Wahrvollzüge erklärbar; und niemand baut darauf sein Handeln. Oft kommen wir auch – aus kontingenten oder strukturellen Gründen – nicht zu den gewünschten Wahrheiten und müssen uns mit Vermutungen und Hypothesen, Prognosen und Retrodiktionen begnügen – aber Wahrheiten würden wir jederzeit diesen schwachen epistemischen Qualifikationen vorziehen (↑13.).

Das Bemühen, Gebilde als wahr zu qualifizieren oder an schon vorgenommenen und in Wissensbestände inkorporierten Wahrqualifikationen im Wege der Information teilzuhaben, entspringt dem Wunsch, zielführend zu handeln. Die ausgedehnte, selbstverständliche und zwanglose Praxis des Wahrvollzugs, erfolge diese in der Alltagssprache oder in einer wissenschaftlichen oder nichtwissenschaftlichen Fachsprache, ist also mit unserem sonstigen Handeln unauflöslich verknüpft (↑16.).

Wie qualifizieren Autoren nun Gebilde als wahr? Sie vollziehen Redehandlungen, indem sie (in welcher Realisierungsform auch immer) Sätze äußern wie etwa ‘Es gilt, dass niemand sein eigener Vater ist’. Als wahr qualifiziert wird dabei die verwendete Aussage. Redehandlungen dieser Art werden als Wahrperformationen angesprochen. Wer hingegen bestreitet, dass es eine größte Primzahl gibt, indem er z.B. den Satz ‘Ich bestreite, dass es eine größte Primzahl gibt’ äußert, klassifiziert die entsprechende Aussage als falsch und vollzieht eine Falschperformation. Die in Lebenswelt und Wissenschaft ständig geübte Praxis der Wahrheits- und Falschheitsetablierung erfolgt im Vollzug von Wahr- und Falschperformationen. Jedermann ist mit diesem Vollzug aus dem Alltag und meist aus einer oder mehreren ›Sonderwelten‹ bekannt. – Mit ‘Wahrperformation’ und ‘Falschperformation’ sind, dies zur terminologischen Ergänzung, in diesem Kontext stets die ganzen Redehandlungen gemeint, und nicht bloß die jeweilige Teilhandlung der Performation.

Wer nicht über Primzahlen oder Verwandtschaftsverhältnisse, Längen, Massen, Gedichte, Geschwüre, Gefühle oder sonst wie Zukömmliches und Abträgliches nachdenkt, sondern Aussagen unter der Rücksicht ihrer korrekten Qualifizierbarkeit als wahr oder falsch, kurz: unter der Rücksicht ihrer Wahrheit und Falschheit, zum Thema macht, der verwendet dazu die Prädikatoren ‘wahr’ und ‘falsch’ und erwähnt die jeweiligen Aussagen durch entsprechende Terme. Wenn der Wahrheitstheoretiker etwa Sätze wie ‘Trifft es zu, dass alle beweisbaren Aussagen wahr sind’ oder ‘Es gilt: Es gibt keine zugleich wahren und falschen Aussagen’ äußert, dann vollzieht er Wahr- bzw. Falschprädikationen. Eine Wahr- bzw. Falschprädikation ist eine Redehandlung, in der ein Autor den Wahr- oder Falschprädikator verwendet; nicht abgezielt wird wiederum auf die innerpropositionale Teilhandlung der Prädikation.

Während alle Mitglieder einer Sprachgemeinschaft beständig Wahr- und Falschperformationen vollziehen und so an der Praxis der Wahrheits- und Falschheitsetablierung im Sinne der Arbeitsteilung mehr oder minder partizipieren, erfolgt im Vollzug von Wahr- und Falschprädikationen die Thematisierung eben dieser Praxis. Der Wahrheitsvollzug wird von allen Autoren einer Sprache geübt; das Nachdenken über dessen Bedingungen, Kriterien usf. ist eine Angelegenheit von Spezialisten.

Die – um eine ältere Terminologie aufzugreifen – alethische Praxis und ihre alethiologische Begleitreflexion werden im Folgenden provisorisch betrachtet. – Das Verhältnis zwischen beiden Vollzügen ist im übrigen vollständig analog zu der Beziehung zwischen Schluss- bzw. Folgerungspraxis und Schluss- bzw. Folgerungstheorie bzw. logischer Begleitreflexion: Die Autoren jeder realistischen Gebrauchssprache ziehen beständig Schlüsse, indem sie Performatoren wie etwa ‘Also’, ‘Folglich’ und die zugehörigen Aussagen verwenden (↑1.1.2). Wenn hingegen der Logiker – seinem Spezialinteresse folgend – die Schlusspraxis zum

Thema macht, dann benutzt er den Folgerungsprädikator und Terme für Aussagen und Aussagenmengen.

Die Zwecksetzung ist in beiden Fällen dieselbe: Der Alethiologe bzw. der Logiker will sich den ›Raum‹ alethischer und inferenzieller Redehandlungsmöglichkeit als solchen und in seinen Bezügen zu benachbarten Handlungskorridoren überschaubar machen, um so im Scheiternsfalle zu intervenieren, mögliches Scheitern zu verhindern und zur Optimierung dieser Vollzüge beizutragen. Diese Redeweise präsupponiert, dass die betrachteten Redehandlungen wie alle übrigen Vollzüge prinzipiell scheiternsanfällig sind, und de facto auch scheitern. Die alethische wie die logische – wie generell jede (erkenntnis)philosophische – Begleitreflexion ist mithin auf den Zweck der Stützung des alethischen, logischen und allgemein kognitiven Handelns hingeordnet (↑16.).

2.4.2 Wahr- und Falschperformation

Die Wahr- bzw. Falschperformationen zählen zu den Redehandlungen, genauer zu den kognitiven Redehandlungen bzw. Erkenntnishandlungen. Im Vorgriff auf eine später im Einzelnen erläuterte Kartierung der Erkenntnishandlungen (↑13.) ist festzuhalten: Wahr- und Falschperformationen bilden die affirmativen und negativen Vollformen des Erkennens bzw. der epistemisch stark qualifizierenden Erkenntnishandlungen. Von den Vollformen abgehoben sind die Vorformen bzw. die epistemisch schwach qualifizierenden, kognitiven Redehandlungen: Zu den affirmativen Vorformen zählt etwa das Vermuten, das Prognostizieren und Retrodizieren; das schwache Zweifeln und das hypothetische Verwerfen sind Beispiele für die negativen Vorformen.

Vor- und Vollformen bilden gemeinsam die epistemisch qualifizierenden oder substantiellen Erkenntnishandlungen; diesen stehen die subsidiären Akte, die kognitiven Hilfshandlungen, wie etwa das Folgern, Annehmen und Anziehen gegenüber. Substantielle und subsidiäre Erkenntnishandlungen sind zu den nicht-interrogativen kognitiven Redehandlungen zusammengeschlossen; ihnen stehen die interrogativen Erkenntnishandlungen, die (Entscheidungs- und Ergänzungs)Fragen gegenüber.

Mit der Verortung der Wahr- und Falschperformationen in den Erkenntnishandlungen, die ihrerseits als Gattung der Redehandlungen geführt werden, liegt auf der Hand, dass man sich mit generellen Überlegungen zu Redehandlungen auch einen Zugang zur Wahrheitsthematik verschafft. Diese Zuwegung ist weiter plausibel zu machen durch die Betrachtung einiger Beispiele.

Da ist zunächst die assertorische Wahrperformation ›schlechthin‹, das Behaupten. Ein Beispiel ist unter [1]a), die dazugehörige Regel unter [7]a) notiert. Sodann ist an das Setzen-als-Prinzip, das axiomatische oder kategorische Setzen bzw. das Bedeutungspostulieren zu erinnern, das dazu dient, Anfänge für das Beweisen und Widerlegen zu schaffen. Ein Beispiel für eine solche Redehandlung aus dem Umfeld der Arithmetik:

[10] Ich-setze-als-Axiom: Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.

Eine aus konstruktivem Geist geborene Regel zu dieser Redehandlung könnte so lauten:

[11] Wenn sich eine Aussage Γ als Stabilisierung lebensweltlich praktizierter Zählhandlungen auszeichnen lässt, dann darf man Γ als Axiom setzen.

Eine weitere Wahrperformation, typisch für synthetische und untypisch für analytische Sprachen, sind die Konstatierungen: Zunächst zwei Regeln:

[12] Wenn man zwei durch θ_1 und θ_2 bezeichnete Körper auf je eine Schale einer ungestörten Balkenwaage legt und die Horizontalstellung eintritt, dann darf man eine Aussage der Art: 'θ_l gewichtsgleich θ_2' konstatieren.

[13] Wenn sich ein durch θ bezeichneter Körper von einem Diamant nicht ritzen lässt, dann darf man eine Aussage der Art: 'θ ist hart' konstatieren.

Die zuletzt spezifizierten Vollzüge sind für Schreibtischtäter ungeeignet: Nichtdiskursive Zubringerhandlungen, das Hantieren mit Objekten, der Umgang mit Geräten, sind erforderlich und gehen in die abschließende Redehandlung ein. – Weitere Beispiele für alethische Vollzüge sind etwa das (objektsprachliche) Definieren, das starke Zustimmen, das Setzen-Als-Gesetz.

Bezüglich der Falschperformationen, erinnert sei an das Bestreiten, ist lediglich eine Auffälligkeit mit einer Erklärung zu versehen. Das zunächst Unerwartete und damit Erklärungsbedürftige besteht darin, dass es bedeutend weniger Falsch- als Wahrperformationen gibt. Die Erklärung: Das ›negative Moment‹ kann auch durch aussageninterne Operatoren wie Negator oder negative Prädikationsoperatoren (↑3.2.1 und 3.2.5) übernommen werden. Da man diese ohnedies (in realistischen Sprachen) benötigt, werden negative Redeformen meist verzichtbar.

Die Wahr-/Falschvollzüge wirken mit den übrigen Erkenntnishandlungen zusammen: Unter den Erkenntnishandlungen herrschen durchgehend kooperative Verhältnisse: Die diversen Vollzüge greifen ineinander, bilden ein Ensemble; und genau diesen kooperativen Rückraum organisieren bzw. dokumentieren auch die Redehandlungsregeln.

Beispiele: Um Aussagen behaupten oder bestreiten zu können, müssen Beweise oder Widerlegungen vorgelegt werden, also eine Reihe anderer Erkenntnishandlungen, Annahmen, Folgerungen, Anziehungen, gezielt vollzogen werden. Um Fragen aufzuwerfen, müssen zuvor ihre Voraussetzungen, also weitere Aussagen, als wahr klassifiziert worden sein. Die Leserin inspiziere unter dieser Rücksicht die unter [7] aufgelisteten Regeln.

2.4.3 Wahr- und Falschheitskriterien

Wenn die Vollformen des Erkennens als Wahr- und Falschperformationen angesprochen werden, dann verdienen die sie leitenden Regeln den Titel von Wahrheits- und Falschheitsregeln. Und sie stellen genau das dar, was eine breite und wohlreputierte Tradition neuzeitlicher Erkenntnisphilosophie als Wahrheits-/Falschheitskriterien anspricht. Erstens: In den Wahrheitsregeln dokumentiert sich die Pluralität und Verschiedenheit des Erkenntnisgeschäfts. Jene der Arithmetik dürfen und sollen von denen der Vampirologie, Theologie, Mineralogie und Messkunst verschieden sein; und die Regeln für eine Aussagensorte müssen auf deren Spezialität Bezug nehmen.

Zweitens: Wahrheitsregeln leiten das Handeln des wahrklassifizierenden Autors an, ohne dass der Autor sie kennen muss; er muss tun können, was das jeweilige Kriterium verlangt, ohne imstande sein zu müssen, die je veranschlagten Kriterien auch formulieren oder gar rechtfertigen zu können. – Drittens: Wahrheitsregeln dienen der Ex-post-Beurteilung der ausgeführten Handlung bzw. des erzielten Resultats. Diese ist insbesondere dann angesagt, wenn Zweifel an der Regeltreue der Exekution laut werden.

Da über Kriterien der Wahrheit und Falschheit häufig und zum Schaden der jeweiligen Erörterungen ohne exemplarische Fixierung gehandelt wird, sollen ausdrücklich schon notierte Beispiele in Erinnerung gerufen werden. Die Bestreitungsregel unter [7]c) ist eine Falschheitsregel, die Behauptungsregel unter [7]a), die Regel für das axiomatische Setzen unter [11] und die Konstatierungsregeln [12] und [13] sind Wahrheitsregeln alias -kriterien.

Die vorgenommene Gleichsetzung erlaubt einen doppelten Wissenstransfer: Was sprach- und handlungsphilosophisch von Regeln und Redehandlungen, von Regeln und Agenten gewusst wird, gilt auch von alethischen Kriterien und kriterientreuen Akten, von Kriterien und kriteriengemäß Agierenden. Und was die erkenntnisphilosophische Tradition von Kriterien und kriterientreuen Akten usf. festhält, lässt sich für die Erörterung von Redehandlungen und Regeln usf. nutzbar machen.

2.4.4 Wahr- und Falschprädikation

In Alltag und Wissenschaft werden Aussagen durch Wahr- und Falschperformationen als wahr oder falsch qualifiziert. Erfolgt dies kriteriengemäß, ist die Wahr- resp. Falschperformation korrekt, sonst inkorrekt. Dazu benötigt man ersichtlich weder den Wahr- noch den Falschprädikator. Beide Redeteile sind – für diesen Zweck – nicht nur redundant, sondern sogar untauglich (↑13.). Mehr noch: Man benötigt – zu diesem Zweck – überhaupt keinen Redeteil, in dem die Worte ‘wahr’ oder ‘falsch’ als Teilausdrücke oder Ausdrucksteile vorkommen; man vergleiche die exemplarischen Wahrperformationen unter [1]a) und [9]. Wozu sollen dann aber Wahr- und Falschprädikatoren überhaupt gut sein?

Ein Blick auf das Folgern hilft weiter. Zum Vollzug von Folgerungen ist der Folgerungsprädikator ‘..ist eine Folgerung aus..’ nicht nur redundant, sondern sogar ungeeignet. Wir haben aber nicht nur ein Interesse daran, aus bestimmten Aussagen andere Aussagen zu folgern, sondern wir wollen uns auch über die Folgerungsverhältnisse ganz allgemein verständigen und zu Einsichten kommen wie etwa der, dass jede Aussage (unter einer bestimmten Logik) Konsequenz einer inkonsistenten Aussagenmenge ist – und genau dazu wird der Folgerungsprädikator benötigt! Im Bild: Der Folgerungsprädikator dient dazu, auf den ganzen Folgerungsraum, d.h. das Gesamtfeld möglicher Folgerungsverhältnisse, zuzugreifen.

Nun sind die Prädikatoren ‘..ist wahr’ und ‘..ist falsch’ nicht genau einer Erkenntnishandlung zugeordnet, sondern überdecken mehrere. Der Ansatz aber bleibt: Wir benötigen diese Prädikatoren, um über (alle und nur) die Aussagen zu sprechen, die gemäß den Wahrheits- oder Falschheitskriterien in entsprechenden Handlungen als wahr oder falsch hingestellt werden können. Es ist das Interesse am Gesamtfeld möglicher Wahr- und Falschklassifikationen, an den allgemeinen Wahrheits- und Falschheitsverhältnissen, die diese Vokabel zu unseren sonstigen Redemitteln hinzuzusetzen veranlasst. Und Autoren verwenden diese Prädikatoren, wenn sie etwa in einer Analysesprache folgende Sätze äußern:

[14] a) Es-gilt: Es gibt keine zugleich wahren und falschen Aussagen.

b) Trifft-es-zu, dass Euklids Theorem wahr ist?

Den Unterschied zwischen <u>Wahrperformationen</u> und <u>Wahrprädikationen</u> sollte man sich stets vor Augen führen. Dazu Ziffer [15].

[15] a) Theorem: Zu jeder Zahl gibt es eine größere Primzahl.

b) Trifft es zu, dass Euklids Theorem wahr ist?

c) Es ist falsch, dass alle wahren Aussagen widerlegbar sind.

Mit a) wird eine korrekte Wahrperformation in der arithmetischen Sprache vollzogen; von Wahrprädikation keine Spur. Mit b) wird eine interrogative Handlung in der Analysesprache zur arithmetischen Sprache vollzogen; von Wahrperformation keine Spur. Allerdings liegt eine

Wahrprädikation vor: Wahrheit wird prädiziert von Euklids Theorem, das zu diesem Zwecke erwähnt (und nicht verwendet) wird. Mit c) schließlich wird in der Analysesprache eine Falschperformation vollzogen, die zugleich eine Wahrprädikation ist.

Hier ist ein Caveat angebracht: Gebrauchssprachliche Äußerungen wie ‘Das ist wahr’ oder etwa ‘Euklids Theorem ist wahr’ sind ganz vertrackte Gebilde. Wird hier eine Zustimmung vollzogen oder von einer Aussage Wahrheit prädiziert? Will man solche Fragen entscheiden, dann hat man ausführliche Umgebungsbetrachtungen vorzunehmen bzw. Umgebungen zu fingieren (↑2.3.5)! Sie sind nicht geeignet als Basis für schnelle Schlüsse und Schüsse, betreffend die Natur von Wahrheit und die Zwecke und Grenzen von Wahrheitskonzeptionen (↑13.).

2.4.5 Wahr- und Falschheitsdefinition

Was sind nun Definitionen von Wahrheit und Falschheit? Im weitesten Sinne genommen handelt es sich um Bereitstellungen der Prädikatoren ‘wahr’ und ‘falsch’ aller Art: ‘Definition’ wird an dieser Stelle also im weiten Sinne der älteren Methodologie verstanden (↑10.). Damit werden die Wahr- und Falsch<u>prädikationen</u> ermöglicht und beurteilbar. Demgegenüber werden – zur Erinnerung – durch die Wahrheitskriterien alias -regeln die Wahr-/Falsch<u>performationen</u> ermöglicht und beurteilbar. In der Regel handelt es sich um explikative Einführungen. Anschlusskontroversen sind demzufolge typische Explikationsstreite. Wahrheitsdefinitionen von einiger begrifflicher Schärfe beziehen sich auf explizit konstituierte Sprachen oder auf zu diesem Zweck erschlossene ›interessante‹, d.h. unter einer bestimmten Aufgabenstellung interessierende, Fragmente von Gebrauchssprachen.

Wahrheitsdefinitionen sind von Wahrheitskriterien wohlunterschieden: Erstere dienen der Bereitstellung eines Wahrheitsprädikators – sie sagen uns, was es heißt, dass eine Aussage wahr ist. Letztere reglementieren die Wahrperformationen – sie sagen uns, wie wir Wahrheiten etablieren; analoges gilt für die Falschheitsseite.

Die <u>Wahrheitstheorie</u> oder – um bei der Reanimierung des alten Ausdrucks zu bleiben – die <u>Alethiologie</u> bezieht sich in erschließender, konstruierender, analysierender und rechtfertigender Absicht auf Wahr- und Falschperformationen. Sie ist damit Teil der Erkenntnisphilosophie, die unter den genannten Rücksichten auf alle Erkenntnishandlungen zielt.

Wenn oben dargelegt worden ist, dass die Praxis der Wahrheits- und Falschheitsetablierung dem Handeln dient, dem weiteren Redehandeln wie auch den sonstigen Vollzügen, dann stellt sich nun die Frage, wem die Wahrprädikation dient. Um die schon gegebene Antwort zu wiederholen: Wie alles Handeln ist auch die Wahr- und Falschperformation scheiternsanfällig:

Um Scheitern zu verhindern und nach dem Scheitern Hilfe für den neu ansetzenden Vollzug zu geben, wird die Möglichkeit zur Wahr- und Falschprädikation benötigt.

2.4.6 Wahrheit und Bedeutung: Exemplarisches

Abschließend ist der Blick auf das Verhältnis von Wahrheit und Bedeutung zu wenden. Die Überlegung erfolgt zunächst an Beispielen. Die unter [12] notierte Regel bindet die Feststellung der Gewichtsgleichheit zweier Körper an den Umgang mit einer ungestörten Balkenwaage. Es handelt sich – ganz allgemein – um eine Redehandlungsregel. Genauer liegt eine Regel für eine kognitive Redehandlung vor, eine Erkenntnisregel. Noch spezifischer: Eine Regel für eine affirmative Vollform, eine Regel für eine Wahrperformation, ein Wahrheitskriterium.

Die Regel spezifiziert in ihrem Wenn-Teil, was ein Autor der jeweiligen Sprache tun muss, um eine Aussage als wahr zu klassifizieren, deren Hauptoperator das Prädikat '..gewichtsgleich..' ist. Sie spezifiziert also die wahrheitsqualifizierende Prozedur für alle Aussagen mit diesem Hauptoperator.

Damit wird in einem – und darauf kommt es jetzt an! – die Verwendung des Konstatierungsperformators und des Prädikators in Teilen umrissen. Da damit zugleich der korrekte Umgang mit verwendungsgleichen Redeteilen umrissen wäre, ist die Redeweise berechtigt, dass die Bedeutung des Konstatierungsperformators und des Prädikators – wenigstens teilweise – festgesetzt wird.

Für das Beispiel und alle ähnlich gelagerten gilt: Bedeutungsfixierung und Etablierung der wahrheitsqualifizierenden Prozedur sind eins, oder besser, zwei Seiten einer Medaille, zwei Zugriffe auf eine Regel, zwei Weisen, ihre Leistung zu beleuchten. – Und für die Ausführungsseite gilt: Die Wahrperformation wird korrekt vollzogen, die Exekution der wahrqualifizierenden Prozedur wird korrekt inszeniert, wenn sie bedeutungsgemäß vollzogen wird.

Weitere Konstatierungsregeln etablieren diesen Typus der empirischen Wahrperformation und damit die Bedeutung des Performators. Die korrekt konstatierbaren Aussagen sind die Empireme. Weitere Regeln oder Prinzipien fixieren die weitere - dann strukturelle – Bedeutung des Prädikats '..ist gewichtsgleich..' im Sinne einer Gleichheit. Die Balkenwaage hat wesentlich mit der Bedeutung des Prädikators und dem Wahrheitsstatus der Aussagen zu tun, in denen dieser Redeteil Hauptoperator (↑3.3.1) ist. Wer die Idee ausarbeiten möchte, dass unser Erkennen „der Realität verantwortlich" ist, betritt mit der Thematisierung der Konstatierungsregeln einschlägiges Terrain.

Man betrachte als zweites Beispiel für ein Wahrheitskriterium die Behauptungsregel unter der Ziffer [7]a): Korrekt behauptet ist eine Aussage, wenn es eine Begründung für sie gibt. Direkt in seiner Bedeutung spezifiziert ist hier nur der Behauptungsperformator. Durch den Rekurs auf Begründungen wird jedoch auf andere Redehandlungen rekurriert, deren Regeln wiederum ausführlichere Einführungsleistungen erbringen. Als da sind: Das Setzen als Prinzip, um den Begründungen Anfänge zu verschaffen, und das Folgern, das die als Prinzip gesetzten Anfänge auszubeuten erlaubt. Für das Setzen als Prinzip ist auf [10] und [11] zu verweisen; für das Folgern zunächst als Beispiel die Regel der Partikularquantoreinführung:

[16] Wenn man das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, dann darf man die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Intuitiv: Hat ein bestimmter Gegenstand eine Eigenschaft, dann darf man darauf schließen, dass wenigstens ein Gegenstand diese Eigenschaft hat (↑4.). Diese Tafel ist rot; also ist wenigstens ein Gegenstand rot. In Teilen eingerichtet wird die Folgerungshandlung und die Teilhandlung des Partikularquantifizierens: In seiner Bedeutung in Teilen spezifiziert wird damit der Folgerungsperformator und der Partikularquantor. Das geschieht dadurch, dass die diskursive Lage geschildert wird, die gegeben sein muss, damit die Folgerung einer Aussage vollzogen werden darf, deren Hauptoperator der Partikularquantor ist. Andere Folgerungsregeln reglementieren den Umgang mit anderen Junktoren, Prädikatoren und Quantifikatoren – und damit zugleich die korrekte Verwendung von Variablen und Parametern (↑4.).

Die Folgerungsregeln etablieren Bedeutungen, ohne selbst Wahrheitsregeln zu sein; sie sind allerdings unverzichtbar für die Behauptungsregel. Sie richten also die mit dem Behaupten vollzogene Wahrperformation indirekt ein, indem sie das Begründen und damit das Behaupten ermöglichen. Die Folgerungsregeln leisten mit ihrer Bedeutungsfestsetzung also einen indirekten Beitrag zur Einrichtung einer wahrheitsqualifizierenden Prozedur.

Am Rande bemerkt: Folgern und Behaupten sind Prototypen diskursiver Redehandlungen: Ihre Zubringervollzüge sind selbst Redehandlungen. Das Konstatieren ist der Prototyp einer nichtdiskursiven, eben empirischen Redehandlung: Sie verlangt Zubringervollzüge, die nicht selbst Redehandlungen sind: Bedeutung und Wahrheit sind an das Agieren von Autoren ›in dieser Welt‹ gebunden, an Wahrnehmungs- und Herstellungshandlungen aller Art und später an die Benutzung von Messinstrumenten und sonstigem Gerät. Dieses – im Beispiel: die Balkenwaage – stellt sich damit als Wahrheits- und Bedeutungsgerät oder – man denke an den Diamant in [12] – als Wahrheits- und Bedeutungsutensil dar. Das Nachdenken über die Herstellung und Gestaltung von derlei Gerät zählt naheliegenderweise zum Kern der auf die

Empirie bezogenen Abteilung der Alethiologie; und auch wer ein derartiges ›alethosemantisches‹ Gerät herstellt, ermöglicht alethische Vollzüge (↑15.).

Bei aller Verschiedenheit der in den Regelantezedentia spezifizierten Prozeduren gilt: Gemeinsam ist die Form der Regel als wahrheitsetablierende und bedeutungsverleihende Instanz; damit ist nicht behauptet, dass die Bedeutungsfixierung ausschließlich über die Redehandlungsregeln zustande kommt (↑10.).

2.4.7 Wahrheit und Bedeutung: Begriffliches

In – an dieser Stelle – kühner Extrapolation der Beispielbasis lässt sich als These zum Verhältnis von Wahrheit und Bedeutung folgendes Provisorium formulieren. Negativ: Weder stellt sich die Wahrheitsfrage dann, wenn vorausgehend alle Bedeutungsprobleme gelöst sind, noch lösen sich alle Bedeutungsfragen, wenn zuvor eine Wahrheitscharakterisierung vorliegt. – Positiv: Indem man Ausdrücken Bedeutung verleiht, richtet man direkt oder indirekt Formen der Wahrperformation ein, etabliert Wahrheitskriterien, wahrheitsqualifizierende Prozeduren; und indem man die Wahrperformation gestaltet, setzt man die Bedeutung von Ausdrücken fest. – Alle Aufmerksamkeit gilt dann den bedeutungsfixierenden, sprich wahrheitsqualifizierenden, Prozeduren.

Erst dieser Zusammenhang von Wahrheit und Bedeutung lässt zwei häufig vorgetragene, aber selten gerechtfertigte Forderungen als einsichtig erscheinen. Erstens: Warum wird, insbesondere im Dissensfall, gefordert, dass die je strittigen Eigenterme ›präzisiert‹ werden, d.h., dass eine Einführung, eine förmliche Bedeutungsfixierung, vorgenommen oder eine bereits vorliegende verbessert wird? – Antwort: Weil sich mit der Bedeutungsschärfung die Chancen für den konsenten Wahrheitsentscheid erhöhen! Umgekehrt: Wäre die Bedeutungsetablierung oder -schärfung für den Wahrheitsstatus folgenlos, so könnte sie ohne Verlust unterbleiben.

Zweitens: Warum befragt man, wenn über den Wahrheitsstatus einer Aussage zu befinden ist, etwa ob a schwerer ist als b, nicht die Sterne, warum geht man nicht zum Spezialisten für Vogelflug oder Kaffeesatzlesen oder schließt sich sonst einer Option aus dem kaum überschaubaren Spektrum des anything goes an? – Antwort: Weil die dort angebotenen Prozeduren ohne jede Verbindung zur Bedeutung und damit zur wahrheitsqualifizierenden Prozedur der jeweils in Rede stehenden Aussage sind: Die Entscheidung, ob a schwerer b (ist), wird – andere bedeutungstreue Möglichkeiten hier ausgeklammert – im Wege des vorgeschriebenen Hantierens mit einer ungestörten Balkenwaage getroffen: Denn danach zu fragen, ob a schwerer ist als b, besagt eben, nach dem Ausgang der erwähnten Wiegeprozedur zu fragen.

Unter der hier angedeuteten und sukzessive auszuführenden Organisation des Wahrheits- und Bedeutungsthemas lässt sich also abschließend und generisch folgende zentrale Aufgabe der Alethiologie (und Bedeutungslehre) formulieren: Wie sollen wir schon gegebene Bedeutungsfixierungen und damit ipso facto wahrqualifzierende Prozeduren beurteilen und gegebenenfalls reformieren? Wie sollen wir neu vorzunehmende gestalten und rechtfertigen?

2.5. Literatur

Dummett, M.: The Logical Basis of Metaphysics, London 1991.

Dieses anspruchsvolle Werk ist erhellend für den Hintergrund der entfalteten sprachphilosophisch-logischen Position. Es ist allerdings nur für das fortgeschrittene Studienstadium zu empfehlen. Die Einführung, „Metaphysical Disputes over Realism" schildert eindrücklich den „linguistic turn" in seiner methodologischen Lesart.

Kutschera, F.v.: Sprachphilosophie; München 1975^2.

Schon ältere, aber grundsolide Information über sprachphilosophische Themen und Positionen. Die in diesem Kapitel (in Teilen) dienlich gemachte Sprechakttheorie wird bei Kutschera unter 2.4.5 besprochen. Ebendort und in den weiteren Angaben zu diesem Ansatz finden sich auch die Angaben zu den Werken der „Klassiker" Austin und Searle. – Die Sprechakttheorie findet auch in Stegmüller: Hauptströmungen II, Kap. I.3. Darstellung.

Lorenz, K. et al. (Hgg.): Sprachphilosophie. Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung, 2 Halbbände (durchgehende Paginierung); Berlin/ New York 1992 und 1996.

Das Handbuch der Sprachphilosophie, auf dessen Beiträge in der Folge entsprechend häufig verwiesen wird. Die hier entfaltete Position ist in dem Artikel „Der Streit um die Bedeutungstheorien" (S. 964-989) dokumentiert und von dem realistischen Ansatz abgehoben.

Runggaldier, E.: Analytische Sprachphilosophie (Grundkurs Philosophie 11); Stuttgart/ Berlin/Köln 1990.

Enthält zuverlässige Darstellung analytischer Positionen und Themen. Einschlägig bezüglich des vorliegenden Kapitels ist der Teil C.

Savigny, E.v.: Die Philosophie der normalen Sprache. Eine kritische Einführung in die „ordinary language philosophy"; Frankfurt/Main 1974.

Kapitel 3 schildert die Sprechakttheorie und Kapitel 1 ist eine gerade für den Einsteiger hilfreiche Darstellung der Spätphilosophie Wittgensteins. Insoweit Sprechakttheorie und Gebrauchsgedanken im vorliegenden Text (unter Hinzuziehung weiterer Elemente) verbunden sind, kann der Leser doppelt profitieren. Übrigens: Die Lektüre ist passagenweise unterhaltsam.

Schneider, H.J.: Die sprachphilosophischen Annahmen der Sprechakttheorie; in: Lorenz, K. et al. (Hg.): Sprachphilosophie. Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung, 1. Halbband; Berlin/New York 1992, S. 761-775.

Schneider entwickelt eine Darstellung der Sprechakttheorie, die deren (hier vermiedenen) realistische Annahmen und Unterstellungen freilegt und so den Weg zur Verbindung von Sprechakttheorie und Gebrauchskonzeption öffnet.

Siegwart, G.: Vorfragen zur Wahrheit. Ein Traktat über kognitive Sprachen; München 1996.

Bietet die systematische Ausarbeitung des philosophischen Hintergrunds der hier angebotenen Denkwerkzeuge und versucht teilweise gleichzeitig historisch-kritische Auseinandersetzungen. Für die Thematik dieses Kapitels sind v.a. die Teile B. und C. einschlägig.

3. Die Rationale Grammatik 80

There can be no analysis of inference
without a prior analysis of the structure of statements
that can serve as premises and conclusions.
Michael Dummett

3. Die Rationale Grammatik

Sprachen stellen sich nach den bisherigen Ausführungen als Regelwerke für Redehandlungen dar (↑2.2). Die Regeln spezifizieren, unter welchen Bedingungen Autoren welche Redehandlungen vollziehen dürfen oder sollen. Autoren vollziehen in einer Sprache Redehandlungen, indem sie Sätze dieser Sprache äußern. Sätze ergeben sich aus der Anwendung eines Performators auf eine Aussage. – Aus welchen kleineren und kleinsten Bausteinen sind die Aussagen einer Sprache nach welchem Bauprinzip zusammengesetzt? Wie gelangt man überhaupt zu Kategorien, die eine Sortierung der Redemittel erlauben? Welches sind die mit dieser Sortierung verfolgten Zwecke? Gibt es nur ein oder aber mehrere Sortierungsraster und welches ist mit welcher Rechtfertigung in einer konkreten Problemsituation zu veranschlagen?

Einige dieser Fragen werden bearbeitet; für die Beantwortung der verbleibenden, die der philosophischen Hauptschule angehören, sind erste Vorkehrungen zu treffen. Zunächst ist die Rationale oder Logische Grammatik aus dem reichen Angebot an kategorialen Rahmen auszuzeichnen (3.1). Sodann wird der für die Anwendung wichtigste und daher auch am besten untersuchte Typus, die Standardgrammatik erster Stufe, im Einzelnen dargelegt (3.2). Erweiterungen der Standardgrammatik, Ergänzungen um ein allgemeines Prinzip und alternative Vorschläge sowie Vertiefungen bezüglich des Gewinns grammatischer Kategorien bilden den dritten Schritt (3.3). Abschließend wird unter dem Titel ‘Grammatischer Instrumentalismus’ eine Einsatzstrategie grammatischer Kategorien im Umgang mit gebrauchssprachlichen Verlautbarungen empfohlen (3.4). Endlich sind Literaturempfehlungen auszusprechen (3.5). Im ersten Durchgang kann die Bearbeitung nach 3.3.1, der Erörterung des Funktionalitätsprinzips, beendet werden. Die unter 3.3.2 verhandelte Erweiterung von Termquantoren und Quantortermen ist im Zuge der Darlegung der kennzeichnenden Nomination (↑7.) einzubeziehen und wird auch bei der Konstruktion einer Klassensprache (↑14.) benötigt.

3.1 Zur Auszeichnung der Rationalen Grammatik

Raster zur Sortierung von Redeteilen und zur Bestimmung ihres Zusammenhangs werden seit alters her in verschiedenen mit der Sprache befassten Disziplinen ausgearbeitet. Jedermann und jederfrau (zumindest im Adressatenkreis) geläufig, da im elementaren Sprachunterricht vermittelt und beim Erwerb von Fremdsprachen benutzt und vertieft, ist die <u>traditionelle Grammatik</u> mit ihren Unterscheidungen von Wortarten (z.B. Adjektiv, Adverb, Substantiv, Artikel usf.) und Satzfunktionen (z.B. Subjekt, Prädikat, direktes und indirektes Objekt usf.). Vornehmlich mit Blick auf die Erklärung des Spracherwerbs und – damit verbunden – auf die Fähigkeit zur Erzeugung und zum Verstehen neuer Ausdrucksverknüpfungen sind innerhalb der Linguistik in den letzten Jahrzehnten eine ganze Reihe grammatischer Entwürfe wie die <u>generative</u> und die <u>transformationelle Grammatik</u> erarbeitet worden.

Die im Folgenden skizzierten kategorialen Rahmen verdanken sich dem Zweck, die Praxis und die Theorie des korrekten Folgerns und des korrekten Definierens/Einführens von Ausdrücken in detaillierter und überprüfbarer Weise zu entwickeln. Mittelbar dient dieses Kategoriengefüge aufgrund der Stellung der genannten Redehandlungen im Ensemble der Erkenntnisvollzüge der Gestaltung und Analyse des korrekten Erkennens überhaupt. Aus diesem Grund legt sich die Bezeichnung ‘<u>Rationale Grammatik</u>’ (oder auch ‘Logische Grammatik’) nahe. Damit soll freilich nicht insinuiert werden, andere Grammatiken, z.B. die oben erwähnten, seien in irgendeinem Sinne irrational oder unlogisch; sie nehmen einfach andere Aufgaben wahr.

Den auch im Slogan dieses Kapitels behaupteten Zusammenhang zwischen dem Folgerungskonzept und den grammatischen Kategorien soll eine Beispielbetrachtung verdeutlichen: Der ›Übergang vom Allgemeinen zum Einzelnen‹ ist ein häufig vollzogener und thematisierter Schluss. Die entsprechende Regel könnte in nullter Näherung und im Jargon traditioneller Philosophie etwa so lauten:

[1] Vom Allgemeinen darf man zum Einzelnen übergehen.

Die Handlung des Übergehens, des Gehens von..zu.., des discurrere, des Schließens bzw. Folgerns, wird vollzogen, indem ein passender Folgerungssatz geäußert wird; gefolgert wird dabei gerade die Aussage des geäußerten Satzes. ›Das Einzelne‹ ist mithin eine Aussage, und zwar eine solche, die dort über Einzelnes spricht, wo die Prämisse allgemein gehalten ist. Ebenso ist ›das Allgemeine‹ keine mysteriöse Größe, sondern eine Aussage einer bestimmten Sorte, eine All(gemein)- oder Universalaussage. Spricht man die folgerbare Aussage vorläufig als Spezialisierung der Universalaussage an und stellt man überdies in Rechnung, dass die Universalaussage – in welcher Weise auch immer – in einem Diskurs schon verfügbar sein muss, dann bietet sich folgende Formulierung an:

[1]* Wenn man eine Universalaussage gewonnen hat, darf man jede ihrer Spezialisierungen folgern.

Was genau sind Universalaussagen? Aus Sicht der Logischen Grammatik entstehen diese dadurch, dass ein Universalquantor, ein Gebilde der Form ‘für alle ξ‘, auf eine Formel Δ, in der höchstens ξ frei ist, angewendet wird; deshalb spricht man auch von Universalquantifikationen. Spezialisierungen werden gewonnen, wenn geschlossene Terme θ in Δ an die Stelle der Variablen ξ treten, für diese substituiert werden. Was aber sind Formeln, was geschlossene Terme, was ist mit der Wendung ‘an die Stelle von etwas treten’ bzw. ‘substituieren’ gemeint? – Zunächst die abschließende ›kanonische‹ Formulierung der Regel, die üblicherweise und deshalb auch im Folgenden als Universal(quantor)beseitigung (UB) geführt wird; die grammatischen Termini sind unterstrichen:

[1]** Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ξ gewonnen hat und θ ein geschlossener Term ist, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ für ξ in Δ folgern.

Wählt man ‘Also___’ als Folgerungsperformator und deutet man die möglichen Prämissenredehandlungen, das Annehmen, Anziehen oder Folgern durch das Zeichen 'Ξ' an, dann liest sich das Schulbeispiel für die in [1] bis [1]** beschriebene Schlussform so:

[2] Ξ Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich

Also Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich

Dabei instanziiert ‘Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich’ die Formel Δ, ‘*x*’ korrespondiert ξ, und ‘Für alle *x* gilt: Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich’ ist die Universalquantifikation von ‘Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich’ bzgl. ‘*x*’. ‘Sokrates’ instanziiert den geschlossenen Term θ und ‘Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich’ ist das Ergebnis der Substitution von ‘Sokrates’ für ‘*x*’ in ‘Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich’.

Die Ausführungen dieses Kapitels dienen dazu, die bei der Formulierung von Folgerungs-, Einführungs- und anderen Redehandlungsregeln und bei zugeordneten analysierenden

Unternehmungen benötigte grammatische Begrifflichkeit exemplarisch und (im Ansatz) begrifflich darzutun und so die Redehandlungsregeln von der grammatischen Seite her zugänglich zu machen.

Schon jetzt ist jedoch auf das Vorordnungsverhältnis zwischen Grammatik und Performatorik abzustellen: Wenn man eine Sprache konstruiert, hat man zunächst ihre Grammatik und auf dieser Basis ihre Performatorik zu konstruieren; Analoges für die Spracherschließung. Für die Sprachkonstruktion ausgeführt: Zunächst ist anzugeben, welches die atomaren Kategorien einer Sprache sind und welche Ausdrücke als Mitglieder vorgesehen sind. Sodann ist anzugeben, wie sich aus den atomaren Gebilden die molekularen ergeben. Schließlich sind die Hilfsbegriffe und Operationen zu charakterisieren, die außerdem zur Regelformulierung benötigt werden (↑5, 6, 14, 15.).

Die Beherrschung der grammatischen Kategorialität bildet die Voraussetzung für die (reflektierte) korrekte Ausführung, Kontrolle und Beurteilung des Schließens und Einführens, damit aber für die korrekte Ausführung, Kontrolle und Beurteilung von Redesequenzen im Allgemeinen und Diskursen im Besonderen. Im Sinne einer raschen Aneignung empfiehlt es sich dringend, über die Übungen hinaus die allgemeinen Erläuterungen mit selbst gebildeten Beispielen aus der lebensweltlichen Gebrauchssprache, aus den Wissenschaftssprachen und insbesondere aus der philosophischen Sprache zu versehen.

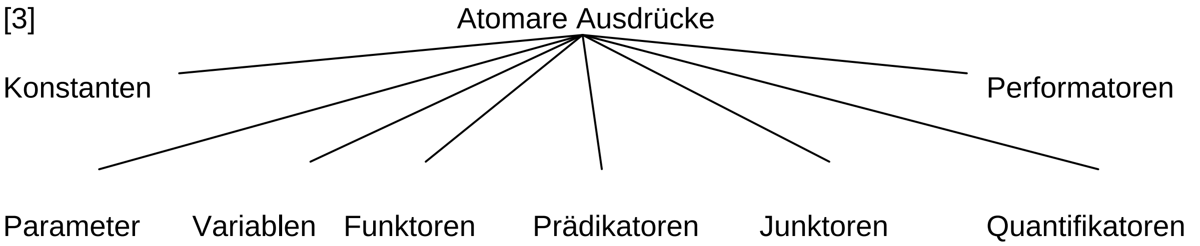
3.2 Standardgrammatik erster Stufe

Im Folgenden wird keine Sprache konstituiert und erschlossen. Es finden aber alle bei der Konstruktion von Sprachen mit Standardgrammatik erster Stufe, also von Standardsprachen erster Stufe, benötigten Kategorien und Begriffe Erläuterung in der auch bei der Sprachkonstruktion oder -erschließung üblichen Reihenfolge: zunächst die atomaren Kategorien (3.2.1), sodann die Terme (3.2.2) und Formeln (3.2.3) und schließlich auch die für Konstruktion, Erschließung und Analyse unverzichtbaren Substitutionsoperationen (3.2.4). Das verwendete Beispielmaterial entstammt vornehmlich, wenn auch nicht ausschließlich, der – so darf vermutet oder doch erhofft werden – jedermann geläufigen Sprache der elementaren Arithmetik.

3.2.1 Atomare Kategorien

Sprachen mit einer Standardgrammatik erster Stufe enthalten folgende atomare Kategorien: Konstanten, Parameter, Variablen, *n*-stellige Funktoren, *n*-stellige Prädikatoren, *n*-stellige Junktoren, Quantifikatoren und Performatoren. Die Mitglieder dieser Kategorien bilden die atomaren Ausdrücke solcher Sprachen; jeder atomare Ausdruck gehört genau einer dieser Kategorien an:

[3]



Aus den atomaren Ausdrücken werden Quantoren $\Pi\omega$, funktorale Terme $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$, Formeln Δ und Sätze Σ aufgebaut. Die Mitglieder dieser molekularen Kategorien bilden die molekularen Ausdrücke solcher Sprachen (↑3.2.2, 3.2.3). Die atomaren und molekularen Kategorien sind elementfremd und erschöpfend: Jeder Ausdruck gehört höchstens und wenigstens, also genau einer Kategorie an.

(Individuen)Konstanten oder auch (Einzel- bzw. Eigen- oder Gegenstands)Namen α sind nicht weiter zerlegbare Ausdrücke ohne (oder mit wenig) beschreibendem Gehalt, mit denen Autoren sich auf genau eine Gegebenheit beziehen. Die Ziffer '13', der Personenname 'Johann Sebastian Bach', die Flussbezeichnung 'die Ruhr' und die Epochenbezeichnung 'die Renaissance' sind Konstanten der jeweiligen Sprache (↑7.).

(Individuen)Parameter β sind ›unspezifische‹ Konstanten, die in quantifizierten Folgerungskontexten eine Stellvertreterfunktion ausüben (↑4.3). Genauer spielen sie im Zusammenhang mit der Regel der Universalquantoreinführung und der Partikularquantorbeseitigung eine Sonderrolle, die für die erste Regel erläutert wird: Will man eine Universalaussage, z.B. 'Für-alle-*y*, für-alle-*x* (Wenn *x*>*y*, dann nicht *y*>*x*)' beweisen, dann nimmt man im Standardverfahren für beliebig, aber fest gewählte Gegebenheiten x, y an, dass zwischen ihnen das Antezedensverhältnis besteht: Sei x>y. Zu dieser Aufgabe taugen wegen ihrer Spezialität Individuenkonstanten nicht: Von ihnen gelten weitere, in diesem Kontext möglicherweise irreführende Eigenschaften. Dann zeigt man in Abhängigkeit von der angenommenen Aussage, dass die Negation des Umkehrverhältnisses gilt: Also nicht y>x; dabei darf bezüglich x und y nur der Umstand benutzt werden, dass zwischen ihnen das in der Annahme festgehaltene Verhältnis besteht. Sodann kann man sich von der Abhängigkeit befreien durch Subjunktoreinführung: Also: Wenn x>y, dann nicht y>x. Kommen 'x' und 'y' nicht in Prämissen vor, von denen die Subjunktion abhängt, dann ist ganz allgemein gezeigt worden, dass nicht y>x, falls x>y. Das erlaubt die Universalquantoreinführung explizit zu machen, die, zweimal angewendet, die gewünschte Universalaussage, 'Für-alle-*x*, für-alle-*y* (Wenn *x*>*y*, dann nicht *y*>*x*)', ergibt. Standardsprachen erster Stufe enthalten abzählbar unendlich viele Parameter; zu Beispielzwecken und auch bei der Konstruktion von Sprachen werden im folgenden die Buchstaben 'x', 'y', 'z', 'u', 'v', 'w', 'x_1', 'y_1', 'z_1', 'u_1', 'v_1', 'w_1', 'x_2', 'y_2', 'z_2', 'u_2', 'v_2', 'w_2', … verwendet; Parameter werden also – im Gegensatz zu Variablen – nicht kursiv geschrieben. Für 'Parameter' findet sich gelegentlich auch die Wendung 'anonyme Konstante'.

(Individuen)<u>Variablen</u> ω dienen im Verein mit Quantifikatoren dem Ausdruck quantitativer Verhältnisse. In den Gebrauchssprachen übernehmen häufig universale Worte wie 'Ding', 'Gegenstand', 'Gegebenheit', 'etwas' usf. die Rolle von Variablen: Für beliebige Gegebenheiten gilt: Wenn eine Gegebenheit die und die Eigenschaft hat, besitzt sie auch die und die Eigenschaft, wenn etwas so und so ist, ist es auch so und so. – Damit die Quantoren, die aus Quantifikatoren und Variablen entstehenden Gebilde, ihre Arbeit, die Artikulation quantitativer Verhältnisse, verrichten können, kommen Variablen auch in den quantifizierten Formeln vor. Standardsprachen erster Stufe enthalten abzählbar unendlich viele Variablen; zu Beispielzwecken wurden vorstehend und werden im folgenden die kursiven Buchstaben '*x*', '*y*', '*z*', '*u*', '*v*', '*w*', 'x_1', 'y_1', 'z_1', 'u_1', 'v_1', 'w_1', 'x_2', 'y_2', 'z_2', 'u_2', 'v_2', 'w_2', … verwendet.

Während die (Individuen)Konstanten Schlüsse auf die (materiale) Eigenart einer Sprache zulassen, kommen (Individuen)Variablen und (Individuen)Parameter in allen Sprachen erster Stufe vor. Variablen und Parameter bedürfen keiner eigenen Einführung, sondern werden lediglich mitreglementiert: Indem die Verwendung der Quantoren umrissen wird, ist auch schon die Verwendung der Variablen und Parameter geregelt (↑4.3). Der Zusatz 'Individuen' empfiehlt sich dann, wenn – bei der Erörterung von Sprachen höherer Stufe (↑3.3.3) – auch von Prädikatorkonstanten, -parametern und -variablen die Rede ist.

n-stellige <u>Funktoren</u> oder Funktionskonstanten ϕ^n sind Ausdrücke, die auf Terme (↑3.2.2) angewendet werden. 'der-Vater-von(..)', 'der-Anfang-von(..)', 'der-absolute-Betrag-von(..)' bzw. '|..|' sind Beispiele für einstellige Funktoren. 'die-Summe-von-und(..,..)' bzw. '+(..,..)', 'der-Akkord-aus-und-und(..,..,..)', 'der-Wasserstand-des-am-in-um(..,..,..,..)' sind Beispiele für zwei-, drei- und vierstellige Funktoren.

n-stellige Prädikatoren Φ^n sind Ausdrücke, die ebenso wie Funktoren auf Terme (↑3.2.2) angewendet werden; allerdings ergeben sich als Anwendungsresultate Formeln (↑3.2.3), keine (weiteren) Terme. 'Ist-eine-natürliche-Zahl(..)', 'Ist-ein-Realist(..)', 'Ist-männlich(..)' sind Beispiele für einstellige Prädikatoren. 'Ist-größer-als(..,..)', 'Ist-Beispiel-für(..,..)', 'Ist-Vater-von(..,..)' sind Beispiele für zweistellige Prädikatoren. 'Ist-Summe-von-und(..,..,..)', 'Begrüßt-in-am(...,..,..,..)', 'Trifft-am-um-in-mit-zusammen(..,..,..,..,..)', 'Fährt-am-um-nach-zu-wegen (..,..,..,..,..,..)' sind Beispiele für drei-, vier-, fünf- und sechsstellige Prädikatoren. Auch Prädikatoren (mit Ausnahme des Identitätsprädikators (↑4.4)) und Funktoren sind für die materiale Eigenart von Sprachen aufschlussreich. Einstellige Funktoren bzw. Prädikatoren werden auch als monadische Funktoren bzw. Prädikatoren geführt, mehrstellige als polyadische. Diese Terminologie wird gelegentlich auch auf Operatoren aller Art übertragen.

Für die Prädikatoren finden sich in der Literatur u.a. die Ausdrücke 'Prädikat', 'genereller Term', 'universeller Term' und 'Prädikatkonstante', für die einstelligen auch 'Eigenschafts-' bzw. 'Begriffswort', für die mehrstelligen auch 'Relations-' oder 'Beziehungswort' oder 'Relator'. Diese Varianten finden im Sinne der terminologischen Auflockerung gelegentlich Verwendung.

Prädikatoren sind nicht zu verwechseln mit Prädikaten im Sinne der traditionellen Grammatik. Will man die Redemittel der traditionellen Grammatik verwenden, dann sind die einstelligen Prädikatoren z.B. als Kopula + unbestimmter Artikel + Substantiv (z.B. 'Ist-eine-Handlung(..)'), als Kopula + Adjektiv ('Ist-beige(..)') oder als intransitives (z.B. 'Schläft(..)') oder transitives Verb (z.B. 'Schlägt(..,..)') zu beschreiben.

Ü1 a) Suchen Sie Beispiele für Individuenkonstanten, für ein- und mehrstellige Funktoren, ein- und mehrstellige Prädikatoren aus der lebensweltlichen Gebrauchssprache, der philosophischen Sprache und einer weiteren Wissenschaftssprache Ihrer Wahl!

b) Man verdeutliche sich den material unbeschränkten Anwendungsbereich der Kategorisierung von Redeteilen, indem man Prädikatoren zusammenstellt für: ausschließlich Naturobjekte, Naturereignisse, Handlungen, Agenten und Handlungsutensilien, (soziale, kulturelle, technische) Artefakte, Zustände von Personen, Analytische Zusammenhänge, Raum- und Zeitzusammenhänge, Qualitäten von Körpern und Substanzen.

Junktoren ψ^n sind Ausdrücke, die auf Formeln angewendet werden; das Resultat sind wiederum Formeln (↑3.2.3). Die Ausdrücke 'nicht(___)', 'es-ist-möglich(___)', 'es-ist-geboten(___)' exemplifizieren einstellige Junktoren. Beispiele für zweistellige Junktoren sind z.B. die Redeteile 'und(___,___)', 'wenn-dann(___,___)', 'oder(___,___)'. In der Praxis kommt man mit ein- und zweistelligen Junktoren aus.

Die Quantifikatoren Π werden stets auf Variablen angewendet, so dass sich Quantoren ergeben. Beispiele für Quantifikatoren sind z.B. 'Für-alle..', 'Für-wenigstens-ein..', 'Für-genau-ein..', 'Für-die-meisten..', 'Für-ganz-wenige..'. – Im Lichte einer später zu treffenden Unterscheidung werden die hier erörterten Quantifikatoren und Quantoren als Formelquantifikatoren und Formelquantoren zusammengefasst und den Termquantifikatoren und Termquantoren gegenübergestellt (↑3.3.2).

An die Performatoren Ξ und die entsprechenden Beispiele braucht hier nur erinnert zu werden: Performatoren, z.B. 'Also___', werden auf Formeln angewendet und ergeben Sätze (↑2.1.4, 3.2.3).

Die Klassen aus Namen, Parametern, Variablen, Funktoren, Prädikatoren, Junktoren, Quantifikatoren und Performatoren bilden gemeinsam das Inventar (↑2.2.3) der jeweiligen Sprache. Konstanten, Variablen und Parameter sind Ausdrücke, auf die andere Ausdrücke angewendet werden. Alle anderen atomaren Ausdruckskategorien sind solche, die ihrerseits auf Gebilde angewendet werden. In Vorwegnahme einer früher schon beanspruchten (↑2.1.4) und später etablierten Terminologie (↑3.3.1) kann formuliert werden: Konstanten, Variablen und Parameter zählen zur Kategorie der Operanden ο, während die restlichen atomaren Gebilde zu den *n*-stelligen Operatoren τ^n zu rechnen sind. Die freien Stellen der Operatoren, die auf Terme angewendet werden, werden durch zwei Punkte '..' notiert, die freien Stellen der Operatoren, die auf Formeln Anwendung finden, werden durch '___', die Horizontale, signalisiert. Operata μ der Gestalt $\tau^n(o_1, ..., o_n)$ entstehen aus der Anwendung eines *n*-stelligen Operators τ^n auf *n* Operanden $o_1, ..., o_n$.

'α', 'β', 'ω', 'φ', 'Φ', 'ψ', 'Π', 'Ξ', 'ο', 'τ' und 'μ' sind Mitteilungszeichen und hier nicht als Ausdrücke der Objektsprache, sondern der Metasprache aufzufassen (↑2.1.4). Sie wurden und werden im Weiteren also vornehmlich – außer in diesem Absatz – nicht erwähnt, sondern verwendet. Die Mittelungszeichen dienen dazu um ganz allgemein auf Ausdrücke, die zur Objektsprache gehören, Bezug zu nehmen. Beispielsweise dient das Mitteilungszeichen 'α' dazu, ganz allgemein über beliebige Individuenkonstanten zu reden. 'τ' dient dazu, ganz allgemein über beliebige Ausdrücke, die Operatoren sind, zu reden. Da Mitteilungszeichen in etwa wie Variablen in der Metasprache funktionieren, werden sie auch manchmal Metavariablen genannt; sie können allerdings auch in der Funktion als Parameter vorkommen. Falls mehr Mitteilungszeichen als die hier genannten benötigt werden, können sie auch mit Strichen, Sternen oder Indizes versehen auftreten. Zudem werden später noch weitere Mitteilungszeichen verwendet. Wie bereits praktiziert werden Mitteilungszeichen für Operatoren regelmäßig mit einer hochgestellten Ziffer versehen, die die Stelligkeit der Operatoren angibt.

Wie ergeben sich nun aus den atomaren Ausdrücken, den ›Bausteinen‹ einer Standardsprache erster Stufe, die molekularen Gebilde bzw. wie sind die schon erwähnten molekularen Gebilde erklärt?

3.2.2 Terme – Termformen – Nominatoren

Konstanten, Variablen und Parameter sind atomare Terme; sonst ist kein Gebilde atomarer Term. Die Klasse der atomaren Terme zerfällt demnach vollständig (exhaustiv) und elementfremd (disjunkt) in die Klasse der Variablen, Parameter und Konstanten. Jeder atomare Term gehört wenigstens und höchstens, also genau einer der drei genannten Kategorien an. Sodann sei festgelegt: (i) Ist θ ein atomarer Term, so ist θ ein Term. (ii) Wendet man *n*-stellige Funktoren ϕ^n auf *n* Terme $\theta_1,...,\theta_n$ an, so entstehen (funktorale) Terme der Gestalt $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$. (iii) Sonst ist nichts ein Term. So resultiert aus der Anwendung des einstelligen Funktors 'der-Vater-von(..)' auf 'P. E. Bach' der funktorale Term 'der-Vater-von(P. E. Bach)', und aus der Anwendung des zweistelligen Funktors 'die-Summe-von-und(..,..)' auf '13' und 'der-Nachfolger-von(1)' ergibt sich der funktorale Term 'die-Summe-von-und(13, der Nachfolger von (1))'. Das Mitteilungszeichen für Terme ist 'θ'. Zur Übersicht und in Erweiterung der Beispiele:

[4] Funktor ϕ^n

a) der-Vater-von(..)

b) die-Summe-von-und(..,..)

c) der-Akkord-aus-und-und(..,..,..)

d) der-Wasserstand-des-am-um-in(..,..,..,..)

Terme $\theta_1,...,\theta_n$

a) P. E. Bach

b) 13, der-Nachfolger-von(1)

c) c, e, g

d) Rhein, 24. 12. 95, 12:00, Bingen

Funktorale Terme $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$

a) der-Vater-von(P. E. Bach)

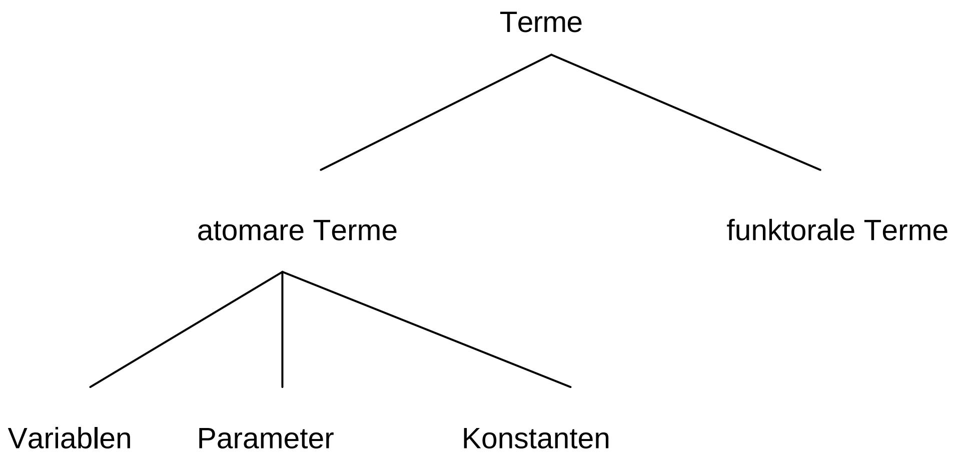
b) die-Summe-von-und(13, der-Nachfolger-von(1))

c) der-Akkord-aus-und-und(c, e, g)

d) der-Wasserstand-des-am-um-in(Rhein, 24. 12. 1995, 12:00, Bingen)

Wie das Beispiel b) zeigt, dürfen Funktoren auch auf funktorale Terme angewendet werden. Insgesamt gilt damit: Ein Gebilde θ ist ein Term genau dann, wenn θ (i) atomarer Term oder (ii) funktoraler Term ist. Die Klasse der Terme zerfällt demzufolge vollständig und elementfremd in die Klasse der atomaren und die Klasse der funktoralen Terme; unter Berücksichtigung der Klassifikation der atomaren Terme resultiert:

[5]



Später wird sich eine Differenzierung der Terme ergeben, die die funktoralen Terme lediglich als echte Teilklasse der molekularen Terme erscheinen lässt (↑3.3.2). Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Funktoren abschließend als *n*-stellige, termbestimmende und termerzeugende Operatoren charakterisieren.

Ü2 a) Erzeugen Sie funktorale Terme $\phi^{n}(\theta_1,...,\theta_n)$, indem Sie einige der in Ü1 gefundenen Funktoren ϕ^{n} auf n Terme $\theta_1,...,\theta_n$ anwenden.

b) Analysieren Sie die Zeichenverbindung 'der-Anfang-von(das-Ende-von(die-Geschichte-von(die-Welt)))'

Die vorgelegte Termbestimmung erweckt in der Klausel (ii) den Anschein der Zirkularität: Terme werden bestimmt als etwas, das aus der Anwendung eines Funktors auf Terme entsteht. Nun soll aber andererseits gerade der Termbegriff charakterisiert werden! Der Zirkelverdacht wird zerstreut, wenn man sich anhand der Arbeitsweise der Termdefinition vor Augen führt, dass Termschaft letztlich stets im Rekurs auf das erste Bestimmungsstück –

atomare Terme sind Terme und atomare Termschaft wird ohne Rekurs auf Termschaft charakterisiert – festgestellt wird: Ist die Zeichenverbindung 'das-Produkt-von-und (2,die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3)))' ein Term? Der aufbauende (aufsteigende synthetisierende, zusammenfügende usf.) Weg von unten nach oben (Bottom-up) läuft so: '3' ist ein atomarer Term, also nach (i) Term. Da 'der-Vorgänger-von(3)' aus der Anwendung des einstelligen Funktors 'der-Vorgänger-von(..)' auf den Term '3' entsteht, liegt ein funktoraler Term, nach (ii) also ein Term vor. Nun ist '4' Konstante, also atomarer Term, also nach (i) Term. Da '4' und 'der-Vorgänger-von(3)' Terme sind, ist das Ergebnis der Anwendung des zweistelligen Funktors 'die-Summe-von-und(..,..)' auf diese Terme funktoraler Term, nach (ii) also Term. Da ferner '2' Konstante, also atomarer Term, also nach (i) Term ist, ist auch 'das-Produkt-von-und(2,die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3)))', also das Ergebnis der Anwendung des zweistelligen Funktors 'das-Produkt-von-und(..,..)' auf '2' und 'die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3))' ein funktoraler Term, nach (ii) also ein Term.

Der zerlegende (absteigende, analysierende, auflösende usf.) Weg von oben nach unten (Top-down) ist dieser: Da 'das-Produkt-von-und(..,..)' ein zweistelliger Funktor ist, stellt 'das-Produkt-von-und(2,die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3)))' einen funktoralen Term, nach (ii) also einen Term dar, falls '2' und 'die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3))' Terme sind. Damit verzweigt sich die Überlegung: a) '2' ist atomarer Term, nach (i) also Term. b) Da 'die-Summe-von-und(..,..)' zweistelliger Funktor ist, ist 'die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3))' funktoraler Term, nach (ii) also Term, falls '4' und 'der-Vorgänger-von(3)' Term ist. Damit verzweigt sich die Überlegung neuerlich: ba) '4' ist atomarer Term, nach (i) also Term. bb) 'der-Vorgänger-von(3)' ist das Ergebnis der Anwendung des einstelligen Funktors 'der-Vorgänger-von(..)' auf '3', mithin funktoraler Term, demnach nach (ii) Term, falls '3' Term ist. Da dies zutrifft, ist bb), und damit b), und damit die Gesamtüberlegung positiv abgeschlossen.

Die vermutete Zirkularität wird dadurch verhindert, dass mit den atomaren Termen eine Rekurs- und Startbasis bereitsteht, die nicht dadurch gewonnen wird, dass Funktoren auf Terme angewendet werden. Die Beispielbetrachtung soll auch klarlegen, dass in diesem Falle insofern keine Zirkularität vorliegt, als zur Bestimmung der Termschaft von θ, im Beispiel: 'das-Produkt-von-und(2,die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3)))', nicht über die Termschaft von θ, sondern über den Termcharakter eines von θ verschiedenen Teilterms θ^*, z.B. von '2' zu befinden ist.

Ü3 Zeigen Sie an einem der in Ü2 erzeugten Beispiele durch eine Top-down- und eine Bottom-up-Überlegung, dass es sich gemäß der Termcharakterisierung tatsächlich um einen Term handelt!

Soeben wurde der Begriff des Teilterms verwendet; er ist für jeden Term θ wie folgt festgelegt: (i) Wenn θ mit dem Term θ' identisch ist, dann ist θ Teilterm des Terms θ'. (ii) Wenn ϕ^n ein n-stelliger Funktor ist und $\theta_1,...,\theta_n$ Terme sind und der Term θ ein Teilterm eines θ_i (mit $1 \leq i \leq n$) ist, dann ist θ ein Teilterm des funktoralen Terms $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$. (iii) Sonst ist θ von nichts ein Teilterm. Damit sind die Ausdrücke 'P. E. Bach' und 'der-Vater-von(P. E. Bach)' Teilterme des Terms 'der-Vater-von(P. E. Bach)'; der Funktor 'der-Vater-von(..)' ist hingegen kein Teilterm des funktoralen Terms 'der-Vater-von (P. E. Bach)', weil Funktoren keine Terme und daher auch nie Teilterme sind.

Ü4 a) Notieren Sie die (d.h. alle) Teilterme der Terme: '*x*', '12', 'die-Gattin-von(der-Vater-von(P. E. Bach))', 'der-Wasserstand-des-am-um-in(Rhein,*x*,12:00,*y*)'!

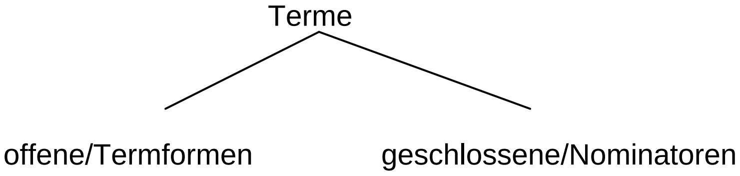
b) Weisen Sie die Teiltermschaft an einem Beispiel im Detail nach!

Die Charakterisierung der Teiltermschaft scheint ebenfalls (wie auch die meisten weiteren Definitionen) zirkulär. Aber auch hier gilt: Die Bestimmung (ii) rekurriert letztlich auf den Teil (i); und dieser ist frei von Zirkularität. – Jeder Term ist Teilterm seiner selbst. Ist ein beliebiger Term θ Teilterm des Terms θ' und ist auch das Umgekehrte der Fall, dann ist θ mit θ' identisch. Ist ferner θ Teilterm von θ' und θ' Teilterm von θ^*, dann ist auch θ Teilterm von θ^*. Diese drei Tatsachen lassen sich kürzer (und b.a.w. informell) so ausdrücken: Die Teiltermschaft ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

θ ist ein in ω offener Term bzw. eine Termform in ω, wenn ω Variable und Teilterm des Terms θ ist; 'der Vater von (*x*)' ist ein in der Variablen '*x*' offener Term, 'die-Summe-von-und(*x*,*y*)' ist Termform sowohl in '*x*' wie auch in '*y*'.

Geschlossene Terme oder Nominatoren (oder auch singuläre Terme, Gegenstandsbezeichnungen usf.) sind Terme, die keine offenen Terme sind: 'P. E. Bach' und 'der-Vater-von(P. E. Bach)' exemplifizieren (atomare und funktorale) Nominatoren. Terme zerfallen demnach exhaustiv und disjunkt in offene oder Termformen und geschlossene oder Nominatoren:

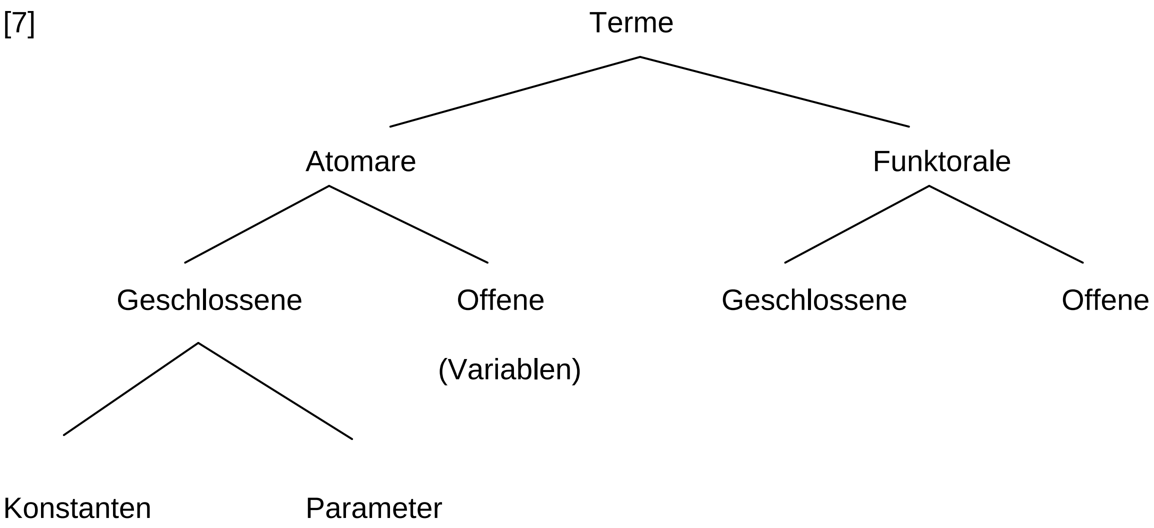
[6]



Ü5 Entscheiden Sie mit Hilfe der Definitionen unter den Gesichtspunkten Atomarität-Funktoralität und Offenheit-Geschlossenheit, um welche Termart es sich bei den folgenden Ausdrücken handelt: '*x*', 'die-Summe-von-und(*z*,5)', 'die-Summe-von-und (x,3)', 'der-Rhein', 'der-Zeitraum-zwischen-und(die-Renaissance,*x*)', 'das-Ende-von (die-Kunst)'.

Abschließend ergibt sich folgende Einteilung der Terme θ: Terme zerfallen in atomare und funktorale. Beide Untergruppen lassen sich exhaustiv und disjunkt in offene und geschlossene zerlegen. Die Variablen ω sind die offenen atomaren Terme, die Parameter β und die Konstanten α stellen die geschlossenen atomaren Terme dar; die angezielte Kombination von [5] und [6] lässt sich in folgendem Baum präsentieren:

[7]



Ü6 Zeichnen Sie die Alternative zum Klassifikationsbaum [7], die dadurch entsteht, dass man mit der Einteilung nach Geschlossenheit-Offenheit beginnt und mit der Einteilung nach Atomarität-Funktoralität fortsetzt!

Bei der Behandlung der Bezugnahme auf Gegenstände, der Nomination, werden auch die in der lebensweltlichen Gebrauchssprache unverzichtbaren umgebungssensitiven Redeteile, die Indikatoren, den atomaren geschlossenen Termen zugeschlagen (↑7.).

3.2.3 Formeln-Aussageformen-Aussagen

Die Formelbestimmung nimmt ihren Ausgang bei den Elementarformeln: Γ <u>ist eine Atomformel</u> genau dann, wenn Γ aus der Anwendung eines *n*-stelligen Prädikators Φ^n auf *n* Terme $\theta_1,...,\theta_n$ entsteht. Aus der Anwendung des einstelligen Prädikators 'Ist-Komponist(..)' auf '*x*', aus der Anwendung des zweistelligen Prädikators 'Ist-Vater-von(..,..)' auf 'J. S. Bach' und 'P. E. Bach' und aus der Anwendung des dreistelligen Prädikators 'Ist-Summe-von-und(..,..,..)' auf '3', 'der-Vorgänger-von(2)' und 'der-Nachfolger-von(1)' entstehen die jeweiligen Atomformeln. Im Überblick und in Erweiterung der Beispielbasis:

[8] Prädikatoren Φ^n

a) Ist-Komponist(..)

b) Ist-Vater-von(..,..)

c) Ist-Summe-von-und(..,..,..)

d) Trifft-am-um-in(..,..,..,..,..)

e) Fährt-am-von-nach-zu-wegen(..,..,..,..,..,..)

Terme $\theta_1,...,\theta_n$

a) x

b) J. S. Bach, P. E. Bach

c) 3, der-Vorgänger-von(2), der Nachfolger-von(y)

d) der-Kanzler-der-im-Jahre(BRD, 1996), x, 14. Juli, 16°°, Bonn

e) x, 03.03.96, Hamburg, München, y, die-Regelung-von(der-Nachlass-von(z))

Atomformeln $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$

a) Ist-Komponist(x)

b) Ist-Vater-von(J.S.Bach, P. E. Bach)

c) Ist-Summe-von-und (3, der-Vorgänger-von (2), der-Nachfolger-von (y))

d) Trifft-am-um-in(der-Kanzler-der-im-Jahre(BRD,1995), x, 14. Juli, 16°°, Bonn)

e) Fährt-am-von-nach-zu-wegen(x, 03.03.95, Hamburg, München, y, die-Regelung-von (der-Nachlass-von(z)))

Atomformeln werden häufig auch als 'atomare Formeln' oder als 'Primformeln' angesprochen. Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Prädikatoren abschließend als *n*-stellige, termbestimmende und formelerzeugende Operatoren charakterisieren. Der Unterschied zu den Funktoren besteht also in der jeweils erzeugten Ausdruckskategorie; während Funktoren (bei passender Operandenwahl) Terme erzeugen, erzeugen Prädikatoren (bei passender Operandenwahl) Formeln. Im Weiteren werden 'Α', 'Β', 'Γ' und 'Δ' als Mitteilungszeichen für Formeln verwendet.

Die Charakterisierung der (Atom)Formeln, und damit auch der Formeln, erfolgt im Rückgriff auf die Terme. Der umgekehrte Rekurs findet in Standardsprachen erster Stufe nicht statt: Um zu sagen, was Terme sind, muss man, wie vorgeführt (↑3.2.2), nicht auf die Formelbestimmung zurückgreifen. Ein solches Vorgehen wird erst dann unvermeidlich, wenn Sprachen auch Termquantoren und Quantorterme umfassen, wenn – inhaltlich gesprochen – für die Bezugnahme auf Gegenstände das Prädikationspotential der Sprache mit den entsprechenden Verknüpfungsmöglichkeiten dienstbar gemacht wird. (↑3.3.2).

Ü7 Bilden Sie Atomformeln mit einigen der Prädikatoren, die Sie in Ü1 gefunden haben!

Wendet man *n*-stellige Junktoren ψ^n auf *n* Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$ an, dann entstehen Junktorformeln oder junktorale Formeln der Gestalt $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$. Beispiele: Aus der Anwendung des einstelligen Junktors 'nicht(__)' auf die Formel 'Ist-Vater-von(J. S. Bach,P. E. Bach)' entsteht die Junktorformel 'nicht(Ist-Vater-von(J. S. Bach,P. E. Bach))'; aus der Anwendung des zweistelligen Junktors 'und(__,__)' auf die Formeln 'Ist-Summe-von-und(*x*,3,*y*)' und 'oder(=(0,0),≠(0,0))' entsteht die Junktorformel 'und(Ist-Summe-von-und(*x*,3,*y*)), oder(=(0,0),≠(0,0))'. – Im Überblick und in Erweiterung der Beispielbasis:

[9] *n*-stellige Junktoren ψ^n

a) nicht(__)

b) verboten(__)

c) und(__,___)

d) wenn-dann(__,__)

n Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$

a) Ist-Primzahl(5)

b) Für-alle-*x*(und(Beleidigt (*x*, y), Verprügelt (*x*, y)))

c) Ist-Summe-von-und(*x*,3,*y*), oder(=(0,0),≠(0,0))

d) Ist-Gerade-Zahl(5), Teilt(2,5)

Junktorformeln $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$

a) nicht(Ist-Primzahl(5))

b) verboten(Für-alle-*x*(und(Beleidigt (*x*, y), Verprügelt (*x*, y))))

c) und(Ist-Summe-von-und(*x*,3,*y*), oder(=(0,0) ,≠(0,0)))

d) wenn-dann(Ist-Gerade-Zahl(5), Teilt(2,5))

Die Formeln, auf die die Junktoren angewendet werden, können Formeln aller Art sein, also sowohl Atomformeln als auch Junktor- oder (die im nächsten Schritt erklärten) Quantorformeln.

Ü8 a) Unterziehen Sie die Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$ von [9]a),c),d) einer weiteren grammatischen Analyse!

b) Geben Sie die Junktorformeln in [9] in einer flüssigen gebrauchssprachliche Formulierung wieder!

Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Junktoren nunmehr als *n*-stellige, formelbestimmende und formelerzeugende Operatoren charakterisieren. Die Kernjunktoren sind im Weiteren von besonderer Wichtigkeit; hinter dem wortsprachlichen Ausdruck sind gebräuchliche und im folgenden auch verwendete Abkürzungen notiert, dahinter folgt der Name. Ferner sind deontische und modale Junktoren, ebenfalls mit Abkürzungen und Bezeichnungen, angegeben:

[10] Kernjunktoren

nicht(__)	¬(__)	~(__)	der Negator
und(__,__)	∧(__,__)	&(__,__)	der Konjunktor
oder(__,__)	∨(__,__)		der Adjunktor
wenn-dann(__,__)	→ (__,__)	⊃(__,__)	der Subjunktor
genau-dann-wenn(__,__)	↔ (__,__)	≡(__,__)	der Bisubjunktor
Deontische Junktoren			
es-ist-erlaubt(__)	E(__)		der Erlaubnisjunktor
es-ist-verboten(__)	V(__)		der Verbotsjunktor
es-ist-geboten(__)	G(__)		der Gebotsjunktor
es-ist-indifferent(__)	I(__)		der Indifferenzjunktor
Modale Junktoren			
es-ist-notwendig(__)	N(__)	□(__)	der Notwendigkeitsjunktor
es-ist-möglich(__)	M(__)	◇(__)	der Möglichkeitsjunktor

es-ist-wirklich(__)	W(__)	der Wirklichkeitsjunktor
es-ist-kontingent(__)	K(__)	der Kontingenzjunktor

Das Ergebnis der Anwendung des Negators auf eine Formel Γ ist die Negation von Γ; Γ ist das Negatum. Atomare Formeln und die Negation von atomaren Formeln sind Literale. Alle Atomformeln stellen also Literale dar, aber nicht umgekehrt. Die Unterscheidung von atomaren Formeln und Literalen wird in der Prädikationslehre (↑ 6.3) benötigt. Das Ergebnis der Anwendung des Adjunktors/Konjunktors/Subjunktors/Bisubjunktors auf Formeln A und B ist die Adjunktion/Konjunktion/Subjunktion/Bisubjunktion aus bzw. von A und B. Die Formeln A und B sind dann die Adjunktionsglieder bzw. Adjunkte/die Konjunktionsglieder bzw. Konjunkte/das Antezedens bzw. die Wenn-Formel und das Sukzedens bzw. die Dann-Formel/die Bisubjunkte bzw. Bisubjunktionsglieder der jeweiligen Gesamtformel.

Ü9 Suchen Sie in den Gebrauchssprachen weitere Junktoren!

Die Darstellung der Junktorformeln in [9] folgt der Präfixnotation – der Junktor steht jeweils am Anfang der Formel und die Operandaformeln sind durch Kommata getrennt in Klammern aufgezählt. Für die zweistelligen Kernjunktoren (Adjunktor, Konjunktor, Subjunktor, Bisubjunktor) und den Identitätsprädikator ('=(..,..)') ist die Infixnotation üblicher – der Operator steht zwischen den zwei Operanda und die Klammern sind außen. In Infixnotation für die zweistelligen Junktoren und den Identitätsprädikator und bei Verwendung der in [10] eingeführten Abkürzungen liest sich die unter [9]d) gebildete Formeln als '(Ist-Summe-von-und(x,3,y) $\wedge$ ($0=0 \vee 0\neq0$))'. Die äußersten Klammern werden bei dieser Schreibweise oft weggelassen. Insgesamt erscheinen die Formeln so lesbarer. Aus diesem Grund und weil die Infixnotation sehr weit verbreitet ist, wird im Falle der zweistelligen Kernjunktoren und des Identitätsprädikators auf die Präfixnotation verzichtet.

Um die Quantorformeln zu bestimmen, ist zuvor zu erläutern, was ein Quantor ist: Wendet man einen Quantifikator Π auf eine Variable ω an, so entsteht der ω-bindende Quantor $\Pi\omega$. So resultieren aus der Anwendung von 'Für-alle..' bzw. 'Für-wenigstens-ein..' bzw. 'Für-genau-ein..' auf die Variable 'x' bzw. 'y' bzw. 'z' die 'x'- bzw. 'y'- bzw. 'z'-bindenden Quantoren 'Für-alle-x___' bzw. 'Für-wenigstens-ein-y___' bzw. 'Für-genau-ein-z___'. Die Übersicht enthält zugleich gebräuchliche und im Weiteren verwendete Kürzel sowie den Quant(ifikat)ornamen:

[11] Quantifikator Π

a) Für-alle..	$\bigwedge$.., $\forall$..	der Universalquantifikator

b) Für-wenigstens-ein..	$\bigvee$.., $\exists$..	der Partikularquantifikator
c) Für-genau-ein..	**1**.., $\bigvee^1$.., $\exists!$..	der Eins- bzw. Einzigkeitsquantifikator

Variable ω

a) *x*

b) *y*

c) *z*

Der ω-bindende Quantor Πω

Für-alle-*x*__	$\bigwedge x$__, $\forall x$__	der '*x*'-bindende Universalquantor
Für-wenigstens-ein-*y*__	$\bigvee y$__, $\exists y$__	der '*y*'-bindende Partikularquantor
Für-genau-ein-*z*__	**1***z*__, $\bigvee^1 z$__, $\exists! z$__	der '*z*'-bindende Eins- bzw. Einzigkeitsquantor

Ü10 Suchen Sie in den Gebrauchssprachen und mit Hilfe von Lehrbüchern der Logik weitere Quantoren!

Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Quantifikatoren als einstellige, variablenbestimmende und quantorerzeugende Operatoren charakterisieren. Anders als bei Funktoren, Prädikatoren und Junktoren ist der erzeugte Ausdruck seinerseits ein Operator. Wendet man nun einen Quantor Πω auf eine Formel Δ an, dann entsteht eine Quantorformel bzw. eine quantorale bzw. quantifizierte Formel ΠωΔ; Beispiele:

[12] Quantor Πω

a) $\bigwedge x$__

b) $\bigvee y$__

c) **1***z*__

Formel Δ

a) Mensch(*x*) → Sterblich(*x*)

b) Gerade-Zahl(*y*) ∧ Primzahl(*y*)

c) $z>y$

Quantorformel ΠωΔ

a) $\bigwedge x$ (Mensch(*x*) → Sterblich(*x*))

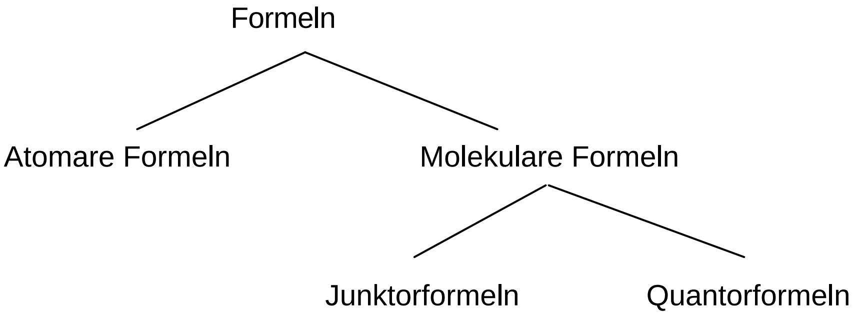
b) $\bigvee y$ (Gerade-Zahl(*y*) ∧ Primzahl(*y*))

c) **1**z $z>y$

Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Quantoren als einstellige, formelbestimmende und formelerzeugende Operatoren charakterisieren; anders als bei den Quantifikatoren und ebenso wie bei Funktoren, Prädikatoren und Junktoren ist das Erzeugungsergebnis kein Operator. Das Ergebnis der Anwendung eines ω-bindenden Universal-/Partikular-/Einzigkeitsquantors auf eine Formel Γ ist die Universal-/Partikular-/Einzigkeitsquantifikation von Γ bzgl. ω.

Abschließend kann der Formelbegriff so fixiert werden: (i) Wenn Γ aus der Anwendung eines n-stelligen Prädikators Φ^n auf n Terme $\theta_1,...,\theta_n$ entsteht, Γ also Atomformel $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$ ist, dann ist Γ eine Formel. (ii) Wenn Γ aus der Anwendung eines n-stelligen Junktors ψ^n auf n Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$ entsteht, Γ also Junktorformel $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$ ist, dann ist Γ eine Formel. (iii) Wenn Γ aus der Anwendung eines Quantors $\Pi\omega$ auf eine Formel Δ entsteht, Γ also Quantorformel $\Pi\omega\Delta$ ist, dann ist Γ eine Formel. (iv) Sonst ist nichts eine Formel. Quantor- und Junktorformeln bilden gemeinsam die molekularen Formeln. Zur Übersicht:

[13]



Mit Hilfe der Formeldefinition soll gezeigt werden, dass '$\bigvee y$ (Gerade-Zahl(y) $\wedge$ Primzahl(y))' (in Präfixnotation: '$\bigvee y$ $\wedge$(Gerade-Zahl(y),Primzahl(y))') eine Formel ist. Der zerlegende Weg nimmt folgenden Verlauf: 'y' ist eine Variable. Da '$\bigvee$..' Quantifikator ist, ist '$\bigvee y$__' ein Quantor. Da aus der Anwendung eines Quantors $\Pi\omega$ auf eine Formel nach (iii) eine Formel entsteht, ist nur noch zu prüfen, ob 'Gerade-Zahl(y) $\wedge$ Primzahl(y)' eine Formel ist (in Präfixnotation: '$\wedge$(Gerade-Zahl(y),Primzahl(y))'). Da '__$\wedge$__' (resp. '$\wedge$(__,__)') ein zweistelliger Junktor ist, aus der Anwendung eines zweistelligen Junktors auf Formeln A, B nach (ii) eine Formel entsteht, ist festzustellen, ob es sich bei 'Gerade-Zahl(y)' und 'Primzahl(y)' um Formeln handelt. Da 'y' Variable, damit atomarer Term, damit Term ist, und aus der Anwendung eines einstelligen Prädikators Φ^1 auf einen Term nach (i) eine Formel entsteht, sind beide Ausdrucksverbindungen Formeln. Damit ist die fragliche Ausdrucksverbindung insgesamt eine Formel.

Ü11 a) Zeigen Sie mit Hilfe der Formelcharakterisierung, dass '$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich (x))', und '$\bigvee y$ $\bigwedge z$(Rasiert(y,z) $\leftrightarrow$ $\neg$Rasiert(z,z))' Formeln sind!

b) Geben Sie die Formeln in a) und in [11] in einer flüssigen gebrauchssprachliche Formulierung wieder!

Sodann sei für jede Formel Γ festgelegt: (i) Wenn Γ mit der Formel Γ^* identisch ist, dann ist Γ eine Teilformel von Γ^*.(ii) Wenn Γ^* eine Junktorformel $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$ ist und Γ Teilformel eines Δ_i (mit $1 \leq i \leq n$) ist, dann ist Γ eine Teilformel von Γ^*. (iii) Wenn Γ^* eine Quantorformel $\Pi\omega\Delta$ ist und Γ Teilformel von Δ ist, dann ist Γ eine Teilformel von Γ^*. (iii) Sonst ist Γ von nichts eine Teilformel. Die Formeln 'Ist-Primzahl(x)', '$\neg$Ist-Primzahl(x)', 'Ist-Primzahl(x) $\vee$ $\neg$Ist-Primzahl(x)' und die sogleich notierte Formel selbst sind demzufolge (die) Teilformeln von '$\bigwedge x$ (Ist-Primzahl(x) $\vee$ $\neg$Ist-Primzahl(x))'.

Ü12 Ermitteln Sie die Teilformeln der unter [9] notierten Junktorformeln und der unter [12] notierten Quantorformeln!

Wie für die Teiltermschaft zwischen Termen lässt sich für die Teilformelschaft zwischen Formeln festhalten: Jede Formel ist Teilformel ihrer selbst. Steht eine Formel zu einer Formel im Teilformelverhältnis und umgekehrt, dann handelt es sich lediglich um *eine* Formel. Ist eine Formel Teilformel einer Formel, die ihrerseits Teilformel einer Formel ist, dann ist die erste Teilformel der letzten. Die Teilformelschaft drückt also eine reflexive, antisymmetrische und transitive Beziehung aus. Mit Hilfe der Teilformelschaft und der Teiltermschaft bezüglich eines Terms lässt sich bestimmen, was Teilterm einer Formel ist: θ ist Teilterm der Formel Γ, wenn es eine Atomformel $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$ gibt, die Teilformel der Formel Γ ist, und θ ist Teilterm wenigstens eines Terms θ_i (mit $1 \leq i \leq n$); so ist etwa 'x' (der einzige) Teilterm der Formel '$\bigwedge x$ (Ist-Primzahl(x) $\vee$ $\neg$Ist-Primzahl(x))'.

Ü13 Ermitteln Sie die Teilterme der unter [8] notierten Elementarformeln, der Junktorformeln unter [9] und der Quantorformeln unter [12] und liefern Sie unter Verwendung der Definition eine passende Begründung!

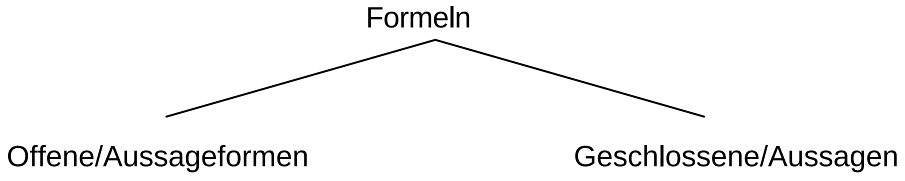
ω ist frei in Γ genau dann, wenn ω Variable und (i) Γ Atomformel und ω Teilterm der Formel Γ ist oder (ii) Γ Junktorformel $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$ ist und ω frei ist in einem Δ_i (mit $1 \leq i \leq n$) oder (iii) Γ eine Quantorformel $\Pi\xi\Delta$ ist, ω verschieden von ξ und frei in Δ ist. – ω ist gebunden in Γ genau dann, wenn ω eine Variable, Γ eine Formel ist und es einen Quantifikator Π und eine Formel B gibt, so dass $\Pi\omega\mathrm{B}$ Teilformel von Γ ist.

'y' ist frei in '$y>3 \wedge \bigvee y\ y=2$'. Denn: Da '$y$' Variable und Teilterm von '$y>3$' ist, ist 'y' nach (i) frei in '$y>3$' und nach (ii) auch in der Gesamtformel frei. – Ferner ist 'y' gebunden in '$y>3 \wedge \bigvee y\ y=2$'. Denn: '$y$' ist eine Variable, '$\bigvee$..' Quantifikator und '$\bigvee y\ y=2$' ist Teilformel der Gesamtformel; eine Variable kann in einer Formel also sowohl gebunden als auch frei sein. In '$y>3$' ist 'y' nur frei, in '$\bigvee y\ y=2$' nur gebunden.

Ü14 Untersuchen Sie die unter [8], [9] und [12] notierten Formeln auf Freiheit und Gebundenheit der als Teilterme auftretenden Variablen!

Γ ist eine in ω offene Formel bzw. eine Aussageform in ω genau dann, wenn ω in Γ frei ist. Hingegen ist Γ eine geschlossene Formel bzw. eine Aussage genau dann, wenn Γ eine Formel ist, in der keine Variable ω frei ist. Die Formel '$\neg$Ist-Primzahl(x) ' ist eine in 'x' offene Formel, während '$\bigwedge x$ (Ist-Primzahl(x) $\vee$ $\neg$Ist-Primzahl(x))' eine geschlossene Formel darstellt, genauer die Universalquantifikation von 'Ist-Primzahl(x) $\vee$ $\neg$Ist-Primzahl(x)' bzgl. 'x'. Als Einteilung der Formeln ergibt sich analog zu [6]:

[14]

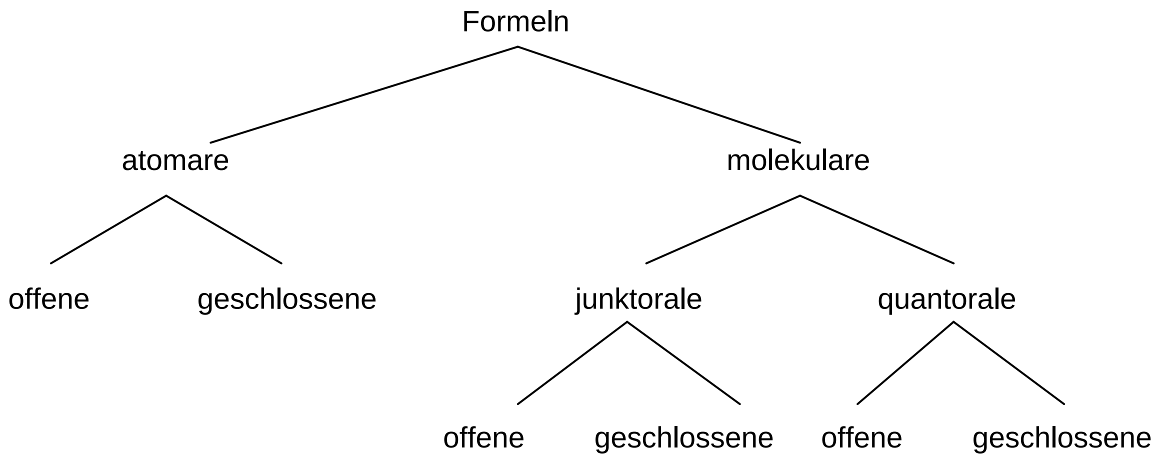


Geschlossene Atomformeln werden auch als. Atom- resp. Primaussagen, als Basisaussagen oder singuläre Prädikationen angesprochen, geschlossene Junktorformeln als Junktoraussagen und geschlossene Quantorformeln als Quantoraussagen bzw. quantifizierte Aussagen. Universalquantor- und Partikularquantoraussagen werden auch kurz als Universal- und Partikularaussagen geführt.

Ü15 Untersuchen Sie die unter [8], [9] und [12] notierten Formeln auf Offenheit und Geschlossenheit!

Damit ist – relativ auf eine Standardgrammatik erster Stufe und ohne Rückgriff auf Termini der Wahrheitsrede – auch das früher intuitiv gebrauchte Aussagenkonzept (↑2.1.4) für Standardsprachen erster Stufe umrissen. Ordnet man die Einteilungsrücksicht Atomarität versus Molekularität dem Gesichtspunkt Offenheit versus Geschlossenheit vor, dann ergibt sich folgende abschließende Klassifikation der Formeln:

[15]



Ü16 Zeichnen Sie eine Klassifikation für die Formeln, die die Gliederungsrücksichten von [15] vertauscht!

Schließlich ist an die Bestimmung von Sätzen Σ als Ergebnis der Anwendung eines Performators Ξ auf eine Aussage Γ zu erinnern. Performatoren lassen sich mit der Operatorenterminologie als einstellige, aussagenbestimmende und satzerzeugende Operatoren charakterisieren. Sätze können nicht ihrerseits als Operanden eines Operators auftreten; sie sind ausschließlich Operata.

Indem Autoren Sätze verwenden, vollziehen sie erinnerlich Redehandlungen (↑2.1). Dabei verwenden sie den Performator und die Aussage als Teilausdrücke (↑2.1.6) und vollziehen damit die Teilhandlungen der Performation und Proposition. Die innerpropositionalen Teilhandlungen (Nomination, Prädikation, Quantifikation usf.) folgen dem geschilderten Aufbau der Aussagen. Da in jedem Satz ein Performator und ein Prädikator Teilausdruck ist, sind Performation und Prädikation Teilhandlung jeder Redehandlung.

Ü17 Geben Sie Beispiele für variablenfreie Aussagen, für parameterfreie, für individuenkonstantenfreie, für junktorfreie und für quantorfreie Aussagen. Welche Ausdruckskategorie scheint in jeder Aussage unverzichtbar? Begründen Sie Ihre Vermutung!

3.2.4 Substitutionsoperationen

Um die Regelformulierung [1]** (von der grammatischen Seite her) nachvollziehen zu können, ist die Substitutionsbegrifflichkeit kursorisch zu erläutern, und zwar insbesondere die Substitution von Termen für atomare Terme in Formeln. Das Ergebnis der Substitution des

Terms '3' für den Term 'x' in der Formel 'Ist-Primzahl(x) $\vee$ $\neg$Ist-Primzahl(x)' ist die Formel 'Ist-Primzahl(3) $\vee$ $\neg$Ist-Primzahl(3)'; 'x' wird in der Formel an allen Stellen durch '3' ersetzt.

Die Definition der Substitution von Termen für atomare Terme in Formeln rekurriert auf die Bestimmung der Substitution von Termen für atomare Terme in Termen, die demnach als erste zu behandeln ist. Zu unterscheiden sind dabei das Substituens, der substituierende Term θ^*, das Substituendum, der zu substituierende Term $\theta+$, der Substitutionsort, der Term θ', in dem substituiert wird, und das Substitutionsergebnis $[\theta^*,\theta+,\theta']$. Mit Blick auf die Zwecke der Substitutionsbegrifflichkeiten wird verlangt, dass das Substituendum immer ein atomarer Term ist.

Die Substitution sei nun für Terme θ^*, θ' und atomare Terme $\theta+$ wie folgt festgelegt: (i) Wenn $\theta+$ mit θ' identisch ist, dann ist $[\theta^*,\theta+,\theta']$ identisch mit θ^*. (ii) Wenn θ' ein atomarer Term ist und $\theta+$ nicht mit θ' identisch ist, dann ist $[\theta^*,\theta+,\theta']$ identisch mit θ'. (iii) Wenn θ' funktoraler Term $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$ ist, dann ist $[\theta^*,\theta+,\theta']$ identisch mit $\phi^n([\theta^*,\theta+,\theta_1],...,[\theta^*,\theta+,\theta_n])$. Die Substitutionsbestimmung geht am Termaufbau entlang: Ist der Substitutionsort ein atomarer Term, dann ist das Substitutionsergebnis identisch mit dem Substituens, falls das Substituendum mit dem Substitutionsort zusammenfällt; ist das nicht der Fall, ist der Substitutionsort das Substitutionsergebnis. Ist der Substitutionsort ein funktoraler Term, dann ist in allen Operanda $\theta_1,...,\theta_n$ des Substitutionsortes das Substituens für das Substituendum zu substituieren und ϕ^n auf die erzielten Substitutionsergebnisse anzuwenden. Für jede der drei Möglichkeiten ist ein Beispiel zu betrachten: (i) Das Ergebnis der Substitution von '5' für 'x' in 'x', also ['5','x','x'], ist '5'. (ii) Das Ergebnis der Substitution von '4' für '5' in 'x', also ['4','5','x'], ist 'x'. (iii) Das Ergebnis der Substitution von '3' für 'x' in 'x+(5+x)', also ['3','x','x+(5+x)'], wird bestimmt indem zunächst die Substitution in den Operanden 'x' und '5+x' durchgeführt, also ['3','x','x'] und ['3','x','5+x'] ermittelt wird. Das erste Substitutionsergebnis ist '3' (nach (i)). Im zweiten Fall muss weiter zerlegt werden: Es werden zunächst die Substitutionen für beide Operanda des Substitutionsortes, '5+x', durchgeführt, also ['3','x','5'] und wieder ['3','x','x']. Im ersten Fall ergibt sich nach (ii) '5' als Substitutionsergebnis, im zweiten Fall wieder '3'. Damit ergibt sich '5+3' als Ergebnis der Substitution ['3','x','5+x']. Schließlich ergibt ['3','x','x+(5+x)'] insgesamt '3+(5+3)'.

Ü18 Bestimmen Sie mit Hilfe der vorgelegten Erläuterung folgende Substitutionsergebnisse:

a) ['5+3','x','x']

b) ['5+3','y','x']

c) ['5+3','x','die-Wurzel-von(x) · 2']

d) ['x','3','die-Wurzel-von(3) · (3+3)'].

Damit lässt sich die Substitution von Termen θ^* für atomare Terme $\theta+$ in Formeln Γ erläutern: (i) Wenn Γ eine Atomformel $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$ ist, dann ist $[\theta^*,\theta+,\Gamma]$ identisch mit $\Phi^n([\theta^*,\theta+,\theta_1],...,[\theta^*,\theta+,\theta_n])$. (ii) Wenn Γ eine Junktorformel $\psi^n(\Gamma_1,...,\Gamma_n)$ ist, dann ist $[\theta^*,\theta+,\Gamma]$ identisch mit $\psi^n([\theta^*,\theta+,\Gamma_1],...,[\theta^*,\theta+,\Gamma_n])$. (iii-i) Wenn Γ eine Quantorformel $\Pi\omega\mathrm{B}$ und ω identisch mit $\theta+$ ist, dann ist $[\theta^*,\theta+,\Gamma]$ identisch mit $\Pi\omega\mathrm{B}$. (iii-ii) Wenn Γ eine Quantorformel $\Pi\omega\mathrm{B}$ und ω verschieden von $\theta+$ ist, dann ist $[\theta^*,\theta+,\Gamma]$ identisch mit $\Pi\omega[\theta^*,\theta+,\mathrm{B}]$.

Substitutionsort Γ und Substitutionsergebnis $[\theta^*,\theta+,\Gamma]$ sind Formeln; Substituendum $\theta+$ und Substituens θ^* sind Terme; das Substituendum $\theta+$ ist ein atomarer Term. Die Erläuterung läuft am Formelaufbau entlang und greift in ihrer Basis, der Substitution von Termen für Terme in Atomformeln, auf die Substitution von Termen für Terme in Termen zurück. Im Folgenden sind für die drei in der Definition unterschiedenen Fälle je zwei Beispiele anzugeben. (i) Γ ist Atomformel: ['5+3','x','Ist-Primzahl(der-Nachfolger-von(x))'] ist identisch mit 'Ist-Primzahl(der-Nachfolger-von(5+3))'. (ii) Γ ist Junktorformel: ['der-Nachfolger-von(2)','z','$z>y \wedge y<z$'] ist identisch mit 'der-Nachfolger-von(2)>$y \wedge y$<der-Nachfolger-von(2)'; ['y','2','$\neg$Ist-Primzahl(x)'] ist identisch mit '$\neg$Ist-Primzahl(x)'. (iii) Γ ist Quantorformel $\Pi\omega\mathrm{B}$. Hier unterscheidet die Definition zwei Fälle: (iii-i) ['3','z','$\bigvee z$ Ist-Primzahl(z)'] ist identisch mit '$\bigvee z$ Ist-Primzahl(z)'; die durch den Quantor gebundene Variable (hier: 'z') ist nicht substituierbar. (iii-ii) ['3','4','$\bigvee z$ Ist-Summe-von-und(z,4,4)'] ist identisch mit '$\bigvee z$ Ist-Summe-von-und(z,3,3)'.

Ü19 Bestimmen Sie mit Hilfe der vorgelegten Erläuterung folgende Substitutionsergebnisse:

a) ['3','x','die-Wurzel-von(x)>x+1']

b) ['z','3','Ist-Primzahl(3) $\wedge$ 3>die-Wurzel-von(3)']

c) ['3','x','$\bigvee x$ Ist-Primzahl(x)']

d) ['die-Wurzel-von(x)','3','$\bigwedge y$ y>3']

e) ['die-Wurzel-von(x)','y','y>y $\wedge$ $\bigvee y$ y>3'].

An dieser Stelle lässt sich die nochmals eingespielte Regelformulierung [1]** sowie die zugeordnete Spezialisierung von ihrer grammatischen Seite her abschließend erläutern:

[1]** Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ξ gewonnen hat und θ ein geschlossener Term ist, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ für ξ in Δ folgern

Das Beispiel [2] kann jetzt in der inzwischen eingeführten Notation dargestellt werden:

[2]* Ξ $\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich (x))

Also Mensch(Sokrates) $\rightarrow$ Sterblich (Sokrates)

'$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich (x))' ist die Universalquantifikation der Formel 'Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich (x)' bezüglich 'x'. Diese Universalquantifikation sei in der ersten Zeile von [2]* durch eine geeignete Redehandlung gewonnen. Damit ist das Regelantezedens von [1]** erfüllt. In 'Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich (x)' ist genau 'x' frei. Das Ergebnis der Substitution von 'Sokrates' für 'x' in 'Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich (x)' ist nach Klausel (ii) aus der Definition der Substitution von Terme für atomare Terme in Formeln 'Mensch(Sokrates) $\rightarrow$ Sterblich (Sokrates)'. Diese Formel darf gemäß dem Regelsukzedens von [1]** gefolgert werden. Die Folgerung wird durch die Äußerung des Satzes in der zweiten Zeile von [2]* vollzogen.

Ü20 a) Geben Sie in einer Tabelle an, welche Mitteilungszeichen ('Δ', 'ξ', 'θ') sich in der Anwendung der Regel [1]** auf das Beispiel [2]* auf welche Ausdrücke beziehen!

b) Verschaffen Sie sich ein vorläufiges Verständnis der unter [1]** notierten Regel, indem Sie ein weiteres Beispiel diskutieren!

Zuletzt wird die Substitution von Formeln A für Formeln B in Formeln Γ zu erklärt. Diese Form der Substitution ist vornehmlich für den metalogischen Bedarf (↑5.) bestimmt und kann bei der ersten Lektüre überschlagen werden. Wenn die Inhalte bis Kapitel 4 eingeübt wurden, bietet es sich an, auf diesen Abschnitt zurückzukommen. – Die Substitution von Formeln für Formeln in Formeln ist ähnlich wie die anderen Substitutionsbegrifflichkeiten definiert: (i) Wenn B mit Γ identisch ist, dann ist $[\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma]$ identisch mit A. (ii) Wenn Γ eine atomare Formel und B nicht mit Γ identisch ist, dann ist $[\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma]$ identisch mit Γ. (iii) Wenn Γ Junktorformel $\psi^n(\Gamma_1,...,\Gamma_n)$ und B nicht mit Γ identisch ist, dann ist $[\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma]$ identisch mit $\psi^n([\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma_1],...,[\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma_n])$. (iv) Wenn Γ Quantorformel $\Pi\omega\Delta$ und B nicht mit Γ identisch ist, dann ist $[\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma]$ identisch mit $\Pi\omega[\mathrm{A},\mathrm{B},\Delta]$. – Anders als bei der Substitution von Termen für atomare Terme in Termen oder Formeln, muss das Substituendum bei der Substitution von Formeln für Formeln in Formeln keine Atomaritätsforderung erfüllen, muss also keine atomare Formel sein.

Wenn nun das Substituendum B mit dem Substitutionsort Γ zusammenfällt, dann ist mit (i) das Substituens A das Ergebnis der Substitution: ['$\bigwedge y\ y>3$','Ist-Primzahl(4)','Ist-Primzahl(4)'] ist identisch mit '$\bigwedge y\ y>3$'. Sind Substituendum B und Substitutionsort Γ verschieden, dann sind die drei Formeltypen zu unterscheiden: (ii) Im atomaren Fall ist der Substitutionsort Γ das Substitutionsergebnis Δ: ['$\bigwedge y\ y>3$','$4>2$','Ist-Primzahl(4)'] ist identisch mit 'Ist-Primzahl(4)'. (iii) Im junktoralen Fall ist in den Operandaformeln zu substituieren: ['$\bigwedge y\ y>3$','$2>z$','$2>z \rightarrow (z=z \wedge 2>z)$'] ist '$\bigwedge y\ y>3 \rightarrow (z=z \wedge \bigwedge y\ y>3)$'. (iv) Im quantoralen Fall ist innerhalb der quantifizierten Formel zu substituieren: ['$\bigwedge y\ y>3$','$2>z$','$\bigwedge x\ (2>z \rightarrow x<2)$'] ist '$\bigwedge x\ (\bigwedge y\ y>3 \rightarrow x<2)$'.

3.3 Ergänzungen – Erweiterungen – Vertiefungen

Die Standardgrammatik erster Stufe bildet einen ausbaufähigen Kernbestand an grammatischen Mustern. Einige Erweiterungen sind kursorisch anzusprechen (3.3.2 bis 3.3.4). Wie zu erwarten, existieren auch zur Standardgrammatik und ihren Erweiterungen Alternativen, die das Bild von der Rationalen Grammatik ergänzen (3.3.5). Alle Rationalen Grammatiken sind jedoch von einem einheitlichen Prinzip, dem Funktionalitätsprinzip, regiert. Die Erläuterung dieses Prinzips (3.3.1) sowie Fragen nach seiner materialen Ausfüllung (3.3.6) vertiefen das Verständnis der vorgestellten Grammatiken.

3.3.1 Das Funktionalitätsprinzip

Allen Rationalen Grammatiken, den bereits erörterten mit ihren Erweiterungen und den noch zu diskutierenden Alternativen, liegt insofern ein gemeinsames ›Bauprinzip‹ zugrunde, als sie dem (auf Frege zurückgehenden) funktionalen Grundprinzip genügen. Informell ausgedrückt: Jedes molekulare Gebilde μ, das Operatum, entsteht aus der Anwendung eines n-stelligen Operators τ^n auf n Operanden $o_1,...,o_n$, hat also stets die Struktur $\tau^n(o_1,...,o_n)$. In einer Grammatik erster Stufe gibt es demnach folgende Operatoren, Operanden und Operata:

[16]	Operator τ^n	Operanden $o_1,...,o_n$	Operatum μ
	Funktor ϕ^n	Terme $\theta_1,...,\theta_n$	Terme $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$
	Prädikator Φ^n	Terme $\theta_1,...,\theta_n$	Atomformeln $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$
	Junktor ψ^n	Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$	Junktorformeln $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$

Quantifikator Π	Variable ω	Quantor $\Pi\omega$
Quantor $\Pi\omega$	Formel Δ	Quantorformel $\Pi\omega\ \Delta$
Performator Ξ	Aussage Δ	Satz $\Xi\Delta$

Bezüglich eines Operators lassen sich drei Bestimmungsfragen aufwerfen: (i) Die Frage nach der Stellen(an)zahl lautet: Wie viele Stellen hat der Operator? (ii) Die Frage nach dem Operandentyp liest sich so: Was sind passende Operanden für den Operator bzw. auf welche Operanden kann man den Operator anwenden bzw. welche Operanden werden von dem Operator bestimmt? (iii) Die Frage nach dem Anwendungsergebnis, dem Operatatyp, lässt sich so notieren: Was ist das Ergebnis der Anwendung des Operators auf die Operanden bzw. ein Ausdruck welcher Kategorie wird durch die Anwendung des Operators auf die Operanden erzeugt? Kurz: Welches Operatum wird durch die Anwendung des Operators auf wie viele Operanden welchen Typs erzeugt?

Von den atomaren Ausdrücken (↑3.2.1) sind Konstanten, Parameter und Variablen Operanden, während alle übrigen Operatoren sind. Dabei stellen Quantifikatoren, Funktoren und Prädikatoren termbestimmende Operatoren dar, die Quantifikatoren genauer variablenbestimmende. Demgegenüber sind Performatoren und Junktoren formelbestimmende Operatoren; Performatoren sind überdies nur auf Aussagen anwendbar.

Ü21 Zeichnen Sie das Schaubild [3] neuerlich, indem Sie die atomaren Ausdrücke nach ihren funktionalen Charakteristika Operator/Operand, termbestimmend/formelbestimmend und term-/quantor-/formel-/satzerzeugend einteilen!

τ^n ist der Hauptoperator von $\tau^n(o_1,...,o_n)$; $o_1,...,o_n$ bilden entsprechend die Hauptoperanden. Operatoren von Operanden o_i oder von Operanden o_j von Operanden o_i usf. sind Nebenoperatoren (ersten, zweiten,...*k*-ten Grades). Hauptoperator von 'Ist-Primzahl(x) ∨ ¬Ist-Primzahl(x)' ist der Adjunktor '__∨__'; dahingegen ist der Negator '(__)' ein Nebenoperator ersten Grades, obgleich er Hauptoperator der Teilformel '¬Ist-Primzahl(x)' ist. ‘Ist-Primzahl(..)’ ist im linken Hauptoperand Hauptoperator, also in der Gesamtformel Nebenoperator ersten Grades. Im rechten Hauptoperand ist derselbe Prädikator Nebenoperator ersten Grades; also ist er in der Gesamtformel Nebenoperator zweiten Grades. Hauptoperanden sind die beiden Adjunkte, Nebenoperanden ersten Grades die Variablen 'x' und das Negatum des zweiten Adjunkts; ferner ist 'x' auch Nebenoperand zweiten Grades. In Übereinstimmung mit der bisher geübten Praxis werden Formeln nach Ihrem Hauptoperator benannt. Der Hauptoperator wird auch als dominierender, herrschender, regierender Operator angesprochen!

Ü22 Bestimmen Sie die Haupt- und Nebenoperatoren, sowie die Haupt- und Nebenoperanda der unter [8], [9] und [12] notierten Formeln! Geben Sie jeweils den Grad der Nebenoperatoren und Nebenoperanda an!

Betrachtet man das funktionale Grundprinzip aus einer strukturellen Perspektive, dann ist es Ausdruck eines Ansatzes, der sprachliche Gebilde mit Hilfe des Funktionsgedankens konzipiert: *n*-stellige Operationen sind, mathematisch betrachtet, solche Funktionen, deren Argumente *n*-Tupel sind; Operatoren werden dargestellt als Operationen, Operanden bilden die Glieder des Argument-*n*-Tupels der Operationen, und Operata stellen den Wert der Operation für das jeweilige Argument-*n*-Tupel dar. So sind etwa Quantifikatoren einstellige Operationen, die 1-Tupel von Variablen (als Argument) Quantoren (als Wert) zuordnen. Die oben formulierten Bestimmungsfragen gehen also auf Argumentanzahl, Argument- und Werttyp.

Eine solche strukturelle Betrachtung ist dann angezeigt, wenn man – aus Ökonomiegründen – mit größtmöglicher Allgemeinheit über bestimmte Grammatiken theoretisieren möchte. Ob man hingegen in konkreten Kontexten vereinbart, Operatoren stets links von ihren Operanden zu notieren (Präfixnotation), oder ob man liberalere und üblichere Schreibweisen zulässt, ist ebenso wie die Bevorzugung stenographischer Notation für die strukturelle Grundidee gleichgültig.

Da in sprachphilosophischen Zusammenhängen häufig von (›selbstständigen‹) Teilausdrücken und (›unselbstständigen‹) Ausdrucksteilen die Rede ist, sei abschließend festgesetzt, dass alle Operatoren und Operanda eines Ausdrucks (Term, Formel, Satz) und auch alle Operatoren und Operanden eines Teilterms oder einer Teilformel eines Ausdrucks sowie der Ausdruck selbst Teilausdrücke desselben sind; Ausdrucksteile sind hingegen Bestandteile von atomaren Teilausdrücken, können selbst aber keiner grammatischen Kategorie zugeschlagen werden. Demgemäß sind etwa 'Ist-Vater-von' und 'J. S. Bach' Teilausdrücke der Aussage 'Ist-Vater-von(J. S. Bach, P. E. Bach)', während 'von' Ausdrucksteil des Prädikators und 'Bach' Ausdrucksteil beider Nominatoren ist. – Ausdrucksteile werden auch als synkategorematische Ausdrücke angesprochen; Teilausdrücke sind demgegenüber kategorematische Ausdrücke!

Ü23 Ermitteln Sie alle Teilausdrücke der unter [12] notierten Quantorformeln!

3.3.2 Termquantoren und Quantorterme

Bedarf nach einer Erweiterung von Standardsprachen erster Stufe tritt schon dann auf, wenn man das Repertoire um Ausdrücke wie 'der Gegenstand, von dem das und das gilt' bzw. 'der/die/das so-und-so' oder 'die Menge all der Gegebenheiten, die die und die Eigenschaft besitzen' erweitern möchte. Dazu benötigt man variablenbindende, formelbestimmende und termerzeugende Operatoren.

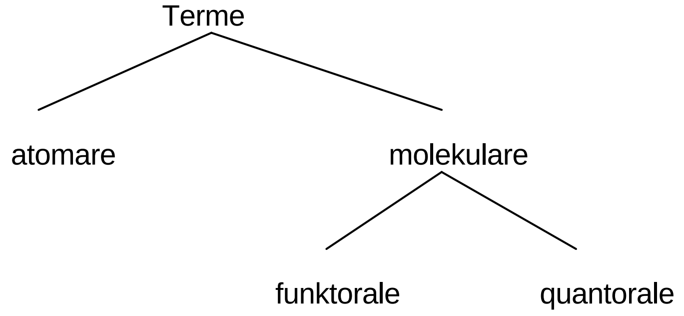
Solche Operatoren kommen mit den bisher behandelten Quantoren darin überein, dass sie aus der Anwendung eines Operators π auf eine Variable ω entstehen und ihrerseits auf Formeln angewendet werden; daher soll von Termquantoren und entsprechend von Termquantifikatoren die Rede sein. Wendet man einen Termquantor $\pi\omega$ auf eine Formel Δ an, dann entsteht – anders als bei (Formel)Quantoren – ein Quantorterm $\pi\omega\Delta$. Ist dabei in Δ höchstens ω frei, entsteht wiederum ein Nominator. In Ergänzung von [16] lässt sich festhalten:

[16]*

Operator τ^n	Operanden $o_1,...,o_n$	Operatum μ
Termquantifikator π	Variable ω	Termquantor $\pi\omega$
Termquantor $\pi\omega$	Formel Δ	Quantorterm $\pi\omega\Delta$

Enthält eine Sprache neben den formelerzeugenden Quantoren auch Termquantoren, dann spricht man erstere naheliegenderweise als Formelquantoren an; analog soll von Formelquantifikatoren die Rede sein. Damit ist zugleich die Klasse der Terme erweitert, die nun ebenso wie die Formelmenge Gegenstand einer doppelten Partition ist: Nach ihrem Aufbau zerfallen die Terme in atomare, funktorale und quantorale oder Quantorterme, wobei die beiden letzteren die molekularen Terme bilden; für Sprachen mit Quantortermen ist Schaubild [5] zu [5]* zu erweitern:

[5]*



Der Umstand, dass im Falle von Quantortermen Formeln Teilformeln von Termen sind, macht es notwendig, in Sprachen mit Termquantoren den Term- und Formelbegriff ›in einem Zuge‹

bzw. ›simultan‹ zu etablieren. Man hat nicht nur bei der Bestimmung der Formeln auf Terme, sondern auch bei der Bestimmung der Terme auf Formeln zurückzugreifen. Der Vorzug ist offenkundig: Das gesamte Prädikationspotential wird in seinen Kombinationsmöglichkeiten für die Nomination nutzbar gemacht. So kann zum Beispiel innerhalb des (Quantor)Terms 'der/die/das *x* (*x* ist größtes Gemälde der Welt)' auf eine Eigenschaft von '*x*' Bezug genommen werden. Diese Möglichkeit war bisher den Formeln vorbehalten. Eine derartige simultan-induktive Charakterisierung sieht ungefähr so aus: (i) Atomare Terme, d.h. Variablen, Parameter, Konstanten, sind Terme. (ii) Wenn $\theta_1,...,\theta_n$ Terme sind, dann ist auch das Ergebnis der Anwendung eines *n*-stelligen Funktors ϕ^n auf $\theta_1,...,\theta_n$ ein (funktoraler) Term. (iii) Wenn $\theta_1,...,\theta_n$ Terme sind, dann ist das Ergebnis der Anwendung eines *n*-stelligen Prädikators Φ^n auf $\theta_1,...,\theta_n$ eine (Atom)Formel. (iv) Wenn $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ Formeln sind, dann ist das Ergebnis der Anwendung eines *n*-stelligen Junktors ψ^n auf $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ eine (Junktor)Formel. (v) Wenn Γ Formel ist, dann ist das Ergebnis der Anwendung eines Formelquantors $\Pi\omega$ auf Γ eine (Quantor)Formel. (vi) Wenn Γ eine Formel ist, dann ist das Ergebnis der Anwendung eines Termquantors $\pi\omega$ auf Γ ein (Quantor)Term. Nur was (i), (ii) und (vi) bzw. (iii), (iv) und (v) genügt, soll Term bzw. Formel sein.

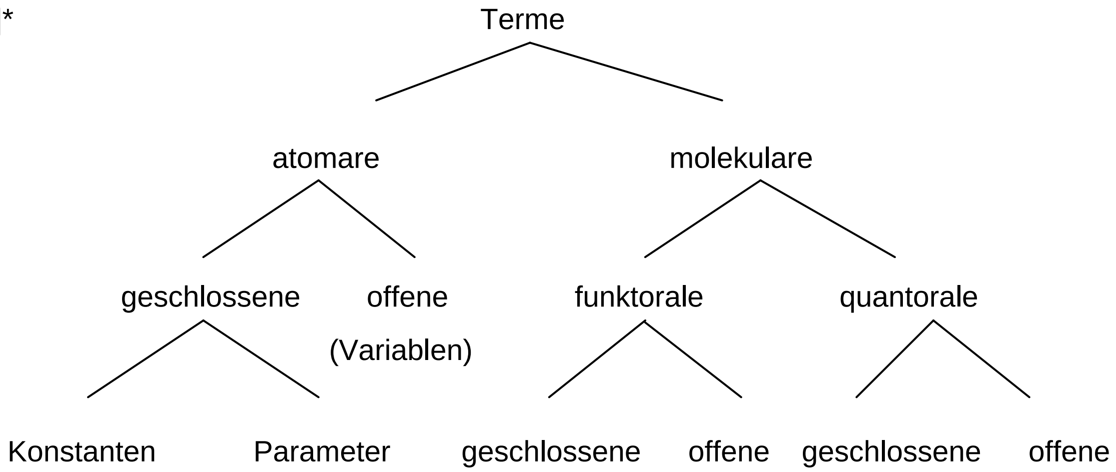
Der (häufig mit 'the ω__' abgekürzte) Kennzeichnungsoperator 'das-/die-/derjenige ω__' und der (stenographisch mit '{ω | __}' notierte) Klassenbildungsoperator 'die Menge der ω___' sind die in der Literatur am häufigsten diskutierten und verwendeten Termquantoren. In Analogie zur Formelseite kann man dann von der Kennzeichnungs-/Klassen-/...quantifikation einer Formel Δ bezüglich einer Variable ω sprechen, wenn der Term aus der Anwendung des jeweiligen Operators $\pi\omega$ auf Δ entsteht. So ist etwa 'the *x* ($5>x \wedge 3<x$)' eine Kennzeichnungsquantifikation der Formel '$5>x \wedge 3<x$' bezüglich '*x*', und '{*y* | Ist-Philosoph (*y*)}' ist eine Klassenquantifikation der Formel 'Ist-Philosoph (*y*)' bezüglich '*y*'.

Die Arbeitsweise der oben niedergelegten Term/Formelcharakterisierung kann man sich an folgendem Beispiel verdeutlichen: Ist '$\bigvee y$ (Gerade-Zahl(*y*) $\wedge$ *y*>the *x* ($5>x \wedge 3<x$))' eine Formel der hier beispielshalber unterlegten arithmetischen Sprache? Folgende Betrachtung erlaubt eine affirmative Antwort: '3' und '*x*' sind atomare Terme, damit nach (i) Terme. Mithin ist '$3<x$' nach (iii) Formel. Eine analoge Betrachtung zeigt, dass '$5>x$' Formel ist. Damit ist nach (iv) auch '$5>x \wedge 3<x$' Formel. Gemäß (vi) ist damit 'the *x* ($5>x \wedge 3<x$)' Term. Da '*y*' nach (i) Term ist, stellt auch '*y*>the *x* ($5>x \wedge 3<x$)' nach (iii) eine Formel dar. Ebenfalls nach (iii) ist 'Gerade-Zahl(*y*)' eine Formel. Damit ist nach (v) auch das Gesamte eine Formel.

Ü24 Zeigen Sie, dass 'the *x* (Primzahl(*x*) $\wedge$ Gerade(*x*))' ein Term der unterstellten arithmetischen Sprache ist!

Die simultan-induktive Charakterisierung von Term und Formel, gewissermaßen eine Reißverschlusstaktik, verlangt auch eine analoge Bestimmung der Teilterm- und Teilformelschaft oder des Freiseins und damit der offenen und geschlossenen Terme. Den offenen und geschlossenen atomaren und funktoralen Termen sind dann die offenen und geschlossenen Quantorterme hinzuzufügen: Die in Ü24 betrachtete Ausdrucksverbindung ist ein geschlossener Quantorterm der arithmetischen Sprache; der Ausdruck '$\{y \mid y > z \wedge z$ ist Primzahl$\}$' ist ein in '*z*' offener Quantorterm einer Klassensprache. Die Erweiterung von Schaubild [7] zu [7]* ergibt ein zu [15] analoges Bild für Terme:

[7]*



Oben konnten drei Formen der Substitution charakterisiert werden: die Substitution von Termen für Terme in Termen, die Substitution von Termen für Terme in Formeln, die Substitution von Formeln für Formeln in Formeln. Mit dem Einbezug der Quantorterme ist auch die Substitution von Formeln für Formeln in Termen zu berücksichtigen.

Individuenkonstanten/Eigennamen, Funktoren und Termquantifikatoren sollen als <u>nominative Redeteile</u> zusammengefasst werden. Diese Ausdrucksgruppe verlangt eine Gleichbehandlung in einführungstheoretischer Hinsicht. Diese hängt, intuitiv gesprochen, damit zusammen, dass jeder parameterfreie Nominator einen und nur einen Gegenstand bezeichnen soll (↑7.).

3.3.3 Stufenbildung

Eine andere Erweiterung von Standardgrammatiken erster Stufe besteht in der Stufenbildung. Diese kommt dadurch zustande, dass man auch Prädikatoren $^2\Phi^n$ <u>zweiter</u> oder <u>höherer Stufen</u> $^m\Phi^n$ zulässt; der linke Index zeigt die Stufigkeit, der rechte die Stelligkeit an. Diese finden dann Anwendung auf Prädikatoren erster oder – allgemein – nächstniedriger Stufe; außerdem werden auch die Prädikatorvariablen in Betrieb genommen.

Das führt zu einer Erweiterung des Quantorkonzeptes: Individuenvariablen bindende Quantoren sind von Prädikatorenvariablen (verschiedener Stufe) bindenden Quantoren zu unterscheiden. In der folgenden Liste sind in der linken Spalte die Beispiele, in der rechten die zugehörigen Strukturformeln notiert; so entsteht c) aus der Anwendung eines einstelligen Prädikators dritter Stufe auf ein einstelliges Prädikat zweiter Stufe:

[17] a) Ist-Vater-von(J. S. Bach,P. E. Bach) $^{1}\Phi^{2}\ (\theta,\theta')$
b) Ist-asymmetrisch(Ist-Vater-von) $^{2}\Phi^{1}\ (^{1}\Phi^{2})$
c) Ist-Relationsattribut(Ist-asymmetrisch) $^{3}\Phi^{1}\ (^{2}\Phi^{1})$

Die Aussage '$\bigwedge {}^{1}F^{2}$ (Ist-asymmetrisch($^{1}F^{2}$) $\rightarrow$ Ist-irreflexiv($^{1}F^{2}$))' enthält den eine Prädikatorvariable erster Stufe bindenden Universalquantor '$\bigwedge {}^{1}F^{2}$'.

Wie jede Erweiterung der Standardgrammatik schafft auch die Stufenerhöhung neue Ausdrucksmöglichkeiten. Muss man z.B. in einer Standardgrammatik erster Stufe den Identitätsprädikator durch konstruktionssprachliche Regeln, jedenfalls aber unter Verwendung konstruktionssprachlicher Redeteile etablieren, so kann dies in einer Sprache zweiter Stufe über eine innersprachliche Definition erfolgen:

[18] Definition: $\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigwedge {}^{1}F^{1}\ ({}^{1}F^{1}(x) \leftrightarrow {}^{1}F^{1}(y)))$

Individuen sind genau dann identisch, wenn sie in allen Eigenschaften übereinkommen. Diese Definition ist jedenfalls dann zielführend, wenn man mit '$\bigwedge {}^{1}F^{1}$' wirklich alle in der Sprache darstellbaren Eigenschaften erfassen möchte. Die Darstellung von Eigenschaften in der Sprache kann z.B. mit Hilfe des Lambda-Operators (↑3.3.4) geschehen.

Ü25 Bestimmen Sie die Stufe der Prädikatoren in den folgenden Aussagen:

a) Ist-Launenhaft(Doris)

b) Ist-eine-Untugend(Ist-Launenhaft)

c) Ist-moralische-Kategorie(Ist-Untugend)!

Die Stufenbildung dient dem Zweck der Vergegenständlichung: Man möchte nicht nur über Doris, sondern auch über die Eigenschaft, launenhaft zu sein, reden können; und man möchte nicht nur diese Eigenschaft, sondern auch die höherstufige Eigenschaft, eine Untugend zu sein, zum Thema machen können. Der Vergegenständlichungstendenz liegt wiederum ein redeökonomisches Interesse zugrunde. Bei der Grundlegung der

Klassensprache werden alternative Vergegenständlichungsstrategien vorgestellt und mit der Stufenbildung verglichen (↑14.).

3.3.4 Dispositoren und Lambda-Operatoren

Ferner kann man Standardsprachen erster Stufe durch Dispositoren zu Disposprachen erweitern: *n*-stellige Dispositoren ρ_{n+1} sind an den *n* ersten Stellen termbestimmende, an der *n*+1 Stelle formelbestimmende Operatoren, die Formeln erzeugen. Dispositoren sind also Operatoren mit kategorial heterogenen Operanden. So entsteht aus der Anwendung des 2+1-stelligen Dispositors 'glaubt(..,..,__)' auf die Nominatoren 'Jahwe', 'Abraham' und die hier nicht weiter strukturierte Formel 'dass Abraham seinen Sohn opfern will' die Aussage 'glaubt (Jahwe, Abraham, dass Abraham seinen Sohn opfern will)'. Dispositoren wie 'glaubt, dass...', 'will, dass...' usf. stehen für einige Varianten der epistemischen Logik im Zentrum des Interesses.

Im Vorgriff auf die Ausführungen zum Grammatischen Instrumentalismus (↑3.4.1) ist allerdings festzuhalten, dass man eine Aussage der Art 'Jahwe glaubt Abraham, dass Abraham seinen Sohn opfern will' nicht mit Hilfe eines Dispositors als Hauptoperator bestimmen *muss*. Man mag auch den vierstelligen Prädikator ‘glaubt-dass-opfern-will(..,..,..,..)’ als Hauptoperator ansetzen, der auf die Terme 'Jahwe', 'Abraham', 'Abraham', 'seinen Sohn' angewendet wird, und so die Elementaraussage ‘glaubt-dass-opfern-will(Jahwe,Abraham,Abraham,seinen Sohn)' ergibt.

Die in 'x' offene Aussageform 'Ist-Primzahl(x) $\wedge$ (x>100 $\wedge$ 1000>x)' beschreibt eine Eigenschaft, für die in der arithmetischen Sprache kein eigener Prädikator bereitsteht. Das gilt für die überwiegende Mehrzahl aller Aussageformen in allen Sprachen. Um über die Möglichkeit zu verfügen, (hier einfachheitshalber die in genau einer Variablen ω offenen) Aussageformen in Prädikatoren zu überführen, wird der Operator $\lambda\omega$ benutzt, der, in der Feinauflösung, aus Quantifikator und Variable aufgebaut ist. Wendet man den Lambda-Operator $\lambda\omega$ auf eine Formel Δ an, dann entsteht ein einstelliger Prädikator $\lambda\omega\Delta$(..). Im Beispiel: 'λx (Ist-Primzahl(x) $\wedge$ (x>100 $\wedge$ 1000>x))(..)'. Damit ist z.B. 'λx (Ist-Primzahl(x) $\wedge$ (x>100 $\wedge$ 1000>x))(3)' eine Formel, genauer: eine (falsche) Elementaraussage der arithmetischen Sprache. Das durch Anwendung des Lambda-Operators erzeugte Operatum ist als Prädikator seinerseits ein Operator.

Die Bedeutung des Lambda-Operators wird man so fixieren, dass eine Aussage, die durch Anwendung des Lambda-Prädikators auf einen Nominator entsteht, dann und nur dann wahr ist, wenn das Ergebnis der Substitution des Nominators für die durch den Lambda-Operator gebundene Variable in der Aussageform wahr ist: 'λx(Ist-Primzahl(x) $\wedge$ (x>100 $\wedge$ 1000>x))(3)

↔ (Ist-Primzahl(3) ∧ (3>100 ∧ 1000>3))' soll in der jeweiligen Sprache wahr sein. Bei der späteren Verwendung wird statt des griechischen Buchstabens Lambda der Buchstabe '**l**' benutzt. Das hat den rein terminologischen Grund, dass griechischen Buchstaben nur in der metasprachlichen Rede Verwendung finden sollen (↑6.1).

Die Verwendung des Lambda-Operators legt sich z.B. dann nahe, wenn man in der Analysesprache zu einer gegebenen Sprache über alle in dieser Sprache beschreibbaren Eigenschaften nachdenken will. Dazu hat man zunächst den Eigenschaftsbegriff, genauer: den Funktor 'die-Eigenschaft-von(..)' zu etablieren; passende Operanden für die freie Stelle sind Prädikatornamen. Da intuitiv als Eigenschaft nicht nur das gelten soll, was durch die (normalen) Prädikatoren beschrieben wird, sondern auch all das, was die in einer Variablen offene Aussagenformen beschreiben, müssen diese in Prädikatoren konvertiert werden, von denen man in der Analysesprache dann wiederum Namen bilden kann.

3.3.5 Alternative Grammatiken

Die skizzierte Grammatik erster Stufe und ihre Erweiterungen bilden ein Standardreservoir. Aber auch innerhalb der Rationalen Grammatik gibt es – hier wenigstens zu erwähnende – Alternativen. Hinzuweisen ist etwa auf die der syllogistischen Logik zugrundeliegende aristotelische Grammatik, auf den (verwandten) kategorialen Rahmen, den Lesniewski der Trias von Protothetik, Ontologie und Mereologie vorgibt, oder auf Ansätze, die einer alternativen Idee der Prädikation folgen.

Nach der Standardanalyse ist die Aussage '2 ist eine Primzahl' als 'Ist-eine-Primzahl(2)' zu bestimmen, als aufgebaut also aus dem einstelligen Prädikator 'Ist-eine-Primzahl(..)' und der Konstante '2'. Aus dem zu analysierenden Gebilde kann man aber auch die Kopula 'ist', genauer 'Ist(..,__)', als Operator ›herausbrechen‹. Dieser Operator ist dann auf den Nominator '2' und den Prädikator 'Primzahl' anzuwenden: 'Ist(2,Primzahl)'. Prädikatoren sind bei dieser Zugangsweise keine Operatoren, sondern Operanden; das Wörtchen 'ist(..,__)' stellt einen kategorial heterogenen Prädikationsoperator dar.

Nach der Standardanalyse werden Aussagen der Art '2 ist keine Primzahl' analysiert als Negationen, wobei die Aussage '2 ist eine Primzahl' Negatum ist. Baut man die soeben gegebene Analyse mit ein, dann ergibt sich insgesamt als Analysans: 'nicht(Ist-eine-Primzahl(2))'. Der alternative Ansatz setzt hier den negativen Ausdruck 'Ist-nicht(..,..)' als Operator an, die Gebilde '2' und 'Primzahl' als Operanden: 'Ist-nicht(2,Primzahl)'. Zu unterscheiden ist also ein affirmativer und ein negativer Prädikationsoperator. Andere Ansätze kennen auch einen neutrativen Prädikationsoperator: 'Ist-unbestimmt-ob(2,Primzahl)'.

Eine Aussage mit einem relationalen Prädikator, z.B. '2 ist größer als 1', wird mit 'Ist(2,1,>)' wiedergegeben. Die Prädikationsoperatoren sind also *n*-stellige Operatoren, wobei die ersten *n*-1 Operanda Terme sind und der *n*-te Operand ein Prädikator ist.

Die Standard- und Nicht-Standardanalyse für den einfachsten Fall nochmals im Vergleich:

[19]	2 ist eine Primzahl	2 ist keine Primzahl
a)	Ist-eine-Primzahl(2)	nicht(Ist-eine-Primzahl(2))
b)	Ist(2, Primzahl)	Ist-nicht(2, Primzahl)

Die aristotelische Syllogistik folgt der Idee, alle Aussagen in einen Prädikationsoperator und zwei (als allgemein aufgefasste) Terme zu zerlegen. So wird etwa die Aussage 'Alle Griechen sind Menschen' durch 'Grieche a Mensch' bzw. – um auch hier das Funktionalitätsprinzip zu dokumentieren – 'a(Grieche,Mensch)' wiedergegeben: die Prädikationskopula 'a(- -,- -)' wird auf zwei Terme angewendet; der Ausdruck 'alle' sowie der Ausdruck 'sind' werden also in der Prädikationskopula 'a(- -,- -)' zusammengezogen. Ebenso umfasst etwa die Prädikationskopula 'i(- -,- -)' die Worte 'einige' und 'sind', wenn die Aussage 'Einige Philosophen sind Vampire' mit 'Philosoph i Vampir' bzw. mit 'i(Philosoph,Vampir)' wiedergegeben wird. Im Vergleich:

[20] Alle Griechen sind Menschen

a) a(Grieche,Mensch)

b) $\bigwedge x$ (Ist-Grieche(x) $\rightarrow$ Ist-Mensch(x))

Einige Philosophen sind Vampire

a) i(Philosoph,Vampir)

b) $\bigvee y$ (Ist-Philosoph(y) $\wedge$ Ist-Vampir(y))

Die Formulierung der Schlussregeln bezieht sich ausdrücklich auf die jeweilige grammatische Gestalt der Prämissen und der Konklusion: Die logischen Regeln sitzen auf der grammatischen Struktur der Aussagen auf. Eine gültige syllogistische Schlussregel könnte so formuliert werden: Wenn man eine Aussage der Art 'S a P' und eine Aussage der Art 'P a Q' gewonnen hat, dann darf man eine Aussage der Art 'S a Q' folgern.

Da die aristotelische Logik keine Möglichkeit hat, relationale Sachverhalte (über mehrstellige Prädikatoren) zu erfassen, zeichnet sie nur einen Bruchteil der in Alltag und Wissenschaft benötigten Schlüsse nach: Die Art des grammatischen Zugriffs beschränkt die Reichweite der darauf gründenden Logik. Eine Möglichkeit, zwischen alternativen Grammatiken eine Wahl zu treffen, besteht darin, die Leistungsfähigkeit der auf ihnen aufruhenden Folgerungsregeln zu vergleichen.

3.3.6 Zur ›Deduktion‹ grammatischer Kategorien

Die Existenz alternativer Grammatiken zerstört nicht nur eine leicht aufkommende Einzigkeitsillusion bzgl. *der* Rationalen Grammatik, indem sie mit Auswahlproblemen konfrontiert, sondern führt auch auf die Frage, wie man grammatische Kategorien und Kategoriensysteme ›gewinnt‹; denn diese sind offenkundig nicht schlicht ›gegeben‹, sondern müssen sowohl unter (Rede)Zwecken als auch für (Rede)Zwecke erzeugt werden.

Der hier verfolgte Ansatz legt es nahe, Kategorien als Artefakte der Redeorganisation zu entwickeln. Das ist exemplarisch vorgeführt für die Kategorie der Performatoren und der Aussagen (↑2.1): Man macht die Unterscheidung zwischen – in diesem Falle – performativem und propositionalen Moment plausibel und stabilisiert die Anfangsplausibilität durch Einrichtung der grammatischen Kategorien der Performatoren und der Aussagen. Analog wären die weiteren Unterscheidungen zu gewinnen. Die Ausführung dieses Programms ist indes weitgehend offen und soll hier nur als Aufgabe angezeigt werden.

Das angezeigte Desiderat ist erstens dringlich, weil die in propädeutischen Zusammenhängen en passant vermittelte Standardantwort – weil es eben Dinge, Eigenschaften, Relationen, (so und so strukturierte) Sachverhalte gebe, müsse die Sprache mit Nominatoren, ein- und mehrstelligen Prädikatoren und (so und so strukturierten) Aussagen die repräsentierenden Gegenstücke enthalten – im hier verfolgten Duktus ausgeschlossen ist. Die Diagnose lautet: Unverträglichkeit des gewählten Anfangs bei den Redehandlungen mit dem die Standardantwort beherrschenden ›korrespondistischen‹ Geist. Die als ›erste Philosophie‹ ausgezeichnete Sprachphilosophie (↑1.2) kann nur unter Verstoß gegen die früher empfohlene Vorgehensordnung (↑1.2.2) auf Termini und Thesen der Ontologie rekurrieren; die Rede von Dingen, Eigenschaften, Relationen, Sachverhalten, Tatsachen usf. ist vielmehr umgekehrt durch die bestimmten Redeinteressen genügende Abstraktion im Ausgang von Nominatoren, Prädikatoren und Aussagen usf. zu etablieren (↑8.).

3.4 Grammatischer Instrumentalismus

Die grammatischen Rahmen sind demjenigen, der eine Sprache konstituiert oder erschließt, Instrumente, die die mit den jeweiligen Sprachen gegebenen Möglichkeiten des Redehandelns (mit)determinieren. Diese instrumentalistische Haltung tritt auch bei der Interpretation von Texten und beim Umgang mit aporetischen Diskurskonstellationen deutlich hervor. Negativ formuliert: Der grammatische Instrumentalist stellt in Abrede, dass gebrauchssprachliche Gebilde ›in sich‹ oder ›an sich‹ eine oder gar genau eine grammatische Struktur besitzen. Positiv betrachtet: Der grammatische Instrumentalist ordnet gebrauchssprachlichen Gebilden eine oder auch mehrere grammatische Strukturen zu, um diskursive Zwecke zu erreichen.

Für diese Sicht ist in drei Schritten Plausibilität herzustellen: Zunächst ist die ›grammatische Bestimmungsfrage‹ der rechten Lesart zuzuführen (3.4.1). Sodann ist die Haltung des grammatischen Instrumentalisten am Existenzdisput zu exemplifizieren (3.4.2). Schließlich wird – in Aufnahme eines Ansatzes aus dem Einleitungskapitel (↑1.1.1) – die bei der Bewältigung von Aporien bewährte Idee der unterstelligen Prädikatorenverwendung ausgeweitet und einer ersten Systematisierung unterzogen (3.4.3).

3.4.1 Die grammatische ›Bestimmungsfrage‹

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung ist eine anscheinend schlichte und problemfreie Frage:

[21] Welche ist die grammatische Struktur der gebrauchssprachlichen Ausdrucksverbindung μ?

Bei oberflächlicher Lesung ist mit dieser Frage unterstellt, dass jede Ausdrucksverbindung genau eine grammatische Struktur aufweist, die nach einem wohlbestimmten Verfahren, ähnlich etwa dem Lackmustest, festzustellen ist. Dieser missverständlichen Auffassung ist die folgende Lesart gegenüberzustellen:

[22] Welche grammatischen Strukturen kann man dem in der Umgebung *U* vorkommenden gebrauchssprachlichen Sprachgebilde μ zuordnen, um bei Zugrundelegung des grammatischen Rahmens *R* den interpretativen Zweck *Z* zu erreichen?

Die in der Frage vorgenommene Bezugnahme auf Umgebung, grammatischen Rahmen und Zweck sowie den in der Rede von Struktur*en* ausgedrückten Verzicht auf die Einzigkeitspräsupposition, macht man sich an einem einfachen Beispiel klar: Unterstellt, die Ausdrucksverbindung 'Der Kanzler der BRD im Jahre 1996 ist ein wortgewaltiger Pfälzer' sei bereits als Aussage (und nicht etwa als Satz) bestimmt, dann notiert die folgende Liste einige Strukturzuschreibungen:

[23] a) der Kanzler der BRD im Jahre 1996 ist wortgewaltig $\wedge$ der Kanzler der BRD im Jahre 1996 ist ein Pfälzer

b) Ist-ein-wortgewaltiger-Pfälzer(der Kanzler der BRD im Jahre 1996)

c) Ist-ein-wortgewaltiger-Pfälzer(der-Kanzler-von-im-Jahre(die BRD, 1996))

d) Ist-wortgewaltig(der Kanzler der BRD im Jahre 1996) $\wedge$ Ist-ein-Pfälzer(der Kanzler der BRD im Jahre 1996)

e) Ist(der Kanzler der BRD im Jahre 1996, wortgewaltiger-Pfälzer)

a) ist eine Konjunktion, also eine Junktorformel, mit nicht weiter strukturierten Konjunkten als Operanden. b) ist eine Atomformel, aufgebaut aus einem einstelligen Prädikator als Operator und einem nicht weiter strukturierten Nominator als Operand. In c) erfolgt eine solche Feinkategorisierung: Der Operand ist ein funktoraler Term, aufgebaut aus einem zweistelligen Funktor als Operator und zwei Namen als Operanden. d) schreibt den Operanden aus a) weitere Strukturen zu durch die Bestimmung als atomare Aussagen, aufgebaut jeweils aus einem einstelligen Prädikator und einem nicht weiter zerlegten Term. e) ist eine atomare Aussage, aufgebaut aus einem zweistelligen affirmativen Prädikationsoperator, einem nicht weiter analysierten Nominator und einem Prädikator.

Unterlegt man einen grammatischen Rahmen, der nur Junktoren und Formeln unterscheidet, dann entfallen die vier letzen Strukturzuschreibungen; die Strukturierung c) ist ausgeschlossen, wenn der grammatische Rahmen keinen inneren Aufbau der Terme zulässt und e) folgt, im Gegensatz zu b), einer alternativen Grammatik für atomare Aussagen (↑[19], [20]). Erst der je unterlegte grammatische Rahmen erlaubt diese – oder eben eine andere – Strukturierung!

Um den Umgebungs- und Zweckbezug zu verdeutlichen, genügen drei Hinweise: (i) Steht man vor der Aufgabe, die Aussage 'Der Kanzler der BRD im Jahre 1996 ist ein wortgewaltiger Pfälzer' als Konsequenz der Aussagenklasse {'Helmut Kohl ist ein wortgewaltiger Pfälzer', 'Helmut Kohl ist der Kanzler der BRD im Jahre 1996'} auszuweisen, dann kommt man – eine zweckmäßige Strukturierung der Elemente der Prämissenklasse unterstellt – mit b), c) und e) zum Ziel. (ii) Will man hingegen aus der betrachteten Aussage schließen, dass es wenigstens ein Land *x* gibt, dessen Kanzler im Jahre 1996 ein wortgewaltiger Pfälzer ist, so ist c) zu wählen; bei den übrigen Strukturierungen wäre der entsprechende Schluss blockiert. (iii) Wer allein im Rückgriff auf die betrachtete Aussage demonstrieren will, dass es Pfälzer gibt, kommt nur mit d) zum Ziel: Um bestimmte Folgerungszusammenhänge herzustellen, werden Ausdrucksverbindungen so – oder eben auch anders – strukturiert!

Die Haltung des grammatischen Instrumentalismus empfiehlt sich auch dann, wenn man – abkürzend geredet – darüber zu befinden hat, ob ein Ausdruck synkategorematischen oder kategorematischen Charakter hat (↑3.3.1). Derartige Kontroversen werden etwa über die Worte 'Zeit', 'Raum', 'Gott' geführt: Hat man z.B. auszugehen von Individuenkonstanten wie 'die-Zeit', 'der-Raum' oder 'Gott', also von kategorematischen Ausdrücken? Oder sollte man sich nur um Wendungen wie '..redet-über-Zeit/Raum', '..lebt-in-Gott' bemühen?

Ü26 Diese Übung ist erst nach Bearbeitung von Teil 5 zu erledigen!

> Machen Sie sich die im vorletzten Absatz vorgelegte Argumentation im Einzelnen klar, indem Sie die entsprechenden Ableitungen herstellen! Sie benötigen dazu – im ersten Fall – die Regel der Identitätsbeseitigung; damit ist auch schon ein Hinweis auf die Strukturierung der Prämissen gegeben. Wir betrachten den einfachen Fall b). Im zweiten Fall benötigen Sie die Regel der Partikularquantoreinführung; im dritten Fall kommt man mit Konjunktorbeseitigung und Partikularquantoreinführung zum Ziel.

3.4.2 Exemplifizierung am Existenzdisput

Hat man einmal eingesehen, dass gebrauchssprachliche Gebilde nicht ›von Natur aus‹ und ›in Wirklichkeit‹ genau eine grammatische Struktur besitzen, und zwar weder ›an der Oberfläche‹ noch ›in der Tiefe‹, dann ergibt sich in aporetischen Diskurslagen standardgemäß die Möglichkeit, durch Variation der grammatischen Struktur Abhilfe zu schaffen. Fasst man – um ein vieldiskutiertes Beispiel aufzunehmen – das (schon als Aussage vorbestimmte) Gebilde 'Pegasus existiert nicht' grammatisch im Sinne von:

[24] $\neg \bigvee x \text{ Pegasus}=x$

so hat man bei der üblichen Regulierung des Partikularquantors die Negation der folgenden (identitäts)logischen Wahrheit notiert:

[25] $\bigvee x$ Pegasus=x

die sich durch Partikularquantoreinführung unmittelbar aus der Reflexivität der Identität ergibt. Wegen Reflexivität der Identität gilt: Pegasus=Pegasus. Dann folgt: $\bigvee x$ Pegasus=x. Wer also die Aussage 'Pegasus existiert nicht' in einer affirmativen Redehandlung äußert, der vorgelegten grammatischen Strukturierung [24] beitritt und gleichwohl eine übliche Logik akzeptiert, ist in eine inkonsistente Diskurssituation geraten. Der Weg dahin kann u.a. dadurch blockiert werden, dass man dem Negatum die Struktur 'Existiert(Pegasus)' und damit dem gesamten Ausdrucksgebilde die Struktur:

[26] $\neg$Existiert(Pegasus)

zuweist; dabei handelt es sich um die Negation einer Atomaussage, deren Hauptoperator ein einstelliger Existenzprädikator ist. Aus [26] ergibt sich zwar durch Partikularquantoreinführung die oberflächlich widersprüchliche Aussage $\bigvee x\ \neg$Existiert(x); aber dieser irrige Eindruck verdankt sich lediglich der vermeidbaren Ähnlichkeit von Quantor und Prädikator in der üblichen Lesung: Es-existiert-ein-x nicht(Existiert(x)).

Das angedeutete Vorgehen zieht u.a. den der Kant-Frege-Tradition zugeschriebenen Einwand auf sich, 'existiert' sei stets Prädikator zweiter Stufe (↑3.3.3). Da der Existenzprädikator zweiter Stufe mit Hilfe des Partikular- bzw. Existenzquantors definiert wird:

[27] $\bigwedge {}^1F^1(\text{Existiert}({}^1F^1) \leftrightarrow \bigvee x\ {}^1F^1(x))$,

lässt sich der Einwand auch so umformulieren: 'Existenz' gehört stets der Quantorenkategorie an. Um einzusehen, dass dieser Einwand gegen die Relativierungsmaxime (↑2.3.5) verstößt, betrachte man folgende Umgebungen bzw. Kontexte der Existenzrede:

[28] a) Da der Teufel alle negativen Eigenschaften besitzt und Existenz eine solche ist, existiert der Teufel.

b) Die Existenz der Außenwelt ist strittig; mithin existiert etwas, dessen Existenz strittig ist.

c) Da Tiger gestreifte Katzen sind und Tiger existieren, existieren auch gestreifte Katzen.

Gibt man sich das Ziel vor, diese Gebilde als gültige Begründungen zu interpretieren, so besteht ein Unterziel darin, die vorkommende Existenzrede grammatisch in geeigneter Weise zu strukturieren. Das kann in folgender Weise geschehen:

[29] a) Da $\bigwedge {}^{1}F^{1}$(Negative-Eigenschaft(${}^{1}F^{1}$) $\rightarrow$ ${}^{1}F^{1}$(der Teufel))

Da Negative-Eigenschaft(Existiert)

Also Existiert(der Teufel)

b) Da Ist-strittig(die-Existenz-von(die Außenwelt))

Also $\bigvee x$ Ist-strittig(die-Existenz-von(x))

c) Da $\bigwedge x$ (Tiger(x) $\rightarrow$ Gestreifte-Katze(x))

Da $\bigvee x$ Tiger(x)

Also $\bigvee x$ Gestreifte-Katze(x)

Benutzt man die in [27] gegebene Definition des Existenzprädikators zweiter Stufe, dann kann man für die Aussagen in den beiden letzten Zeilen von c) auch 'Existiert(Tiger)' und 'Existiert(Gestreifte-Katze)' notieren. Das Beispiel macht deutlich, dass die Existenzrede keineswegs ›von Natur‹ im Sinne eines Quantors oder eines Prädikators zweiter Stufe zu lesen ist; es kann – je nach Kontext – zweckmäßig sein, 'Existenz' bzw. 'existiert' der Kategorie eines Prädikators erster Stufe, eines Funktors, eines Quantors bzw. eines Prädikators zweiter Stufe zuzuweisen.

Stellt man in Rechnung, dass in substantiellen philosophischen Problemstellungen nach der Existenz von Entitäten wie Universalien, Göttern, Zahlen, Werten, Strukturen, Begriffen, Formen, Ideen usf. gefragt wird oder noch ›radikaler‹ nach dem, was überhaupt existiert bzw. warum überhaupt etwas existiert (↑1.1.3), dann verspricht eine systematische Durchforstung dieser Kontroversen im Sinne des Grammatischen Instrumentalismus Aussicht auf Klärungsfortschritt. Auch die jeweils benötigte Verwendungsreglementierung setzt die Klärung der Zugehörigkeit zu einer grammatischen Kategorie voraus.

Ü27 Strukturieren Sie die Aussage 'Gott existiert' als Quantorformel und als atomare Formel! Welcher grammatischen Kategorie gehört die Vokabel 'Gott' im ersten, welcher gehört sie im zweiten Fall an?

3.4.3 Unterstellige Prädikatorenverwendung

Mit der unterstelligen Prädikatorenverwendung ist ein weiteres Anwendungsfeld des Grammatischen Instrumentalismus namhaft gemacht. Elementare Beispiele wurden einleitend diskutiert: Eine Kontroverse konnte z.B. durch Übergang von den zwei- zu den dreistelligen Rechts-Links-Prädikatoren aufgelöst werden. Erörtert wurden bereits implizite Zweck- und Maßstabsparameter. In der Folge sind weitere Parametersorten aufzuführen, deren Unterschlagung in turbulente Situationen führt (↑1.1.1).

Bekannt und bei der lebensweltlichen Kontroversenbehebung auch häufig herangezogen ist die Relativierung auf Zeit- und Ortsparameter: Was in einem bestimmten Zeitraum an einem bestimmten Ort wohlschmeckend ist, braucht diese Eigenschaft nicht in andere Zeitpassagen oder an andere Orte zu transportieren.

Ebenfalls häufig veranschlagt ist die Relativierung auf Teil- und Aspektparameter. So kann etwa ein Gegenstand rot (und damit nicht blau) und blau (und damit nicht rot) sein, wenn man Rück- und Vorderseite oder Ober- und Unterseite unterscheidet.

Weniger oft eingesetzt, gleichwohl durchschauenswert wegen der kontroversenauflösenden Effekte, sind die drei folgenden Gruppen: Implizite Ordnungsparameter liegen vor, wenn Gebilde als zentral/peripher, als fundamental/abgeleitet, als erste/letzte, als minimale/ maximale usf. rubriziert werden. Diese Charakterisierungen unterschieben eine bestimmte Ordnung: Was in der einen Ordnung an der Peripherie zu stehen kommt, kann in der anderen im Zentrum liegen.

Implizite Sozietätenparameter sind gegeben, wenn (vornehmlich kognitive) Gegebenheiten als (un)klar, (nicht)trivial, (in)evident, (un)plausibel, (un)verständlich, (un)einsichtig, hermetisch usf. charakterisiert werden. Was innerhalb eines Disputverbands, einer bestimmten Tradition trivial und evident ist, ist innerhalb eines/-er anderen unplausibel und uneinsichtig; natürlich ergeben sich hier aufklärungsbedürftige Zusammenhänge mit den akzeptierten Maßstäben und mit den vorgegebenen Zielen.

Implizite Relationsparameter sind gegeben, wenn Entitäten aufeinander bezogen werden, ohne dass zugleich spezifiziert wird, welches die jeweils leitende Relation ist; das ist z.B. der Fall, wenn Gegebenheiten ohne weitere Qualifikation als voneinander (un)abhängig oder miteinander (un)vergleichbar bestimmt werden.

Die Vergegenwärtigung impliziter Parameter verhilft nicht nur dazu, Kontroversen vorzubeugen bzw. diese bei Eintreten aufzulösen und Scheinkonsense zu entlarven. Sie ist auch ein wirksames Mittel, sich selbst Rechenschaft über stillschweigend Unterstelltes und mögliche Alternativen zu geben. So lässt sich z.B. das eigene Zweck-, Maßstabs- und Ordnungskataster (in diesem oder jenem Bereich) auf Vordermann bringen. Ferner geraten implizite Parameter nicht nur wegen ihrer Selbstverständlichkeit häufig in Vergessenheit und sind dann gegebenenfalls zu erinnern, sie werden gelegentlich auch gezielt unterschlagen oder verdeckt gehalten und sind dann gegen solche Kaschierungsabsichten zu ermitteln. Das Aufsuchen impliziter Parameter ist damit ein wirksames Instrument der Ideologiekritik.

Die impliziten Parameter umfassen nicht nur die vergessenen und unterschlagenen: Der Parameter Inertialsystem, der beim wissenschaftshistorisch prominenten Übergang vom zweistelligen Prädikator '..ist zeitgleich mit..' zum dreistelligen '..ist zeitgleich mit..bezüglich..' hinzugefügt wird, lässt sich keiner der beiden Unterklassen zuordnen.

Ü29 a) Finden oder fingieren Sie eine Kontroverse, die durch die Markierung einen Parameter der in den Weiterungen genannten Parametersorten aufgelöst werden kann!

b) Finden oder fingieren Sie einen Scheinkonsens, der durch fälschlich unterstellte Parametergemeinsamkeit zustande kommt!

c) Liegt Greifswald im verkehrstechnischen Sinn zentral oder peripher?

Die systematische Ausarbeitung der Stelligkeitserhöhung als Instrument der – allgemein gesagt – Aporienbewältigung, muss hier als dringendes Desiderat angezeigt werden! – Zur weiteren Anregung in diese Richtung ist die folgende Übung gedacht:

Ü30 Stellen Sie Überlegungen zur Stelligkeit der als Prädikatoren aufzufassenden Vokabeln 'neu', 'informativ', 'neutral', 'tolerant', 'kreativ' an.

Wenn der (Rationalen) Grammatik im allgemeinen eine zentrale Rolle bei der Organisation unserer Erkenntnishandlungen, einer prominenten Teilmenge der Redehandlungen, zukommt, wenn im besonderen bei heiklen philosophischen Problemlagen hohe ›grammatische Aufmerksamkeit‹ gefordert ist, dann muss auch im Fortgang dem grammatischen Status der Redemittel mit Schlüsselfunktion ein besonderes Augenmerk gelten!

Ü31 Notieren Sie wenigstens zwei Prädikatoren aus jedem der bisherigen Kapitel 1. bis 3. und stellen Sie Überlegungen zur Stelligkeit an!

3.5 Literatur

Ajdukiewicz, K.: Die syntaktische Konnexität; Studia philosophica (1) 1936, 1-27 [zu 3.3].

Bar-Hillel, Y.: “Syntactical and Semantical Categories“; in: Edwards, P. (ed.): The Encyclopedia of Philosophy; New York 1977, vol. 8, 57-61 [zu 3.3 und Lit.].

Bochenski, J.M.: Über syntaktische Kategorien; in: Bochenski, J.M.: Logisch-philosophische Studien; Freiburg 1959, 75-96 [zu 3.3].

Frege, G.: Funktion und Begriff; in: Frege, G.: Kleine Schriften; Darmstadt 1967, 125-142 [zu 3.3.1 und 3.3.6].

Geach, P.: A Program for Syntax; Synthese 22 (1970/71).

Helbig, G.: Geschichte der neueren Sprachwissenschaft; Hamburg 1974 [zu 3.1].

Kraml, H.: Sprachphilosophie I, II (Vorlesungsmanuskript WS 92/93 und SS 93 an der Philosophischen Fakultät der Universität Innsbruck).

Die Teile 2.2.1 bis 2.3 und der Teil 4 sind v.a. zu Abschnitt 3.1 dieses Skriptums einschlägig.

Kratzer, A.: “Kategorie, syntaktische, semantische“; in: Ritter, J./Gründer, G. (Hg.): Historisches Wörterbuch der Philosophie 4, Basel 1976, Sp. 776-780 [zu 3.1 und 3.3; Literatur].

Lyons, J.: Einführung in die moderne Linguistik; München 1989^7 [zu 3.1].

Lorenz, K.: “Kategorie, syntaktische“; in: Mittelstraß, J. (Hg.): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie 2, Mannheim 1984, 369f. [zu 3.3; Lit.].

Lorenz, K.: “Artikulation und Prädikation“; in: Lorenz, K. et al. (Hg.): Sprachphilosophie. Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung 2. Halbband; Berlin 1996 [zu 3.3.6].

Lorenzen, P.: Logik und Grammatik; in: Ders: Methodisches Denken; Frankfurt/Main l974, 70-80 [zu 3.1 und 3.3.5].

Zu dem Abschnitt 3.2 sind Logische Propädeutiken sowie Lehrbücher der Logik zu konsultieren!

Zu jedem der logischen Zeichen ... gehört genau eine Schlußfigur, die das Zeichen ... „einführt“, und eine, die es „beseitigt“.
Gerhard Gentzen

4. Das Regelwerk für das Schließen

Das erste Kapitel machte über Beispielbetrachtungen mit Projekt und Programm der Vorschule der Philosophie vertraut (1.). Das zweite Kapitel spannte ein sprachphilosophisches Netz: Im Zentrum stehen die Konzepte der Redehandlung und der Sprache: Redehandlungen sind von Regeln regiert und Sprachen bilden den Inbegriff dieser Regeln (2.). Der Vollzug von Redehandlungen besteht in der Äußerung von Sätzen, die standardmäßig aus Performator und Aussage zusammengestellt sind. Das dritte Kapitel bestimmt die kleinsten Ausdruckseinheiten, aus denen komplexe Verbindungen zusammengesetzt sind, sowie die Wege des Zeichenaufbaus (3.). Damit sind u.a. die grammatischen Voraussetzungen für die Behandlung der Folgerungsregeln und der später vorgelegten Definitionsregeln gegeben.

Das folgende Kapitel zielt auf die Motivierung, Formulierung und Anwendung der logischen Regeln. Es gliedert sich in sechs Abschnitte: Zunächst sind die Redehandlung des Annehmens zu gestalten sowie einige Präliminarien zu klären (4.1). Die (hier berücksichtigten) logischen Operatoren umfassen die Kernjunktoren, die Kernquantoren und den Identitätsprädikator. Diese finden in der genannten Reihenfolge Behandlung (4.2 – 4.4). Im letzten Schritt ist das erarbeitete Regelwerk auf einen Blick zusammenzustellen und einer abschließenden Kommentierung zu unterziehen (4.5). Literaturhinweise zum natürlichen Schließen leiten das weitere Studium an (4.6).

4.1 Die Redehandlung des Annehmens

Das Annehmen soll die Möglichkeit eröffnen, jede beliebige Aussage Δ in einem Diskurs als Prämisse für Folgerungsakte einzubringen. Mit dem Annehmen ist hier also keinerlei Plausibilitätszuschreibung verbunden. Der Wunsch nach einer derartigen Redemöglichkeit mag zunächst befremden: Ist damit nicht in dem Sinne der Willkür Tür und Tor geöffnet, als in ihrem Wahrheitsstatus ungesicherte, ja sogar falsche Aussagen in Diskurse eingespeist werden dürfen? Obwohl die soeben beschriebene Möglichkeit tatsächlich mit dem Annehmen geschaffen wird, ist damit die Willkür keineswegs befördert. Zwei Hinweise mögen als

Startrechtfertigung für die Einrichtung des Annehmens genügen. Zunächst: Häufig sucht man den alethischen – oder schwächer: epistemischen – Status einer Aussage Δ dadurch zu ermitteln, dass man sie einer Was-wäre-wenn-Betrachtung bzw. einer hypothetischen Erwägung unterzieht: Was ergäbe sich (als Konsequenz), wenn Δ der Fall wäre. Dazu nimmt man Δ an und versucht, aus Δ und in aller Regel einer Klasse X von wahren oder aus anderen Gründen akzeptierbaren Aussagen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ Konsequenzen zu ziehen. Ergibt sich ein Widerspruch, dann wird man sich im Regelfall von Δ verabschieden. Resultieren nur verträgliche Aussagen, dann mag man Δ ein (vielleicht auch nur geringes) epistemisches Gewicht zubilligen und weiteren Überprüfungsgängen unterziehen. Damit aber die wie auch immer endende hypothetische Erwägung überhaupt starten kann, muss Δ durch eine geeignete Redehandlung, eben das Annehmen, für das Ziehen von Konsequenzen verfügbar gemacht werden.

Sodann: Gelegentlich möchte man Aussagen Δ ›planmäßig‹ dadurch begründen, dass man ihre Negation, $\neg\Delta$, widerlegt; oder man sucht die Negation von Δ zu begründen, indem man Δ widerlegt. Um den Widerlegungskandidaten überhaupt als ›Zielscheibe‹ zugänglich zu machen, muss man ihn in die Widerlegung/Begründung einbringen: Eben dies leistet das Annehmen. Gelingt die Widerlegung, dann ist das je Widerlegte, Δ oder $\neg\Delta$, falsch. Man hat also, rückblickend betrachtet, tatsächlich Falsches angenommen, aber nur deshalb, um eben dies ans Licht zu bringen.

Im Zuge der Erläuterung der Subjunktoreinführung, der Negatoreinführung (die auch für das obige Szenario einschlägig ist) und der Partikularquantorbeseitigung werden sich die Rolle und damit der Nutzen des Annehmens weiter klären. – Auf Basis dieser Startplausibilisierung kann die betrachtete Redehandlung so geregelt werden:

[1] Es-sei-als-Handlungsanleitung-gesetzt: Man darf jede Aussage Δ annehmen.

Dabei vollzieht man Annahmeakte, indem man Annahmesätze äußert. Diese sind aus dem je gewählten Annahmeperformator und der angenommenen Aussage Δ aufgebaut. Als Annahmeperformatoren dienen die Zeichen ’Sei__’ und ’Wäre__’. Wie üblich kennt die Gebrauchssprache viele weitere Zeichen für den Vollzug des Annehmens (↑9). Die stereotype Wendung ’Es-sei-als-Handlungsanleitung-gesetzt__’ wird bei der Formulierung der weiteren Regeln vernachlässigt. Durch einen Akt des Annehmens werden Aussagen verfügbar gemacht. Einmal verfügbare Aussagen können durch bestimmte annahmetilgende Folgerungsschritte auch wieder unverfügbar gemacht werden. (↑4.2.1, 4.2.5, 4.3.2)

Trotz der Plausibilisierung der Annahmeregel (=AR) verbleibt ein Unbehagen. Sollte nicht offengelegt werden, dass mit dem Annehmen keinerlei ›epistemisches‹ oder ›alethisches‹ Gewicht verbunden ist? Dieses Unbehagen wird durch die im Zuge der Folgerungsregeln weiter eingeführte Verfügbarkeits- resp. die darauf aufbauenden Abhängigkeitsrede aufgenommen. Folgerungen in Ableitungen, in denen bestimmte Annahmen noch verfügbar sind, hängen von all diesen noch verfügbaren Annahmen (bzw. der Klasse aus diesen Annahmen) ab. Das Annehmen gleicht einer Kreditaufnahme, die im weiteren Gang des Diskurses getilgt werden kann: Man verfügt über das Geld, fängt etwas mit ihm an, muss es aber schlussendlich zurückzahlen. Die Rückzahlung erfolgt dabei über Folgerungsschritte, mit denen die Annahmen getilgt werden, d.h., die die Annahmezeilen wieder unverfügbar machen, und mit denen man sich eben dadurch von den entsprechenden Abhängigkeiten befreit. Kredite, die (noch) nicht zurückgezahlt sind, entsprechen den noch verfügbaren Annahmen im Diskurs.

Auch das später geregelte und im Weiteren in Erläuterungskontexten und Musterüberlegungen benutzte Anziehen von Aussagen, das Einbringen schon als wahr erwiesener Aussagen in Diskurse, macht Aussagen in einer Sequenz verfügbar. Für die Redehandlung des Anziehens ist es allerdings charakteristisch, dass die angezogenen Aussagen nicht wieder getilgt, also unverfügbar gemacht werden können. Das stellt allerdings kein Problem dar, denn anders als das Annehmen stellt eine Anziehung keine Kreditaufnahme da – angezogene Aussagen sind bereits als wahr erwiesen und bilden (um in der monetären Analogie zu bleiben) das bereits erwirtschaftete Guthaben.

Im Weiteren erfolgt die Etablierung eines jeden *n*-stelligen logischen Operators τ^n in Beantwortung von zwei im Ergänzungsverhältnis stehenden Fragen: (i) Unter welchen Bedingungen bzw. bei welcher Diskurslage darf man auf eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ schließen? (ii) Was darf man aus einer Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) schließen? Beispiele: Unter welchen Bedingungen darf man auf eine Konjunktion, Partikularquantifikation, Identitätsaussage usf. schließen? Was darf man aus einer Konjunktion, Partikularquantifikation, Identitätsaussage usf. (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) schließen?

In Übereinstimmung mit dem Eingangszitat zum Kapitel wird die erste Frage durch eine sogenannte Einführungsregel beantwortet, die zweite durch eine Beseitigungsregel. Die allgemeine Form von Einführungsregeln lautet: Unter den und den Bedingungen darf man auf eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ schließen. Beseitigungsregeln folgen dem Schema: Aus einer Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) darf man auf eine Aussage der und der Art schließen.

4.2 Regeln für die Junktoren

In der Folge sind Regelpaare des charakterisierten Typs für die fünf Kernjunktoren anzugeben. Von der grammatischen Seite her handelt es sich bei Subjunktor, Konjunktor, Bisubjunktor und Adjunktor um zweistellige Junktoren, beim Negator um einen einstelligen. Da der Negator Besonderheiten aufweist, sind zunächst die zweistelligen Operatoren zu behandeln.

4.2.1 Der Subjunktor

Zur Erinnerung: Der Subjunktor ’→(__,__)’ bzw. ’__→__’ ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von ’__→__’ auf Formeln A, B ist die Subjunktion aus A und B, also $A \rightarrow B$. Dabei ist A das Antezedens bzw. der Wenn-Teil und B das Sukzedens bzw. der Dann-Teil (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Subjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Subjunktion gefolgert werden darf. Wenn man im Ausgang von der Annahme einer Aussage A eine Aussage B gewonnen hat, dann darf man auf die Subjunktion aus den beiden Aussagen, $A \rightarrow B$, schließen. Wenn man umgekehrt eine derartige Subjunktion $A \rightarrow B$ sowie ihr Antezedens gewonnen hat, dann darf man B ›abtrennen‹, d.h. auf B schließen. Zum Verständnis dieser Antworten kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen ’Wenn__, dann__’ und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Beseitigungsregel: Sie regiert das Schulbeispiel für das formale Schließen überhaupt: Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich. Nun ist Sokrates ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich. Schematisch: Wenn A, dann B. Nun A. Also B. Wenn man also eine Subjunktion aus A und B gewonnen hat und ferner das Antezedens A, dann darf man auf B schließen. Es ergibt sich folgende Schlussfigur für die Subjunktorbeseitigung:

[2] Ξ $A \rightarrow B$

Ξ' A

Also B

Ξ und Ξ' deuten dabei die Prämissensprechakte des Annehmens, Folgerns oder (für spätere Überlegungen) Anziehens an. Die Regel der Subjunktorbeseitigung (=SB) liest sich so:

[3] Wenn man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Aussage A gewonnen hat, dann darf man B folgern.

Dabei hat man Aussagen gewonnen, falls man sie verfügbar gemacht hat und sie immer noch verfügbar sind. Die Subjunktion und ihr Antezedens sind die beiden Prämissen des Schlusses nach SB. Die Regel spezifiziert also, was man aus einer Subjunktion und ihrem Antezedens folgern darf. – SB wird häufig auch unter dem Titel ’Modus ponendo ponens’, kürzer: ’Modus ponens’ oder ’Abtrennungsregel’ vorgestellt und angewendet. Durch einen Akt des Folgerns werden Aussagen verfügbar gemacht. Das gilt nicht nur für SB, sondern auch für Folgerungen nach allen anderen Folgerungsregeln. Durch Annahmen und Folgerungen verfügbar gemachte Aussagen können durch bestimmte annahmetilgende Folgerungsschritte – zum Beispiel durch Subjunktoreinführungen – auch wieder unverfügbar gemacht werden, wie im Folgenden zu erläutern ist.

Die Einführungsregel für den Subjunktor (=SE) geht aus von einer Situation, in der man eine Aussage, z.B. ’Sokrates ist sterblich’, im Ausgang von der Annahme einer Aussage, z.B. von ’Sokrates ist ein Mensch’, (durch hier nicht weiter interessierende Züge) gewonnen hat. Mit der Subjunktoreinführung macht man diesen Zusammenhang explizit, indem man ihn ausdrücklich als Wenn-Dann-Verhältnis fasst: Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich. Der ›vertikale‹ Zusammenhang wird in das ›horizontale‹ Subjunktionsverhältnis überführt. Eine Aussage B hat man dabei im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen, falls A als letzte Annahme verfügbar ist und man B als Satzaussage desselben oder eines nachfolgenden Satzes gewonnen hat. Ist eine Aussage als letzte Annahme verfügbar, dann ist sie nicht unbedingt die einzige noch verbleibende verfügbare Annahme, sondern eine als Annahme verfügbare Aussage *nach* der in der Sequenz keine weiteren verfügbaren (sondern bestenfalls bereits getilgte) Annahmen kommen. Natürlich kann eine solche Annahme auch die einzige noch verbleibende verfügbare Annahme sein. *Vor* der als letzter verfügbaren Annahme mögen also durchaus noch andere Annahmen (auch derselben Aussage) verfügbar sein. Das 'letzte' bezieht sich also nicht auf die Anzahl der noch verfügbaren Annahmen, sondern auf deren Reihenfolge. Verlässt man das Sokrates-Beispiel, dann resultiert folgende Schlussfigur:

[4] Sei A
... ...
Ξ B , wobei A als letzte Annahme verfügbar ist
Also $A \rightarrow B$

Hat man eine Aussage B im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen, dann darf man die Subjunktion aus A und B folgern, wobei man sich von jener Annahme befreit.

Die Befreiung von der Annahme besteht darin, dass diese Annahme und die Satzaussagen aller folgenden Folgerungssätze, die noch verfügbar waren, unverfügbar gemacht werden, ausgenommen die mit der Subjunktoreinführung gefolgerte Aussage A→B, die jetzt neuerdings verfügbar ist. (Verfügbare Annahmen können nach der als letzter verfügbaren Annahme gerade nicht mehr vorkommen und müssen resp. können daher nicht ›noch einmal‹ unverfügbar gemacht werden.) In der Schlussfigur [4]: Die Annahmezeile, sowie die durch '…' unterschlagenen Zeilen und die Zeile, in der B gewonnen wurde, sofern es sich nicht um Anziehungszeilen handelt, sind nach dem Schluss mit SE nicht mehr verfügbar. Die gefolgerte Subjunktion in der letzten Zeile der Schlussfigur wird allerdings verfügbar.

Dass man B im Ausgang von einer Annahme von A gewonnen hat, heißt nichts anderes, als dass vor der Anwendung von SE diese Annahme von A als letzte Annahme verfügbar ist. Von allen späteren Annahmen muss man sich also bereits befreit haben. Durch diese Bedingung ist sichergestellt, dass nicht auch Annahmen unverfügbar gemacht werden, von denen man sich nicht befreit hat, (und dass man, um das Bild fortzuführen, mit *einer* Zahlung *mehrere* Kredite tilgt). Man spricht auch davon, dass man eine Aussage, die man gewonnen hat, in Abhängigkeit von genau den Aussagen (resp. der Klasse aus jenen Aussagen) gewonnen hat, die Satzaussagen in noch verfügbaren Annahmezeilen sind. Man hat eine Aussage frei von Abhängigkeiten gewonnen, wenn man sie gewonnen hat und keine Annahmen mehr verfügbar sind. Für die Subjunktoreinführung (=SE) legt sich folgende Formulierung nahe:

[5] Wenn man zuletzt eine Aussage B im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen hat, dann darf man die Subjunktion aus A und B folgern.

Der Abschnitt, der mit der Annahme des Antezedens beginnt und mit der Gewinnung des Sukzedens endet, stellt als Ganzes den Prämissenabschnitt des Schlusses nach SE dar. Die Regel spezifiziert also, dass man die Subjunktion aus A und B dann folgern darf, wenn man das Sukzedens im Ausgang vom Antezedens gewonnen hat. Man beachte, dass die angenommenen und gefolgerten Satzaussagen des Prämissenabschnitts, sofern sie nicht bereits unverfügbar waren, auch dann unverfügbar werden, wenn der Schluss nicht nur nach SE, sondern auch nach einer anderen Regel korrekt ist.

SE gibt den Weg vor, um auf eine Subjunktion zu schließen. Befreit man sich durch diese Anwendung von SE von der einzigen noch verfügbaren Annahme in der Satzfolge, dann ist die gefolgerte Subjunktion beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern legt SE den Beweis- bzw. – allgemeiner – den Wahrheitsqualifizierungsweg für Subjunktionen fest. SB eröffnet die Möglichkeit, auf eine Aussage zu schließen, sofern sie Sukzedens einer Subjunktion ist und sowohl diese als auch ihr Antezedens verfügbar sind. Wird die gefolgerte Aussage dabei frei von Abhängigkeiten gewonnen, dann ist sie beweisbar bzw. – allgemein – wahr. Insofern spezifiziert SB den Beweis- bzw. – allgemeiner – den Wahrheitsqualifizierungsweg für Aussagen, die als Sukzedentia in der beschriebenen Konstellation vorkommen und damit die Rolle von Subjunktionen als Wahrheitsbasen.

Es gibt einen Grenzfall von SE, in dem die angenommene Aussage auch schon die Aussage ist, die das Sukzedens stellen soll; wenn also A und B, Antezedens und Sukzedens dieselbe Aussage sind. In dieser Situation entfallen jegliche zwischengeordnete Folgerungen, die Annahme des Antezedens ist sogleich die Gewinnung des Sukzedens und damit auch als letzte Annahme verfügbar. Der durch 'Ξ' schematisch mitgeteilte Performator aus [4] bezeichnet dann also gerade den Annahmeperformator und die Schlussfigur reduziert sich auf zwei Zeilen:

[6] Sei A

Also $A \rightarrow A$

Allgemein gilt *für die Folgerungsregeln und die Schlussfiguren*, dass verschiedene Mitteilungszeichen nicht ausschließlich für verschiedene Redeteile stehen. Am Beispiel der Schlussfigur für SB (↑[2]): 'Ξ' und 'Ξ'' stehen für jeweils den Folgerungs-, Anziehungs- oder einen der Annahmeperformatoren. Im konkreten Fall können beide Mitteilungszeichen auch durch denselben Performator instanziiert werden. Das tritt etwa ein, wenn beide Prämissenredehandlungen Folgerungen sind; beide Mitteilungszeichen, 'Ξ' und 'Ξ'', stehen dann für den Ausdruck 'Also__'.

In der Folge werden drei Aussagenschemata von der Form der Subjunktion bewiesen. Dadurch wird Vertrautheit im Umgang mit den Regeln und Einsicht in den Zusammenhang von Wahrheit(squalifizierung) und Bedeutung(sfestlegung) gewonnen (↑2.4.6, 2.4.7). Das erste Theorem wird unter dem Titel 'Kürzung des neutralen Faktors' geführt: Gilt unter A, dass Γ falls A, dann gilt Γ unter A. Als Behauptungssatz:

[7] Es-gilt $(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$

Zu beweisen ist eine Subjunktion. Dazu ist eine Satzfolge vorzulegen bzw. zu äußern (d. h. eine entsprechende Redehandlungssequenz ist zu vollziehen), in der die Subjunktion in der letzten Zeile frei von Abhängigkeiten gewonnen wird, in der also die Subjunktion in der letzten Zeile gewonnen wurde und keine Annahmen mehr verfügbar sind. Der projektierte (und daher hier grau notierte) letzte Beweisschritt lautet also:

[7]+ k Also $(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$

Dabei beziffert k die letzte Zeile des geplanten Beweises, die die behauptete Aussage im Folgerungsmodus enthält. Dieser Schritt wäre legitim nach SE, falls es gelingt, im Ausgang von der Annahme des Antezedens das Sukzedens zu gewinnen, falls also folgende Diskurslage hergestellt werden kann:

[7]* 1 Sei $A \to (A \to \Gamma)$

… … …

k-1 Also $A \to \Gamma$

k Also $(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$ | SE

Die unter [7]* in den Zeilen 1 bis k-1 gegebene Diskurslage erlaubt nach SE den unter [7]+ angezeigten Folgerungsschritt zu vollziehen, der in [7]* wiederum in Zeile k notiert ist – vorausgesetzt, dass alle eventuell ›unterwegs‹ aufgenommenen Annahmen bereits wieder getilgt wurden. Die Restaufgabe lautet darauf, $A \to \Gamma$ im Ausgang von $A \to (A \to \Gamma)$ zu folgern. Die projektierte Zielaussage ist also wiederum eine Subjunktion. Diese wird nach SE erreicht, indem Γ im Ausgang von A gefolgert wird:

[7]° 1 Sei $A \to (A \to \Gamma)$

2 Sei A

... ...

k-2 Also Γ

k-1 Also $A \to \Gamma$ | SE

k Also $(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$ | SE

Um Γ in Zeile k-2 im Ausgang von A zu gewinnen, darf man nicht nur auf die Annahme in Zeile 2, sondern auch auf jene in Zeile 1 zurückgreifen. Um in Fortsetzung der ersten beiden Zeilen sich der Zeile k-2 zu nähern bietet sich SB an: In Zeile 2 steht das Antezedens der in Zeile 1 angenommenen Subjunktion; damit sind eine Subjunktion und ihr Antezedens in der Satzfolge, die aus den Zeilen 1 und 2 besteht, verfügbar und man darf $A \to \Gamma$ folgern. Der Vorrat an verfügbaren Aussagen wird damit um diese Subjunktion erweitert. Auch in $A \to \Gamma$ ist die Satzaussage von Zeile 2 das Antezedens, so dass wiederum eine Subjunktion und ihr Antezedens verfügbar sind und nach SB damit die Folgerung von Γ erlaubt ist. Diese Folgerung ist bereits in Zeile k-2 notiert, womit sich die vormals angepeilte Folgerung nunmehr als erreicht präsentiert:

[7]**	1	Sei	$A \to (A \to \Gamma)$	
	2	Sei	A	
	3	Also	$A \to \Gamma$	SB; 1,2
	4	Also	Γ	SB; 2,3
	5	Also	$A \to \Gamma$	SE
	6	Also	$(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$	SE

Wie zuvor geplant, kann nun, nachdem Zeile 4 erreicht wurde, SE durchgeführt werden, da im Ausgang von der Annahme in Zeile 2 die Aussage in Zeile 4 gewonnen wurde. In Zeile 2 findet sich dementsprechend die als letzte verfügbare Annahme, deren Satzaussage (A) das Antezedens der in Zeile 5 zu folgernden Subjunktion stellt. Die Satzaussage von Zeile 4 (Γ) stellt das Sukzedens dar. Durch die in Zeile 5 vollzogene Folgerung befreit man sich von der Annahme in Zeile 2 und es werden diese Annahme, sowie die Folgerungen in den Zeilen 3 und 4 unverfügbar. Dafür ist neuerdings die Aussage in Zeile 5 verfügbar. Da die Annahme in Zeile 2 nun nicht mehr verfügbar ist, findet sich die letzte noch verfügbare Annahme in Zeile 1 – man hat also die Aussage in Zeile 5 im Ausgang von der Annahme von $A \to (A \to \Gamma)$ gewonnen. Damit lässt sich wie zuvor mittels SE die Subjunktion aus den beiden Aussagen folgern. Durch diesen Schritt befreit man sich von der Annahme in Zeile 1 und macht mithin diese Annahme sowie die Aussagen in allen nachfolgenden Zeilen bis einschließlich Zeile 5 unverfügbar (insofern sie nicht ohnehin schon unverfügbar waren).

Damit lässt sich der gesamte Beweis notieren. Die Behauptung der zu beweisenden Aussage wird als Zeile 0 dem Beweis vorangestellt. In Ergänzung der Kommentierung durch die Regelnamen und die Prämissenzeilen resp. -abschnitte in der rechten Spalte ergibt sich:

[7]°°	0	Es-gilt	$(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$	
	1	Sei	$A \to (A \to \Gamma)$	AR
	2	Sei	A	AR
	3	Also	$A \to \Gamma$	SB; 1,2
	4	Also	Γ	SB; 2,3
	5	Also	$A \to \Gamma$	SE; 2-4

6 Also $(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$ | SE; 1-5

Mit der Folgerung in Zeile 6 hat man sich von der zuletzt noch verbliebenen Annahme (in Zeile 1) endgültig befreit. Da nun keine Annahmen verfügbar sind, hat man dadurch die Satzaussage der letzten Zeile, also $(A\rightarrow(A\rightarrow\Gamma))\rightarrow(A\rightarrow\Gamma)$, frei von Abhängigkeiten gewonnen und somit bewiesen. Anmerkung zur Notation: Da der Verweis auf die Annahmeregel in den Zeilen 1 und 2 keine nennenswerte Zusatzinformation enthält, wird er im Folgenden weggelassen. Hinter dem Kurznamen der Folgerungsregeln sind die Prämissenzeilen bzw. -abschnitte namhaft gemacht.

Damit der Beweis [7]°° korrekt ist, muss vorausgesetzt werden, dass die Mitteilungszeichen 'A' und 'Γ' nicht zufälligerweise dieselben Aussagen bezeichnen. Genauer: Instanzen des Beweisschemas unter [7]°° sind nur dann Beweise, wenn 'A' und 'Γ' nicht durch dieselben Aussagen instanziiert werden. Wäre das nämlich der Fall, so würde in Zeile 3 eine Subjunktion mit identischem Antezedens und Sukzedens gemäß Schlussfigur [6] gefolgert. Das aber macht die Folgerung zu einer Folgerung nach SE und mithin wird die Annahme von A in Zeile 2 unverfügbar und schon Zeile 4 kann nicht mehr gefolgert werden, weil für den gewünschten SB-Schluss eben gerade das Antezedens in Zeile 2 verfügbar sein muss. Dann aber handelt es sich bei [7]°° nicht um einen korrekten Beweis.

Für die schematischen Satzsequenzen soll daher fortan gelten, dass verschiedene Mitteilungszeichen für verschiedene Ausdrücke stehen und dass Formeln, die durch verschiedene Mitteilungszeichen bezeichnet werden, keine Teilformeln voneinander sind. Diese Einschränkung soll als Verschiedenheitsforderung geführt werden. Erinnerlich gilt die Forderung nicht für die Folgerungsregeln und die Schlussfiguren, die gerade auf größtmögliche Allgemeinheit ausgelegt sind: SE und SB sollen etwa auch dann gelten, wenn Antezedens und Sukzedens identisch sind. Die Verschiedenheitsforderung wird die aufgeweckte Leserin schnell zu der Frage provozieren, ob beispielweise eine Formel der Form $(A\rightarrow(A\rightarrow\Gamma))\rightarrow(A\rightarrow\Gamma)$ auch dann beweisbar ist, wenn 'A' und 'Γ' dieselbe Aussage vertreten. Die Frage kann affirmativ beantwortet werden, allerdings gestaltet sich der Beweis anders. Zunächst bietet es sich an, zu Gunsten eines der beiden Mitteilungszeichen (etwa 'A') auf das andere ('Γ') zu verzichten. Ein Beweis des resultierenden Schemas $(A\rightarrow(A\rightarrow A))\rightarrow(A\rightarrow A)$ kann dann etwa so aussehen:

[8] 0 Es-gilt $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$

1 Sei $A \rightarrow (A \rightarrow A)$

2 Sei A

3 Also $A \rightarrow A$ |SE; 2-2

4 Also $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ |SE; 1-3

Allgemein gilt: Kann man einen schematischen Beweis für ein Aussagenschema unter der Verschiedenheitsforderung führen, so sind alle Instanzen des Aussagenschemas beweisbar, also auch solche Instanzen, in denen verschiedene Mitteilungszeichen durch denselben Ausdruck instanziiert werden. Die Beweise [7]°° und [8] illustrieren diesen Zusammenhang.

Das zweite Theorem hört auf den Namen ’Kettenschluss’. Die Kommentierung wird dem Beweis nachgestellt:

[9] 0 Es-gilt $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$

1 Sei $A \rightarrow B$

2 Sei $B \rightarrow \Gamma$

3 Sei A

4 Also B |SB; 1,3

5 Also Γ |SB; 2,4

6 Also $A \rightarrow \Gamma$ |SE; 3-5

7 Also $(B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$ |SE; 2-6

8 Also $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$ |SE; 1-7

Zu beweisen ist eine Subjunktion. Um das zu tun, empfiehlt es sich, ihr Antezedens anzunehmen, um mit Blick auf SE im Ausgang davon das Sukzedens zu gewinnen. Die Annahme erfolgt in Zeile 1. Das Sukzedens der zu beweisenden Aussage ist dabei selbst eine Subjunktion. Um diese zu folgern, ist wiederum ihr Antezedens anzunehmen – das geschieht in Zeile 2 – um im Ausgang davon ihr Sukzedens ($A \rightarrow \Gamma$) zu folgern. Auch diese Aussage ist eine Subjunktion: Es ist also in Zeile 3 ihr Antezedens (A) anzunehmen, um im Ausgang davon ihr Sukzedens (Γ) zu gewinnen. Die Annahmeschritte machen drei Aussagen verfügbar, die sukzessive SB nahelegen. Auf diese Weise gelangt man in zwei Schritten zu der zuletzt projektierten Gewinnung von Γ (Zeile 5). Durch die drei geplanten SE-Anwendungen konstruiert man die zu beweisende Aussage, wobei man sich bei jedem Schritt nach und nach von den Annahmen befreit – und zwar in rückwärtiger Reihenfolge. Diese Annahmen (sowie die Aussagen in den sich anschließenden Zeilen) werden damit unverfügbar gemacht, bis schließlich keine Annahme mehr verfügbar ist und so die zu beweisende Aussage tatsächlich bewiesen wurde.

Zuletzt ist die Reflexivität des Subjunktors nachzuweisen. Das kann in einem Zweizeiler (mit Behauptung: Dreizeiler) geschehen:

[10] 0 Es-gilt $\Gamma \rightarrow \Gamma$

1 Sei Γ

2 Also $\Gamma \rightarrow \Gamma$ | SE; 1-1

Nimmt man eine Aussage A an, so hat man sie im Ausgang von sich selbst gewonnen (↑[6]). Damit ist eine die Anwendung von SE erlaubende Diskurslage gegeben, falls A Antezedens wie auch Sukzedens der Subjunktion ist. Im vorliegenden Fall entspricht A aus [6] der Aussage Γ.

Ü1 a) Beweisen Sie das folgende Aussagenschema:

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\Gamma \rightarrow A) \rightarrow (\Gamma \rightarrow B))$

b) Beweisen Sie die Satzaussage aus Zeile 0 in [9] für den Fall, dass 'A' und 'B' dieselbe Aussage bezeichnen, d.h. beweisen Sie die Aussage $(A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$!

Mit dem vorgestellten Regelpaar SE bzw. SB ist festgelegt, auf welchem Weg man zu Subjunktionen gelangt bzw. welcher Weg von Subjunktionen (und ihrem Antezedens) ausgeht. Damit ist, um es zu wiederholen, insbesondere festgelegt, wie man Subjunktionen als wahr erweist bzw. beweist und was man aus wahren Subjunktionen (und ihrem Antezedens) als wahr erweisen/beweisen kann.

SB sagt, was man aus einer Subjunktion *und* ihrem Antezedens folgern darf: Die Subjunktion ist die Hauptprämisse, das Antezedens die Nebenprämisse des Schlusses bzw. der Schlussfigur. Die Unterscheidung zwischen Haupt- und Nebenprämisse greift auch bei Adjunktor-, Bisubjunktor-, Partikular- und Identitätsbeseitigung.

4.2.2 Der Konjunktor

Zur Erinnerung: Der Konjunktor '$\wedge$(__,__)' bzw. '__$\wedge$__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__$\wedge$__' auf Formeln A, B ist die Konjunktion aus A und B, also $A \wedge B$. A, B sind die Konjunkte bzw. Konjunktionsglieder. A ist das linke, B das rechte Konjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Konjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Konjunktion gefolgert werden darf. Die Antwortideen sind (zumindest an der Oberfläche) einfach: Aus zwei Aussagen darf man auf ihre Konjunktion schließen und aus einer Konjunktion darf man beide Konjunkte folgern. – Zur Beantwortung der Leitfragen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen ’__und__’ und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Konjunktoreinführung: Wenn man die Aussagen ’Sokrates ist weise’ und ’Xanthippe ist zänkisch’ gewonnen hat, dann soll man auf die Konjunktion aus den Aussagen, d.h. ’Sokrates ist weise und Xanthippe ist zänkisch’, schließen dürfen. Allgemein: Aus A und B soll man auf die Konjunktion A∧B schließen dürfen. Es ergibt sich folgende Schlussfigur für die Konjunktoreinführung:

[11]	Ξ	A
	Ξ'	B
	Also	A ∧ B

Die Regel der Konjunktoreinführung (=KE) lautet:

[12] Wenn man eine Aussage A und eine Aussage B gewonnen hat, dann darf man die Konjunktion aus A und B folgern.

Die Konjunktorbeseitigung kehrt die Konjunktoreinführung um: Wenn man die Konjunktion aus ’Sokrates ist weise’ und ’Xanthippe ist zänkisch’ gewonnen hat, also ’Sokrates ist weise und Xanthippe ist zänkisch’, dann darf man jedes der beiden Konjunkte, also sowohl ’Sokrates ist weise’ als auch ’Xanthippe ist zänkisch’, folgern. Allgemein: Aus Konjunktionen A∧B darf man beide Konjunktionsglieder, also sowohl A als auch B, folgern. Es ergeben sich folgende zwei Schlussfiguren für die Konjunktorbeseitigung:

[13]	Ξ	A ∧ B	Ξ	A ∧ B
	Also	A	Also	B

Die Regel der Konjunktorbeseitigung (=KB) lautet entsprechend:

[14] Wenn man die Konjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, dann darf man sowohl A als auch B folgern.

Wie durch jede Folgerungshandlung werden auch durch Folgerungen nach KE und KB die gefolgerten Aussagen verfügbar gemacht. – KE gibt den Weg vor, um auf eine Konjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Aussage beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. KE bahnt den Weg zum Beweis bzw. – allgemeiner – zur Wahrqualifizierung von Konjunktionen. KB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern sie Konjunkte einer verfügbaren Konjunktion sind. Ist die verfügbare Konjunktion wahr, dann sind auch die gefolgerten Konjunkte wahr. KB spezifiziert also, in welchem Sinne Konjunktionen als Wahrheitsbasis einsetzbar sind.

In der Folge werden die Regeln im Zuge der Beweise dreier Aussagen ›in Aktion‹ vorgeführt. Die erste ist die Transitivität des Subjunktors. Sie lässt sich erst jetzt formulieren, weil im Antezedens der Konjunktor Hauptoperator ist: Bedingt A B, B aber Γ, dann bedingt A auch Γ:

[15] Es-gilt $((\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)$

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion. Um eine Subjunktion zu beweisen, genügt es, im Ausgang von der Annahme ihres Antezedens ihr Sukzedens zu gewinnen; auf die so erzeugte Diskurslage greift dann SE zu:

[15]+ 1 Sei $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)$
... ...
k Also $\mathrm{A} \rightarrow \Gamma$
k+1 Also $((\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)$ | SE

Die verbleibende Aufgabe lautet darauf, im Ausgang von der Annahme der Konjunktion in Zeile 1 $\mathrm{A} \rightarrow \Gamma$ zu gewinnen.

Da es sich bei der Aussage in Zeile k wiederum um eine Subjunktion handelt, ist das Antezedens in der Absicht anzunehmen, das Sukzedens im Ausgang von dieser Annahme zu gewinnen:

[15]* 1 Sei $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)$
2 Sei A
... ...
k-1 Also Γ
k Also $\mathrm{A} \rightarrow \Gamma$ | SE

	k+1	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE

Als Prämissen kommen für die verbleibende Aufgabe nur die Aussagen der ersten und zweiten Zeile in Frage. Hier greift jedoch keine (bisher vorgestellte) Regel direkt. Man muss versuchen, die Prämissen zielführend aufzubereiten: Trennt man jedoch die erste Annahme mit KB, dann kann man aus A und dem linken Konjunkt B folgern, um dann aus B und dem rechten Konjunkt auf Γ zu schließen. Insgesamt ergibt sich dann folgender Beweis der Transitivität des Subjunktors:

[15]°	1	Sei	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)$	
	2	Sei	A	
	3	Also	$A \rightarrow B$	KB; 1
	4	Also	$B \rightarrow \Gamma$	KB; 1
	5	Also	B	SB; 2,3
	6	Also	Γ	SB; 4,5
	7	Also	$A \rightarrow \Gamma$	SE; 2-6
	8	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE; 1-7

Das Exportationstheorem überführt die Subjunktion aus $A \wedge B$ einerseits und Γ andererseits in die Subjunktion aus A einerseits und die Subjunktion aus B und Γ andererseits:

[16]	0	Es-gilt	$((A \wedge B) \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma))$	
	1	Sei	$(A \wedge B) \rightarrow \Gamma$	
	2	Sei	A	
	3	Sei	B	
	4	Also	$A \wedge B$	KE; 2,3
	5	Also	Γ	SB; 1,4
	6	Also	$B \rightarrow \Gamma$	SE; 3-5
	7	Also	$A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)$	SE; 2-6
	8	Also	$((A \wedge B) \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma))$	SE; 1-7

Das Verum-ex-quolibet besagt in intuitiver Lesung, dass, falls eine Aussage gilt, sie auch unter einer beliebigen Bedingung gilt; das Vorschieben einer Bedingung ist eine Abschwächung der Aussage und Schwächeres gilt ›a fortiori‹, wenn Stärkeres gilt:

[17] Es-gilt $A \rightarrow (\Gamma \rightarrow A)$

Die Aussage enthält den Subjunktor als einzigen Operator; der Konjunktor ist nicht Teilausdruck. Zum Beweis muss man $\Gamma \rightarrow A$ im Ausgang von einer Annahme von A gewinnen; um $\Gamma \rightarrow A$ so zu gewinnen, muss man A im Ausgang von einer Annahme von Γ gewinnen. Folgender Beweisplan scheint aussichtsreich:

[17]+	1	Sei	A	
	2	Sei	Γ	
	...	...	...	
	k	Also	A	
	k+1	Also	$\Gamma \rightarrow A$	SE
	k+2	Also	$A \rightarrow (\Gamma \rightarrow A)$	SE

Nun ist prima facie nicht zu sehen, wie die bekannten Folgerungsregeln in Anschlag zu bringen sind, um das in Zeile 1 bereits verfügbare A in die k-te Zeile ›hinüber zu transportieren‹. Keine der vier Regeln SE, SB, KE, KB, erlaubt es, A nach der Annahme von Γ einfach zu wiederholen. Hier hilft – secunda facie – die Nacheinanderausführung von KE und KB: Man folgert im dritten Schritt die Konjunktion aus A und Γ und wiederholt anschließend A als Glied dieser Konjunktion mit KB unterhalb von der Annahme von Γ in Zeile 2. Folgert man nun so im vierten bzw. k-ten Schritt A, dann hat man – wie geplant – A im Ausgang von der Annahme von Γ gewonnen. Im Überblick:

[17]*	1	Sei	A	
	2	Sei	Γ	
	3	Also	$A \wedge \Gamma$	KE; 1,2
	4	Also	A	KB; 3
	5	Also	$\Gamma \rightarrow A$	SE; 2-4
	6	Also	$A \rightarrow (\Gamma \rightarrow A)$	SE; 1-5

Mithilfe von KE und KB lassen sich also bereits verfügbare Aussagen wiederholen, so dass sie nach Bedarf in der jeweils letzten Zeile erscheinen und so im Ausgang von der als letzter verfügbaren Annahme gewonnen wurden. Die Möglichkeit der Wiederholung von Aussagen, die bereits vor der als letzter verfügbaren Annahme gewonnen wurden, lässt ahnen, dass, anbei bemerkt, die Konjunktorregeln vielleicht doch nicht so harmlos sind, wie sie scheinen.

Die Möglichkeit KE und KB zwecks Wiederholung einer bereits verfügbaren Aussage nacheinander auszuführen ist stets gegeben, so dass sich jede bereits verfügbare Aussage wiederholen lässt. Dieser Zusammenhang rechtfertigt die Einbindung einer Regel, die die folgernde Wiederholung von Aussagen gestattet, ohne mittels KE und KB zunächst die Konjunktion aus der zu wiederholenden Aussage und einer beliebigen Aussage und dann eigens die zu wiederholende Aussage zu folgern. Die Wiederholungsregel (W) erlaubt genau diese ›Abkürzung‹:

[18] Wenn man eine Aussage A gewonnen hat, dann darf man A folgern.

Legt man nun nochmals das Verum-ex-quolibet zum Beweis vor, so verkürzt sich der Weg um eine Zeile:

[19]	1	Sei	A	
	2	Sei	Γ	
	3	Also	A	W; 1
	4	Also	$\Gamma \to \mathrm{A}$	SE; 2-3
	5	Also	$\mathrm{A} \to (\Gamma \to \mathrm{A})$	SE; 1-4

Gegenüber den Regeln KE und KB (und den sonstigen Regeln) kann W als eine zulässige Regel eingeordnet werden; die Regel eröffnet nicht die Möglichkeit, Aussagen zu folgen, die ohne sie nicht folgerbar wären, sondern kürzt bestehende Folgerungswege ab. Die Leserin ist angehalten, sich die Abkürzung vor Augen zu führen, indem sie in der folgenden Übung für die Teilaufgabe Ü2b) einen Beweis ohne Anwendung von W und einen Beweis unter Anwendung von W vorlegt.

Ü2 Beweisen Sie folgende Aussagenschemata:

a) $((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge \mathrm{A}) \to \mathrm{B}$

b) $((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to (\mathrm{A} \to \Gamma)) \to (\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \Gamma))$

c) $((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \to \Gamma)) \to (\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \wedge \Gamma))$

d) $(A \rightarrow (B \wedge \Gamma)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \Gamma))$

e) $(A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow \Gamma)$

4.2.3 Der Bisubjunktor

Zur Erinnerung: Der Bisubjunktor '↔(__,__)' bzw. '__↔__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__↔__' auf Formeln A, B ist die Bisubjunktion $A \leftrightarrow B$. A und B sind die Bisubjunkte bzw. Bisubjunktionsglieder, A ist das linke und B ist das rechte Bisubjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Bisubjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Bisubjunktion gefolgert werden darf. Hat man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Konverse dieser Subjunktion, also die Subjunktion aus B und A gewonnen, dann darf man die Bisubjunktion aus A und B folgern. Hat man umgekehrt eine Bisubjunktion aus A und B sowie ein Bisubjunkt gewonnen, dann darf man auf das jeweils andere Bisubjunkt schließen. – Auch zum Verständnis dieser Regulierungen kann eine hilfsweise Orientierung am gebrauchssprachlichen '__genau dann, wenn__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Der Name 'Bisubjunktor' drückt aus, dass der zu organisierende Operator ein Subjunktor ›in beide Richtungen‹ sein soll: $A \leftrightarrow B$ soll äquivalent mit der Konjunktion aus $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ sein. Ebenso soll man aus $A \leftrightarrow B$ und A auf B und aus $A \leftrightarrow B$ und B auf A schließen können. Dementsprechend tritt in der Regel der Bisubjunktoreinführung die Verfügbarkeit der entsprechenden Subjunktionen als Bedingung auf. Inhaltliche Überlegungen können sich an der Bedeutungsverleihung für den Subjunktor orientieren. Für die Bisubjunktoreinführung ergibt sich folgende Schlussfigur:

[20]	Ξ	$A \rightarrow B$
	Ξ'	$B \rightarrow A$
	Also	$A \leftrightarrow B$

Die Formulierung der Bisubjunktoreinführung (=BE) lautet:

[21] Wenn man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Subjunktion aus B und A gewonnen hat, dann darf man die Bisubjunktion aus A und B folgern.

Die Regel der Bisubjunktorbeseitigung hat die Subjunktorbeseitigung zum Vorbild, nimmt aber anders als BE keinen ausdrücklichen Bezug auf Subjunktionen. Erinnerlich darf man gemäß SB aus einer Subjunktion $A \to B$ und ihrem Antezedens A das Sukzedens B folgern. In der Bisubjunktion ›stecken‹ nun zwei Subjunktionen; dementsprechend darf man vom linken Bisubjunkt auf das rechte und vom rechten Bisubjunkt auf das linke, jeweils bei Gegebenheit der Bisubjunktion, schließen. Die zwei Schlussfiguren:

[22]	Ξ	$A \leftrightarrow B$	Ξ	$A \leftrightarrow B$
	Ξ'	A	Ξ'	B
	Also	B	Also	A

Die Regel der Bisubjunktorbeseitigung (=BB) lautet:

[23] Wenn man die Bisubjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie das linke bzw. das rechte Bisubjunkt, also A bzw. B, gewonnen hat, dann darf man das rechte bzw. linke Bisubjunkt, also B bzw. A, folgern.

Die Bisubjunktion ist die Hauptprämisse des Schlusses, das linke resp. das rechte Bisubjunkt stellt die Nebenprämisse dar. – BE gibt den Weg vor, um auf eine Bisubjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Aussage beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert BE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Bisubjunktionen. BB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern sie Bisubjunkt einer verfügbaren Bisubjunktion sind, deren anderes Bisubjunkt ebenfalls verfügbar ist. Sind die Prämissen wahr, dann ist auch das jeweils gewonnene Bisubjunkt wahr. Insofern spezifiziert BB die Rolle von Bisubjunktionen als Wahrheitsbasen.

Am Beweis der Kommutativität des Konjunktors soll erste Vertrautheit mit BE hergestellt werden:

[24] Es-gilt $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

Der Beweiskandidat ist eine Bisubjunktion. Auf die Bisubjunktion kann man schließen, wenn man beide Subjunktionen, $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$ und $(B \wedge A) \to (A \wedge B)$, gewonnen hat. Der Beweis ist also in zwei Teile zu gliedern. Will man die erste dieser Subjunktionen beweisen, d.h. frei von Abhängigkeiten folgern, dann muss man im Ausgang von der Annahme des linken Bisubjunkts das rechte gewinnen:

[24]' 0 Es-gilt $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

1 Sei $A \wedge B$

... ...

k Also $B \wedge A$

k+1 Also $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ | SE

... ...

m Also $(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$

m+1 Also $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ | BE

Die erste Lücke zwischen den Zeilen 1 und k ist mit doppelter KB und einfacher KE schnell geschlossen. Die Zeilen k und k+1 entsprechen dann den Zeilen 4 und 5:

[24]+ 0 Es-gilt $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

1 Sei $A \wedge B$

2 Also A | KB; 1

3 Also B | KB; 1

4 Also $B \wedge A$ | KE; 3,2

5 Also $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ | SE; 1-4

... ...

m Also $(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$

m+1 Also $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ | BE

Der Beweis einer Bisubjunktion über BE hat immer zwei Teile, den Weg von links nach rechts und den Weg von rechts nach links. In [24]+ ist der erste Teil in den Zeilen 1 bis 5 bereits vollendet. Der zweite Teil steht noch aus. Es ist zu bedenken, dass durch die SE in Zeile 5 die Abhängigkeit von der Annahme in Zeile 1 getilgt wurde und mithin die Zeilen 1 bis 4 unverfügbar gemacht wurden. Auf diese Zeilen darf man im zweiten Teil des Beweises nicht mehr zurückgreifen. Um daran zu erinnern, wird in der folgenden Darstellung an dem Performator in jeder Zeile ein Indexkommentar angehängt, der jeweils über die Zeilennummern der noch verfügbaren Annahmen angibt, die Annahmen aus welchen Zeilen noch verfügbar sind. Tätigt man zur Fortsetzung des Beweises noch die Annahme für die Einführung des Subjunktors in Zeile m, so stellt sich der bisherige Beweisweg wie folgt dar:

[24]°	0	Es-gilt	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	
	1	Sei$_1$	$A \wedge B$	
	2	Also$_1$	A	| KB; 1
	3	Also$_1$	B	| KB; 1
	4	Also$_1$	$B \wedge A$	| KE; 3,2
	5	Also	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	| SE; 1-4
	6	Sei$_6$	$B \wedge A$	

In [24]° ist an der Oberfläche erkennbar, dass im zweiten Beweisabschnitt keine der im Ausgang von Annahme 1 gewonnenen Aussagen noch verfügbar ist. Lediglich die Aussage in Zeile 5 wurde frei von Abhängigkeiten gewonnen. Die Aussagen in Zeile 6 steht in der Abhängigkeit von sich selbst. Aus diesen Verfügbarkeitsverhältnissen ergibt sich, dass die nach Zeile 6 angepeilte Konjunktion $A \wedge B$ nicht einfach durch KE auf die Zeilen 2 und 3 gefolgert werden kann, weil eben diese Zeilen nicht mehr verfügbar sind. Es müssen daher im zweiten Beweisteil eigens die beiden Konjunkte aus Zeile 6 mittels KB gefolgert werden, bevor KE zu der gewünschten Konjunktion führt. Der fertige Beweis mit Indexkommentar sieht dann so aus:

[24]*	0	Es-gilt	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	
	1	Sei$_1$	$A \wedge B$	
	2	Also$_1$	A	| KB; 1
	3	Also$_1$	B	| KB; 1
	4	Also$_1$	$B \wedge A$	| KE; 3,2
	5	Also	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	| SE; 1-4
	6	Sei$_6$	$B \wedge A$	
	7	Also$_6$	B	| KB; 6
	8	Also$_6$	A	| KB; 6
	9	Also$_6$	$A \wedge B$	| KE; 8,7
	10	Also	$(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$	| SE; 6-9
	11	Also	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	| BE; 5, 10

Am Indexkommentar lässt sich zunächst erkennen, dass die Aussagen in den Zeilen 5, 10 und insbesondere 11 frei von Abhängigkeiten gewonnen und damit wahr erwiesen wurden. Darüber hinaus markiert der Indexkommentar anschaulich die ›Unterbeweise‹ in dem Beweis; der eine Unterbeweis beginnt in Zeile 1 und endet in Zeile 4; der andere Unterbeweis beginnt in Zeile 6 und endet in Zeile 9. Besonders bei geschachtelten Beweisen hilft der Indexkommentar dabei, den Überblick über die Beweisstruktur zu behalten.

An einem zweiten Theorem soll die Methode der grafischen Kommentierung vorgestellt werden, die durch Liniensetzung eine ähnliche Hilfestellung wie der Indexkommentar leistet. Das Theorem erinnert nochmals daran, dass die Bisubjunktion die konjunktive Zusammenfassung der Subjunktionen in beide Richtungen ist, bzw. kann als Aufweis der Adäquatheit der vorgenommenen Bedeutungsverteilung gelesen werden:

[25] Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))$

Der Beweis wird hier strikt von oben nach unten konstruiert. – Zu beweisen ist eine Bisubjunktion. Um diese zu zeigen, sind zunächst die entsprechenden zwei Subjunktionen, $(A\leftrightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow B)\land(B\rightarrow A))$ und $((A\rightarrow B)\land(B\rightarrow A))\rightarrow(A\leftrightarrow B)$ zu zeigen. Der erste Beweisteil beginnt demgemäß mit der Annahme des Antezedens der ersten Subjunktion:

[25]' 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))$

1 Sei $A \leftrightarrow B$

Anvisiert ist nun die Folgerung von $(A\rightarrow B)\land(B\rightarrow A)$. Um das linke Konjunkt zu folgern wird zunächst dessen Antezedens angenommen:

[25]+ 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))$

1 Sei $A \leftrightarrow B$

2 Sei A

Mit den Aussagen in den Zeilen 1 und 2 sind nun eine Bisubjunktion und ihr linkes Bisubjunkt verfügbar, womit die Folgerung des rechten Bisubjunkts durch BB erlaubt ist. Anschließende SE-Anwendung liefert die erste gewünschte Subjunktion:

[25]* 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))$

1 Sei $A \leftrightarrow B$

2 │Sei A

3 │Also B | BB; 1,2

4 Also $A \rightarrow B$ | SE; 2-3

An dieser Stelle setzt die grafische Kommentierung an: Der Abschnitt von Zeile 2 bis 3 ist der Prämissenabschnitt für die SE in Zeile 4 – in einer anderen Redeweise: Der Abschnitt ist der Unterbeweis für die Folgerung in Zeile 4. Durch die anschließende Folgerung gemäß SE werden diese beiden Zeilen unverfügbar gemacht. Die unverfügbaren Zeilen – der Unterbeweis – werden mit einem senkrechten Strich als unverfügbar markiert.

Im Anschluss ist nun die zweite Subjunktion zu gewinnen. Dabei kann nicht mehr auf die Aussagen in den Zeilen 2 und 3, aber durchaus auf die Bisubjunktion in Zeile 1 zurückgegriffen werden. Im Ausgang von der Annahme von B wird mittels BB A gewonnen. Die SE in Zeile 7 folgt dann diesem weiteren Unterbeweis, der sich auf die Zeilen 5 und 6 erstreckt. Eine entsprechende Markierung wird vorgenommen:

[25]° 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

1 Sei $A \leftrightarrow B$

2 │Sei A

3 │Also B | BB; 1,2

4 Also $A \rightarrow B$ | SE; 2-3

5 │Sei B

6 │Also A | BB; 1,5

7 Also $B \rightarrow A$ | SE; 5-6

An dieser Stelle ist daran zu erinnern, dass die beiden Subjunktionen in den Zeilen 4 und 7 gewonnen wurden, um die Links-Rechts-Richtung der eingangs behaupteten Bisubjunktion zu gewinnen. KE auf diese beiden Zeilen erbringt nun einen Unterbeweis, der die beiden vorigen Unterbeweise umfasst und als Prämissenabschnitt für die anschließende SE dient. Die Markierung des entsprechenden Unterbeweisabschnitts signalisiert die Unverfügbarkeit der Aussagen in den Zeilen 1 bis 8 für die verbleibenden Folgerungsschritte:

[25]" 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \land (B \to A))$
1 Sei $A \leftrightarrow B$
2 Sei A
3 Also B | BB; 1,2
4 Also $A \to B$ | SE; 2-3
5 Sei B
6 Also A | BB; 1,5
7 Also $B \to A$ | SE; 5-6
8 Also $(A \to B) \land (B \to A)$ | KE; 4,7
9 Also $(A \leftrightarrow B) \to ((A \to B) \land (B \to A))$ | SE; 1-8

Für die Rechts-Links-Richtung, also für den Beweis von $((A \to B) \land (B \to A)) \to (A \leftrightarrow B)$, muss deren Antezedens, $(A \to B) \land (B \to A)$, angenommen werden. Mit zweifacher KB und anschließender BE gelangt man zu deren Sukzedens, $A \leftrightarrow B$. Jetzt sind SE und BE möglich, um den ganzen Beweis abzuschließen. Die SE-Anwendung folgt abermals einem Unterbeweis, der durch die Liniensetzung markiert wird:

[25]** 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \land (B \to A))$
1 Sei $A \leftrightarrow B$
2 Sei A
3 Also B | BB; 1,2
4 Also $A \to B$ | SE; 2-3
5 Sei B
6 Also A | BB; 1,5
7 Also $B \to A$ | SE; 5-6
8 Also $(A \to B) \land (B \to A)$ | KE; 4,7
9 Also $(A \leftrightarrow B) \to ((A \to B) \land (B \to A))$ | SE; 1-8

	10	Sei	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	
	11	Also	$A \rightarrow B$	| KB; 10
	12	Also	$B \rightarrow A$	| KB; 10
	13	Also	$A \leftrightarrow B$	| BE; 11,12
	14	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$	| SE; 10-13
	15	Also	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	| BE; 9,14

Die Linienmarkierungen entsprechen den Unterbeweisen. An ihnen lässt sich auch die ›geschachtelte‹ Struktur des Beweises erkennen. Wird der Beweis mit einem Indexkommentar versehen, so ist die Schachtelung der Unterbeweise ebenfalls recht leicht erkennbar:

[25]**	0	Es-gilt	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	
	1	Sei$_{1}$	$A \leftrightarrow B$	
	2	Sei$_{1,2}$	A	
	3	Also$_{1,2}$	B	| BB; 1,2
	4	Also$_{1}$	$A \rightarrow B$	| SE; 2-3
	5	Sei$_{1,5}$	B	
	6	Also$_{1,5}$	A	| BB; 1,5
	7	Also$_{1}$	$B \rightarrow A$	| SE; 5-6
	8	Also$_{1}$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	| KE; 4,7
	9	Also	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	| SE; 1-8
	10	Sei$_{10}$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	
	11	Also$_{10}$	$A \rightarrow B$	| KB; 10
	12	Also$_{10}$	$B \rightarrow A$	| KB; 10
	13	Also$_{10}$	$A \leftrightarrow B$	| BE; 11,12
	14	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$	| SE; 10-13
	15	Also	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	| BE; 9,14

Die zwei Kommentierungsmethoden helfen dabei, den Beweisweg nachzuvollziehen. Allerdings sind sie – wie der Regelkommentar – nicht Teil des Beweises selbst, sondern kommentieren ihn eben nur. Sie sind auch nicht Teil der Objektsprache, was schon dadurch garantiert ist, dass in der rationalen Grammatik keine Indizes für Performatoren vorgesehen sind (↑3.2). Die Kommentare sind in Bezug auf die Korrektheit oder Inkorrektheit eines Beweises überflüssig; auch ohne sie kann festgestellt werden, welche Aussagen noch verfügbar sind und ob einzelne Sätze an bestimmten Stellen im Beweis geäußert werden dürfen oder nicht. Dass in [25]** etwa mit der Äußerung des Satzes in Zeile 4 die zwei vorangehenden Zeilen unverfügbar werden, lässt sich auch ohne Verfügbarkeits- und Regelkommentar feststellen. Die Folgerung in Zeile 4 genügt der Regel der Subjunktoreinführung, wie sich allein an den Sätzen (also den Performatoren und Aussagen) in den Zeilen 2, 3 und 4 und ihrer Reihenfolge erkennen lässt. Dieser Sachverhalt garantiert, dass die Zeilen 2 und 3 unverfügbar werden, während die Zeile 4 neuerdings verfügbar wird (um später selbst wieder unverfügbar zu werden). Eine Bezugnahme auf die Kommentarspalten ist nicht nötig, sondern nur eine Hilfe beim Erstellen und Lesen von Beweisen. Im Weiteren soll genau dann von einem kommentierten Beweis(schema) gesprochen werden, wenn der (das) Beweis(schema) mit einem Regelkommentar sowie mit einem Indexkommentar oder einer grafische Kommentierung im hier vorgestellten Sinne versehen ist.

Ohne prosaische Ausführungen ist abschließend der (nur mit Regelkommentar versehene) Beweis für die Idempotenz des Konjunktors zu notieren. Der Leser ist angehalten, dieses Beispiel zum Nachvollzug mit einem Indexkommentar oder einer grafischen Kommentierung zu versehen.

[26] 0 Es-gilt $A \leftrightarrow (A \wedge A)$
1 Sei A
2 Also $A \wedge A$ | KE; 1,1
3 Also $A \rightarrow (A \wedge A)$ | SE; 1-2
4 Sei $A \wedge A$
5 Also A | KB; 5
6 Also $(A \wedge A) \rightarrow A$ | SE; 4-5
7 Also $A \leftrightarrow (A \wedge A)$ | BE; 3,6

Ü3 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $A \leftrightarrow A$

b) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$

c) $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \leftrightarrow \Gamma)$

d) $(A \wedge (B \wedge \Gamma)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge \Gamma)$

e) $((A \wedge B) \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma))$

4.2.4 Der Adjunktor

Zur Erinnerung: Der Adjunktor ’$\vee$(__,__)’ bzw. ’__$\vee$__’ ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von ’__$\vee$__’ auf Formeln A, B ist die Adjunktion $A \vee B$. A und B sind die Adjunkte bzw. Adjunktionsglieder; A ist das linke, B das rechte Adjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Adjunktion geschlossen werden darf und was aus einer Adjunktion gefolgert werden darf. Die Antworten sind einfach: Man darf aus einer beliebigen Aussage A auf die Adjunktion aus A und B bzw. aus B und A schließen; und man darf aus einer Adjunktion $A \vee B$ all das schließen, was sowohl aus A als auch aus B folgt. – Bei der Erläuterung beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am (einschließenden) gebrauchssprachlichen ’__oder__’ und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Adjunktoreinführung: Gegeben sei das Szenario einer kleinen Ostseeuniversität, an der baltische Folklore eine alles, also auch die Stipendienvergabe, beherrschende Rolle spielt: Wer Däne, Schwede oder Finne ist, erhält einen Bonus. Nun ist Torsten Finne. Um zu zeigen, dass er einen Bonus erhält, muss man so argumentieren: Torsten ist Finne. Also ist er Schwede oder Finne. Also ist er Däne oder Schwede oder Finne. Nach dem erwähnten Vergabeprinzip erhält er deshalb einen Bonus. Diese informelle Überlegung lässt sich schematisch so darstellen:

[27] 1 Da $\bigwedge\xi\ ((A \vee (B \vee \Gamma)) \rightarrow \Delta)$
2 Also $([\theta, \xi, A] \vee ([\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma])) \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$
3 Da $[\theta, \xi, \Gamma]$
$\Rightarrow$ 4 Also $[\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma]$
$\Rightarrow$ 5 Also $[\theta, \xi, A] \vee ([\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma])$
6 Also $[\theta, \xi, \Delta]$

In der ersten Zeile findet das Prinzip schematischen Ausdruck; in A, B, Γ, Δ sei genau ξ frei. In der zweiten Zeile wird das Prinzip auf den interessierenden θ-Fall spezialisiert. Die beiden ersten Schritte – Notieren des Prinzips und Spezialisierung auf den interessierenden Fall – dienen nur der vollständigen schematischen Beschreibung des Szenarios. In der dritten Zeile wird vorhandenes Wissen über den interessierenden Fall eingebracht. Um im sechsten Schritt die gewünschte Subjunktorbeseitigung vollziehen zu können, muss die θ-Entität, auf die Γ zutrifft, unter den einschlägigen Fall subsumiert werden. Dies geschieht durch Adjunktoreinführung in den durch Doppelpfeil markierten Schritten 4 und 5.

Ü4 a) Notieren Sie das informell besprochene Beispiel in Analogie zu [27] und machen Sie sich die Entsprechungen deutlich, z.B. 'Torsten' entspricht θ. Vgl. zum zweiten Schritt den Absatz 3.2.4 sowie 4.3.1.

b) Geben Sie eine weitere Instanz für das Schema [27]!

Die Adjunktoreinführung ist ein unverzichtbarer Zug in der lebens- und sonderweltlich bewährten Subsumtionspraxis. Seine Selbstverständlichkeit führt zu der üblichen intuitiven Raffung, in der er leicht als eigenständiger Folgerungsschritt verschwindet. Dieser Umstand lässt es dann als verständlich (wenn auch nicht als entschuldbar) erscheinen, wenn die Adjunktoreinführung als für die diskursive Praxis verzichtbares Manöver dargestellt wird. – Die Schlussfigur lässt sich so wiedergeben:

[28]	Ξ	A	Ξ	A
	Also	$A \vee B$	Also	$B \vee A$

Man darf also von einer Aussage A auf eine Adjunktion aus A und B schließen und auch eine Adjunktion aus B und A folgern. – Die Regel der Adjunktoreinführung (=AE) lautet:

[29] Wenn man eine Aussage A gewonnen hat und B eine Aussage ist, dann darf man sowohl die Adjunktion aus A und B als auch die Adjunktion aus B und A folgern.

Zurück zur Ostseefolklore: Angenommen, es ist bekannt, dass Torsten Däne oder Finne ist. Ferner gilt: Alle Dänen erhalten einen Bonus und alle Finnen erhalten einen Bonus. Also erhält Torsten in beiden Fällen einen Bonus. Schematisch:

[30] 1 Da $\bigwedge\xi\, (A \to \Delta)$

2 Da $\bigwedge\xi\, (\Gamma \to \Delta)$

3 Da $[\theta, \xi, A] \vee [\theta, \xi, \Gamma]$

4 Also $[\theta, \xi, A] \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$

5 Also $[\theta, \xi, \Gamma] \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$

$\Rightarrow$ 6 Also $[\theta, \xi, \Delta]$

In den beiden ersten Zeilen stehen die beiden (Vergabe)Prinzipien. Die dritte Zeile ist die Adjunktion, die zwei Untersuchungskorridore, zwei Fälle öffnet, die jeweils einem der Adjunkte entsprechen. Aus Zeile 1 ergibt sich mittels UB in Zeile 4, dass θ im ersten Fall ($[\theta, \xi, A]$) auch die Δ-Eigenschaft hat: Wenn θ ein A-Ding ist, dann ist θ auch ein Δ-Ding. Für den zweiten Fall ergibt sich analog, dass θ ein Δ-Ding ist, falls θ ein Γ-Ding ist. Abschließend kann man in Zeile 6 folgern: Ist jedes der beiden Adjunkte eine hinreichende Bedingung dafür, dass das θ-Objekt Δ ist, dann ergibt sich dieses Sukzedens auch im Lichte der fallaufspannenden Adjunktion.

Ü5 a) Notieren Sie das informell besprochene Beispiel in Analogie zu [30] und machen Sie sich die Entsprechungen deutlich!

b) Geben Sie eine weitere Instanz für das Beweisschema [30]!

Für die Adjunktorbeseitigung ergibt sich folgende Schlussfigur:

[31] Ξ $A \vee B$

Ξ' $A \rightarrow \Delta$

Ξ'' $B \rightarrow \Delta$

Also Δ

Die Regel der Adjunktorbeseitigung (=AB) ist dementsprechend zu formulieren:

[32] Wenn man die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Subjunktion aus A und einer Aussage Δ und die Subjunktion aus B und Δ gewonnen hat, dann darf man Δ folgern.

Die Adjunktion ist die Hauptprämisse des Schlusses nach AB, die für die beiden Fälle spezifischen Subjunktionen stellen die Nebenprämissen dar. – AE gibt den Weg vor, um auf eine Adjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Adjunktion beweisbar bzw. – allgemein – wahr. Insofern fixiert AE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Adjunktionen. AB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, die als Sukzedentia zweier verfügbarer Subjunktionen auftreten, deren Antezedentia gerade das linke resp. das rechte Adjunkt sind. Sind die Adjunktion und die zwei Subjunktionen wahr, dann ist auch die gefolgerte Aussage wahr. Insofern spezifiziert AB die Rolle von Adjunktionen – und nebenbei auch von Subjunktionen – als Wahrheitsbasis.

AB setzt wegen der zwei subjunktoralen Nebenprämissen oft das Führen von Unterbeweisen voraus. Wegen dieser Schwierigkeit ist auf die Einübung des Umgangs mit dem Adjunktor besonderer Wert zu legen. Das Gesetz von der Adjunktion von Subjunktionsgliedern besagt: Bedingt A B und bedingt Γ Δ, dann bedingt die Adjunktion der Antezedentia, also $\mathrm{A}\vee\Gamma$, die Adjunktion der Sukzedentia, also $\mathrm{B}\vee\Delta$:

[33] Es-gilt $((\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\Gamma \rightarrow \Delta)) \rightarrow ((\mathrm{A} \vee \Gamma) \rightarrow (\mathrm{B} \vee \Delta))$

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion; der Beweisweg ist demnach durch SE festgelegt. Man hat $(\mathrm{A}\vee\Gamma)\rightarrow(\mathrm{B}\vee\Delta)$ im Ausgang von der Annahme von $(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})\wedge(\Gamma\rightarrow\Delta)$ zu gewinnen, um dann in der letzten Zeile das Gewünschte frei von Abhängigkeiten zu folgern. Die Annahme und die sich anbietende zweifache Konjunktorbeseitigung eröffnen die Ableitung:

[33]+ 1 Sei $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\Gamma \rightarrow \Delta)$

2 Also $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ | KB; 1

3 Also $\Gamma \rightarrow \Delta$ | KB; 1

Die Restaufgabe besteht demnach darin, das Sukzedens, $(\mathrm{A}\vee\Gamma)\rightarrow(\mathrm{B}\vee\Delta)$, im Ausgang von der Annahme des Antezedens in Zeile 1 zu folgern. Da das Sukzedens wiederum eine Subjunktion darstellt, gibt SE nochmals den Weg vor: $\mathrm{B}\vee\Delta$ ist im Ausgang von der Annahme von $\mathrm{A}\vee\Gamma$ zu folgern:

[33]▫ 1 Sei $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\Gamma \rightarrow \Delta)$

2 Also $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ | KB; 1

3 Also $\Gamma \rightarrow \Delta$ | KB; 1

4 Sei $\mathrm{A} \vee \Gamma$

Mit der in Zeile 4 angenommenen Adjunktion ist ein Untersuchungsraum mit zwei Optionen, zum einen A, zum anderen Γ, geöffnet. Man hat zu zeigen, dass beide Fällen hinreichende Bedingung für $\mathrm{B}\vee\Delta$ sind. In anderen Worten: Man muss die zwei Subjunktionen $\mathrm{A}\rightarrow(\mathrm{B}\vee\Delta)$ und $\Gamma\rightarrow(\mathrm{B}\vee\Delta)$ gewinnen. Dazu ist zunächst im Ausgang von der Annahme von A die Adjunktion aus B und Δ zu gewinnen. Das gelingt durch SB und anschließende AE, so dass sich nach Abschluss des linken Falls der bisherige Beweisverlauf wie folgt darstellt:

[33]° 1 Sei $(A \rightarrow B) \land (\Gamma \rightarrow \Delta)$

2 Also $A \rightarrow B$ | KB; 1

3 Also $\Gamma \rightarrow \Delta$ | KB; 1

4 Sei $A \lor \Gamma$

5 | Sei A

6 | Also B | SB; 2,5

7 | Also $B \lor \Delta$ | AE; 6

8 Also $A \rightarrow (B \lor \Delta)$ | SE; 5-7

Die Zeilen 5 bis 7 bilden den Unterbeweis, der in Zeile 8 die SE ermöglicht. Der Kern des Beweises ist nun zur Hälfte vollzogen: Die Adjunktion in Zeile 4 gibt zwei Optionen vor, von denen die eine durch das Gewinnen der Aussage in Zeile 8 ausgewertet wurde. Mindestens eine von zwei Optionen, A oder Γ, ist laut Zeile 4 der Fall. Wenn A der Fall ist, dann gilt gemäß Zeile 8 $B \lor \Delta$. Lässt sich das auch im Falle von Γ zeigen? Der rechte Fall gelingt in analoger Weise zum linken Fall. Ausgehend von der Annahme des linken Adjunkts, Γ, kann man mittels SB und AE $B \lor \Delta$ gewinnen und so SE anwenden (Zeilen 9 bis 12):

[33]* 1 Sei $(A \rightarrow B) \land (\Gamma \rightarrow \Delta)$

2 Also $A \rightarrow B$ | KB; 1

3 Also $\Gamma \rightarrow \Delta$ | KB; 1

4 Sei $A \lor \Gamma$

5 | Sei A

6 | Also B | SB; 2,5

7 | Also $B \lor \Delta$ | AE; 6

8 Also $A \rightarrow (B \lor \Delta)$ | SE; 5-7

9 | Sei Γ

10 | Also Δ | SB; 3,9

11 | Also $B \lor \Delta$ | AE; 10

12 Also $\Gamma \rightarrow (B \lor \Delta)$ |SE; 9-11

Nun kann AB auf die Zeilen 4, 8 und 12 angewendet werden: Es sind eine Adjunktion sowie zwei Subjunktionen verfügbar, wobei letztere jeweils dasselbe Sukzedens und eines der Adjunkte als Antezedens haben. Gefolgert wird jenes Sukzedens, welches sich in beiden Fällen ergibt. Nach AB schließen sich die üblichen SE-Anwendungen an:

[33]** 0 Es-gilt $((A \to B) \land (\Gamma \to \Delta)) \to ((A \lor \Gamma) \to (B \lor \Delta))$

1 Sei $(A \to B) \land (\Gamma \to \Delta)$

2 Also $A \to B$ | KB; 1

3 Also $\Gamma \to \Delta$ | KB; 1

4 Sei $A \lor \Gamma$

5 Sei A

6 Also B | SB; 2,5

7 Also $B \lor \Delta$ | AE; 6

8 Also $A \to (B \lor \Delta)$ | SE; 5-7

9 Sei Γ

10 Also Δ | SB; 3,9

11 Also $B \lor \Delta$ | AE; 10

12 Also $\Gamma \to (B \lor \Delta)$ | SE; 9-11

13 Also $B \lor \Delta$ | AB; 4,8,12

14 Also $(A \lor \Gamma) \to (B \lor \Delta)$ | SE; 4-13

15 Also $((A \to B) \land (\Gamma \to \Delta)) \to ((A \lor \Gamma) \to (B \lor \Delta))$ | SE; 1-14

Der Beweis ist mit einer grafischen Kommentierung und dem Regelkommentar versehen. In der Folge wird ein durch Indizes kommentiertes Beweisschema für die Kommutativität des Adjunktors vorgelegt:

[34] 0 Es-gilt $(A \lor B) \leftrightarrow (B \lor A)$

1 Sei$_{1}$ $A \lor B$

2 Sei$_{1,2}$ A

3 Also$_{1,2}$ $B \lor A$ | AE; 2

4 Also$_{1}$ $A \to (B \lor A)$ | SE; 2-3

5	Sei$_{1,5}$	B	
6	Also$_{1,5}$	$B \vee A$	| AE; 5
7	Also$_{1}$	$B \rightarrow (B \vee A)$	| SE; 5-6
8	Also$_{1}$	$B \vee A$	| AB; 1,4,7
9	Also	$(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$	| SE; 1-8
10	Sei$_{10}$	$B \vee A$	
11	Sei$_{10,11}$	B	
12	Also$_{10,11}$	$A \vee B$	| AE; 11
13	Also$_{10}$	$B \rightarrow (A \vee B)$	| SE; 11-12
14	Sei$_{10,14}$	A	
15	Also$_{10,14}$	$A \vee B$	| AE; 14
16	Also$_{10}$	$A \rightarrow (A \vee B)$	| SE; 14-15
17	Also$_{10}$	$A \vee B$	| AB; 10,13,16
18	Also	$(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$	| SE; 10-17
19	Also	$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$	| BE; 9,18

Der Beweis hat zwei Teile: Um BE anzuwenden, sind beide Richtungen der Bisubjunktion als Subjunktionen zu gewinnen (Zeilen 9 und 18). Um jeweils die Sukzedentia im Ausgang von der Annahme der Antezedentia zu gewinnen sind Adjunktionen zu beseitigen. Fallunterscheidungen, die zu jeweils zwei Subjunktionen führen (Zeilen 4 und 7 und Zeilen 13 und 16), bilden das Gerüst zur Anwendung von AB.

Ü6 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$

b) $((A \vee B) \wedge (A \rightarrow \Delta) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (\Delta \vee \Gamma)$

c) $((A \vee B) \wedge (A \rightarrow \Gamma) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \Gamma$

d) $(A \vee (B \vee \Gamma)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee \Gamma)$

e) $(A \wedge (B \vee \Gamma)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge \Gamma))$

f) $(A \vee (B \wedge \Gamma)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma))$

4.2.5 Der Negator

Zur Erinnerung: Der Negator '¬__' ist ein einstelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung des Negators '¬__' auf eine Formel Δ ist die Negation ¬Δ; dabei ist Δ das Negatum. Der Negator ist von den hier betrachteten Junktoren der einzige einstellige (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Negation geschlossen werden darf und was aus einer Negation gefolgert werden darf. Die Antworten sind wiederum einfach, weichen aber in ihrer Struktur erkennbar von dem bislang gegebenen Muster ab: Man darf auf eine Negation schließen, also auf ¬A, falls man eine Aussage Δ und ihre Negation im Ausgang von der Annahme von A gewonnen hat. Man darf ferner aus der doppelten Negation einer Aussage Δ, also aus ¬¬Δ, auf Δ schließen. – Bei der Erläuterung beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'nicht' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Negatoreinführung: Liegt kognitiver Trouble vor, dann darf an den Ursachen etwas getan werden. 'Trouble' meint: In einem Diskurs ist eine Aussage Δ und ihre Negation ¬Δ gewonnen worden. Die ›Ursachen‹ sind die verfügbaren Annahmen, von denen Δ bzw. ¬Δ abhängen. Die Regel erlaubt es, im Ursachenfeld Ordnung zu schaffen: Vorausgesetzt ist, dass die Widerspruchsglieder im Ausgang von der letzten noch verfügbaren Annahme gewonnen wurden. Die Aussage eben dieser Annahme darf als in letzter Instanz widerspruchsverursachend negiert werden. Die Annahme, die ›gekillt‹ wird, wird zusammen mit allen im Ausgang von ihr gefolgerten Zeilen unverfügbar, während die letzte Zeile, in der gerade die Negation der angenommen Aussage gefolgert wurde, verfügbar wird. Die Regel ist also eine Art Troubleshooter. Es resultieren als Schlussfiguren:

[35]	Wäre	A	Wäre	A	
	...	...	...	...	
	Ξ	Δ	Ξ	¬ Δ	
	...	...	...	...	
	Ξ'	¬ Δ	Ξ'	Δ	, wobei A als letzte Annahme verfügbar ist
	Also	¬ A	Also	¬ A	

Ist eine Folgerung gemäß Negatoreinführung gestattet, so befreit man sich durch diese Folgerung von der als letzter verfügbaren Annahme. So wie die Subjunktoreinführung ist die

Negatoreinführung eine tilgende Schlussregel (↑4.2.1). Damit die mit einer Annahme angestrebte Regelanwendung (Subjunktor- oder Negatoreinführung) in einer Ableitung leichter erkennbar ist, werden die Annahmen, die auf Negatoreinführung abzielen, unter Verwendung des Performators 'Wäre__' getätigt. Hier handelt es sich nur um eine Lesehilfe; für die Anwendung aller Schlussregeln sind die beiden Annahmeperformatoren 'Sei__' und 'Wäre__' gleichwertig. – Die Regel der Negatoreinführung (=NE) lässt sich so formulieren:

[36] Wenn man zuletzt eine Aussage Δ resp. $\neg\Delta$ im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen hat und wenn man außerdem im Ausgang von derselben Annahme $\neg\Delta$ resp. Δ gewonnen hat, dann darf man die Negation von A folgern.

Da man sich im Zuge einer Anwendung von NE von der erwähnten Annahme befreit, sind nach dem Schlussakt von dieser Zeile an bis einschließlich der Zeile, in der das zweite Widerspruchsglied gewonnen wird, alle gefolgerten Aussagen nicht mehr verfügbar. Evtl. nach der negierten Annahme angenommene Aussagen müssen erinnerlich bereits unverfügbar gemacht worden sein, wenn diese als letzte Annahme verfügbar ist. Die gefolgerte Negation in der letzten Zeile wird allerdings verfügbar. Der von der negierten Annahme bis zur Gewinnung des zweiten Widerspruchsglieds reichende Abschnitt bildet den Prämissenabschnitt des Schlusses nach NE. Man beachte, dass die angenommenen und gefolgerten Satzaussagen des Prämissenabschnitts, sofern sie nicht schon unverfügbar waren, auch dann unverfügbar werden, wenn der Schluss nicht nur nach NE, sondern auch nach einer anderen Regel korrekt ist. – Der Schluss gemäß Negatorbeseitigung ist vergleichsweise einfach:

[37] Ξ $\neg\neg\Delta$

Also Δ

Die Regel der (doppelten) Negatorbeseitigung (=NB) lautet:

[38] Wenn man die Negation der Negation einer Aussage Δ gewonnen hat, dann darf man Δ folgern.

NE gibt den Weg vor, um auf eine Negation zu schließen: Wer auf $\neg\mathrm{A}$ schließen will, muss einen Widerspruch erzeugen, der (auch und ›letztlich‹) durch A ›verursacht‹ ist. Geschieht der Schluss auf $\neg\mathrm{A}$ frei von Abhängigkeiten, ist also die Annahme von A die einzige verfügbare Annahme vor der Anwendung von NE gewesen, dann ist die gefolgerte Negation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert NE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Negationen. – NB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern man ihre doppelte Negation gewonnen hat. Ist die doppelte Negation wahr, d.h. frei von Abhängigkeiten gewonnen, dann ist auch die doppelt negierte Aussage wahr.

Die erste zum Beweis aufgegebene Aussage ist das junktorenlogische (Nicht)Widerspruchsprinzip bzw. das Principium Contradictionis: Es trifft nicht zu, dass A und die Negation von A zugleich gegeben sein können:

[39] Es-gilt $\neg (\Gamma \wedge \neg \Gamma)$

Um auf die Aussage $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$ zu schließen, muss man im Ausgang von der Annahme ihres Negatums eine Aussage und ihre Negation gewinnen. Es wären etwa die Aussagen Γ bzw. $\neg\Gamma$ Aussagen der gewünschten Form, wenn man sie im Ausgang von einer Annahme von $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ gewinnen könnte. Nun ergibt sich aus $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ durch KB sowohl Γ wie auch $\neg\Gamma$; damit ist der Beweisgang vorgezeichnet. Mit Indexkommentar:

[39]+ 0 Es-gilt $\neg (\Gamma \wedge \neg \Gamma)$

1 Wäre$_1$ $\Gamma \wedge \neg \Gamma$

2 Also$_1$ Γ | KB; 1

3 Also$_1$ $\neg \Gamma$ | KB; 1

4 Also $\neg (\Gamma \wedge \neg \Gamma)$ | NE; 1-3

Damit ist das erste Exemplar eines <u>indirekten Beweises</u> vorgeführt: Um mit NE auf $\neg A$, hier: $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$, schließen zu können, nimmt man A, hier: $\Gamma\wedge\neg\Gamma$, an und erzeugt daraus einen Widerspruch. Hängen die Glieder des Widerspruchs nur noch von der Annahme des indirekten Beweises ab, dann ist mit NE der gewünschte Beweis erbracht. In Bezug auf die Schlussfigur [35] bestehen im vorliegenden Fall also insgesamt folgende Entsprechungen: Γ entspricht Δ; $\neg\Gamma$ entspricht $\neg\Delta$; $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ entspricht A; $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$ entspricht $\neg A$.

In der Folge ist das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten, das Tertium-non-datur, zu beweisen. Dabei wird die zweite, die <u>klassische</u> Form des indirekten Beweises illustriert:

[40] Es-gilt $A \vee \neg A$

Zwischen A und $\neg A$ gibt es kein ›Drittes‹. Zu beweisen ist eine Adjunktion; und diese Aufgabe führt zunächst zu AE. Um aber AE einzusetzen, müsste man eines der beiden Adjunkte schon gewonnen haben; dies könnte nur durch Annahmen geschehen. Damit aber hätte man nicht $A\vee\neg A$, sondern nur $A\rightarrow(A\vee\neg A)$ bzw. $\neg A\rightarrow(A\vee\neg A)$ bewiesen. Auch diese Aussagen sind ehrenwerte Theoreme, aber vom Tertium-non-datur durchaus verschieden.

Wenn der ordentliche Weg versagt, muss man einen außerordentlichen beschreiten. Dieser ergibt sich durch Hintereinanderschaltung von NE und NB: Man nimmt die Negation des Beweiskandidaten an, erzeugt in Abhängigkeit davon einen Widerspruch und schließt mit NE auf die doppelte Negation des Tertium-non-datur. Der Schluss mit NB führt dann sofort zum Ziel; damit ergibt sich als Beweiskontur:

[40]+ 1 Wäre$_{1}$ $\neg (A \vee \neg A)$

... ...

k Also $\neg \neg (A \vee \neg A)$ | NE

k+1 Also $A \vee \neg A$ | NB

Gesucht sind nun eine Aussage und ihre Negation, die im Ausgang von der ersten Annahme gewonnen werden können. An dieser Stelle bleibt nur die Möglichkeit, Annahmeakte zu vollziehen in der Hoffnung, die Annahmen im Fortgang tilgen zu können. Um die erste Annahme, wie gewünscht, ›ins Geschehen‹ einzubeziehen, legt es sich nahe, das Negatum zu erzeugen, indem man A oder aber $\neg A$ annimmt, um dann durch AE die Adjunktion zu gewinnen:

[40]° 1 Wäre$_{1}$ $\neg (A \vee \neg A)$

2 Wäre$_{1,2}$ A

3 Also$_{1,2}$ $A \vee \neg A$ | AE; 2

Mit $A \vee \neg A$ und $\neg(A \vee \neg A)$ hat man eine Aussage und ihre Negation gewonnen, allerdings nur die erstere im Ausgang von der letzten Annahme (Zeile 2). Das lässt sich mit Hilfe der Wiederholungsregel (↑4.2.2) beheben. Jetzt wurden beide Widerspruchsglieder im Ausgang von der Annahme in Zeile 2 gewonnen – NE bietet sich an.

[40]* 1 Wäre$_{1}$ $\neg (A \vee \neg A)$

2 Wäre$_{1,2}$ A

3 Also$_{1,2}$ $A \vee \neg A$ | AE; 2

4 Also$_{1,2}$ $\neg (A \vee \neg A)$ | W; 1

5 Also$_{1}$ $\neg A$ | NE; 2-4

Die soeben vollzogene Kombination von Redehandlungen ist noch einmal zu reflektieren: In Zeile 1 war die Negation einer Adjunktion verfügbar. In Zeile 5 wurde in alleiniger Abhängigkeit von dieser Negation einer Adjunktion eines der Adjunkte negiert gewonnen. Dieser Übergang ist durch AR-AE-W-NE stets möglich. Damit ist eine oft gewinnbringende Umgangsweise mit Negationen exemplifiziert. Als heuristische Maxime: Hast du die Negation einer Adjunktion gewonnen, die sich nicht unmittelbar ›ausbeuten‹ lässt, dann gewinne mittels AR, AE, W und NE die Negationen eines Adjunkts (oder auch beider Adjunkte)!

Mit Blick auf den weiteren Beweisgang kann nun der mit AE abermals das Negatum der Aussage in Zeile 1 gewonnen werden. Damit wurden die Widerspruchsglieder für eine weitere Anwendung von NE im Ausgang von der als letzter verfügbaren und gleichzeitig einzigen noch verfügbaren Annahme gewonnen. NE führt zu einer doppelten Negation – es bietet sich NB an, was den Beweis zu Ende bringt:

[40]**	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	2	Wäre$_{1,2}$	A	
	3	Also$_{1,2}$	$A \vee \neg A$	| AE; 2
	4	Also$_{1,2}$	$\neg (A \vee \neg A)$	| W; 1
	5	Also$_1$	$\neg A$	| NE; 2-4
	6	Also$_1$	$A \vee \neg A$	| AE; 5
	7	Also	$\neg \neg (A \vee \neg A)$	| NE; 1-6
	8	Also	$A \vee \neg A$	| NB; 7

Die NE-Anwendung in Zeile 7 ist zulässig, weil sich in den Zeilen 1 und 6 ein Widerspruch vorfindet. Die Zeilen 4 und 6 taugen nicht zur Lizensierung der NE in Zeile 7, weil Zeile 4 seit der NE-Anwendung in Zeile 5 nicht mehr verfügbar ist. – Als allgemeines Rezept lässt sich dem Beweis für das Tertium-non-datur entnehmen: Kommt man nicht auf ordentlichem Wege zum Beweis einer Aussage Δ, dann kann man die Möglichkeit über NE und NB in Betracht ziehen, wobei man mit der Negation der zu beweisenden Aussage startet. Dieser Beweistyp ist der klassische indirekte Beweis, weil die die klassische Logik charakterisierende Regel NB eine wesentliche Rolle spielt. Das allgemeine Schema für das klassische indirekte Beweisen bzw. Schließen hat folgende Gestalt:

[35]+	Wäre	$\neg A$
	...	...
	Ξ	Δ

... ...

Ξ' $\neg \Delta$, wobei $\neg A$ als letzte Annahme verfügbar ist

Also $\neg \neg A$

Also A

Der letzte Schritt, die doppelte Negatorbeseitigung, ist für das klassische indirekte Schließen wesentlich. Mit NB sind die Beweismöglichkeiten wesentlich erweitert: Eine Aussage gleich welchen Hauptoperators kann man, falls sie auf klassisch direktem Weg beweisbar ist, auch klassisch indirekt beweisen, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Als Faustregel für die Beweissuche gilt somit: Wenn man einen Beweis für eine Aussage mit τ als Hauptoperator sucht, arbeitet man zunächst mit der τ-Einführung als übergreifende Regel. Beispiel: Versuche zunächst, eine Konjunktion über KE zu beweisen. Bei negativem Ausgang ist der klassische indirekte Weg zu erproben!

In der Folge wird ohne weiteren Kommentar der Beweis eines Kontrapositionsgesetzes notiert; jegliche Kommentierung entfällt, so dass das Schema eines rein objektsprachlichen Beweises erscheint:

[41] 0 Es gilt $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
1 Sei $A \rightarrow B$
2 Sei $\neg B$
3 Wäre A
4 Also B
5 Also $\neg B$
6 Also $\neg A$
7 Also $\neg B \rightarrow \neg A$
8 Also $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
9 Sei $\neg B \rightarrow \neg A$
10 Sei A
11 Wäre $\neg B$
12 Also $\neg A$
13 Also A

14	Also	$\neg \neg B$
15	Also	B
16	Also	$A \rightarrow B$
17	Also	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
18	Also	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Ü7 a) Überführen Sie das Beweisschema in ein kommentiertes Beweisschema!

b) Verdeutlichen Sie sich den Beweisgang auf Basis der benutzten Regeln!

Das zuletzt zu beweisende Ex-falso-quodlibet, besser Ex-contradictione-quodlibet, besagt, lax geredet, dass aus einem Widerspruch Beliebiges folgt. Akzeptiert man also einen Widerspruch als wahr, dann könnte man aus dem Widerspruch und dem erörterten Prinzip Beliebiges beweisen. Der Unterschied zwischen wahr und falsch und damit auch die Möglichkeit des Unterscheidenkönnens wäre aufgehoben:

[42]	0	Es-gilt	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Delta$	
	1	Sei$_{1}$	$A \wedge \neg A$	
	2	Wäre$_{1,2}$	$\neg \Delta$	
	3	Also$_{1,2}$	A	KB; 1
	4	Also$_{1,2}$	$\neg A$	KB; 1
	5	Also$_{1}$	$\neg \neg \Delta$	NE; 2-4
	6	Also$_{1}$	Δ	NB; 5
	7	Also	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Delta$	SE; 1-6

Da der Beweiskandidat eine Subjunktion ist, wird in Zeile 1 das Antezedens angenommen. Für die Herleitung von Δ in Zeile 6 ist der (klassische) indirekte Weg gewählt, indem man in Zeile 2 $\neg\Delta$ annimmt. KB führt in 3 und 4 zu der für NE erforderten Diskurslage. Dabei ist darauf zu achten, dass KB erst nach der Annahme in Zeile 2 angewendet wird, damit der Widerspruch im Ausgang von dieser Annahme gewonnen wurde. In Zeile 5 wird dann die Annahme des indirekten Beweises negiert. NB und SE sorgen für die abschließenden Schritte.

Ü8 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $\neg \neg A \leftrightarrow A$

b) $(A \wedge \neg A) \rightarrow \neg \Delta$

c) $(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$

d) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$

e) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$

4.3 Regeln für die Quantoren

In der Folge kommen die Regeln für den Universal- und den Partikularquantor zur Sprache. Mit Hilfe dieser beiden Quantoren und des im nächsten Abschnitt dargestellten Identitätsprädikators können später Mindest-, Höchst- und Anzahlquantoren definiert werden; dabei wird der Eins- bzw. der Einzigkeitsquantor eine hervorragende Position im Blick auf die Organisation der Bezugnahme einnehmen (↑5., 7.)

4.3.1 Der Universalquantor

Zur Erinnerung: Der Universalquantifikator ’⋀..’ ist ein einstelliger, variablenbestimmender und quantorenerzeugender Operator; das Ergebnis der Anwendung von ’⋀..’ auf eine Variable ξ ist der ξ bindende Quantor $\bigwedge\xi$__. Der Universalquantor $\bigwedge\xi$__ ist ein einstelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Quantor; das Ergebnis der Anwendung von $\bigwedge\xi$__ auf eine Formel Δ ist eine universalquantifizierte Formel, $\bigwedge\xi\Delta$ – die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ. Kommt in Δ höchstens ξ frei vor, so wird die Formel $\bigwedge\xi\Delta$ auch als universale Aussage bzw. als Universalaussage geführt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Universalquantifikation geschlossen werden darf und was aus einer Universalquantifikation gefolgert werden darf: Falls eine Eigenschaft, ausgedrückt durch Δ, auf eine beliebige repräsentative Entität, die durch einen Parameter β vertreten wird, zutrifft, dann darf man schließen, dass Δ auf alle Gebilde zutrifft, dann darf man also auf $\bigwedge\xi\Delta$ schließen. Umgekehrt: Aus einer Universalquantifikation $\bigwedge\xi\Delta$, daraus also, dass Δ von allen Gebilden gilt, darf man folgern, dass Δ auch auf jedes einzelne θ zutrifft. – Zum Verständnis beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen ’Für alle..’ und seinen Synonymen hilfreich sein.

Um die Aufmerksamkeit auf das hier Wesentliche zu konzentrieren, wird nun die Verschiedenheitsforderung (↑4.2.1) ergänzt: Für die schematischen Satzsequenzen soll nicht nur gelten, dass Formeln, die durch verschiedene Mitteilungszeichen bezeichnet werden, keine

Teilformeln voneinander sind, sondern auch, dass verschiedene Mitteilungszeichen für Parameter, Variablen und Terme für teiltermfremde und damit verschiedene Parameter, Variablen und Terme stehen, dass also etwa Vorkommen von 'θ', 'β', 'ω', 'ξ' in einem Beweisschema durch 'der-Vater-von(x)', 'y', '*x*', '*y*', aber nicht durch 'der-Vater-von(y)', 'y', '*x*', '*x*' instanziiert werden dürfen. A, B, Γ, Δ seien jeweils parameterfreie Formeln, in denen jeweils höchstens die Variablen frei sind, die durch evtl. vorangestellte Quantoren gebunden sind oder als Substituenda für die Substitutionsoperation dienen. Diese Festlegungen betreffen die im Folgenden bewiesenen Formelschemata. Instanzen dieser Formelschemata, die diese Einschränkungen verletzen, sind dennoch beweisbar, die Beweise gestalten sich jedoch unter Umständen anders. – Die Regelformulierungen und die Schlussfiguren sind jedoch weiterhin so allgemein wie möglich. Für sie gelten daher nur die Einschränkungen die ausdrücklich in der Regelformulierung aufgerufen sind.

Zunächst zur Universalquantorbeseitigung: Der Schluss vom Allgemeinen aufs Einzelne, von einer Universalquantifikation auf eine Instanz, wurde bereits im Rahmen der Darlegung der grammatischen Begrifflichkeit erläutert (↑3.1, 3.2.4). Man kann also direkt die Schlussfigur notieren:

[43] Ξ $\bigwedge\xi\Delta$
Also $[\theta, \xi, \Delta]$

Dabei ist θ ein geschlossener Term. Die Regel der Universal(quantor)beseitigung (=UB) kann so formuliert werden:

[44] Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ξ gewonnen hat und θ ein geschlossener Term ist, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ für ξ in Δ folgern.

Wenn alle Menschen sterblich sind und Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich. Das (Theorem)Schema zu dieser (Theorem)Instanz, die generalisierte Subjunktorbeseitigung, wird so bewiesen:

[45] 0 Es-gilt $(\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]) \rightarrow [\theta, \xi, \Gamma]$

1 Sei $\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]$

2 Also $\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma)$ | KB; 1

3 Also $[\theta, \xi, \Delta]$ | KB; 1

4 Also $[\theta, \xi, \Delta] \rightarrow [\theta, \xi, \Gamma]$ | UB; 2

5 Also $[\theta, \xi, \Gamma]$ | SB; 4,3

6 Also $(\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]) \rightarrow [\theta, \xi, \Gamma]$ | SE; 1-5

Der metasprachliche Substitutionsoperator '[..,..,..]' dient in dem schematischen Beweis [45] und in der Schlussfigur [43] dazu, ganz generell auf Substitutionsergebnisse zu referieren, also insbesondere auf Formeln, die aus offenen Formeln entstehen, in dem für eine freie Variable ein geschlossener Term eingesetzt wird. In einem einzelnen Beweis (im Gegensatz zu einem Beweisschema, wie [45]) wird bei UB das konkrete Ergebnis der im Zuge dieser UB vollzogenen Substitution direkt notiert. Aus diesem Grund tauchen die Substitutionsklammern in einer Instanz zu [45], zum Beispiel in [46], nicht auf:

[46] 0 Es-gilt $(\bigwedge \mathrm{x}\,(\mathrm{M}(\mathrm{x}) \rightarrow \mathrm{St}(\mathrm{x})) \wedge \mathrm{M}(\mathrm{s})) \rightarrow \mathrm{St}(\mathrm{s})$

1 Sei $\bigwedge x\,(\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{St}(x)) \wedge \mathrm{M}(\mathrm{s})$

2 Also $\bigwedge x\,(\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{St}(x))$ | KB; 1

3 Also $\mathrm{M}(\mathrm{s})$ | KB; 1

4 Also $\mathrm{M}(\mathrm{s}) \rightarrow \mathrm{St}(\mathrm{s})$ | UB; 2

5 Also $\mathrm{St}(\mathrm{s})$ | SB; 4,3

6 Also $(\bigwedge x\,(\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{St}(x)) \wedge \mathrm{M}(\mathrm{s})) \rightarrow \mathrm{St}(\mathrm{s})$ | SE; 1-5

Die materialen Redeteile sind wie folgt zu lesen: 'M(..)' als '.. ist ein Mensch'; 'St(..)' als '.. ist sterblich'; 's' als 'Sokrates'. – UB kann in dem Sinne iteriert angewendet werden, als eine mehrfache Universalquantifikation bzgl. desselben Gebildes mehrfach spezialisiert werden kann: Aus '$\bigwedge x \bigwedge y$ Vertraut(x, y)' lässt sich '$\bigwedge y$ Vertraut(Sokrates, y)' und dann 'Vertraut(Sokrates, Sokrates)' schließen. Der geschlossene Term θ, hier 'Sokrates', darf demnach, wie die zweite Folgerung zeigt, in Δ, hier: '$\bigwedge y$ Vertraut(Sokrates, y)', schon Teilterm sein.

Die Regel der Universalquantoreinführung kann informell so formuliert werden: Wenn man von einem repräsentativen Gebilde, vertreten durch den Parameter β, gezeigt hat, dass ihm die durch Δ ausgedrückte Eigenschaft zukommt, dann darf man daraus schließen, dass allen Gebilden die Eigenschaft Δ zukommt, dann darf man also auf $\bigwedge\xi\Delta$ schließen. Man betrachte die Aussage: Alle Bayern sind Europäer. Ein Beweis könnte so aussehen: Sei z ein Bayer. Nun sind alle Bayern Deutsche. Wenn z Bayer ist, ist er demzufolge Deutscher. Also ist z Deutscher. Ferner sind alle Deutschen Europäer. Wenn also z Deutscher ist, ist er auch Europäer. Also ist z Europäer. Also ist z Europäer, falls er Bayer ist. Damit gilt insgesamt: Alle Bayern sind Europäer. Das Schema dieses Beweises hat folgende Gestalt:

[47] 0 Es-gilt $\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma)$
1 Sei $[\beta, \xi, \Delta]$
2 Da $\bigwedge\xi\,(\Delta \to \mathrm{A})$
3 Also $[\beta, \xi, \Delta] \to [\beta, \xi, \mathrm{A}]$ | UB; 2
4 Also $[\beta, \xi, \mathrm{A}]$ | SB; 3,1
5 Da $\bigwedge\xi\,(\mathrm{A} \to \Gamma)$
6 Also $[\beta, \xi, \mathrm{A}] \to [\beta, \xi, \Gamma]$ | UB; 5
7 Also $[\beta, \xi, \Gamma]$ | SB; 4,6
8 Also $[\beta, \xi, \Delta] \to [\beta, \xi, \Gamma]$ | SE; 1-7
⇒ 9 Also $\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma)$ | UE; 8

Ü9 a) Notieren Sie das in Prosa entwickelte Beispiel im Stil von [47]!

b) Legen Sie eine Liste mit den Entsprechungen an (z.B.: 'Bayer(*x*)' = Δ)!

c) Finden Sie eine weitere Instanz zu dem Beweisschema [47]!

Ziel ist der Nachweis, dass alle Gebilde die Eigenschaft haben, Γ zu sein, falls sie Δ sind. Gezeigt wird dies für die β-Gegebenheit, und zwar nach der ›Logik der Subjunktion‹ und unter Anziehung zweier allgemeiner Tatsachen, die in Zeile 2 und Zeile 5 notiert sind. In Zeile 8 ist gezeigt, dass die Eigenschaft, Γ zu sein, falls Δ, zutrifft, von dem repräsentativ gewählten β-Ding gilt. Das legitimiert den durch den Doppelpfeil markierten Schluss der Universalquantoreinführung. Die Schlussfigur hat folgende Gestalt:

[48] Ξ $[\beta, \xi, \Delta]$, wobei β kein Teilterm von Δ oder einer verfügbaren Annahme ist
Also $\bigwedge\xi\Delta$

Die an die Prämisse angefügte Bedingung garantiert, dass β wirklich eine repräsentative Gegebenheit ist und keine besonderen Eigenschaften mittransportiert, die diese Repräsentativität stören; die Parameterbedingung wird erst später im Detail erläutert, wenn Vertrautheit im Umgang mit den neuen Regeln hergestellt ist (↑4.3.2). – Die Regel der Universal(quantor)einführung (=UE) lautet:

[49] Wenn man das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Δ noch Teilterm einer verfügbaren Annahme ist, dann darf man die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Das erste Theorem greift sowohl auf Elemente der Beispielbetrachtung [47] wie auch auf den Nachweis der Transitivität des Subjunktors (↑[15]) zurück. Wie immer wird der Zusammenhang von Bedeutung und Beweisweg ins Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt.

[50] Es-gilt $(\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion. Um eine Subjunktion zu beweisen, nimmt man zunächst ihr Antezedens an, um im Ausgang davon ihr Sukzedens zu gewinnen. Der Beweis ist mit einem Indexkommentar ausgestattet:

[50]+ 1 Sei$_1$ $\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)$

... ...

k Also$_1$ $\bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$

k+1 Also $(\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$ | SE

Die verbleibende Teilaufgabe besteht in der Folgerung von $\bigwedge\omega(B\to\Delta)$ im Ausgang von der Annahme in der ersten Zeile. Die Aussage der Zeile k ist eine Universalquantifikation. Aussagen dieser Art werden gemäß UE gefolgert. Dazu ist zu zeigen, dass der Bedingungszusammenhang zwischen B und Δ auf eine beliebig, aber fest gewählte, eben eine repräsentative, Entität β zutrifft: $[\beta,\omega,B]\to[\beta,\omega,\Delta]$. Ist diese Subjunktion in Abhängigkeit von der erstens angenommenen Aussage gewonnen, dann greift UE:

[50]° 1 Sei$_1$ $\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)$

... ...

k-1 Also$_1$ $[\beta, \omega, B] \to [\beta, \omega, \Delta]$

k Also$_1$ $\bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$ | UE

k+1 Also $(\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$ | SE

Die Aussage von k-1 ist eine Subjunktion, die in der bekannten Weise gemäß SE gewonnen wird. Herzustellen ist insgesamt folgende Diskurslage:

[50]▫	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\ (B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \omega, B]$	
	...	...	...	
	k-2	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	k-1	Also_1	$[\beta, \omega, B] \to [\beta, \omega, \Delta]$	| SE
	k	Also_1	$\bigwedge\omega\ (B \to \Delta)$	| UE
	k+1	Also	$(\bigwedge\omega\ (B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\ (B \to \Delta)$	| SE

Damit ist auch die Restaufgabe gestellt: Folgere aus der in Zeilen 1 und 2 gegebenen Basis die Aussage von k-2. Das erstens Angenommene ist eine Konjunktion, die man gemäß KB zerlegen kann. In Zeile 3 und 4 gewinnt man dann die einzelnen Universalquantifikationen:

[50]*	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\ (B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \omega, B]$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (B \to \Gamma)$	| KB; 1
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	| KB; 1
	...	...	...	
	k-2	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	k-1	Also_1	$[\beta, \omega, B] \to [\beta, \omega, \Delta]$	| SE
	k	Also_1	$\bigwedge\omega\ (B \to \Delta)$	| UE
	k+1	Also	$(\bigwedge\omega\ (B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\ (B \to \Delta)$	| SE

Die Aussagen von 3 und 4 betrachten generelle Zusammenhänge zwischen der Β-, der Γ- und der Δ-Eigenschaft. In diesem Beweiskontext interessiert jedoch der repräsentative Spezialfall β. Mit UB gewinnt man aus 3 und 4 die hier zielführende Spezialisierung:

[50]**	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\ (B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \omega, B]$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (B \to \Gamma)$	| KB; 1
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	| KB; 1
	5	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, B] \to [\beta, \omega, \Gamma]$	| UB; 3

6 Also$_{1,2}$ $[\beta, \omega, \Gamma] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$ | UB; 4

… … …

k-2 Also$_{1,2}$ $[\beta, \omega, \Delta]$

... ...

Damit ergibt sich nur noch die Aufgabe, aus den Subjunktionen in 5 und 6 und aus dem Antezedens der ersten Subjunktion, welches in Zeile 2 angenommen worden ist, die Aussage von k-2 zu gewinnen. Diese Aufgabe wurde beim Beweis der Transitivität des Subjunktors bereits gelöst (↑[15]). Insgesamt ergibt sich dann folgender Beweis:

[50]°° 1 Sei$_1$ $\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \rightarrow \Delta)$

2 Sei$_{1,2}$ $[\beta, \omega, \mathrm{B}]$

3 Also$_{1,2}$ $\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)$ | KB; 1

4 Also$_{1,2}$ $\bigwedge\omega\ (\Gamma \rightarrow \Delta)$ | KB; 1

5 Also$_{1,2}$ $[\beta, \omega, \mathrm{B}] \rightarrow [\beta, \omega, \Gamma]$ | UB; 3

6 Also$_{1,2}$ $[\beta, \omega, \Gamma] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$ | UB; 4

7 Also$_{1,2}$ $[\beta, \omega, \Gamma]$ | SB; 5,2

8 Also$_{1,2}$ $[\beta, \omega, \Delta]$ | SB; 6,7

9 Also$_1$ $[\beta, \omega, \mathrm{B}] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$ | SE; 2-8

10 Also$_1$ $\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \rightarrow \Delta)$ | UE; 9

11 Also $(\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \rightarrow \Delta)) \rightarrow \bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \rightarrow \Delta)$ | SE; 1-10

Dabei werden die Zeilen unter Wegfall der k-Bezifferung laufend nummeriert und der Regelkommentar vervollständigt. – Das zweite Theorem hält fest, dass man aus der Adjunktion zweier Universalquantifikationen auf die Universalquantifikation zweier Adjunktionen schließen darf:

[51] 0 Es-gilt $(\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma) \rightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \vee \Gamma)$

→ 1 Sei$_1$ $\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma$

2 Sei$_{1,2}$ $\bigwedge\xi\Delta$

3 Also$_{1,2}$ $[\beta, \xi, \Delta]$ | UB; 2

4 Also$_{1,2}$ $[\beta, \xi, \Delta] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$ | AE; 3

→	5	Also$_{1,2}$	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	UE; 4
	6	Also$_{1}$	$\bigwedge\xi\Delta \rightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	SE; 2-5
┌	7	Sei$_{1,7}$	$\bigwedge\xi\Gamma$	
│	8	Also$_{1,7}$	$[\beta, \xi, \Gamma]$	UB; 7
│	9	Also$_{1,7}$	$[\beta, \xi, \Delta] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$	AE; 8
└→	10	Also$_{1,7}$	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	UE; 9
	11	Also$_{1}$	$\bigwedge\xi\Gamma \rightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	SE; 7-10
	12	Also$_{1}$	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	AB; 1,6,11
	13	Also	$(\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma) \rightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	SE; 1-12

Das Antezedens der zu beweisenden Subjunktion erzwingt eine Fallunterscheidung. Sowohl im Ausgang vom ersten (Zeile 2-5) wie auch im Ausgang vom zweiten Fall (Zeile 7-10) folgt das Gewünschte, was jeweils durch SE dokumentiert wird. Mit AB kann man dann das gemeinsame Sukzedens folgern; damit ist die Möglichkeit zur abschließenden Anwendung von SE gegeben. – Schließlich sei noch eine quantorenlogische Variante des Nichtwiderspruchsprinzips bewiesen:

[52]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi \neg (\Delta \wedge \neg \Delta)$	
	1	Wäre$_{1}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Delta]$	
	2	Also$_{1}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	KB; 1
	3	Also$_{1}$	$\neg [\beta, \xi, \Delta]$	KB; 1
	4	Also	$\neg ([\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Delta])$	NE; 1-3
	5	Also	$\bigwedge\xi \neg (\Delta \wedge \neg \Delta)$	UE; 4

Bei diesem Beweis kommt es darauf an, die geeignete ›Zielscheibe‹ für den indirekten Beweis zu finden. Dazu muss man sich klarmachen, welche Aussage für die Anwendung von UE passt. Da diese Aussage eine Negation ist, startet man mit dem Negatum. Die Beweiszüge 1 bis 4 sind vom Beweis des junktorenlogischen Widerspruchsprinzips bekannt (↑[39]).

Ü10 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $(\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\, B) \rightarrow \bigwedge\omega\, \Gamma$

b) $\bigwedge\omega\,(B \wedge \Gamma) \leftrightarrow (\bigwedge\omega\, B \wedge \bigwedge\omega\, \Gamma)$

c) $\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\bigwedge\omega\, B \rightarrow \bigwedge\omega\, \Gamma)$

d) $(\bigwedge\omega\,(B \vee \Gamma) \wedge \bigwedge\omega \neg \Gamma) \rightarrow \bigwedge\omega\, B$

UE gibt den Weg vor, um auf eine Universalquantifikation zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Universalquantifikation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert UE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Universalquantifikationen. UB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, die aus der Substitution eines geschlossenen Terms für die Variablen in der universalquantifizierten Formel entstehen, also auf Spezialisierungen der Universalaussage. Ist die Universalquantifikation wahr, dann ist auch die Spezialisierung wahr. Insofern spezifiziert UB die Rolle von Universalaussagen als Wahrheitsbasis.

4.3.2 Der Partikularquantor

Zur Erinnerung: Der Partikularquantifikator '$\bigvee$..' ist ein einstelliger, variablenbestimmender und quantorenerzeugender Operator; das Ergebnis der Anwendung von '$\bigvee$..' auf eine Variable ξ ist der ξ bindende Quantor $\bigvee\xi$__. Der Partikularquantor $\bigvee\xi$__ ist ein einstelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Quantor; das Ergebnis der Anwendung von $\bigvee\xi$__ auf eine Formel Δ ist eine partikularquantifizierte Formel, $\bigvee\xi\Delta$ – die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ. Kommt in Δ höchstens ξ frei vor, so wird die Formel $\bigvee\xi\Delta$ auch als partikulare Aussage bzw. als Partikularaussage geführt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Partikularquantifikation geschlossen werden darf bzw. was aus einer Partikularquantifikation gefolgert werden darf. Zum ersten: Falls eine Δ-Eigenschaft auf eine θ-Entität zutrifft, dann darf man daraus schließen, dass für wenigstens eine Entität die Δ-Eigenschaft gilt. Kurz: Besitzt ein bestimmtes Einzelnes eine Eigenschaft, dann gibt es etwas, was diese Eigenschaft aufweist. Zum zweiten: Hat man eine Partikularquantifikation gewonnen, dann darf man aus ihr all das folgern, was aus einer zugehörigen ›Ersatzannahme‹ folgt. Hat man gewonnen, dass eine Δ-Eigenschaft auf wenigstens ein ξ zutrifft, dann darf man daraus all das folgern, was man ausgehend davon gewinnen kann, dass Δ auf ein beliebig, aber fest gewähltes β zutrifft. – Zum Verständnis beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'Es gibt ein..' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Partikularquantoreinführung: Man darf daraus, dass für einen singulären Gegenstand etwas gilt, folgern, dass es etwas gibt bzw. dass für wenigstens ein Gebilde gilt, dass es die Eigenschaft hat, die dem singulären Gegenstand zukommt. UB erlaubt den

Schluss vom Universalen aufs Singuläre; die jetzt erörterte Regel gestattet den Übergang vom Singulären aufs Partikulare. Die Schlussfigur:

[53] Ξ $[\theta, \xi, \Delta]$
Also $\bigvee\xi\Delta$

Wenn man etwa die Aussage ’3=3’ gewonnen hat, dann darf man daraus die Aussagen ’$\bigvee x\; x=3$’, ’$\bigvee x\; 3=x$’, ’$\bigvee x\; x=x$’ folgern. Im ersten Fall entspricht ’3’ θ und ’$x=3$’ entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann [’3’, ’x’, ’$x=3$’], also ’3=3’ dem $[\theta, \xi, \Delta]$. Im zweiten Fall entspricht wiederum ’3’ θ und ’$3=x$’ entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann [’3’, ’x’, ’$3=x$’], also ’3=3’, dem $[\theta, \xi, \Delta]$. Im dritten Fall entspricht wiederum ’3’ θ und ’$x=x$’ entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann [’3’, ’x’, ’$x=x$’], also ’3=3’, dem $[\theta, \xi, \Delta]$.

Material gesprochen: Im ersten Fall schließt man daraus, dass 3 die Eigenschaft hat, zu 3 in der Identitätsbeziehung zu stehen, dass es etwas gibt, das zu 3 in der Identitätsbeziehung steht. Im zweiten Fall schließt man daraus, dass 3 die Eigenschaft hat, dass 3 zum erstgenannten Gebilde in der Identitätsbeziehung steht, dass es etwas gibt, zu dem 3 in der Identitätsbeziehung steht. Im dritten Fall schließt man daraus, dass 3 zu sich in der Identitätsrelation steht, dass wenigstens ein Gebilde zu sich in der Identitätsbeziehung steht.

Aus ’$\bigvee x\; x=3$’ kann man weiter auf ’$\bigvee z \bigvee x\; x=z$’ schließen und aus ’$\bigvee x\; 3=x$’ lässt sich ’$\bigvee y \bigvee x\; y=x$’ folgern. Die Prämisse des Schlusses muss also keineswegs eine atomare Aussage sein. Im ersten Fall hat 3 die Eigenschaft, dass es etwas gibt, das zu 3 in der Identitätsbeziehung steht. Also gilt, dass für wenigstens ein Gebilde zutrifft, dass es etwas gibt, das zu ihm in der Identitätsrelation steht; [’3’, ’z’, ’$\bigvee x\; x=z$’] entspricht in diesem Beispiel $[\theta, \xi, \Delta]$. Im zweiten Fall hat 3 die Eigenschaft, dass 3 zu wenigstens einem Gebilde in der Identitätsbeziehung steht. Also gibt es wenigstens eine Gegebenheit, die zu wenigstens einem Gebilde in der Identitätsrelation steht; [’3’, ’y’, ’$\bigvee x\; y=x$’] entspricht in diesem Beispiel $[\theta, \xi, \Delta]$. Die Eigenschaft, die das Einzelne besitzt, kann also komplex sein. Formal ausgedrückt: θ kann Teilterm einer molekularen Formel Δ sein. – Die Regel der Partikular(quantor)einführung (=PE) lässt sich abschließend so formulieren:

[54] Wenn man das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, dann darf man die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Was auf alle zutrifft, gilt auch für einzelne Gegenstände; und wenn etwas von einem einzelnen Gegenstand gilt, trifft es auch auf wenigstens eine Gegebenheit zu. Vom Universalen gibt es also über das Singuläre einen ›Durchgang‹ zum Partikularen, eben dies zeigt der folgende unkommentierte Beweis:

[55]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi\Delta \to \bigvee\xi\Delta$
	1	Sei	$\bigwedge\xi\Delta$
	2	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$
	3	Also	$\bigvee\xi\Delta$
	4	Also	$\bigwedge\xi\Delta \to \bigvee\xi\Delta$

Die soeben formulierte Regel wird im zweiten Folgerungsschritt angewendet. – Die Regel der Partikularquantorbeseitigung wird oft als schwierig empfunden. Aus einer Partikularquantifikation darf man schließen, was man im Ausgang von einem repräsentativen Fall, der Ersatzannahme für die Quantifikation, gewonnen hat.

Zunächst ein Beispiel: Zu begründen ist die Aussage ’Alle Menschen haben einen Vater’ bzw. grammatisch formatiert, ’Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch ist, dann gibt es ein *y*, so dass *y* Vater von *x* ist.’ Begründung:

[56]	0	Es-gilt	$\bigwedge x\ (\text{Mensch}(x) \to \bigvee y\ \text{Vater}(y, x))$	
	1	Sei$_1$	Mensch(u)	
	2	Da$_1$	$\bigwedge x\ (\text{Mensch}(x) \to \bigvee z\ \text{Zeugte}(z, x))$	
	3	Also$_1$	$\text{Mensch(u)} \to \bigvee z\ \text{Zeugte}(z, \text{u})$	| UB; 2
	4	Also$_1$	$\bigvee z\ \text{Zeugte}(z, \text{u})$	| SB; 1,3
	5	Sei$_{1,5}$	Zeugte(v, u)	
	6	Da$_{1,5}$	$\bigwedge x \bigwedge y\ (\text{Vater}(x, y) \leftrightarrow \text{Zeugte}(x, y))$	
	7	Also$_{1,5}$	$\bigwedge y\ (\text{Vater}(\text{v}, y) \leftrightarrow \text{Zeugte}(\text{v}, y))$	| UB; 6
	8	Also$_{1,5}$	$\text{Vater(v, u)} \leftrightarrow \text{Zeugte(v, u)}$	| UB; 7
	9	Also$_{1,5}$	Vater(v, u)	| BB; 8,5
	10	Also$_{1,5}$	$\bigvee y\ \text{Vater}(y, \text{u})$	| PE; 9
⇒	11	Also$_1$	$\bigvee y\ \text{Vater}(y, \text{u})$	| PB; 4,5-10
	12	Also	$\text{Mensch(u)} \to \bigvee y\ \text{Vater}(y, \text{u})$	| SE; 1-11
	13	Also	$\bigwedge x\ (\text{Mensch}(x) \to \bigvee y\ \text{Vater}(y, x))$	| UE; 12

Dieser Begründungsinstanz ist folgendes Begründungsschema zugeordnet:

[57]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi\,(\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee\omega\,\Psi(\omega, \xi))$	
	1	Sei$_1$	$\Phi(\beta)$	
	2	Da$_1$	$\bigwedge\xi\,(\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee\zeta\,X(\zeta, \xi))$	
	3	Also$_1$	$\Phi(\beta) \rightarrow \bigvee\zeta\,X(\zeta, \beta)$	| UB; 2
	4	Also$_1$	$\bigvee\zeta\,X(\zeta, \beta)$	| SB; 1,3
	5	Sei$_{1,5}$	$X(\beta^*, \beta)$	
	6	Da$_{1,5}$	$\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Psi(\xi, \omega) \leftrightarrow X(\xi, \omega))$	
	7	Also$_{1,5}$	$\bigwedge\omega\,(\Psi(\beta^*, \omega) \leftrightarrow X(\beta^*, \omega))$	| UB; 6
	8	Also$_{1,5}$	$\Psi(\beta^*, \beta) \leftrightarrow X(\beta^*, \beta)$	| UB; 7
	9	Also$_{1,5}$	$\Psi(\beta^*, \beta)$	| BB; 5,8
	10	Also$_{1,5}$	$\bigvee\omega\,\Psi(\omega, \beta)$	| PE; 9
$\Rightarrow$	11	Also$_1$	$\bigvee\omega\,\Psi(\omega, \beta)$	| PB; 4,5-10
	12	Also	$\Phi(\beta) \rightarrow \bigvee\omega\,\Psi(\omega, \beta)$	| SE; 1-11
	13	Also	$\bigwedge\xi\,(\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee\omega\,\Psi(\omega, \xi))$	| UE; 12

Es entspricht Φ dem Prädikator ’Mensch(..)’, lies: ’.. ist ein Mensch’, und Ψ dem Prädikator ’Vater(..,..)’, lies: ’..ist Vater von..’; X korrespondiert ’Zeugte(..,..)’, lies: ’..zeugte..’. Anstatt der allgemeineren Formelmitteilungszeichen Δ, Γ, B usf. wurden hier die Prädikatorenmitteilungszeichen gewählt: So wird die Aufmerksamkeit nicht durch prima facie wenig transparente, weil geschachtelte, Substitutionsverhältnisse abgelenkt. Die hier interessierenden Schritte finden zwischen den Zeilen 4 und 11 statt: In Zeile 4 wird eine Partikularquantifikation gewonnen, und zwar im Folgerungsmodus. Die Partikularquantifikation wird zur weiteren Verwendung als Prämisse dadurch aufbereitet, dass ein Repräsentant für das wenigstens eine ζ gewählt wird, das zu β in der Relation X steht. Das ist insofern legitim, als ja nach PE für eine singuläre Gegebenheit gelten muss, dass sie in X zu β steht. Andererseits ist nicht klar, welches Singuläre dies ist. Das repräsentative Gebilde, hier β^*, soll nun zwar alle die Eigenschaften haben dürfen, die auf alles zutreffen; insofern ist gegen den UB-Schritt von Zeile 6 auf Zeile 7 nichts einzuwenden. Es soll aber ansonsten nur die in der Partikular- bzw. in der repräsentativen Ersatzannahme ausgedrückte Eigenschaft besitzen. Was auf alles zutrifft, soll auch von β^* gelten; ansonsten soll von β^* aber auch nur gelten, dass es in *X* zu β steht. Um diesen Ausschluss zu garantieren, werden der Regel der Partikularquantorbeseitigung einige später erläuterte Kautelen hinzugefügt.

In Zeile 10 ist man insoweit zum Ziel gelangt, als man das gewünschte Sukzedens erreicht hat. Nun ›erinnert‹ man sich daran, dass man das Ergebnis im Ausgang von der repräsentativen Ersatzannahme erzielt hat und geht zu dem eigentlich gewonnenen Rahmen zurück, der durch die Partikularquantifikation gegeben ist. Dieser Folgerungszug ist die Partikularquantorbeseitigung. Anwendungszeilen bzw. -abschnitte sind die Zeile 4, deren Satzaussage die Partikularaussage ist, und der Abschnitt von Zeile 5 bis Zeile 10, der einem Unterbeweis entspricht. Die Verfügbarkeiten ändern sich: Die Ersatzannahme in Zeile 5 und alle folgenden gefolgerten Aussagen werden unverfügbar; lediglich die zuletzt gefolgerte Aussage (in Zeile 11) wird verfügbar. Diese Aussage hat man jetzt im Ausgang von derselben Annahme gewonnen wie zuvor die Partikularquantifikation (in Zeile 4). Dieser Sachverhalt gestattet die anschließende Subjunktoreinführung. – Die Schlussfigur der Partikularquantorbeseitigung hat folgende Gestalt:

[58] Ξ $\bigvee\xi\Delta$

Sei $[\beta, \xi\ \Delta]$

… …

Ξ' Γ , wobei $[\beta, \xi\ \Delta]$ als letzte Annahme verfügbar ist + Kautelen

Also Γ

Der Schluss tilgt die Ersatzannahme. – Die folgende Regel der Partikularquantorbeseitigung (=PB) enthält auch die in [58] nur global angedeuteten Kautelen:

[59] Wenn man die Partikularquantifikation einer Formel Δ bezüglich einer Variable ξ gewonnen hat und wenn man unmittelbar danach das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für ξ in Δ angenommen hat und wenn man im Ausgang von dieser Annahme zuletzt eine Aussage Γ gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Γ noch von irgendeiner Satzaussage vor der als letzter verfügbaren Annahme ist, dann darf man nochmals Γ folgern.

Ist eine Folgerung gemäß Partikularquantorbeseitigung gestattet, so befreit man sich durch diese Folgerung von der letzten noch verfügbaren Annahme. Da man sich im Zuge einer Anwendung von PB von der Ersatzannahme befreit, sind nach dem Schlussakt von der Zeile der Ersatzannahme an bis einschließlich der nun vorletzten Zeile alle gefolgerten Aussagen nicht mehr verfügbar. Evtl. nach der Ersatzannahme angenommene Aussagen müssen erinnerlich bereits unverfügbar gemacht worden sein, wenn die Ersatzannahme als letzte Annahme verfügbar ist. Die mit PB gefolgerte Aussage Γ in der letzten Zeile wird allerdings verfügbar. Der von der Ersatzannahme bis zur nunmehr vorletzten Zeile reichende Abschnitt bildet den Prämissenabschnitt des Schlusses nach PB, während die vorangehende Partikularquantifikation die Prämisse dieses Schlusses bildet. Man beachte, dass die angenommenen und gefolgerten Satzaussagen des Prämissenabschnitts, soweit sie nicht schon unverfügbar waren, auch dann unverfügbar werden, wenn der Schluss nicht nur nach PB, sondern auch nach einer anderen Regel korrekt ist.– Zunächst soll durch den Beweis einschlägiger Aussagen Vertrautheit mit PB hergestellt werden. Die Partikularquantifikation einer Adjunktion aus Δ und Γ ist gleichwertig der Adjunktion aus den Partikularquantifikationen von Δ und Γ. Der Beweis wird mit einer grafischen Kommentierung versehen:

[60] 0 Es-gilt $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma) \leftrightarrow (\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma)$

1 Sei $\vert$ $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$

2 Sei $\vert\vert$ $[\beta, \xi, \mathrm{B}] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$

3 Sei $\vert\vert\vert$ $[\beta, \xi, \mathrm{B}]$

4 Also $\vert\vert\vert$ $\bigvee\xi\,\mathrm{B}$ | PE; 3

5 Also $\vert\vert\vert$ $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | AE; 4

6 Also $\vert\vert$ $[\beta, \xi, \mathrm{B}] \rightarrow \bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | SE; 3-5

7 Sei $\vert\vert\vert$ $[\beta, \xi, \Gamma]$

8 Also $\vert\vert\vert$ $\bigvee\xi\,\Gamma$ | PE; 7

9 Also $\vert\vert\vert$ $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | AE; 8

10 Also $\vert\vert$ $[\beta, \xi, \Gamma] \rightarrow \bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | SE; 7-9

11 Also $\vert\vert$ $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | AB; 2,6,10

12 Also $\vert$ $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | PB; 1,2-11

13 Also $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma) \rightarrow (\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma)$ | SE; 1-12

14 Sei $\vert$ $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$

15 Sei $\vert\vert$ $\bigvee\xi\,\mathrm{B}$

16 Sei $\vert\vert\vert$ $[\beta', \xi, \mathrm{B}]$

17 Also $\vert\vert\vert$ $[\beta', \xi, \mathrm{B}] \vee [\beta', \xi, \Gamma]$ | AE; 16

18 Also $\vert\vert\vert\, \bigvee\xi\,(B \vee \Gamma)$ | PE; 17

19 Also $\vert\vert\, \bigvee\xi\,(B \vee \Gamma)$ | PB; 15,16-18

20 Also $\vert\, \bigvee\xi\, B \rightarrow \bigvee\xi\,(B \vee \Gamma)$ | SE; 15-19

21 Sei $\vert\vert\, \bigvee\xi\, \Gamma$

22 Sei $\vert\vert\vert\, [\beta^*, \xi, \Gamma]$

23 Also $\vert\vert\vert\, [\beta^*, \xi, B] \vee [\beta^*, \xi, \Gamma]$ | AE; 22

24 Also $\vert\vert\vert\, \bigvee\xi\,(B \vee \Gamma)$ | PE; 23

25 Also $\vert\vert\, \bigvee\xi\,(B \vee \Gamma)$ | PB; 21,22-24

26 Also $\vert\, \bigvee\xi\, \Gamma \rightarrow \bigvee\xi\,(B \vee \Gamma)$ | SE; 21-25

27 Also $\vert\, \bigvee\xi\,(B \vee \Gamma)$ | AB; 14,20,26

28 Also $(\bigvee\xi\, B \vee \bigvee\xi\, \Gamma) \rightarrow \bigvee\xi\,(B \vee \Gamma)$ | SE; 14-27

29 Also $\bigvee\xi\,(B \vee \Gamma) \leftrightarrow (\bigvee\xi\, B \vee \bigvee\xi\, \Gamma)$ | BE; 13,28

Beim Weg von links nach rechts findet in Zeile 12 eine Partikularbeseitigung auf Basis einer Adjunktorbeseitigung in Zeile 11 statt. Auf dem Weg von rechts nach links findet in Zeile 27 eine Adjunktorbeseitigung nach zwei Partikularbeseitigungen in den Zeilen 19 und 25 statt. Diese Schrittfolge wird durch die jeweiligen Startformeln, einmal Partikularaussage, einmal Adjunktion, vorgegeben. – Die folgende Aussage ist eine Variante der einfachen Quantorumformung: Die Universalquantifikation einer Formel Δ ist gleichwertig der Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ. Material: Eine Eigenschaft trifft genau dann auf alle Gebilde zu, wenn es kein Gebilde gibt, auf das sie nicht zutrifft:

[61] 0 Es-gilt $\bigwedge\xi\Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi \neg \Delta$

1 Sei$_{1}$ $\bigwedge\xi\Delta$

2 Wäre$_{1,2}$ $\bigvee\xi\neg \Delta$

3 Sei$_{1,2,3}$ $\neg [\beta, \xi, \Delta]$

4 Wäre$_{1,2,3,4}$ $\bigvee\xi\neg \Delta$

5 Also$_{1,2,3,4}$ $[\beta, \xi, \Delta]$ | UB; 1

6 Also$_{1,2,3,4}$ $\neg [\beta, \xi, \Delta]$ | W; 3

7 Also$_{1,2,3}$ $\neg \bigvee\xi\neg \Delta$ | NE; 4-6

8	Also$_{1,2}$	$\neg \bigvee\xi\neg \Delta$	| PB; 2,3-7
9	Also$_{1}$	$\neg \bigvee\xi\neg \Delta$	| NE; 2-8
10	Also	$\bigwedge\xi\Delta \rightarrow \neg \bigvee\xi\neg \Delta$	| SE; 1-9
11	Sei$_{11}$	$\neg \bigvee\xi\neg \Delta$	
12	Wäre$_{11,12}$	$\neg [\beta, \xi, \Delta]$	
13	Also$_{11,12}$	$\bigvee\xi\neg \Delta$	| PE; 12
14	Also$_{11,12}$	$\neg \bigvee\xi\neg \Delta$	| W; 11
15	Also$_{11}$	$\neg \neg [\beta, \xi, \Delta]$	| NE; 12-14
16	Also$_{11}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| NB; 15
17	Also$_{11}$	$\bigwedge\xi\Delta$	| UE; 16
18	Also	$\neg \bigvee\xi\neg \Delta \rightarrow \bigwedge\xi\Delta$	| SE; 11-17
19	Also	$\bigwedge\xi\Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\neg \Delta$	| BE; 10,18

Bei der Links-Rechts-Richtung ist die wiederholte Annahme der zu negierenden Partikularaussage in den Zeilen 2 und 4 zu beachten. Nur so kann auch tatsächlich diese Aussage negiert werden (Zeile 7). Durch die Negation der Partikularquantifikation wurde eine Aussage gewonnen, die den Parameter in der Ersatzannahme (β) nicht mehr zum Teilterm hat. Daher ist anschließend PB legitim. Um nun aber die Abhängigkeit von der ersten Annahme der zu negierenden Partikularquantifikation zu tilgen ist die NE nochmals durchzuführen. Der Widerspruch besteht hier zwischen der angenommenen Aussage und der Aussage in Zeile 8. Bei der Rechts-Links-Richtung kommt es auf die Findung der Annahme des indirekten Beweises an, die in Zeile 12 erfolgt: Zu folgern ist eine Universalaussage; dazu benötigt man nach UE eine Aussage der Art $[\beta, \xi, \Delta]$. Diese erhält man, indem man ihre Negation, also $\neg[\beta, \xi, \Delta]$, zum Widerspruch führt. Aus $\neg\neg[\beta, \xi, \Delta]$ ergibt sich dann mit NB das Gewünschte.

Zuletzt ist eine komplexe Quantorumformung zu betrachten: Die Universalquantifikation einer Subjunktion aus Δ und Γ ist gleichwertig der Negation der Partikularquantifikation der Konjunktion aus Δ und der Negation von Γ:

[62] Es-gilt $\bigwedge\xi (\Delta \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi (\Delta \wedge \neg \Gamma)$

Material gesprochen: Sind alle Δ-Dinge Γ, dann gibt es kein Δ-Gebilde, das nicht Γ ist. Der Beweiskandidat ist eine Bisubjunktion. Nach BE ist damit die übergreifende Gestalt des Beweises festgelegt. Die Links-Rechts-Richtung geht aus von der Annahme der Universalaussage:

[62]°	1	Sei_1	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	
	...	...	...	
	k	Also_1	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg\, \Gamma)$	
	k+1	Also	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma) \rightarrow \neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg\, \Gamma)$	
	...	...	...	

Um die Negation der Partikularaussage zu erhalten, nimmt man die Partikularaussage in der Absicht an, sie zum Widerspruch zu führen. Die angenommene Partikularquantifikation wird mit Blick auf PB durch eine repräsentative Ersatzannahme ersetzt:

[62]*	1	Sei_1	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	
	2	$\text{Wäre}_{1,2}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg\, \Gamma)$	
	3	$\text{Sei}_{1,2,3}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg\, [\beta, \xi, \Gamma]$	
	...	...	...	
	k	Also_1	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg\, \Gamma)$	
	k+1	Also	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma) \rightarrow \neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg\, \Gamma)$	
	…	…	…	

Die Inspektion der Zeilen 1 und 3 macht auch schon klar, wie der Widerspruch zu erzeugen ist: Die erste Annahme ist auf β zu spezialisieren: $[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$. Mit dem ersten Konjunkt aus Zeile 3 erhält man dann mit SB $[\beta, \xi, \Gamma]$, was dem zweiten Konjunkt aus Zeile 3 widerspricht. Allerdings ist hier der Negationskandidat, die Annahme des indirekten Beweises, nicht in der ›Schusslinie‹ von NE. Mittels einer erneuten Annahme der Partikularquantifikation kann das geleistet werden. Danach schließt sich der projektierte Weg an:

[62]+	1	Sei_1	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	
	2	$\text{Wäre}_{1,2}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg\, \Gamma)$	
	3	$\text{Sei}_{1,2,3}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg\, [\beta, \xi, \Gamma]$	
	4	$\text{Wäre}_{1,2,3,4}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg\, \Gamma)$	
	5	$\text{Also}_{1,2,3,4}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 3

6 Also$_{1,2,3,4}$ $\neg [\beta, \xi, \Gamma]$ | KB; 3

7 Also$_{1,2,3,4}$ $[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$ | UB; 1

8 Also$_{1,2,3,4}$ $[\beta, \xi, \Gamma]$ | SB; 7,5

9 Also$_{1,2,3}$ $\neg \bigvee \xi \, (\Delta \wedge \neg \Gamma)$ | NE; 4-8

10 Also$_{1,2}$ $\neg \bigvee \xi \, (\Delta \wedge \neg \Gamma)$ | PB; 2,3-9

11 Also$_{1}$ $\neg \bigvee \xi \, (\Delta \wedge \neg \Gamma)$ | NE; 2-10

12 Also $\bigwedge \xi \, (\Delta \rightarrow \Gamma) \rightarrow \neg \bigvee \xi \, (\Delta \wedge \neg \Gamma)$ | SE; 1-11

Der Widerspruch für die erste NE-Anwendung steht in den Zeilen 6 und 8. In Zeile 9 hat man dann die gewünschte Aussage erhalten, muss sich aber daran erinnern, dass diese Aussage im Ausgang von der Ersatzannahme in Zeile 3 gewonnen hat. Da die Aussage in Zeile 9 aber β nicht zum Teilterm hat, lässt sich PB anwenden. Damit ist wiederum mit Zeile 2 und Zeile 10 eine Aussage und ihre Negation gegeben. Durch NE macht man sich frei von der ersten Annahme des indirekten Beweises und ist im Ziel.

Die Umkehrrichtung steht unter der Annahme $\neg\bigvee\xi(\Delta\wedge\neg\Gamma)$. Um die Zielaussage für die geforderte SE, $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\Gamma)$, zu erreichen, muss man zunächst $[\beta,\xi,\Delta]\rightarrow[\beta,\xi,\Gamma]$ in Abhängigkeit von der Annahme gewinnen. Dazu wiederum hat man das Antezedens dieser Subjunktion anzunehmen. Mit Blick auf die übergeordnete Annahme kann man dann indirekt verfahren und die Annahme von $\neg[\beta,\xi,\Gamma]$ zum Widerspruch führen:

[62]** 13 Sei$_{13}$ $\neg \bigvee \xi \, (\Delta \wedge \neg \Gamma)$

14 Sei$_{13,14}$ $[\beta, \xi, \Delta]$

15 Wäre$_{13,14,15}$ $\neg [\beta, \xi, \Gamma]$

16 Also$_{13,14,15}$ $[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Gamma]$ | KE; 14,15

17 Also$_{13,14,15}$ $\bigvee \xi \, (\Delta \wedge \neg \Gamma)$ | PE; 16

18 Also$_{13,14,15}$ $\neg \bigvee \xi \, (\Delta \wedge \neg \Gamma)$ | W; 13

19 Also$_{13,14}$ $\neg \neg [\beta, \xi, \Gamma]$ | NE; 15-18

20 Also$_{13,14}$ $[\beta, \xi, \Gamma]$ | NB; 19

21 Also$_{13}$ $[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$ | SE; 14-20

22 Also$_{13}$ $\bigwedge \xi \, (\Delta \rightarrow \Gamma)$ | UE; 21

23 Also $\neg \bigvee \xi \, (\Delta \wedge \neg \Gamma) \rightarrow \bigwedge \xi \, (\Delta \rightarrow \Gamma)$ | SE; 13-22

24 Also $\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$ | BE; 12,23

Ü11 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $\bigvee\xi\ (B \wedge \Gamma) \rightarrow \bigvee\xi\ B \wedge \bigvee\xi\ \Gamma$

b) $\bigwedge\xi\ (B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\bigvee\xi\ B \rightarrow \bigvee\xi\ \Gamma)$

c) $\bigvee\xi\ B \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi \neg B$

d) $\neg \bigwedge\xi\ B \leftrightarrow \bigvee\xi \neg B$

e) $\neg \bigvee\xi\ B \leftrightarrow \bigwedge\xi \neg B$

f) $\bigvee\xi\ (B \wedge \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi\ (B \rightarrow \neg \Gamma)$

g) $\bigwedge\xi\ (B \rightarrow \neg \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ (B \wedge \Gamma)$

h) $\bigvee\xi\ (B \wedge \neg \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi\ (B \rightarrow \Gamma)$

i) $\bigwedge\xi\ B \vee \bigvee\xi \neg B$

PE gibt den Weg vor, um auf eine Partikularquantifikation zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Partikularquantifikation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert PE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Partikularquantifikationen. PB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, die aus der repräsentativen Annahme einer gegebenen Partikularquantifikation folgen. Ist die Partikularquantifikation wahr und ist die gefolgerte Aussage auch sonst frei von Abhängigkeiten, dann ist auch die gefolgerte Aussage wahr. Insofern fixiert PB die Rolle von Partikularquantifikationen als Wahrheitsbasen.

PB und UE sind die Quantorregeln, die ausdrücklich Parameter ins Spiel bringen. Parameter werden benötigt, weil Individuenkonstanten oder andere von Parametern verschiedene geschlossene Terme für die Formulierung von PB und UE untauglich sind. Ersetzte man etwa in UE die Rede vom Parameter β durch jene von dem geschlossenen Term θ, dann könnte man aus der Aussage ’2 ist eine Primzahl’ die Universalaussage ’$\bigwedge x$ *x* ist eine Primzahl’ folgern. Bestimmte Individuen haben bestimmte, sie von anderen unterscheidende Eigenschaften; und diese unterscheidenden Eigenschaften, im Beispiel: das Primzahlsein, können eben nicht im Folgerungswege auf alle anderen übertragen werden. – Auch bei PB können die Parameter in ihrer Funktion nicht durch andere geschlossene Terme ersetzt werden: Bildete man die repräsentative Ersatzannahme zu ’$\bigvee x$ *x* ist eine gerade Zahl’ etwa mit der Individuenkonstante ’5’, so ergäbe sich ’5 ist eine gerade Zahl’; mit einer Zusatzprämisse wie ’5 ist eine ungerade Zahl’ resultierte dann über KE, PE und PB die Aussage ’$\bigvee x$ (*x* ist eine gerade

Zahl und *x* ist eine ungerade Zahl)’. Auch in diesem Falle sind Individuenkonstanten deshalb ungeeignet, weil die Individuen sie charakterisierende spezielle Eigenschaften in den Folgerungszusammenhang mitbringen.

Sowohl UE wie auch PB enthalten Kautelen, die sichern, dass die Parameter nicht mehr als die ihnen zugedachte universal bzw. partikulär repräsentierende Rolle spielen. Diese sind exemplarisch zu erläutern. (i) In UE ist verlangt, dass der Parameter β nicht Teilterm der Formel Δ ist. Man betrachte das folgende Schlussfragment:

[63] 1 Da $\bigwedge x\ x = x$
⚡ 2 Also $\mathrm{z} = \mathrm{z}$
3 Also $\bigwedge x\ x = \mathrm{z}$
4 Also $\bigvee z\ \bigwedge x\ x = z$

In Zeile 1 ist eine logische Wahrheit notiert, die später (↑4.4) noch bewiesen wird. Mit UB gelangt man zur Spezialisierung in Zeile 2. Mit dem kritischen Schritt der inkorrekten Universaleinführung erhält man die Universalaussage von Zeile 3. PE ergibt die falsche Aussage, dass wenigstens ein Gebilde mit allem identisch ist. Inhaltlich gesprochen wird an der kritischen Stelle folgender Übergang vollzogen: Aus dem Umstand, dass ein universal repräsentatives Gebilde mit sich identisch ist, schließt man darauf, dass alle Gebilde mit dem universal repräsentativen zusammenfallen. Das erfolgt dadurch, dass man den Parameter ’z’ ›stehenlässt‹. Dadurch aber wird z eine ganz neue Eigenschaft zugeschrieben. Bezieht man den kritischen Schritt auf die Formulierung von UE unter [49], so resultiert: ’z’ entspricht β, ’*x*’ entspricht ξ, ’*x*=z’ entspricht Δ und [’z’, ’*x*’, ’*x*=z’], also ’z=z’, entspricht [β, ξ, Δ]. Der Parameter ’z’ ist unzulässigerweise in Δ noch Teilterm. Eine korrekte UE müsste alle Vorkommen von ’z’ erfassen, also ’*x*=*x*’ als Δ wählen. Die Kautel schließt demnach aus, dass der repräsentative Gegenstand durch Stehenlassen eine neue Eigenschaft erhält.

(ii) In UE ist ferner gefordert, dass der Parameter β nicht in einer verfügbaren Annahme Teilterm ist, also nicht in einer Aussage, von der die Universalquantifikation bzw. ihre Parametrisierung abhängt. Man betrachte das folgende Schlussfragment:

[64] 1 Da $\bigvee x\ x = 2$
2 Sei $\mathrm{z} = 2$
⚡ 3 Also $\bigwedge z\ z = 2$
4 Also $\bigwedge z\ z = 2$

Es ist eine logische Wahrheit, dass wenigstens ein Gebilde mit 2 identisch ist (↑4.4), daraus wird hier über inkorrekte UE und PB die falsche Aussage gefolgert, dass alle Gebilde mit 2 identisch sind. Inhaltlich gesehen, besteht der Fehlschluss darin, dass ein partikulärer Repräsentant universalisiert wird. Bezieht man den kritischen Schritt auf die Formulierung von UE unter [49], dann resultieren folgende Entsprechungen: 'z=2' ist eine verfügbare Annahme, '*z*' bzw. 'z' entsprechen ξ bzw. β, '*z*=2' korrespondiert Δ und ['z', '*z*', '*z*=2'] also 'z=2', entspricht $[\beta, \xi, \Delta]$.

(iii) Die PB enthält die Bestimmung, dass der Parameter β nicht Teilterm einer Satzaussage vor der Ersatzannahme sein darf, also insbesondere nicht Teilterm einer Aussage, von der Γ abhängt außer der Ersatzannahme. Man betrachte den folgenden inkorrekten Beweisversuch:

[65] 0 Es-gilt $\bigvee x\, (x = 2 \land \neg\, x = 2)$

1 Da $\bigvee x\, x = 2 \land \bigvee x \neg\, x = 2$

2 Also $\bigvee x\, x = 2$

3 Sei $z = 2$

4 Also $\bigvee x \neg\, x = 2$

5 Sei $\neg\, z = 2$

6 Also $z = 2 \land \neg\, z = 2$

7 Also $\bigvee x\, (x = 2 \land \neg\, x = 2)$

⚡ 8 Also $\bigvee x\, (x = 2 \land \neg\, x = 2)$

9 Also $\bigvee x\, (x = 2 \land \neg\, x = 2)$

Ausgangspunkt ist eine arithmetische Wahrheit, Endpunkt eine logische Falschheit. Es handelt sich nicht um einen Beweis, da in Zeile 8 keine PB vollzogen wird und die Aussage in der letzten Zeile dementsprechend nicht frei von Abhängigkeiten gewonnen wird. Die Entsprechung von Beispiel und Regelformulierung für den Schritt 8: '$\bigvee x(x{=}2\land\neg x{=}2)$' entspricht Γ, '$\bigvee x\neg x{=}2$' korrespondiert $\bigvee\xi\Delta$, wobei '*x*' ξ und '$\neg x{=}2$' Δ korrespondiert. Vor der repräsentativen Ersatzannahme (Zeile 5) für die Partikularquantifikation in Zeile 4 erscheint der Parameter 'z' entgegen der Regel bereits in der Annahme in Zeile 3 in 'z=2' als Teilterm. Die Regel schließt ein solches vorgängiges Vorkommen aus. Sie verhindert dadurch, dass zweimal derselbe Parameter gewählt wird. Inhaltlich: Repräsentiert ein Individuum schon den Sachverhalt, mit 2 identisch zu sein, dann darf es nicht noch zusätzlich die ganz andere Eigenschaft repräsentieren, von 2 verschieden zu sein. Für Ersatzannahme ist also stets ein neuer Parameter zu wählen!

Dieselbe Kautel in PB schließt aus, dass der für die Ersatzannahme gewählte Parameter β schon in der Partikularquantifikation $\bigvee\xi\Delta$, und damit in der Formel Δ, vorkommt, was wiederum der Idee der partikulären Repräsentation widerspräche. Beispiel:

[66] 0 Es-gilt $\bigvee x \neg x = x$

1 Da $\bigwedge x \bigvee y \neg x = y$

2 Also $\bigvee y \neg \mathrm{x} = y$

3 Sei $\neg \mathrm{x} = \mathrm{x}$

4 Also $\bigvee x \neg x = x$

↯ 5 Also $\bigvee x \neg x = x$

Die Entsprechungen lassen sich in folgender Tabelle notieren:

[67]

ξ	‘y’
β	‘x’
Δ	‘$\neg \mathrm{x} = y$’
$\bigvee\xi\Delta$	‘$\bigvee y \neg \mathrm{x} = y$’
$[\beta, \xi, \Delta]$	[’x’, ’y’, ’$\neg \mathrm{x} = y$’]
Γ	‘$\bigvee x \neg x = x$’

x repräsentiert bereits eine Eigenschaft, nämlich die Eigenschaft, mit wenigstens einem y nicht identisch zu sein, und kann deshalb nicht noch zusätzlich partikuläre Repräsentationsaufgaben übernehmen, also die spezielle Eigenschaft repräsentieren, mit x nicht identisch zu sein. Auch in diesem Falle ist stets ein neuer Parameter für die Bildung der Ersatzannahme zu wählen.

(iv) PB verlangt schließlich, dass der für die Ersatzannahme gewählte Parameter β nicht Teilterm der Konklusion Γ sein darf:

[68] 0 Es-gilt $\bigwedge x$ Primzahl(x)

1 Da $\bigwedge x\, (x = 2 \rightarrow$ Primzahl(x))

2 Da $\bigvee x\, x = 2$

3 Sei $x = 2$

4 Also $x = 2 \rightarrow$ Primzahl(x)

5 Also Primzahl(x)

⚡ 6 Also Primzahl(x)

7 Also $\bigwedge x$ Primzahl(x)

Im Ausgang von zwei Wahrheiten wurde eine arithmetische Falschheit erschlossen, indem die PB ›zu früh‹ vollzogen worden ist: Eine Aussage mit nur partikular repräsentierendem Parameter wurde dadurch für die UE in Zeile 7 freigegeben. Die Aussage 'Primzahl(x)' entspricht dabei Γ. – Regelgemäß ist, anbei bemerkt, die Universalquantorbeseitigung in Schritt 4: Was für alle gilt, gilt auch für das Gebilde, das vorübergehend die Eigenschaft, mit 2 identisch zu sein, repräsentiert.

Ü12 Untersuchen Sie die folgenden Satzsequenzen und stellen Sie fest, in welchen davon inkorrekt gefolgert wird (also ein Schritt nach keiner Folgerungsregel korrekt ist) und in welchen davon zwar alle Schritte nach einer Regel korrekt sind, die Aussage im letzten Glied aber nicht frei von Abhängigkeiten gewonnen wird. Erstellen Sie für letztere einen Indexkommentar oder eine grafische Kommentierung.

a) 1 Sei $\bigvee x$ Gerade-Zahl(x)

2 Sei Gerade-Zahl(w)

3 Sei $\bigvee u$ Ungerade-Zahl(u)

4 Sei Ungerade-Zahl(w)

5 Also Gerade-Zahl(w) $\wedge$ Ungerade-Zahl(w)

6 Also $\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

7 Also $\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

8 Also $\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

b) 1 Sei $\bigvee x$ Gerade-Zahl(x)

2 Sei Gerade-Zahl(w)

3 Also $\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)

4 Also $\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)

5 Also $\bigvee x$ Gerade-Zahl(x) $\rightarrow$ $\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)

c) 1 Sei $\bigwedge x\; x = x$

2 Also $u = u$

3 Also $\bigwedge x\; x = u$

4 Also $\bigvee z \bigwedge x\; x = z$

d) 1 Sei $\bigvee y\; y > 2$

2 Sei $1 > 2$

3 Sei $\neg\, 1 > 2$

4 Also $1 > 2 \wedge \neg\, 1 > 2$

5 Also $\bigvee y\, (y > 2 \wedge \neg\, y > 2)$

6 Also $\bigvee y\, (y > 2 \wedge \neg\, y > 2)$

e) Überprüfen Sie in den Beweisen [47], [50], [51], [52], [56], [60], [61] die UE- und PB-Anwendungen auf Korrektheit, indem Sie jeweils eine Entsprechungstabelle (vgl. [67]) notieren, an der man erkennen kann, dass die erforderlichen Parameterbedingungen erfüllt sind! Beachten Sie dabei die Verschiedenheitsforderung!

4.4. Regeln für den Identitätsprädikator

Zur Erinnerung: Das Identitätszeichen '..=..' ist ein zweistelliger, termbestimmender und formelerzeugender Operator, also ein zweistelliger Prädikator. Die Anwendung des Identitätsprädikators '..=..' auf Terme θ_1, θ_2 führt zu Identitätsformeln $\theta_1 = \theta_2$. Handelt es sich bei θ_1, θ_2 um geschlossene Terme, dann liegt eine Identitätsaussage bzw. eine geschlossene Identitätsformel vor.

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Identitätsaussage geschlossen werden darf, und was aus einer Identitätsaussage (und gegebenenfalls weiteren Prämissen) gefolgert werden kann. Die Einführungsregel erlaubt, auf die Identität eines Gegenstandes mit sich selbst zu schließen, also auf eine Aussage $\theta = \theta$; dieser Schluss ist an keine Bedingung geknüpft, mithin prämissenfrei. Die Beseitigungsregel gestattet, aus einer Identität $\theta_1=\theta_2$ und der Tatsache, dass die θ_1-Entität eine Δ-Eigenschaft hat, also aus $[\theta_1, \xi, \Delta]$, zu folgern, dass auch θ_2 die Δ-Eigenschaft besitzt, also $[\theta_2, \xi, \Delta]$. – Zum Verständnis beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen '..ist identisch mit..' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Die Schlussfigur für die Identitätseinführung ist denkbar einfach:

[69] Also $\theta = \theta$

Es sind keine Prämissen vorhanden. Die Regel der Identitätseinführung (=IE) lautet entsprechend:

[70] Wenn θ ein geschlossener Term ist, dann darf die Identitätsaussage $\theta = \theta$ folgern.

Die Identität beliebiger Gegenstände mit sich selbst gibt es nach IE demzufolge ›gratis‹. Dieser Umstand wird durch die Totalreflexivität der Identität ausdrücklich gemacht:

[71] 0 Es-gilt $\bigwedge x\, x = x$
1 Also $x = x$ | IE
2 Also $\bigwedge x\, x = x$ | UE; 1

Die Identitätsbeseitigung artikuliert die Intuition, dass, ungenau gesprochen, Identische ihre Eigenschaften teilen. Ist 5 identisch mit 3+2 und ist 5 eine Primzahl, dann eben auch 3+2. Ist Jesse James ein Verbrecher und Mr. Smith niemand anders als Jesse James, dann ist auch Mr. Smith ein Verbrecher. Die Schlussfigur zu diesen Instanzen hat folgende Gestalt:

[72] Ξ $\theta_1 = \theta_2$
Ξ' $[\theta_1, \xi, \Delta]$
Also $[\theta_2, \xi, \Delta]$

Die Identitätsaussage ist die Hauptprämisse, die Aussage $[\theta_1, \xi, \Delta]$ stellt die Nebenprämisse dar. – Die Regel der Identitätsbeseitigung (=IB) lautet:

[73] Wenn man die Identitätsaussage aus θ_1 und θ_2 und das Ergebnis der Substitution von θ_1 für ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ_2 für ξ in Δ folgern.

Der Beweis der folgenden Aussagen macht mit dem vorgestellten Regelpaar und ihrem Zusammenspiel vertraut. Zunächst ist die Identität symmetrisch, gilt also in beide Richtungen:

[74] 0 Es-gilt $\bigwedge x \bigwedge y\, (x = y \rightarrow y = x)$
1 Sei $x = y$
2 Also $x = x$ | IE

3 Also $y = x$ | IB; 1,2

4 Also $x = y \rightarrow y = x$ | SE; 1-3

5 Also $\bigwedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$ | UE; 4

6 Also $\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$ | UE; 5

Die Schritte 1 und 4 bis 6 sind bekannt und bedürfen als nun geläufige Routine keiner Erläuterung. Im Schritt 2 wird nach IE ’x=x’ gefolgert. Schritt 3 ist etwas komplizierter: Als Formel Δ fungiert ’*u*=x’. θ_1 wird durch ’x’ und θ_2 durch ’y’ instanziiert. Dann ist [’x’, ’*u*’, ’*u*=x’], also ’x=x’ Instanz von [θ_1, ξ, Δ], [’y’, ’*u*’, ’*u*=x’], also ’y=x’ ist Instanz von [θ_2, ξ, Δ] und ’x=y’ ist Instanz für das Aussagenschema θ_1=θ_2. Das Besondere an diesem Schluss besteht darin, dass die Δ-Aussage ihrerseits eine Identitätsaussage ist. Informell würde man die soeben bewiesene Symmetrie der Identität so begründen: Sei x identisch mit y. Nun hat x wie jedes Gebilde die Eigenschaft, mit sich, d.h. mit x identisch zu sein; also ist auch y identisch mit x.

Die folgende Aussage hält die Transitivität der Identität fest: Ist eine Gegebenheit identisch mit einer Gegebenheit, die ihrerseits mit einer Gegebenheit identisch ist, dann ist auch die erst- mit der letztgenannten identisch:

[75] 0 Es-gilt $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

1 Sei $x = y \wedge y = z$

2 Also $x = y$ | KB; 1

3 Also $y = z$ | KB; 1

4 Also $x = z$ | IB; 3, 2

5 Also $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$ | SE; 1-4

6 Also $\bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$ | UE; 5

7 Also $\bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$ | UE; 6

8 Also $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$ | UE; 7

Der entscheidende Schritt wird in Zeile 4 vollzogen; für den Beweis der Transitivität wird IE nicht benötigt. Totalreflexive, symmetrische und transitive zweistellige Prädikatoren bzw. – material gesprochen – Relationen werden als <u>totale Gleichheitsprädikatoren</u> bzw. als <u>totale Gleichheiten</u> geführt. Sie lassen sich auch mit einer Aussage charakterisieren, die für die Identität so lautet:

[76]	0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigwedge y\, (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\, (x = z \leftrightarrow y = z))$	
	1	Sei_1	$x = y$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$x = z$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$y = z$	| IB; 1,2
	4	Also_1	$x = z \rightarrow y = z$	| SE; 2-3
	5	$\text{Sei}_{1,5}$	$y = z$	
	6	$\text{Also}_{1,5}$	$x = z$	| IB; 5,1
	7	Also_1	$y = z \rightarrow x = z$	| SE; 5-6
	8	Also_1	$x = z \leftrightarrow y = z$	| BE; 4,7
	9	Also_1	$\bigwedge z\, (x = z \leftrightarrow y = z)$	| UE; 8
	10	Also	$x = y \rightarrow \bigwedge z\, (x = z \leftrightarrow y = z)$	| SE; 1-9
	11	Sei_{11}	$\bigwedge z\, (x = z \leftrightarrow y = z)$	
	12	Also_{11}	$x = y \leftrightarrow y = y$	| UB; 11
	13	Also_{11}	$y = y$	| IE
	14	Also_{11}	$x = y$	| BB; 12,13
	15	Also	$\bigwedge z\, (x = z \leftrightarrow y = z) \rightarrow x = y$	| SE; 11-14
	16	Also	$x = y \leftrightarrow \bigwedge z\, (x = z \leftrightarrow y = z)$	| BE; 10,15
	17	Also	$\bigwedge y\, (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\, (x = z \leftrightarrow y = z))$	| UE; 16
	18	Also	$\bigwedge x \bigwedge y\, (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\, (x = z \leftrightarrow y = z))$	| UE; 17

Die hier interessierenden Folgerungen werden in den Zeilen 3, 6 und 13 vollzogen. Für den Weg von links nach rechts benötigt man IB, für den umgekehrten Weg kommt man mit IE aus.

Zuletzt sei noch ein Theoremschema erörtert, das eine wichtige Rolle bei der Elimination definierter Individuenkonstanten und Funktoren spielt: Wenn ein θ-Gegenstand die Eigenschaft Δ hat, dann gibt es eine Gegebenheit ξ, die mit θ identisch ist und die die Δ-Eigenschaft hat. Auch die Umkehrung gilt. Jesse James ist also genau dann ein Ehrenmann, wenn es eine mit Jesse James identische Gegebenheit gibt, die ein Ehrenmann ist. – In der folgenden Formulierung präsentiert Δ wiederum eine Formel, in der höchsten ξ frei ist:

[77]	0	Es-gilt	$[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	
	1	Sei	$[\theta, \xi, \Delta]$	
	2	Also	$\theta = \theta$	| IE
	3	Also	$\theta = \theta \wedge [\theta, \xi, \Delta]$	| KE; 2,1
	4	Also	$\bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	| PE; 3
	5	Also	$[\theta, \xi, \Delta] \rightarrow \bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	| SE; 1-4
	6	Sei	$\bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	
	7	Sei	$\beta = \theta \wedge [\beta, \xi, \Delta]$	
	8	Also	$\beta = \theta$	| KB; 7
	9	Also	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 7
	10	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$	| IB; 8,9
	11	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$	| PB; 6,7-10
	12	Also	$\bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta) \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$	| SE; 6-11
	13	Also	$[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	| BE; 5,12

Zu beachten ist, dass nach der Verschiedenheitsforderung β kein Teilterm von θ ist. Andernfalls wäre in Zeile 11 keine PB zulässig. Der Umgang mit den Identitätsregeln wird durch folgende Übungen vertieft:

Ü13 Legen Sie für folgende Aussagen bzw. Aussagenschemata kommentierte Beweise bzw. Beweisschemata vor:

a) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge x = z \rightarrow y = z)$

b) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigvee z\ (x = z \wedge z = y))$

c) $[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\xi = \theta \rightarrow \Delta)$

d) $\theta_1 = \theta_2 \wedge [\theta_2, \xi, \Delta] \rightarrow [\theta_1, \xi, \Delta]$

e) Ergänzen Sie [77] zu einem kommentierten Beweisschema!

f) Legen Sie einen Beweis vor, der eine Instanz zu [77] bildet, indem Sie ξ durch '*x*', Δ durch '*x* ist ein Ehrenmann' und θ durch 'Jesse James' instanziieren!

IE gibt den extrem kurzen, da prämissenfreien Weg vor, um eine Wahrheit zu folgern. IB eröffnet die Möglichkeit zum ›Eigenschaftentransfer‹: Aus der Identität zwischen θ_1 und θ_2 und der Tatsache, dass θ_1 Δ ist, kann man auf den Umstand schließen, dass θ_2 ebenfalls Δ ist. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist wiederum wahr, dass θ_2 ein Δ-Ding ist. Insofern umreißt IB die Rolle der Identität als Wahrheitsbasis.

Anmerkung: Die Identität wird normalerweise mit dem üblicherweise LEIBNIZ zugeschriebenen Ununterscheidbarkeitsgedanken verbunden: Identisch ist, was in allen Eigenschaften übereinkommt, sich also nicht unterscheiden lässt. Das lässt sich z.B. in Sprachen zweiter Stufe ausdrücken (↑3.[19]). Für Sprachen erster Stufe mit den hier gegebenen Regeln ist jedoch ein analoges Metatheorem formulierbar: Die Identität zwischen θ_1 und θ_2 ist genau dann beweisbar, wenn beweisbar ist, dass θ_1 und θ_2 in allen Eigenschaften Δ übereinkommen. Sei beweisbar, dass $\theta_1=\theta_2$. Gelte ferner $[\theta_1, \xi, \Delta]$. Mit IB gilt dann $[\theta_2, \xi, \Delta]$. Die Umkehrung ergibt sich analog; beide Betrachtungen gelten für beliebiges Δ. – Sei umgekehrt beweisbar, dass $[\theta_1, \xi, \Delta]\leftrightarrow[\theta_2, \xi, \Delta]$ für beliebiges Δ, also auch für die Eigenschaft, mit θ_2 identisch zu sein. Dann gilt insbesondere $\theta_1=\theta_2\leftrightarrow\theta_2=\theta_2$. Mit IE ist $\theta_2=\theta_2$, also ist auch $\theta_1=\theta_2$ beweisbar.

4.5. Das Regelwerk im Überblick

Im Vortext konnten die Kernoperatoren dadurch mit Bedeutung versorgt werden, dass die Einführungs- und die Beseitigungsfrage beantwortet wurde: Bei welcher Diskurslage darf man auf eine Aussage schließen, deren Hauptoperator der jeweils zu regulierende Redeteil ist? Was darf man aus einer derartigen Aussage (und gegebenenfalls weiteren Prämissen) schließen? Durch die Angabe von Annahme- und Folgerungsregeln wurde eine passende Performatorik für eine Sprache mit einer rationalen Grammatik erster Stufe formuliert. Die Performatorik baut in folgendem Sinne auf die Grammatik auf: In der Grammatik werden Begrifflichkeiten eingeführt, die bei der Formulierung der Annahme- und Folgerungsregeln verwendet werden. Die meisten dieser Begrifflichkeiten werden ausführlich in Kapitel 3 vorgestellt und eingeübt. Einige Begrifflichkeiten wurden allerdings erst im vorliegenden Kapitel geklärt. Diese sind noch einmal zusammenzufassen, bevor die Annahme- und Folgerungsregeln kompakt aufgelistet werden:

Durch einen Akt des Annehmens, des Anziehens oder des Folgerns werden Aussagen verfügbar gemacht. Eine gemäß SE, NE oder PB korrekte Folgerung macht die Aussagen aller Annahme- und Folgerungssätze ab einschließlich der als letzter verfügbaren Annahme unverfügbar, insofern sie nicht bereits unverfügbar waren, ausgenommen die Aussage, die in diesem Schritt gefolgert wurde. Die Befreiung von einer Annahme besteht gerade in einer solchen gemäß SE, NE oder PB korrekten Folgerung und erfolgt immer und nur dann, wenn eine Folgerung nach SE, NE oder PB korrekt ist. Man hat Aussagen gewonnen, falls man sie verfügbar gemacht hat und sie immer noch verfügbar sind. Man hat eine Aussage B im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen, falls A als letzte Annahme verfügbar ist und man B als Satzaussage desselben oder eines nachfolgenden Satzes gewonnen hat. Eine Folgerung hängt ab von allen noch verfügbaren Annahmen (resp. von der Klasse aus diesen Annahmen). Man hat eine Aussage frei von Abhängigkeiten gewonnen, wenn man sie gewonnen hat und keine Annahmen mehr verfügbar sind.

Der intuitive Kern der Reglementierungsvorschläge für die logischen Operatoren lässt sich so formulieren: Man darf auf eine Subjunktion $A\rightarrow B$ schließen, wenn man B im Ausgang von einer Annahme von A gewonnen hat. Hat man umgekehrt $A\rightarrow B$ und das Antezedens A gewonnen, dann darf man auf das Sukzedens B schließen. – Hat man Aussagen A, B gewonnen, dann darf man die Konjunktion aus A und B folgern. Umgekehrt darf man aus einer Konjunktion jedes ihrer Konjunkte folgern. – Hat man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen und umgekehrt, dann darf man auf die Bisubjunktion $A\leftrightarrow B$ schließen. Ist umgekehrt die Bisubjunktion $A\leftrightarrow B$ und eines der Bisubjunkte verfügbar, dann darf man auf das jeweils andere Bisubjunkt schließen. – Man darf aus jeder Aussage A auf die Adjunktion dieser Aussage und einer beliebigen Aussage B schließen. Umgekehrt darf man aus einer Aussage $A\vee B$ und zwei Subjunktionen mit A resp. B als Antezedens und einer Aussage Γ als gemeinsamem Sukzedens auf Γ schließen. – Hat man eine Aussage Γ und ihre Negation $\neg\Gamma$ im Ausgang von der Annahme einer Aussage Δ gewonnen, dann darf man Δ negieren. Aus der doppelten Negation einer Aussage darf man die Aussage selbst folgern.

Hat man für einen repräsentativen Fall gezeigt, dass die Eigenschaft Δ zutrifft, so darf man auf die Universalquantifikation von Δ schließen. Umgekehrt darf man aus einer Universalquantifikation auf jede singuläre Instanz schließen. – Trifft Δ auf einen singulären Gegenstand zu, dann darf man auf die Partikularquantifikation von Δ schließen. Aus einer Partikularquantifikation darf man folgern, was aus ihrer repräsentativen Annahme folgt.

Man darf ohne Prämissen auf die Identität eines Gegenstands mit sich selbst schließen. Ist ein Gegenstand mit einem Gegenstand identisch und besitzt der erstgenannte die Δ-Eigenschaft, dann darf man daraus schließen, dass auch der zweitgenannte die Δ-

Eigenschaft besitzt. – Die Schlussfiguren und die ausführlichen Regelformulierungen lesen sich auf einen Blick so:

[78] Die Annahmeregel (AR):

Sei Δ

Man darf jede Aussage Δ annehmen.

Die Subjunktoreinführung (SE):

Sei A

... ...

Ξ B , wobei A als letzte Annahme verfügbar ist

Also $A \rightarrow B$

Wenn man zuletzt eine Aussage B im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen hat, dann darf man die Subjunktion aus A und B folgern.

Die Subjunktorbeseitigung (SB):

Ξ $A \rightarrow B$

Ξ' A

Also B

Wenn man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Aussage A gewonnen hat, dann darf man B folgern.

Die Konjunktoreinführung (KE):

Ξ A

Ξ' B

Also $A \wedge B$

Wenn man eine Aussage A und eine Aussage B gewonnen hat, dann darf man die Konjunktion aus A und B folgern.

Die Konjunktorbeseitigung (KB):

Ξ	$A \wedge B$	Ξ	$A \wedge B$
Also	A	Also	B

Wenn man die Konjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, dann darf man sowohl A als auch B folgern.

Die Bisubjunktoreinführung (BE):

Ξ	$A \rightarrow B$
Ξ'	$B \rightarrow A$
Also	$A \leftrightarrow B$

Wenn man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Subjunktion aus B und A gewonnen hat, dann darf man die Bisubjunktion aus A und B folgern.

Die Bisubjunktorbeseitigung (BB):

Ξ	$A \leftrightarrow B$	Ξ	$A \leftrightarrow B$
Ξ'	A	Ξ'	B
Also	B	Also	A

Wenn man die Bisubjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie das linke bzw. das rechte Bisubjunkt, also A bzw. B, gewonnen hat, dann darf man das rechte bzw. linke Bisubjunkt, also B bzw. A, folgern.

Die Adjunktoreinführung (AE):

Ξ	A	Ξ	A
Also	$A \vee B$	Also	$B \vee A$

Wenn man eine Aussage A gewonnen hat und B eine Aussage ist, dann darf man sowohl die Adjunktion aus A und B als auch die Adjunktion aus B und A folgern.

Die Adjunktorbeseitigung (AB):

Ξ	$A \vee B$
Ξ'	$A \rightarrow \Delta$

Ξ'' $B \to \Delta$

Also Δ

Wenn man die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Subjunktion aus A und einer Aussage Δ und die Subjunktion aus B und Δ gewonnen hat, dann darf man Δ folgern.

<u>Die Negatoreinführung (NE)</u>:

Wäre	A	Wäre	A	
...	...	...	...	
Ξ	Δ	Ξ	$\neg \Delta$	
...	...	...	...	
Ξ'	$\neg \Delta$	Ξ'	Δ	, wobei A als letzte Annahme verfügbar ist
Also	$\neg A$	Also	$\neg A$	

Wenn man zuletzt eine Aussage Δ resp. $\neg\Delta$ im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen hat und wenn man außerdem im Ausgang von derselben Annahme $\neg\Delta$ resp. Δ gewonnen hat, dann darf man die Negation von A folgern.

<u>Die Negatorbeseitigung (NB)</u>:

Ξ $\neg \neg \Delta$

Also Δ

Wenn man die Negation der Negation einer Aussage Δ gewonnen hat, dann darf man Δ folgern.

<u>Die Universalquantoreinführung (UE)</u>:

Ξ $[\beta, \xi, \Delta]$, wobei β kein Teilterm von Δ oder einer verfügbaren Annahme ist.
Also $\bigwedge \xi \Delta$

Wenn man das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Δ noch Teilterm einer verfügbaren Annahme ist, dann darf man die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Die Universalquantorbeseitigung (UB):

Ξ $\bigwedge\xi\Delta$

Also $[\theta, \xi, \Delta]$

Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ξ gewonnen hat und θ ein geschlossener Term ist, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ für ξ in Δ folgern.

Die Partikularquantoreinführung (PE):

Ξ $[\theta, \xi, \Delta]$

Also $\bigvee\xi\Delta$

Wenn man das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, dann darf man die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Die Partikularquantorbeseitigung (PB):

Ξ $\bigvee\xi\Delta$

Sei $[\beta, \xi\ \Delta]$

… …

Ξ' Γ , wobei $[\beta, \xi\ \Delta]$ als letzte Annahme verfügbar ist + Kautelen

Also Γ

Wenn man die Partikularquantifikation einer Formel Δ bezüglich einer Variable ξ gewonnen hat und wenn man unmittelbar danach das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für ξ in Δ angenommen hat und wenn man im Ausgang von dieser Annahme zuletzt eine Aussage Γ gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Γ noch von irgendeiner Satzaussage vor der als letzter verfügbaren Annahme ist, dann darf man nochmals Γ folgern.

Die Identitätseinführung (IE):

Also $\theta = \theta$

Wenn θ ein geschlossener Term ist, dann darf man die Identitätsaussage $\theta = \theta$ folgern.

Die Identitätsbeseitigung (IB):

Ξ	$\theta_1 = \theta_2$
Ξ'	$[\theta_1, \xi, \Delta]$
Also	$[\theta_2, \xi, \Delta]$

Wenn man die Identitätsaussage aus θ_1 und θ_2 und das Ergebnis der Substitution von θ_1 für ξ in eine Formel Δ gewonnen hat, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ_2 für ξ in Δ folgern.

Die Regelformulierungen orientieren sich an einigen Prinzipien: Zufolge des Formalitätsprinzips wird auf die materiale Eigenart der jeweils beteiligten Formeln kein Bezug genommen; die angebotenen Regeln gelten für physikalische und theologische, für psychologische und juristische usf. Kontexte. Zufolge des Kategorizitätsprinzips sind die Festlegungen eindeutig zu halten: Werden zwei Operatoren über dasselbe Regelpaar fixiert, dann sollen diese Fixierungen gleichwertig sein. – Weitere Prinzipien betreffen das Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln und sind im Kontext des Logischen Pluralismus (↑5.) anzudeuten. Das Separiertheitsprinzip, nach dem jeder Operator für sich festgelegt wird, ist im obigen Reglement nicht umgesetzt: Bei BE und AB wird auf die schon festgelegten Regulierung des Subjunktors zurückgegriffen.

Die vorgelegten Regeln lassen sich von der Prämissenseite her wie folgt sortieren: IE ist die einzige prämissenfreie Regel, alle übrigen sind prämissenführend. Unter den prämissenführenden Regeln sind einprämissige wie etwa KB oder PE, zweiprämissige wie SB oder IB und dreiprämissige wie AB zu unterscheiden. Drei der Regeln, SE, NE und PB, haben Prämissenabschnitte, wobei PB zusätzlich noch eine Prämisse hat. – Bezüglich der Beseitigungsregeln kann bei den mehrprämissigen die Hauptprämisse (mit den zu beseitigenden Ausdruck als Hauptoperator) von der oder – im Falle von AB – den Nebenprämissen unterschieden werden.

Die erörterten Regeln sind schließlich unterscheidbar danach, ob mit dem Folgerungsschritt stets Aussagen unverfügbar gemacht resp. Abhängigkeiten getilgt werden oder nicht. Abhängigkeitentilgende Regeln sind SE, NE und PB.

Die logischen Regeln sind Musterbeispiele für Wortverwendungsregeln. Sie legen gemeinsam die (korrekte) Verwendung des Folgerungsperformators fest. Die einzelnen Regelpaare fixieren zusätzlich die Bedeutung des jeweiligen Operators. – Die Regelformulierung ist so gehalten, dass nicht auf die gerade gewählte Zeichengestalt abgestellt wird: Es spielt also keine Rolle, ob man nun gerade ’Also__’ für den Folgerungsperformator oder ’__→__’ als Subjunktor wählt. Es muss beim Aufbau einer konkreten Sprache eben nur in unverwechselbarer Weise festgelegt sein, welcher Ausdruck wofür gebraucht wird. Auch die Stenonamen wie ’SB’ oder ’KE’ stellen nicht – wie ’→B’ oder ’∧E’ – auf die gerade gewählte optische Realisierung ab.

4.6. Literatur

Barwise, J.; Etchemendy, J.: Language, proof, and logic. Stanford 2002.

Barwise und Etchemendys Buch ist im angelsächsischen Raum ein Standardwerk zur Begleitung des elementaren Logikunterrichts. Der verwendete Kalkül ist dem hier favorisierten ähnlich, macht jedoch die performative Seite nicht explizit, sondern arbeitet stattdessen mit graphischen Mitteln. Der Text kann auch dem Anfänger zum Selbststudium empfohlen werden.

Cordes, M.; Reinmuth, F.: Ein Redehandlungskalkül. Ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens nebst Metatheorie. Version 2.0. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00532643/en/. Greifswald 2011.

Kap. 1-2 entwickeln syntaktische Grundlagen und Begrifflichkeiten; Kap. 3 entwickelt den hier propädeutisch präsentierten Kalkül in einem mengentheoretischen Rahmen.

Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schließen; in: Mathematische Zeitschrift 39 (1934), S. 176-210 und 405-431; Wiederabdruck Darmstadt 1974.

Dieser philosophische und mathematische Klassiker entwickelt (zeitgleich mit der unten aufgeführten Arbeit Jaśkowskis) die Methode des natürlichen Schließens (und zwar in der Form des Baumkalküls). Er ist interessant sowohl aus historischen wie auch aus philosophischen Gründen, dürfte aber insgesamt nur dem philosophisch und mathematisch vorgebildetem Leser zugänglich sein. Im II. Abschnitt finden sich jedoch auch die dem Anfänger offenen grundsätzlichen Überlegungen zum natürlichen Schließen.

Hinst, P.: Pragmatische Regeln des logischen Argumentierens; in: Gethmann, C.F. (Hg.): Logik und Pragmatik; Frankfurt/Main 1982, S. 199-215.

Hinst bietet eine performativ explizite lineare Variante des Gentzenschen Kalküls des natürlichen Schließens – und damit einen Ausgangspunkt der vorangehend benutzten Formatierung. Zugleich enthält der Essay Hinweise zum sprachphilosophischen Hintergrund und zur Einbettung des Schließens in andere kognitive Redehandlungen in wissenschaftlichen Zusammenhängen; ein auch für den Anfänger gut lesbarer Text.

Jaśkowski, S.: On the Rules of Suppositions in Formal Logic. In: Studia Logica 1 (1934), S. 5–32.

Jaśkowskis Arbeit entwickelt gleichzeitig mit der oben erwähnten Arbeit Gentzens die Methode des natürlichen Schließens, und zwar in dem hier favorisierten linearen Unterbeweis-Format. Für Anfänger ist der Text nur bedingt geeignet.

Siegwart, G.: Identität; in: Sandkühler, H.J. (Hg.): Enzyklopädie Philosophie, Bd.1; Hamburg 1999, S. 603-607.

Der Artikel entwickelt die verschiedenen Charakterisierungen der Identität und die hauptsächlichen philosophischen Probleme, zu denen dieser Redeteil Anlass gibt.

Tennant, N.: Natural Logic, Edinburgh 1990^2.

Tennant entwickelt ein System des natürlichen Schließens unter Beachtung philosophischer Fragen der Bedeutungsgestaltung und verbindet das System mit modelltheoretischen Fragestellungen; für Fortgeschrittene geeignet; einschlägig sind die vier ersten Kapitel.

5. Folgerungsverhältnisse 204

„Und warum marschiert er nicht gleich morgens früh in einen Brunnen oder einen Abgrund, je nachdem, wie es sich eben so ergibt, sondern scheint sich doch davor in Acht zu nehmen, so als meine er (eben) nicht, daß das Hineinfallen gleichermaßen nicht gut und gut ist!?“

(Aristoteles)

5. Folgerungsverhältnisse

Das erste Kapitel erläutert Zweck und Programm einer philosophischen Vorschule: Was immer sonst Philosophie sein mag, sie macht in jedem Falle jene konzeptiv-diskursive Basisausrüstung verfügbar, die für eine erfolgreiche Absolvierung kognitiver Geschäfte aller Art (wenn nicht unentbehrlich, so doch) in hohem Maße hilfreich ist (1.). Die Bereitstellung der erwähnten Zurüstung wird eröffnet mit der Skizzierung des philosophischen Rahmenwerks: Die Konzepte von Redehandlung und Sprache, Wahrheit und Bedeutung finden kursorische Erläuterung (2.). Die eigentliche ›Arbeit‹ setzt mit der Darstellung der Rationalen Grammatik ein: Im Zentrum steht die Grammatik von Sprachen erster Stufe, die atomaren Kategorien sowie die Prinzipien ihrer Zusammensetzung zu molekularen Gebilden (3.). Die grammatische Begrifflichkeit bleibt für alle weiteren Entwicklungen vorausgesetzt, auch und insbesondere für die methodische Begriffsbildung (↑9.-11.). Der vierte Schritt dient der Gestaltung der Annahme- und der Folgerungshandlung und damit der Regulierung der Junktoren, der Quantoren und des Identitätsprädikators. Verbunden damit ist eine elementare Unterweisung in der Technik des Argumentierens (4.).

Wer im Sinne der Grundregeln korrekt folgern kann, beherrscht damit noch keineswegs den <u>Folgerungsbegriff</u> und <u>verwandte Konzepte</u> wie etwa Konsistenz, Verträglichkeit, Entscheidbarkeit usf. Da jedoch auch diese Begriffe schon bei elementaren Verständigungen über konzeptiv-diskursive Problemlagen zum Einsatz kommen, sind sie in provisorischer Weise bereitzustellen und einzuüben (5.1). – Diskurse lassen sich in vielfacher Weise <u>vereinfachen</u>: So kann man durch eine Non-sequitur-Diagnose erkennen, dass jeder Ableitungsversuch scheitern wird, so kann man Beweise durch das Anziehen logisch-wahrer Aussagen, durch zulässige Regeln und durch Substitutionsregeln abkürzen (5.2). Mit Hilfe der bereitgestellten logischen Redemittel lässt sich der Einzigkeitsquantor definieren. Die zentrale Rolle der Einzigkeit für das Referieren veranlasst eine detaillierte Erörterung (5.3). Ein <u>Zusatz</u> nimmt den gelegentlichen Hinweis auf, dass es zur hier vorgestellten und fortlaufend benutzten klassischen Logik Alternativen gibt. Vornehmlich die traditionelle Konkurrenz zur klassischen Logik, die minimale und die intuitionistische Logik, finden

Erörterung. – Literaturhinweise zur Metalogik und zur Philosophie der Logik leiten das weitere Studium an (5.4).

5.1 Der Folgerungsbegriff und verwandte Konzepte

Wer den vierten Teil erfolgreich absolviert hat, beherrscht im Prinzipiellen die Folgerungshandlung, das korrekte Schließen. Um sich über die Folgerungsverhältnisse zu verständigen, jene Beziehungen, die durch Vollzug des Schließens entstehen können, benötigt man indes nicht nur den Folgerungsperformator, sondern auch den Folgerungsprädikator '..folgt-aus..', der den Folgerungsbegriff ausdrückt. Zunächst ist über Beispiele der Unterschied und der Zusammenhang zwischen Folgerungsakt und Folgerungsrelation herauszustellen. Dabei wird zugleich die (meta)logische Perspektive eingerichtet (5.1.1). – Die beiden Anschlussschritte dienen der informellen Darstellung (meta)logischer Konzepte. Zunächst ist zu erläutern, was unter 'Konsequenz', 'Äquivalenz' und 'logischer (In)Determiniertheit' sowie angeschlossenen Begriffen zu verstehen ist (5.1.2). Sodann können die Begriffe der Konsistenz, Verträglichkeit und Maximalkonsistenz erläutert werden (5.1.3). Eine Reihe von Unterscheidungen, die zur Anwendung der Konsistenzbegrifflichkeit i.b. und der (meta)logischen Konzepte i.a. beitragen, findet abschließend Erläuterung (5.1.4).

Bei den vorgenommenen Etablierungen handelt es sich um informelle Darlegungen; auf die begriffliche Bearbeitung muss insoweit verzichtet werden, als die geeigneten (klassensprachlichen) Redemittel erst zu einem späteren Zeitpunkt (und auch dort nur) in Anfängen bereitgestellt werden (↑13.). Die Ausführungen zielen lediglich auf die durch exemplarische Vorführungen herbeigeführte intuitiv verlässliche Handhabung durch die Leserin.

5.1.1 Folgerungsakt versus Folgerungsrelation: Die (meta)logische Perspektive

Im Vollzug von Folgerungsakten ziehen wir aus gegebenen Aussagen Konsequenzen. In Betrachtung von Aussagenzusammenhängen untersuchen wir u.a., ob eine Aussage Konsequenz aus einer Aussagenklasse ist, ob Aussagenklassen harmonieren, ob eine Aussagenmenge konsistent ist, ob sie alle ihre Konsequenzen zum Element hat usf. Gefolgert wird auf allen Gebieten; mit Aussagenzusammenhängen befassen sich unter den gegebenen Rücksichten vornehmlich Logiker. Die damit angesprochenen Szenarien sind in ihrem Verhältnis anhand von zwei Beispielen zu erläutern.

Das erste Beispiel ist das wohlbekannte Rechts/Links-Szenario (↑1.1.3). Die dort gegebene Überlegung lässt sich mit den inzwischen entwickelten Mitteln z.B. so darstellen:

[1] 1 Da A liegt links von B

2 Da A liegt rechts von B

3 Da $\bigwedge x \bigwedge y$ (x liegt rechts von $y \rightarrow \neg\, y$ liegt rechts von x)

4 Also $\bigwedge y$ (A liegt rechts von $y \rightarrow \neg\, y$ liegt rechts von A)

5 Also A liegt rechts von B $\rightarrow \neg$ B liegt rechts von A

6 Also $\neg$ B liegt rechts von A

7 Da $\bigwedge u \bigwedge w$ (u liegt rechts von $w \leftrightarrow w$ liegt links von u)

8 Also $\bigwedge w$ (B liegt rechts von $w \leftrightarrow w$ liegt links von B)

9 Also B liegt rechts von A $\leftrightarrow$ A liegt links von B

10 Also B liegt rechts von A

11 Also B liegt rechts von A $\wedge \neg$ B liegt rechts von A

In den Zeilen 4-6 und 8-11 werden Folgerungen gezogen, signalisiert durch den Folgerungsperformator ’Also__’. – Macht man nun den u.a. durch Folgerungsakte hergestellten Diskurs zum Gegenstand der Analyse, dann formuliert man z.B. folgende Zusammenhänge: In der Zeile 11 findet sich frei von Abhängigkeiten eine Kontradiktion. Da diese Aussage eine Konsequenz aus der Klasse der angezogenen Aussagen ist, ergibt sich, dass diese Klasse inkonsistent ist. – Die unterstrichenen Redeteile sind (meta)logische Ausdrücke. Am Rande sei darauf aufmerksam gemacht, dass auch im (meta)logischen Kommentar angezogen und gefolgert wird: So signalisiert ’Da__’ wie üblich das Anziehen und die Wendung ’ergibt sich__’ markiert den Folgerungsakt. Das Folgern findet sich eben in allen Diskursen, damit aber auch in Diskursen über Diskurse.

Ü1 Ergänzen Sie [1] zu einem kommentierten Beweis!

Das zweite Beispiel artikuliert eine aus ethischen Grundkursen geläufige Variante des moralischen Relativismus. Es ist typisch für Texte dieses Genres.

[2] Since right and wrong are relative to culture, there’s no duty that binds universally. What’s wrong in one culture is right in another; universal obligations are a myth.

> Relativism should fill us with toleration toward other cultures. We can’t say that we’re right and they’re wrong. So everyone ought to respect the values of others.
>
> (GENSLER, H.J.: Formal Ethics, London/New York 1996, p. 15 (auch dort als Beispiel)).

In der Folge ist es nicht um Interpretation und Würdigung dieser Überlegung zu tun, sondern um die Thematisierung einiger Akte, die in einem derartigen Projekt jedenfalls zu vollziehen wären. – Zunächst erfolgen in [2] argumentative Handlungen, vornehmlich Anziehungen und Folgerungen. Man betrachte z.B. den ersten Satz (im Sinn der traditionellen Grammatik); die performative Analyse führt auf:

[3] Since Right and wrong are relative to culture

So There’s no duty that binds universally

Jede umfassende Bewertung wird die Frage aufwerfen: Ist die Konklusion ›tatsächlich‹ eine Konsequenz aus der Prämisse. In Beantwortung dieser Frage wird man die betrachtete Aussage zunächst formatieren. Das lässt sich für die Konklusion z.B. mit

[4] $\neg\bigvee x\,(\text{Duty}(x) \wedge \text{Binds-universally}(x))$

leicht durchführen. Gleichgültig wie man die Prämisse formatiert: Man hat in jedem Falle noch Aussagen hinzuzufügen, die die Rede von ’right’ und ’wrong’ mit den Prädikatkonstanten ’Duty(..)’ und ’Binds-universally(..)’ verbinden. Erst auf einer so verstärkten Prämissenbasis dürfte die angezielte Konsequenzrelation bestehen.

Ü2 Es dürfte im Geiste des erörterten Textes sein, die Aussage ’$\neg\bigvee x(\text{Duty}(x)\wedge\text{Binds-universally}(x))$’ mit Hilfe der Aussagen ’$\bigwedge x(\text{Duty}(x)\rightarrow\bigvee y(\text{Culture}(y)\wedge\text{Relative-to}(x,y)))$’ und ’$\bigwedge x\bigwedge y(\text{Culture}(x)\wedge\text{Relative-to}(y,x)\rightarrow\neg\text{Binds-universally}(y))$’ zu begründen. Führen Sie eine solche Begründung durch!

Die Lektüre des Textes zeitigt unmittelbar einen Inkonsistenzverdacht: Steht nicht der letzte Satz bzw. dessen Aussage im Widerspruch zu [4]? Die Tatsache, dass es keine universal bindenden Pflichten gibt, reimt sich nicht zusammen damit, dass jedermann die Werte der anderen respektieren soll – was offenkundig eine universal bindende Pflicht ist. Formatiert man die letzte Aussage, dann ergibt sich mit einigen naheliegenden Manipulationen:

[5] $\bigwedge z\bigwedge x\bigwedge y\,(\text{Person}(x) \wedge \text{Person}(y) \wedge x \neq y \wedge \text{Value-of}(z,y) \rightarrow \text{Ought-to-respect}(x,z))$

[4] und [5] bilden ersichtlich keine Kontradiktion. Um die in [2] mitgeteilte Aussagenklasse als inkonsistent qualifizieren zu können und so das unabweisbare Inkonsistenzgefühl begrifflich zu fassen, muss man eine Hinzufügung vornehmen, z.B.:

[6] $(\bigwedge z \bigwedge x \bigwedge y\ (\text{Person}(x) \wedge \text{Person}(y) \wedge x \neq y \wedge \text{Value-of}(z,y) \rightarrow \text{Ought-to-respect}(x,z))) \rightarrow (\bigvee w\ (\text{Duty}(w) \wedge \text{Binds-universally}(w)))$

Die Aussagenklasse {[4], [5], [6]} ist ersichtlich inkonsistent, insofern sowohl [4] als auch das Negatum von [4] aus ihr folgen. Die zuletzt genannte Aussage folgt mit SB aus [5] und [6]. Unter Aussage [6] sind also [4] und [5] unverträglich.

Der Text [2] stellt eine (gebrauchs- bzw. bildungssprachliche) Argumentation dar, in der, wie in allen Diskursen, gefolgert wird: Der Folgerungsakt durchzieht unser gesamtes Erkenntnisgeschäft. Auch in der (partiellen) Kommentierung werden selbstredend Folgerungshandlungen vollzogen. Allerdings enthalten die Aussagen, aus denen bzw. auf die geschlossen wird, (meta)logische Prädikatoren wie ’Folgerung’, ’Kontradiktion’, ’Verträglichkeit’ usf. Folgern ist demnach eine Sache, das Sich-Verständigen über Folgerungsverhältnisse eine andere. Gefolgert wird in allen Diskursbereichen, die Thematisierung der Folgerungsverhältnisse fällt in die Logik. Insoweit man sich der (meta)logischen Begrifflichkeit bedient, macht man Anleihen im Vokabelsortiment des Logikers. In jeder Interpretation kognitiver Texte, in vielen Kontroversen, in jeder Konstruktion, Analyse und Kritik sprachlicher Systeme werden diese Redeteile offensichtlich benötigt. Aus diesem Grunde sind sie zumindest kursorisch bei einer Darstellung der Denkwerkzeuge zu berücksichtigen.

Die Wortzusammenstellung ’(meta)logisch’ ist so motiviert: Bezeichnet man die durch die Folgerungsregeln gegebenen Verhältnisse schon als logische, dann sind die sie thematisierenden Begriffe (meta)logische; anderenfalls artikuliert man mit logischen Konzepten die Folgerungsverhältnisse.

5.1.2 Konsequenz – Äquivalenz – Determiniertheit

Was ist hinreichend und notwendig dafür, dass eine Aussage Konsequenz aus einer Aussagenklasse ist? Man betrachte die Argumentation unter [1]. Die Kontradiktion in Zeile 11 soll eine Konsequenz aus den in den Zeilen 1 bis 3 und 7 angezogenen Aussagen sein: Sie wird aus diesen Aussagen durch Anwendung der logischen Regeln gewonnen. Stellte man die Anziehungen als Annahmen dar, dann wäre die Aussage von 11 in Abhängigkeit von den angenommenen Aussagen gewonnen. Wenn es also eine Ableitung einer Aussage aus angenommenen Aussagen gibt, dann soll die betrachtete Aussage Konsequenz der Klasse der angenommenen Aussage sein.

Diese Herangehensweise macht es nötig, zunächst das Ableitungskonzept zu charakterisieren. Einfachheitshalber unterbleibt hier wie in der Folge die ausdrückliche Bezugnahme auf den sprachlichen Rahmen; damit wird aus dem vierstelligen Prädikator '..ist in..Ableitung für..aus..' der dreistellige '..ist Ableitung für..aus..'. $\mathcal{A}$ ist eine Ableitung von Γ aus X genau dann, wenn $\mathcal{A}$ eine Sequenz ist, so dass für jedes Glied $\mathcal{A}_i$ von $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}_i$ ist ein Annahmesatz gemäß der Annahmeregel AR oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Folgerungssatz gemäß W, SE, SB, ..., IE, IB und Γ ist die im letzten Glied von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von der Aussagenklasse X gewonnene Aussage. Man erinnere sich, dass Sequenzen – und damit dann auch Ableitungen – endliche Folgen sind.

Mit Hilfe des Ableitungskonzepts lässt sich nun (durch ›Wegbinden‹ der ersten Stelle) unmittelbar angeben, wann eine Aussage eine Konsequenz einer Aussagenklasse ist: Γ ist Konsequenz resp. folgt aus X genau dann, wenn es eine Ableitung $\mathcal{A}$ von Γ aus einer Unterklasse von X gibt. – Da der soeben charakterisierte Begriff in der Folge häufig Verwendung findet, wird er gemeinsam mit seinem Negatprädikator, wie üblich, durch '..$\vdash$..' bzw. '..$\nvdash$..' abgekürzt.

Wer zeigen will, dass eine Aussage Γ Konsequenz aus einer Aussagenklasse X ist, kann dies ›durch die Tat‹ tun, indem er eine Ableitung von Γ aus X vorlegt. So ist etwa die Kontradiktion in Zeile 11 von [1] eine Konsequenz der Klasse der Aussagen aus Zeile 1 bis 3 und 7; und so gilt – man erinnere sich an Übung 2 – auch: {'$\bigwedge x$ (Duty(x) $\rightarrow$ $\bigvee y$ (Culture(y) $\wedge$ Relative-to(x,y)))', '$\bigwedge x \bigwedge y$ (Culture(x) $\wedge$ Relative-to(y,x) $\rightarrow$ $\neg$ Binds-universally(y))'} $\vdash$ '$\neg \bigvee x$ (Duty(x) $\wedge$ Binds-universally(x))'.

Das entscheidende Bestandstück der Charakterisierung sind die Annahmeregel, die Wiederholungsregel und die Regeln für die logischen Operatoren. Diese lassen sich auch als Eigenschaften des Folgerungsbegriffs lesen. So gilt etwa für beliebige Aussagenklassen X, Y und beliebige Aussagen A, B: Wenn $X \vdash \mathrm{A}$ und $Y \vdash \mathrm{B}$, dann $X \cup Y \vdash \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$; wenn $X \vdash \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ und $Y \vdash \mathrm{A}$, dann $X \cup Y \vdash \mathrm{B}$. Das erste Beispiel ist der (meta)logische Ausdruck von KE: Liegt eine Ableitung von A aus X vor und eine Ableitung von B aus Y, dann gibt es – eben über KE – eine Ableitung der Konjunktion aus A und B aus $X \cup Y$. Das zweite Beispiel ist analog der (meta)logische Ausdruck von SB.

Ü3 Formulieren Sie den (meta)logischen Ausdruck von AB, UE und IE!

Die Folgerungsrelation ist in dem modifizierten Sinne reflexiv, dass alle Aussagen Δ, die Element einer Aussagenklasse X sind, auch zu ihren Konsequenzen zählen: Wenn $\Delta\in X$, dann $X\vdash\Delta$. Wegen $\Delta\in\{\Delta\}$ gilt insbesondere $\{\Delta\}\vdash\Delta$. Elementschaft garantiert Konsequenzschaft. – Folgt ferner die Subjunktion aus Δ und Γ aus X, dann folgt Γ aus $X\cup\{\Delta\}$ alleine. Auch die als Deduktionstheorem bekannte Umkehrung gilt: Wenn Γ Konsequenz aus $X\cup\{\Delta\}$ ist, dann ist die Subjunktion aus Δ und Γ Konsequenz aus X allein. Insgesamt gilt dann: $X\vdash\Delta\rightarrow\Gamma$ genau dann, wenn $X\cup\{\Delta\}\vdash\Gamma$.

Der im Folgenden dargestellte Zug der Folgerungsrelation wird oft als Schnitt bzw. Cut bezeichnet: Ist eine Aussage Γ Konsequenz aus $X\cup\{\mathrm{B}\}$ und folgt ferner B aus Y, dann folgt Γ aus $X\cup Y$. Die Aussage B wird in der letzten Folgerungsbeziehung ›herausgeschnitten‹: Wenn $X\cup\{\mathrm{B}\}\vdash\Gamma$ und $Y\vdash\mathrm{B}$, dann $X\cup Y\vdash\Gamma$. – Folgt eine Aussage Γ aus einer Aussagenklasse Z, dann folgt Γ auch aus jeder Erweiterung von Z: Wenn $Z\vdash\Gamma$ und $Z\subseteq X$, dann $X\vdash\Gamma$. Das ist die Eigenschaft der Prämissenerweiterung resp. Monotonie. – Die Transitivität der Folgerungsrelation kann so ausgedrückt werden: Wenn alle Aussagen B einer Aussagenklasse X aus einer Aussagenklasse Y folgen und eine Aussage Γ ebenfalls aus X folgt, dann folgt Γ bereits aus Y: Wenn $Y\vdash\mathrm{B}$ für alle $\mathrm{B}\in X$ und $X\vdash\Gamma$, dann $Y\vdash\Gamma$. Eine Menge Y, aus der alle Elemente einer Klasse X folgen, kann X als Prämissenklasse ersetzen.

Schließlich ist noch die Endlichkeit festzuhalten. Folgt Δ aus einer beliebigen Aussagenklasse X, dann gibt es eine endliche Teilmenge Y von X, aus der Δ ebenfalls folgt: Wenn $X\vdash\Delta$, dann gibt es eine endliche Klasse $Z\subseteq \mathrm{X}$ mit $Z\vdash\Delta$.

Mit Hilfe der Konsequenzschaft lässt sich der Begriff der (logischen) Äquivalenz definieren: Eine Aussage A ist einer Aussage B (logisch) äquivalent, wenn sowohl B eine Konsequenz aus der Einerklasse von A wie auch A eine Konsequenz aus der Einerklasse von B ist. Wählt man ’..$\dashv\vdash$..’ als Kürzel, dann ergibt sich: $\mathrm{A}\dashv\vdash\mathrm{B}$ genau dann, wenn sowohl $\{\mathrm{A}\}\vdash\mathrm{B}$ als auch $\{\mathrm{B}\}\vdash\mathrm{A}$.

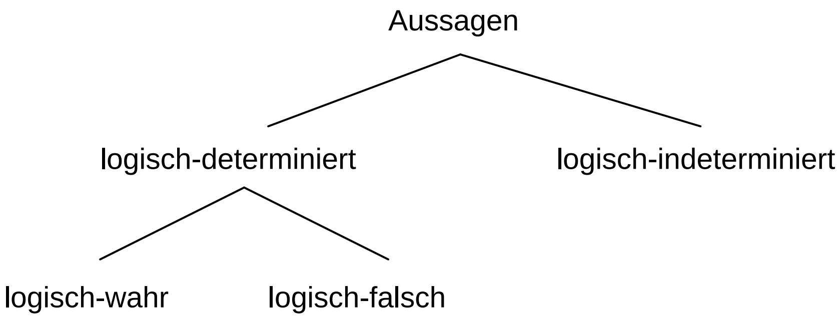
Die Äquivalenz ist ebenfalls reflexiv: Für jede Aussage Δ gilt: $\Delta\dashv\vdash\Delta$. Ferner liegt Symmetrie vor: Für beliebige Aussagen A, B gilt: Wenn $\mathrm{A}\dashv\vdash\mathrm{B}$, dann $\mathrm{B}\dashv\vdash\mathrm{A}$. Die Transitivität liest sich so: Für beliebige Aussagen B, Γ, Δ gilt: Wenn $\mathrm{B}\dashv\vdash\Gamma$ und $\Gamma\dashv\vdash\Delta$ gilt, dann gilt auch $\mathrm{B}\dashv\vdash\Delta$. Ferner gilt die bei Ringbeweisen ausgenutzte Zirkeltransitivität. Für beliebige Aussagen A, B, Γ gilt: Wenn $\{\mathrm{A}\}\vdash\mathrm{B}$ und $\{\mathrm{B}\}\vdash\Gamma$ und $\{\Gamma\}\vdash\mathrm{A}$, dann sind A, B, Γ paarweise äquivalent, also $\mathrm{A}\dashv\vdash\mathrm{B}$, $\mathrm{B}\dashv\vdash\Gamma$, $\Gamma\dashv\vdash\mathrm{A}$ (↑5.2.3).

Eine Aussage Γ soll logisch-wahr bzw. logisch-beweisbar sein genau dann, wenn es eine Ableitung von Γ aus der leeren Klasse gibt bzw. wenn Γ Konsequenz aus der leeren Klasse ist: Γ ist logisch-wahr genau dann, wenn $\emptyset\vdash\Gamma$. Als Abkürzung fungiere ’$\vdash$..’. – Zwischen

Konsequenz bzw. Äquivalenz von Aussagen einerseits und der logischen Wahrheit ihrer Subjunktion bzw. Bisubjunktion andererseits besteht folgender Zusammenhang: Eine Aussage B ist genau dann Konsequenz aus der Einerklasse aus einer Aussage A, wenn die Subjunktion aus A und B logisch-wahr ist: $\{A\}\vdash B$ genau dann, wenn $\vdash A\to B$. Zwei Aussagen sind genau dann logisch äquivalent, wenn ihre Bisubjunktion logisch-wahr ist: $A\dashv\vdash B$ genau dann, wenn $\vdash A\leftrightarrow B$.

Eine Aussage Δ ist logisch-falsch bzw. logisch-widerlegbar, wenn die Negation von Δ logisch-wahr ist. Logisch-determiniert sind genau die Aussagen, die logisch-wahr oder logisch-falsch sind. Alle übrigen Aussagen sind logisch-indeterminiert bzw. logisch-kontingent. – Es resultiert folgende Gliederung der Aussagen:

[7]



Die Aussage 'es regnet $\lor$ $\neg$ es regnet' ist logisch-wahr, die Aussage '$\neg$ (es regnet $\lor$ $\neg$ es regnet)' ist logisch-falsch; demgegenüber ist die Aussage 'es regnet' logisch-kontingent: Über ihr Wahr- bzw. Falschsein kann nicht mit ausschließlich logischen Mitteln befunden werden. Sie hat mit der herrschenden Wetterlage zu tun.

Ü4 Geben Sie aus der Arithmetik, der Philosophie und einem Bereich Ihrer Wahl ein Beispiel für eine logisch-wahre, logisch-falsche, wahre logisch-indeterminierte und falsche logisch-indeterminierte Aussage.

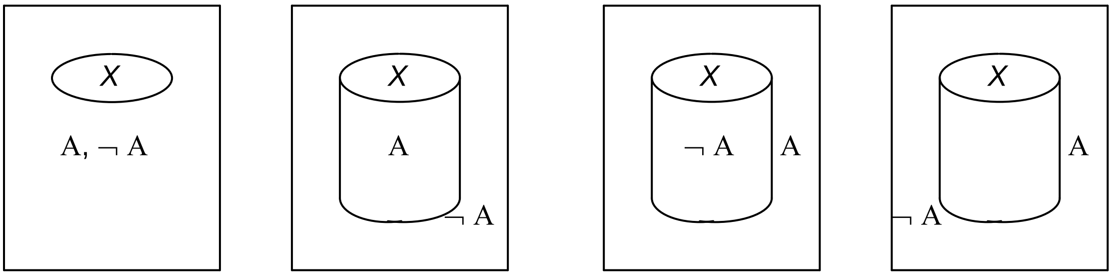
Wegen Prämissenerweiterung gilt: Wenn eine Aussage Δ logisch-wahr ist, folgt sie aus einer beliebigen Aussagenklasse. Da die Negation einer logisch-falschen Aussage logisch-wahr und damit ohnehin gegeben ist, resultiert mit Ex-falso-quod-libet: Aus einer Klasse mit einer logisch-falschen Aussage folgt jede beliebige Aussage.

Die im vorangehenden Kapitel bewiesenen Theoreme sind logisch-wahre Aussagen(schemata), die unendlich viele logisch-wahre Instanzen überdecken. – Eine Aussage A ist entscheidbar durch (bzw. ist abhängig von) einer Aussagenklasse X, wenn A oder die Negation von A Konsequenz von X ist: $X\vdash A$ oder $X\vdash\neg A$. Unentscheidbarkeit (bzw. Unabhängigkeit) von A durch X liegt hingegen vor, wenn weder A noch die Negation von A

aus *X* folgt: $X\nvdash \mathrm{A}$ und $X\nvdash \neg\mathrm{A}$. Logisch-wahre und logisch-falsche Aussagen sind von allen Aussageklassen abhängig: Logisch-wahre Aussagen folgen wegen Prämissenerweiterung aus allen Aussageklassen; und damit folgt auch die Negation logisch-falscher Aussagen aus allen Aussageklassen. Das eigentliche Anwendungsfeld des Begriffs sind also logisch-indeterminierte Aussagen. Da ferner inkonsistente Aussagenklassen jede Aussage entscheiden, ist das interessante Anwendungsfeld nochmals auf die konsistenten Aussagenklassen einzuschränken. Insgesamt ist das Konzept für logisch indeterminierte Aussagen und konsistente Aussagenklassen angelegt.

Es ist eine Aussage A Konsequenz einer Aussagenklasse *X* oder nicht; und es ist ferner die Negation von A Konsequenz einer Aussagenklasse *X* oder nicht. Damit sind vier Fälle zu unterscheiden: $X\vdash \mathrm{A}$ und $X\vdash \neg\mathrm{A}$, $X\vdash \mathrm{A}$ und $X\nvdash \neg\mathrm{A}$, $X\nvdash \mathrm{A}$ und $X\vdash \neg\mathrm{A}$, $X\nvdash \mathrm{A}$ und $X\nvdash \neg\mathrm{A}$. Das folgende Diagramm spiegelt die vier Möglichkeiten, dabei ist die gesamte elliptische Menge die Konsequenzenklasse von *X*; nur im ersten Fall ist die Konsequenzenklasse die Gesamtheit aller Aussagen:

[8]



Im ersten Fall ist *X* (in der unten eingeführten Terminologie) inkonsistent, in den drei anderen konsistent. In den beiden mittleren Fällen liegt (nicht triviale) Entscheidbarkeit vor, im letzten Unentscheidbarkeit.

Mit Hilfe des (einstelligen) Redundanzbegriffs greift man auf die Folgerungsverhältnisse innerhalb einer Aussagenklasse zu: Eine Aussagenklasse *X* ist (logisch) redundant resp. abhängig genau dann, wenn für wenigstens ein $\Delta\in X$ gilt, dass $X\backslash\{\Delta\}\vdash\Delta$; Δ folgt aus der Restklasse von *X*. Es ist *X* irredundant bzw. unabhängig, falls für kein $\Delta\in X$ gilt, dass $X\backslash\{\Delta\}\vdash\Delta$.

Beide Konzepte, Entscheidbarkeit und Redundanz, spielen v.a. bei der Untersuchung von Axiomensystemen eine Rolle. Hat man z.B. gezeigt, dass eine Aussage durch eine (konsistente) Axiomenklasse entschieden wird, dann kann man die Negation dieser Aussage (zweiter Fall) oder diese Aussage (dritter Fall) der Axiomenklasse nicht unter Konsistenzwahrung hinzufügen. Ist die Aussage hingegen unabhängig, dann entstehen durch ihre oder ihrer Negation Hinzufügung alternative Axiomenklassen. – Ist eine Axiomenklasse als redundant erwiesen, dann wird man das redundante Glied streichen. Erstangebote von Axiomensystemen sind häufig redundant und werden erst später irredundant gemacht.

Entscheidet eine Aussagenklasse alle Aussagen, dann ist sie deduktiv vollständig: *X* ist deduktiv-vollständig genau dann, wenn für alle Aussagen Δ gilt: Δ ist entscheidbar durch (abhängig von) *X*, d.h. $X \vdash \Delta$ oder $X \vdash \neg\Delta$.

Als deduktiv geschlossen bezeichnet man eine Aussagenklasse schließlich, wenn sie ihre sämtlichen Konsequenzen zum Mitglied hat: *X* ist deduktiv-geschlossen genau dann, wenn für alle Aussagen A gilt: Wenn $X \vdash \mathrm{A}$, dann $\mathrm{A} \in X$. Die deduktive Geschlossenheit kehrt also die Reflexivität um. Eine Klasse ist damit genau dann deduktiv geschlossen, wenn sie mit ihrer Konsequenzenklasse zusammenfällt. Damit ist auch die Konsequenzenklasse einer beliebigen Menge deduktiv geschlossen. Deduktiv-geschlossene Klassen umfassen alle logischen Wahrheiten. Ferner ist die Konsequenzenklasse der Konsequenzenklasse einer Klasse mit der Konsequenzenklasse identisch; Iterierungen der Bildung von Konsequenzenklassen führen nicht zu einer gegenüber der Konsequenzenklasse neuen Klasse.

5.1.3 Konsistenz – Verträglichkeit – Maximalkonsistenz

Auf Basis des Konsequenzbegriffs sind konsistente Aussagenklassen bestimmbar als solche Mengen, für die es keine Aussagen dergestalt gibt, dass sowohl die Negation der Aussage als auch die Aussage selbst Konsequenz ist. Inkonsistent ist eine Aussagenklasse genau dann, wenn sie nicht konsistent ist, wenn es mithin eine Aussage gibt, die gemeinsam mit ihrer Negation aus der Klasse folgt. Formeller: *X* ist konsistent bzw. widerspruchsfrei genau dann, wenn es keine Aussage Δ gibt, so dass $X \vdash \Delta$ und $X \vdash \neg\Delta$. X ist inkonsistent bzw. widersprüchlich genau dann, wenn es eine Aussage Δ gibt, so dass $X \vdash \Delta$ und $X \vdash \neg\Delta$.

Eine Aussagenklasse *X* ist demnach genau dann inkonsistent, wenn jede beliebige Aussage Γ aus ihr folgt. X ist inkonsistent genau dann, wenn für alle Aussagen Δ gilt: $X \vdash \Delta$. – Sei X inkonsistent. Nach der Definition der Inkonsistenz gibt es dann eine Aussage Δ, so dass sowohl Δ wie auch $\neg\Delta$ aus X folgen. Sei $\Delta°$ eine solche. Damit folgt die Konjunktion aus $\Delta°$ und $\neg\Delta°$, also $\Delta° \wedge \neg\Delta°$ aus X. Wegen $\{\Delta° \wedge \neg\Delta°\} \vdash \Gamma$ für beliebiges Γ und der Transitivität der Konsequenzschaft folgt dann beliebiges Γ aus X. Folge umgekehrt beliebiges Γ aus X; dann gibt es auch ein Δ, so dass sowohl Δ wie auch die Negation von Δ aus X folgen.

Kontradiktionen sind erinnerlich Konjunktionen aus einer Aussage und ihrer Negation (↑1.1.1). Alle Kontradiktionen sind logisch-falsch, da ihre Negationen logisch-wahr sind. Eine Aussagenklasse ist, wie der vorangehenden Beweisskizze zu entnehmen, genau dann inkonsistent, wenn eine Kontradiktion aus ihr folgt. Obgleich jede inkonsistente Aussagenklasse trivialerweise Kontradiktionen zur Konsequenz hat, muss sie keineswegs solche Aussagen zum Element haben. Ebenso wenig muss eine inkonsistente Klasse eine Aussage und ihre Negation zum Mitglied haben. Inkonsistente Aussagenklassen, die eine Kontradiktion oder eine Aussage und ihre Negation zum Element haben, sind oberflächeninkonsistent. Besitzen solche Klassen endlich wenige Elemente, dann wird der Inkonsistenznachweis trivialisiert.

Ü5 a) Weisen Sie mit Hilfe der Definition nach, dass die Aussagen aus Zeile 1 bis 3 und Zeile 7 unter [1] eine inkonsistente Menge darstellen. Handelt es sich um eine oberflächeninkonsistente Klasse?

b) Bilden Sie eine inkonsistente, aber nicht oberflächeninkonsistente Menge aus dem Bereich der Philosophie, die wenigstens eine quantifizierte Aussage enthält.

Eine Aussagenklasse ist genau dann konsistent, wenn sie wenigstens eine Aussage nicht zur Konsequenz hat: X ist konsistent genau dann, wenn es eine Aussage Δ gibt, so dass nicht $X \vdash \Delta$. Damit ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für Konsistenz genannt: Man braucht nur von einer beliebig wählbaren Aussage zu zeigen, dass sie nicht Konsequenz aus der betrachteten Klasse ist, um deren Konsistenz nachzuweisen. Dieser Nachweisweg wird dann besonders aussichtsreich, wenn ein einfaches Verfahren zur Non-sequitur-Diagnose bereitsteht (↑5.2.1).

Man könnte Konsistenz auch mit Hilfe dieses Lemmas definieren und erhielte dann umgekehrt die obige Definition als beweisbare Aussage. Während die hier gewählte Definition – Ausschluss einer Aussage, die mit ihrer Negation aus der betrachteten Klasse folgt, – an die redepragmatischen Ursprünge der Begrifflichkeit erinnert, ist das Lemma allgemeiner gehalten; analog liegen die Verhältnisse bei der Inkonsistenz. – Gelegentlich spricht man den Ausschluss der Folgerbarkeit einer Aussage und ihrer Negation auch als 'Negationskonsistenz' an, während die Existenz einer nicht-folgerbaren Aussage als 'Konsistenz' geführt wird. Eine Aussagenklasse ist (in den hier betrachteten Sprachen) genau dann konsistent, wenn sie auch negationskonsistent ist.

Folgt jedes Element einer Aussagenklasse X aus einer Aussagenklasse Y, dann ist X im Falle der Konsistenz von Y konsistent und Y im Falle der Inkonsistenz von X seinerseits inkonsistent: Für alle Aussagenklassen X, Y gilt: Wenn für alle Aussagen $A\in X$ gilt, dass $Y\vdash A$, dann: Wenn Y konsistent ist, dann ist X konsistent; wenn X inkonsistent ist, dann ist auch Y inkonsistent. – Ferner sind die Teilklassen konsistenter Mengen konsistent und die Oberklassen inkonsistenter Klassen inkonsistent: Unter $X\subseteq Y$ gilt: Wenn Y konsistent ist, dann ist X konsistent. Wenn X inkonsistent ist, dann auch Y. Inkonsistenz vererbt sich ›nach oben‹, Konsistenz vererbt sich ›nach unten‹ weiter.

Eine Aussage folgt genau dann aus einer Aussagenklasse, wenn die Vereinigung dieser Klasse mit der Einerklasse aus der Negation dieser Aussage inkonsistent ist: $X\vdash\Delta$ gdw $X\cup\{\neg\Delta\}$ ist inkonsistent. So folgt aus Aussagenklassen der Art $\{A\wedge B\}$ B mit (auf Regelebene gesprochen) KB. Damit ist $\{A\wedge B\}\cup\{\neg B\}$, also $\{A\wedge B,\neg B\}$ ersichtlich inkonsistent: Sowohl B als auch die Negation von B sind Konsequenz dieser Klasse.

Eine Aussagenklasse X ist verträglich mit resp. kompatibel mit resp. harmoniert mit resp. stimmt überein mit einer Aussagenklasse Y genau dann, wenn $X\cup Y$ konsistent ist. Inkonsistente Aussagenklassen harmonieren demzufolge mit keiner Aussagenklasse. Stehen umgekehrt Aussagenklassen in Harmonie, so sind beide konsistent. – Es ist hingegen X unverträglich mit resp. inkompatibel mit resp. in Disharmonie mit Y, falls $X\cup Y$ inkonsistent ist. Bei Beteiligung schon einer inkonsistenten Aussagenmenge resultiert Disharmonie. Umgekehrt darf jedoch aus der Inkompatibilität zweier Klassen nicht auf deren (jeweilige) Inkonsistenz geschlossen werden; diese kann gerade durch die Zusammenfügung von X und Y entstehen. (Un)Verträglichkeit von Aussagen A, B unter einer Aussagenklasse X ist genau dann gegeben, wenn die Vereinigung der Einerklassen beider Aussagen mit der Klasse inkonsistent ist: A ist unter X mit B unverträglich genau dann, wenn $\{A\}\cup\{B\}\cup X$ inkonsistent ist. Man vergleiche die Diskussion an Beispiel [2]: Die Aussagen [4] und [5] sind unter {[6]} unverträglich.

Maximalkonsistente Mengen sind die konsistenten Mengen, die durch Hinzufügung einer beliebigen Aussage, die ihnen nicht als Element angehört, in Inkonsistenz fallen. Genauer: X ist maximalkonsistent genau dann, wenn X konsistent ist und für alle Aussagen A mit $A\notin X$ gilt: $X\cup\{A\}$ ist inkonsistent. – Die maximalkonsistenten Klassen haben alle logisch-wahren Aussagen und keine logisch-falsche Aussage zum Element. Sie haben ferner die und nur die Aussagen zum Element, die aus ihnen folgen: Wenn X maximalkonsistent ist, dann ist eine beliebige Aussage $\Gamma\in X$, genau dann, wenn $X\vdash\Gamma$. Maximalkonsistente Klassen sind überdies deduktiv vollständig: Sei X maximalkonsistent. Nun ist $A^\circ\in X$ oder $A^\circ\notin X$. Im ersten Fall ist $X\vdash A^\circ$, also $X\vdash A^\circ$ oder $X\vdash\neg A^\circ$, also ist X deduktiv vollständig. Im zweiten Fall ist $A^\circ\notin X$, also $X\cup\{A^\circ\}$ ist inkonsistent, also $X\vdash\neg A^\circ$, also $X\vdash A^\circ$ oder $X\vdash\neg A^\circ$, also ist X deduktiv vollständig.

Umgekehrt gilt: Wenn *X* konsistent, deduktiv geschlossen und deduktiv vollständig ist, dann ist *X* maximalkonsistent. Schließlich sei noch der Satz von LINDENBAUM erwähnt: Zu jeder konsistenten Aussagenklasse *X* gibt es eine maximalkonsistente Oberklasse *Y*.

Eine Aussagenklasse ist maximalkonsistente Unterklasse einer Aussagenklasse genau dann, wenn die erstgenannte Klasse konsistent ist, Teilklasse der Zweitgenannten und nicht leer und wenn die Hinzufügung einer Formel, die der zweitgenannten, aber nicht der erstgenannten Klasse angehört, die Menge inkonsistent macht. Genauer: *X* ist maximalkonsistente Unterklasse von *Y* genau dann, wenn (1) $X\subseteq Y$ und $X\neq\emptyset$, (2) X ist konsistent und (3) für alle Aussagen Δ: Wenn $\Delta\in Y\backslash X$, dann $X\cup\{\Delta\}$ ist inkonsistent. – Während maximalkonsistente Mengen mit Blick auf beliebige Formeln definiert werden, ist hier der Rahmen durch die Oberklasse *Y* eingeschränkt, der die zur Inkonsistenz führende Aussage entnommen sein muss.

Wenn eine Aussagenmenge nicht leer und konsistent ist, dann hat sie sich selbst, aber auch nur sich selbst zur maximalkonsistenten Untermenge. Dieser Sachverhalt zeigt an, dass der neue Begriff mit Blick auf inkonsistente Oberklassen angelegt ist. Wenn *X* maximalkonsistente Untermenge von *Y* ist, dann gilt für jede *Y*-Aussage A: $A\in X$ gdw $X\vdash A$. Die Bildung maximalkonsistenter Untermengen hat nicht nur vornehmlich inkonsistente Oberklassen als intendierten Anwendungsbereich, sondern zielt zusätzlich auf Klassen mit endlich wenigen, fast überschaubar wenigen Mitgliedern: Die Vorgehensweise zur Bildung maximalkonsistenter Untermengen ist diese: (i) Bilde alle Teilklassen der inkonsistenten Ausgangsmenge Y, also die Potenzklasse von Y! (ii) Streiche die Menge selbst und die leere Klasse! (iii) Sortiere aus den so gewonnenen Teilklassen die konsistenten aus! (iv) Zeichne die maximalkonsistenten Teilklassen aus!

Die Bildung maximalkonsistenter Untermengen ist für die inkonsistente Klasse aus dem Links-Rechts-Beispiel vorzuführen. Dabei wird die Aussage aus Zeile 1 unter [1] mit 'I', diejenige aus Zeile 2 mit 'II', diejenige aus Zeile 3 mit 'III' und diejenige aus Zeile 7 mit 'IV' abgekürzt. Die Unterklassen von {I, II, III, IV} sind die Mengen $\emptyset$, {I, II, III, IV}, {II, III, IV}, {I, III, IV}, {I, II, IV}, {I, II, III}, {I, II}, {I, III}, {I, IV}, {II, III}, {II, IV}, {III, IV}, {I}, {II}, {III}, {IV}. Durch Streichung der beiden ersten werden die relevanten Unterklassen verfügbar.

Die verbleibenden Mengen sind auf Konsistenz zu untersuchen. Um diese Aufgabe abzukürzen, wird gezeigt, dass die vier dreielementigen Klassen konsistent sind. Alle übrigen

Klassen lassen sich als Teilklassen derselben darstellen. Erweisen sich die betrachteten Gebilde als konsistent, dann auch ihre Teilklassen.

{II, III, IV} ist konsistent, wenn es wenigstens eine Aussage gibt, die nicht folgt. Ein Beispiel für eine solche Aussage wäre etwa gerade I, also ’A liegt links von B’, oder auch ’A=B’. Um etwa zu zeigen, dass I keine Konsequenz von {II, III, IV} ist, legt man eine Interpretation vor, die die Klasse erfüllt, aber etwa I falsch macht. Seien die natürlichen Zahlen das Universum der Interpretation und gelte folgende Deutung:

[9]	A	2
	B	1
	..liegt rechts von..	..>..
	..liegt links von..	..<..

[9] macht II, III, IV arithmetisch wahr; es gilt nämlich in der arithmetischen Sprache:

[10]
$$2 > 1$$
$$\bigwedge x \bigwedge y\ (x > y \rightarrow \neg\, y > x)$$
$$\bigwedge x \bigwedge y\ (x > y \leftrightarrow y < x)$$

Insoweit ist die Aussagenklasse erfüllbar, d.h. sie besitzt eine Interpretation, die alle ihre Elemente wahr macht. Die Interpretation macht andererseits wenigstens eine Aussage, etwa I (mit dem Interpretans ’2<1’) oder auch 'A=B' (mit dem Interpretans ’2=1’) falsch. Diese ist also keine Konsequenz (↑5.2.1). – Analog wird gezeigt, dass die übrigen Dreierklassen konsistent sind.

Zum Nachweis der Maximalkonsistenz sei wiederum {II, III, IV} betrachtet. Gefordert ist, dass jede Aussage, die {I, II, III, IV} angehört, nicht aber {II, III, IV}, die letztgenannte Klasse inkonsistent macht. Da lediglich I der betrachteten Menge nicht angehört, kann sich die Untersuchung beschränken: Aus dem Inkonsistenznachweis ist bekannt, dass die Viererklasse inkonsistent ist. Analog kann für die übrigen Dreierklassen Maximalität gezeigt werden. Es sind damit {II, III, IV}, {I, III, IV}, {I, II, IV} und {I, II, III} die maximalkonsistenten Untermengen der Links-Rechts-Aussagenmenge.

Eine Aussage A ist unschuldiger Zuschauer von *X*, falls A *X*-Mitglied ist und jeder maximalkonsistenten Untermenge von *X* angehört: $A \in X$ und für alle *Z* gilt: Wenn *Z* maximalkonsistente Untermenge von *X* ist, dann ist $A \in Z$. Hingegen ist A Verdächtiger von *X*, falls A wenigstens einer maximalkonsistenten Untermenge nicht angehört: $A \in X$ und es gibt eine maximalkonsistente Untermenge Z von X mit $A \notin Z$.

Die beispielhaft betrachtete Menge enthält keine unschuldigen Zuschauer, sondern nur Verdächtige. Ein unschuldiger Zuschauer wäre etwa durch Hinzufügung der Aussagen 'A ist viereckig' oder auch 'B ist eckig' gegeben.

Ü6 a) Zeigen Sie, dass die folgende Aussagenklasse inkonsistent ist:

I $\bigwedge x$ (MentalesPhänomen(x) $\rightarrow \neg$ PhysischesPhänomen(x))

II $\bigvee y \bigvee z$ (MentalesPhänomen(y) $\wedge$ PhysischesPhänomen(z) $\wedge$ Bewirkt(y,z))

III $\bigwedge u \bigwedge w$ (Bewirkt(u,w) $\wedge$ PhysischesPhänomen(w) $\rightarrow$ PhysischesPhänomen(u))

b) Bilden Sie die maximalkonsistenten Untermengen! Verwenden Sie zum Konsistenznachweis das oben benutzte Kriterium!

c) Identifizieren Sie die unschuldigen Zuschauer und die Verdächtigen von {I, II, III}!

5.1.4 (In)Konsistenz – Umgebende Unterscheidungen

Widerspruch, Kontroverse, Streit, Disput, Meinungsverschiedenheit, Dissens, usf. sind lebens- und sonderweltlich wohlvertraute Erscheinungen. Die Logik wird u.a. deshalb ausgebildet, um mit diesen Gegebenheiten (besser) umgehen zu können. So dienen die Konzepte von Konsistenz und Inkonsistenz gerade dazu, in allgemeiner und verlässlicher Weise eine Verständigung über diese Turbulenzen im Erkenntnisgeschäft zu garantieren.

Das (Sich)Widersprechen, „Contradicere“, kann durch Vollzug ganz verschiedener Redehandlungen erfolgen: So mag eine (dann als Proponent geführte) Partei eine Aussage Δ behaupten, während eine andere (dann als Opponent auftretende) Partei Δ bestreitet oder aber die Negation von Δ behauptet. Weitere Formen ergeben sich dann, wenn man in Annahme einer alternativen Prädikationslehre (↑3.3.5) auch positive, negative und neutrative Prädikationsoperatoren zulässt.

Das Sich-Widersprechen kommt gewöhnlich nicht in der Weise vor, dass ein kognitiver Agent zugleich Δ behauptet und bestreitet bzw. dass er Δ und die Negation von Δ behauptet. Vielmehr äußert man eine ganze Reihe von Aussagen, z.B. als Antworten auf Konzessionsfragen, die gemeinsam eine Aussage und ihre Negation als Element oder Konsequenz enthalten. Gelegentlich – man vergleiche [2] – gleitet man allmählich und unbemerkt auf einer Welle von Plausibilitäten in den Abgrund des Widerspruchs. Es gibt jedoch eine Reihe weiterer inkonsistenter Diskurssituationen: (i) Inkonsistente Aussagenklassen ergeben sich häufig, wenn ein Historiker, ein Detektiv, ein Rechercheur die aus verschiedenen Quellen stammenden Informationen zu einem *x* (Person, Tathergang, Zeitraum, Ereignis usf.) zusammenträgt. Es ist die bei solchen Untersuchungen leitende Maxime der Umfassenheit, die oft Inkonsistenz herbeiführt und behandlungsbedürftig macht. – (ii) Auch schwache, affirmative Akte, die auf Indizien beruhen, führen (gegebenenfalls unter Zusatzprämissen) auf Inkonsistenz. Man betrachte etwa Prognosen zum Ausgang eines Sportereignisses. (iii) Vermutungen, die auf gleichen Indizien beruhen, aber durch verschiedenen Interpretationsverfahren und -hypothesen zustande kommen, führen oft zur Inkonsistenz; diese Form ist typisch für interpretatorische Arbeit in Kunst, Medizin, Psychologie usf. (iv) Inkonsistenzgefährdet ist das kognitive Geschäft, vor allem wenn es von Aussageschemata geleitet ist. Paradigmatisch ist etwa der mathematische Vollzug unter dem Komprehensionsschema. (↑12.). – Der langen Beispielkette kurzer Sinn: Widerspruch und Inkonsistenz sind keineswegs pittoreske Zaungäste, sondern unwillkommene Dauerbegleiter des Erkenntnisgeschäfts.

’Kontradiktion’, ’Konsistenz’ und ’Inkonsistenz’ sind (innerhalb der voraussetzbaren Artikulationsmöglichkeiten) wohldefinierte Begriffe. Für weitere, in ihrer Umgebung angesiedelte Redeteile können sie als (Mit)Definiens hilfreich sein. So wird man etwa Antinomien, Paradoxien, Anomalien, Aporien usf. in der Regel als Widersprüche einer bestimmten Art charakterisieren; auf Basis derartiger Erklärungen sind dann z.B. alle Antinomien, also beweisbare Widersprüche, auch Kontradiktionen, aber nicht umgekehrt.

’(In)Konsistenz’ wird bei der Explikation von’(In)Kohärenz’ einschlägig. Wie immer man die in Wissens- und Wahrheitskonzeption beliebte Kohärenzbegrifflichkeit charakterisiert: In jedem Fall wird gelten, dass inkonsistente Aussagenklassen inkohärent und – kontraponiert – kohärente Mengen auch konsistent sind.

Das Konsistenzvokabular i.b. und die gesamte (meta)logische Ausdrucksmannschaft i.a. beziehen sich auf Aussagen resp. Aussagenklassen. Die genannten Begriffe finden jedoch bildungssprachlich auch Anwendung auf andere Gebilde: So soll etwa eine Überzeugung aus einem Überzeugungssystem folgen, eine Ideologie soll mit einer anderen unverträglich sein und eine Weltanschauung soll sich als inkonsistent herausstellen. Diese Übertragung auf Theorien, Ansätze, Ansichten, Auffassungen, Horizonte, (Welt)Anschauungen, Entwürfe, Positionen, Standpunkte, Sichtweisen, Ideologien, Paradigmata, Verständnisse, Vorverständnisse, Hintergrundverständnisse, Begleitverständnisse, Informationen und Informationssysteme, Überzeugungen und Überzeugungssysteme usf. ist insofern erlaubt, als alle diese – und viele hier ungenannte – Gebilde sich als Aussagenklassen und Aussagen darstellen lassen, ganz unerachtet ihrer sonstigen sehr heterogenen Eigentümlichkeiten.

Eine Kontradiktion war als Konjunktion einer beliebigen Aussage und ihrer Negation erklärt. Speziell im Blick auf universalquantifizierte Subjunktionen, Aussagen, die durch '$\bigwedge x(\text{Mensch}(x) \to \text{Sterblich}(x))$' exemplifiziert und durch $\bigwedge\xi(\Delta \to \Gamma)$ schematisch darstellbar sind, verwendet man eine Gegensatzterminologie, die durch das folgende sogenannte Logische Quadrat erläutert ist:

[11] $\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma)$ $\bigwedge\xi\,(\Delta \to \neg\Gamma)$

$\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \to \text{Sterblich}(x))$ ← KONTRÄR → $\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \to \neg\,\text{Sterblich}(x))$

```
        K
          O                                  H
            N                             C
              T                         S
S               R                     I              S
U                 A               R                  U
B                   D          O                     B
A                     I     T                        A
L                        K                           L
T                     I     T                        T
E                   D          O                     E
R                A                R                  R
N              R                      I              N
            T                           S
          N                               C
       O                                     H
    K
```

$\neg\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \to \neg\,\text{Sterblich}(x))$ ← SUBKONTRÄR → $\neg\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \to \text{Sterblich}(x))$

$\neg\bigwedge\xi\,(\Delta \to \neg\Gamma)$ $\neg\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma)$

In der Folge sind die Aussagen nach ihren Standort mit L(inks) O(ben), R(echts) U(nten) usf. abgekürzt. {LO, RU} und {RO, LU} sind inkonsistent im Sinne der Oberflächeninkonsistenz. Konträre Aussagen bilden genau dann eine inkonsistente Menge, wenn das Antezedens für wenigstens eine Gegebenheit erfüllt ist, wenn also $\bigvee\xi\Delta$ gilt. Es ist also {LO, RO, $\bigvee\xi\Delta$} inkonsistent, während {$\neg\bigvee\xi\Delta$, LO, RO} nicht unbedingt inkonsistent ist. – Bei der überkommenen Darstellung im Rahmen einer aristotelischen Grammatik und Logik ist die Existenzforderung zur Erzwingung von Inkonsistenz überflüssig.

Das LU- und RU-Glied lässt sich mit komplexer Quantorumformung als '$\bigvee x(\text{Mensch}(x)\wedge\text{Sterblich}(x))$' bzw. '$\bigvee x(\text{Mensch}(x)\wedge\neg\text{Sterblich}(x))$' darstellen. Es ist LU resp. RU eine Konsequenz aus LO resp. RO falls das Antezedens nicht leer ist: $\{\text{LO}, \bigvee\xi\Delta\} \vdash \text{LU}$ und $\{\text{RO}, \bigvee\xi\Delta\} \vdash \text{RU}$. Die subkonträren Gegensätze sind miteinander verträglich.

Das logische Quadrat ist ein Lehrstück aus der traditionellen Logik. Sein Klärungswert für diskursive Konfusionen besteht insbesondere in der Unterscheidung zwischen kontradiktorischen und konträren Gegensätzen: Viele Thesen sind ihrer Form nach universalquantifizierte Subjunktionen; und es macht einen erheblichen Unterschied, ob man gegen eine Aussage der Art $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\Gamma)$ ihren konträren oder ihren kontradiktorischen Gegensatz verteidigt.

Ü7 Bilden Sie das logische Quadrat mit

Δ: u ist Problem

Γ: $\bigvee w$ w ist Lösung für u

Wählen Sie für LU und RU die partikularquantifizierte Form!

Anbei: Kontradiktorische Begriffe sind von Kontradiktionen zu unterscheiden. Ein Begriff bzw. – hier einfachheitshalber (↑6.3) – ein einstelliger kontradiktorischer Prädikator Φ ist so charakterisiert, dass es aus analytischen Gründen keinen Gegenstand gibt, dem er zukommt: Gäbe es einen viereckigen Kreis: sei x ein solcher. Dann ist x viereckig, also ist x kein Kreis. Ferner ist x aber Kreis. Damit fällt die Annahme: Es gibt keinen viereckigen Kreis. Erweitert man eine konsistente Sprache ordnungsgemäß um einen kontradiktorischen Prädikator Φ, so führt das nicht zur Inkonsistenz, sondern nur zur Beweisbarkeit der negierten Partikularaussage $\neg\bigvee\xi\Phi(\xi)$. Kontradiktorische Prädikatoren sind exempelfrei, obwohl nicht alle exempelfreien Prädikatoren kontradiktorisch sind; man betrachte etwa '..Hörer-der-Logik-II-Vorlesung-im-SS 2000-über-2m' oder '..seriöser-Greifswalder-Philosophie-Professor-im Jahr 2000'.

Die überlieferte Logik und Argumentationslehre kennt weitere Phänomene, die als Widersprüche geführt werden. Von diesen wird im Kontext der philosophischen Methodenlehre insbesondere die contradictio exercita bzw. die contradictio in actu exercito interessieren, die durch [2] exemplifiziert wird (↑16.).

Es ist für viele Zwecke hilfreich, bezüglich (In)Konsistenz vier resp. fünf Fragen zu unterscheiden: die Explikationsfrage, die Nachweisfrage, die Entstehungs- und Behebungsfrage und die Rechtfertigungsfrage. – Die Explikationsfrage zielt auf die Natur der (In)Konsistenz. Sie wird durch Definitionen wie die oben vorgelegten (↑5.1.3) beantwortet. – Erweitert man die Gesamtperspektive dergestalt, dass man alternative Folgerungsreglements und damit alternative Folgerungsrelationen berücksichtigt, dann ergeben sich auch alternative Konsistenzbegriffe (↑ZUSATZ).

Auf Basis der Beantwortung der Explikationsfrage lässt sich die Nachweisfrage aufwerfen: Ist die Aussagenklasse *X* (in)konsistent? Dabei ist die Teilfrage nach der Inkonsistenz der einfachere Part: Man hat aus *X* lediglich eine Aussage und ihre Negation herzuleiten. Historische Beispiele, insbesondere die Entdeckung der Antinomien der Klassensprache, zeigen indes, dass die Aufdeckung der Inkonsistenz besonders dann eine nichttriviale Aufgabe ist, wenn die betrachtete Klasse über Aussagenschemata gegeben ist.

Die Teilfrage nach dem Konsistenznachweis hat zwei Antworten: Konsistenz wird – wie in der Diskussion des Links-Rechts-Beispiels (↑5.1.3) – relativ nachgewiesen: Wenn das Modell für die betrachtete Aussagenklasse konsistent ist, also die Klasse der interpretierenden arithmetischen Aussagen, dann auch diese. Der direkte Nachweis zielt darauf, ohne Rückgriff auf ein Modell, d.h. ohne Rückgriff auf eine Interpretation durch Aussagen einer anderen Sprache, zu zeigen, dass wenigstens eine Aussage nicht aus *X* folgt. – In beiden Fällen ergeben sich jedoch Folgefragen bezüglich der (In)Konsistenz der zum Nachweis benutzten Sprache(n).

Die Entstehungs- und Behebungsfrage sind naturgemäß miteinander verknüpft: Wie entstehen Inkonsistenzen und wie lässt sich Konsistenz (wieder)herstellen? Da das Inkonsistenzphänomen alle Bereiche des Erkenntnisgeschäfts überdeckt, sind ganz verschiedene, oft bereichsvariante Antworten erwartbar. Gleichwohl gibt es übergreifende Diagnosen und Therapien. Exemplarisch erinnert sei an die Stelligkeitserhöhung (↑1.1.1). Diese Strategien bereitzustellen und fortlaufend zu verbessern, ist eine zentrale Aufgabe der Philosophie als konzeptiv-diskursiver Grunddisziplin.

Die Rechtfertigungsfrage lautet: Warum – besser: Wozu – soll man im Erkenntnisgeschäft Inkonsistenz meiden und Konsistenz herstellen? Diese Frage wird häufig unter Rückgriff auf den Titel ’das (Nicht)Widerspruchsprinzip’ formuliert: Warum gilt das (Nicht)Widerspruchsprinzip bzw. das principium (non-)contradictionis? In Klärung dieser Fragestellung ist zunächst festzuhalten, dass die Ausdrucksverbindung ’das (Nicht)Widerspruchsprinzip’ in wenigstens fünffacher Weise gedeutet werden kann.

Erstens: Zufolge der empirisch-psychologischen Lesart besagt das (Nicht)Widerspruchsprinzip: Es ist empirisch ausgeschlossen, dass ein (normalsinniger) Mensch zugleich von einer Aussage A und der Negation von A überzeugt ist. Diese Aussage ist nach empirischen Kriterien zu bewähren, zu bestätigen bzw. zu falsifizieren. Dabei wird die Bedeutung von ’es ist empirisch ausgeschlossen, dass___’ bzw. von ’..ist überzeugt von..’ eine wesentliche Rolle spielen. Für diese Lesart ist die Rechtfertigungsfrage nicht einschlägig.

Zweitens: Die (junktoren)logische Lesart des Widerspruchsprinzip lautet, wie gesehen (↑4.2.4), einfach $\neg(A\wedge\neg A)$. Quantorenlogische Deutungen sind z.B. $\neg\bigvee\xi(\Delta\wedge\neg\Delta)$, $\bigwedge\xi\neg(\Delta\wedge\neg\Delta)$, $\neg(\bigwedge\xi\Delta\wedge\bigvee\xi\neg\Delta)$ usf. Für diese Aussagen(schemata) gibt es Beweise: Sie sind logisch-wahr und bedürfen insofern keiner Rechtfertigung.

Drittens: Ontologische Lesarten machen von genuin ontologischem Vokabular Gebrauch. Beispiele: Es ist nicht der Fall, dass ein Sachverhalt eine Tatsache ist und keine Tatsache ist. Unmöglich kommt dasselbe demselben unter derselben Rücksicht zu und nicht zu. Was ist, kann nicht unter derselben Rücksicht nicht sein. Auf Basis einer Formatierung muss sich zeigen, ob solche Aussagen logisch-wahr sind oder logisch-indeterminiert. Im ersten Fall existiert ein logischer Beweis. Im zweiten Fall hat man im Rückgriff auf die ontologischen Eigenausdrücke über Wahrheit/Falschheit zu befinden. In beiden Fällen ist jedoch die Rechtfertigungsfrage uneinschlägig.

Viertens: Alethiologische Lesarten machen vom Wahrheitsvokabular Gebrauch. Beispiele: (i) Nicht: Γ ist wahr und Γ ist nicht wahr. (ii) Nicht: Γ ist wahr und Γ ist falsch. (iii) Nicht: Γ ist wahr und die Negation von Γ ist wahr. (i) ist logisch wahr. (ii) ist wahr, falls z.B. ’..ist falsch’ über ’..ist nicht wahr’ definiert wird. (iii) muss auf nichtlogischem Wege, also im Rückgriff auf die Bedeutung der alethiologischen Vokabel, entschieden werden. In keinem Fall wird aber die oben angedeutete Rechtfertigungsfrage bedeutsam.

Fünftens: Die methodologischen Lesarten lauten etwa: (Re)Konstruiere Sprachen so, dass die entstehende Klasse wahrer Aussagen konsistent ist. Stelle im Inkonsistenzfall Konsistenz her. Kurz: Sei im Erkenntnisvollzug konsistent! – Es ist diese das Erkenntnisgeschäft gestaltende Norm, für die die Rechtfertigungsfrage einschlägig wird.

Wäre, so der Kerngedanke der Rechtfertigung, eine Sprache so gestaltet, dass sie inkonsistente wahre Aussagenklassen zuließe, dann gäbe es eine Aussage Δ, die gemeinsam mit ihrer Negation Konsequenz wäre. Mit dem Ex-falso-quodlibet folgte damit jede beliebige Aussage Γ. Da Konsequenzen wahrer Aussagen ihrerseits wahr sind, wäre jede beliebige Aussage Γ wahr.

Für die Objektebene geredet: Kein Gegenstand ist von einem anderen unterscheidbar: Jede Eigenschaft, die einem Gegenstand zukommt, kommt auch allen anderen zu. Jeder Gegenstand ist mit jedem identisch – und auch von ihm verschieden. In einer solchen Sprache wären die Institutionen von Irrtum und Lüge aufgehoben. Man könnte keinerlei Informationen einholen und alle Antworten auf alle Fragen wären gegenstandslos: Jede beliebige abweichende Antwort wäre gleichermaßen gültig.

Warum aber sollen, so könnte der Konsistenzskeptiker nachsetzen, Sprachen (und ihre Analysesprachen) konsistent sein? Warum soll überhaupt Unterscheidbarkeit gewährleistet sein? Welche Überlegungen lassen sich für die Inkonsistenzintoleranz ins Feld führen? – Fasst man diese deutungsbedürftige Frage als Frage nach den Zwecken, denen das alethische (und auch das übrige) kognitive Geschäft dient, und betrachtet man die Konsequenzen der Inkonsistenz für die Objektsprachen, dann ergibt sich: Inkonsistente Sprachen führen zur Ununterscheidbarkeit und können deshalb das weitere (Rede- und Nichtrede-)Handeln nicht orientieren: Wenn, um den locus classicus zu variieren, die Gegenstände nicht mehr unterscheidbar sind, ist der Weg nach Athen auch der Weg nach Megara und der Brunnen vor mir ist zugleich sicher beschreitbarer Grund. Dann kann der Wanderer den Weg nach Athen nehmen, um nach Megara zu kommen, und getrost weitergehen, wenn sich vor ihm ein Brunnenabgrund auftut. Mehr noch: Nicht einmal die Zwecksetzung ist noch realisierbar: Wer das In-den-Brunnen-stürzen für gut hält, hält es zugleich für nicht gut. Damit verfehlt aber das Handeln nicht nur seine Zwecke. Diese sind nicht einmal mehr in unterscheidbarer Weise zu artikulieren, das Zweckkataster wird ›blind‹ und das Wollen verliert seine Ziele. Fasst man auch das Zwecksetzen als zweckdienliches Handeln, dann lässt sich zusammenfassend formulieren: Zweckdienliches Handeln ist nur durch Unterscheidbarkeit garantiert. Nur Konsistenzberücksichtigung sichert Unterscheidbarkeit. Also ist Konsistenz gerechtfertigt als (notwendige) Bedingung für zweckdienliches Handeln ›überhaupt‹.

Die Verteidigung des (Nicht)Widerspruchsprinzips in seiner methodologischen Lesart ist durch zwei Hinweise zu flankieren: <u>Zum einen</u> ist Konsistenz für die Organisation des Erkenntnisgeschäfts nicht nur unverzichtbar, sondern auch alleine <u>unzureichend</u>: Konsistenz vermag weder die Setzung gerade dieser und jener Prinzipien zu steuern, noch generiert sie etwa Konstatierungsregeln. Konsistenz gewinnt ihre limitierende Kraft nur dann, wenn sie auf einen Input an zu limitierenden Material zugreifen kann. In Isolation stellt sie keinen kognitiven Wert dar: Konsistent ist auch die leere Aussagenklasse; und der gänzliche Verzicht auf Redehandlungen bewahrt in narrensicherer Weise davor, sich in Widersprüche zu verwickeln. No risk, no fun! Das Widerspruchsprinzip stellt die Leitplanken, aber nicht den Motor für die Erkenntnisfahrt.

Zum andern wird mit Überlegungen zur Sicherung und Wiederherstellung von Konsistenz der rein logische Bereich überschritten. Weitere methodologische und materiale Prinzipien müssen hier greifen. Mit rein logischen Mitteln erfolgt lediglich die (In)Konsistenzdiagnose!

Ü8 a) Lesen Sie THOMAS VON AQUIN SthIq1a6. Thomas verhandelt dort das Vorgehen für den Fall, dass zwei Wissenschaften miteinander in Widerspruch geraten. Welches sind diese Wissenschaften? Nach welchem materialen Prinzip löst Thomas die inkonsistente Situation auf?

b) In NELSON, L.: Geschichte und Kritik der Erkenntnistheorie (= Gesammelte Schriften 2); Hamburg 1973, S.10, heißt es: „..; jedes Philosophem, das den exakten Wissenschaften widerstreitet, muss notwendig falsch sein.“ – Setzen Sie diese Einstellung in ein Inkonsistenzbehebungsprinzip um!

5.2 *Verfahren der Diskursvereinfachung*

Der vorangehende Punkt entwickelte die (meta)logische Perspektive: Im Rückgriff auf die Regeln für die logischen Operatoren konnte ein Ableitungs- und ein Folgerungsbegriff bestimmt werden, mit deren Hilfe die gebräuchlichen (meta)logischen Konzepte mit Schwerpunkt auf der (In)Konsistenz definiert worden sind. Insgesamt ist man damit imstande, regelgerecht zu folgern sowie Aussagenzusammenhänge unter (meta)logischen Gesichtspunkten zu beurteilen. – Die in der Folge vorgestellten Verfahren vereinfachen die bislang gegebenen Möglichkeiten in verschiedener Hinsicht: Die Non-Sequitur-Diagnose ist eine leicht handhabbare Prozedur um nachzuweisen, dass eine Aussage nicht Konsequenz einer Aussagenklasse ist (5.2.1). Mit Hilfe zulässiger Regeln, der Anziehung logisch wahrer sowie der Substitution logisch äquivalenter Aussagen lässt sich das Schlussgeschäft wirksam abkürzen (5.2.2).

5.2.1 *Die Non-Sequitur-Diagnose*

Um nachzuweisen, dass eine Aussage Γ Konsequenz einer Aussagenklasse X ist, legt man eine Ableitung von Γ aus X vor. Will man hingegen zeigen, dass Γ nicht Konsequenz aus X ist, hat man den Beweis dafür anzutreten, dass es eine solche Ableitung nicht gibt. Da derartige Überlegungen mit erheblichem Aufwand verbunden sind, legt es sich nahe, auf

Basis einer alternativen, aber gleichwertigen Charakterisierung der Folgerungsbeziehung ein leicht handhabbares Verfahren zur Non-Sequitur-Diagnose bereitzustellen.

Der Rückblick zeigt, dass (nicht nur bei der Bestimmung der maximalkonsistenten Untermengen (↑5.1.3), sondern) schon im Auftaktkapitel eine derartige Prozedur verwendet worden ist (↑1.1.2): Zwischen Prämissen und (angeblicher) Konklusion konnte, so die dort verwendete Metapher, durch Angabe von Gegenbeispielen ein Zaun gezogen werden: Die nunmehr formatiert darstellbare Aussage ’$\bigwedge x(\text{Handlung}(x)\rightarrow\bigvee z(\text{Zweck}(z)\wedge\text{Wird-verfolgt-mit}(z,x)))$’ resp. die aus ihr bildbare Einerklasse hat deshalb die Aussage ’$\bigvee z(\text{Zweck}(z)\wedge\bigwedge x(\text{Handlung}(x)\rightarrow\text{Wird-verfolgt-mit}(z,x)))$’ nicht zur Konsequenz, weil es eine Interpretation gibt, die die erste Aussage wahr, die zweite jedoch falsch macht: Interpretiert man ’Handlung(..)’ durch ’Ganze-Zahl(..)’, ’Zweck(..)’ durch ’Positive-ganze-Zahl(..)’ und ’Wird-verfolgt-mit(..,..)’ durch ’..>..’, dann wird die Prämisse, also die Aussage ’$\bigwedge x(\text{Ganze-Zahl}(x)\rightarrow\bigvee z(\text{Positive-ganze-Zahl}(z)\wedge z>x))$’, wahr, während die (angebliche) Konklusion, also ’$\bigvee z(\text{Positive-ganze-Zahl}(z)\wedge\bigwedge x(\text{Ganze-Zahl}(x)\rightarrow z>x))$’, falsch wird. Da aus Wahrem aber nichts Falsches folgt, ist die betrachtete zweite Aussage keine Konsequenz der ersten.

Wie funktioniert dieses Verfahren im Detail? Wie ist insbesondere die Rede von der Interpretation zu verstehen? – Eine Interpretation besteht aus fünf Schritten:

[12] a) Niederschrift der zu interpretierenden Aussagen (=Interpretandum)
b) Spezifikation des Bereichs der Interpretation
c) Niederschrift der Interpretationsbeziehung
d) Niederschrift der interpretierenden Aussagen (=Interpretans)
e) Erhebung des alethischen Status der Interpretantia

Dieses Vorgehen soll umgehend an dem soeben erinnerten Beispiel vorgeführt werden:

[12]° a) $\bigwedge x\,(\text{Handlung}(x) \rightarrow \bigvee z\,(\text{Zweck}(z) \wedge \text{Wird-verfolgt-mit}(z,x)))$

$\bigvee z\,(\text{Zweck}(z) \wedge \bigwedge x\,(\text{Handlung}(x) \rightarrow \text{Wird-verfolgt-mit}(z,x)))$

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) ’Handlung(..)’ $\simeq_{\text{i}}$ ’Ganze-Zahl(..)’

’Zweck(..)’ $\simeq_{\text{i}}$ ’Positive-ganze-Zahl(..)’

’Wird-verfolgt-mit(..,..)’ $\simeq_{\text{i}}$ ’..>.. ’

d) $\bigwedge x\,(\text{Ganze-Zahl}(x) \rightarrow \bigvee z\,(\text{Positive-ganze-Zahl}(z) \wedge z > x))$

$\bigvee z\,(\text{Positive-ganze-Zahl}(z) \wedge \bigwedge x\,(\text{Ganze-Zahl}(x) \rightarrow z > x))$

e) Das erste Interpretans ist arithmetisch-wahr. Das zweite Interpretans ist arithmetisch-falsch.

Die Niederschrift der Interpretanda erfolgt im bekannten grammatischen Format. Dieses lässt die logische Struktur erkennen. Mögliche Interpretationskandidaten sind lediglich die atomaren nicht-logischen Eigenausdrücke, die Teilausdruck des Interpretandums sind. Alle logischen Operatoren, also Quantoren, Junktoren und der Identitätsprädikator sowie Variablen, sind keine Deutungskandidaten. Sie bilden lediglich das ›Gerüst‹ der Interpretation. Interpretans und Interpretandum unterscheiden sich also nicht in der logischen Struktur, sondern in den Eigenausdrücken: So ist das erste Interpretandum eine universalquantifizierte Subjunktion, deren Sukzedens die Partikularquantifikation einer Konjunktion ist; und eben dies trifft auch auf das erste Interpretans zu.

Bei der unter b) erfolgten Angabe des Diskursbereichs bzw. des Bereichs der Interpretation bzw. des zugrundegelegten Individuenbereichs ist auf die Nichtleerheit dieser Klasse zu achten: Ließe man auch leere Interpretationsbereiche zu, dann könnte u.a. der Übergang von $\bigwedge\xi\Delta$ zu $\bigvee\xi\Delta$ als unzulässig erwiesen werden, weil die Partikularaussage unter einer solchen Interpretation allemal falsch wäre.

Unter c) wird die Interpretationsbeziehung dokumentiert: In der linken Spalte stehen die zu interpretierenden Teilausdrücke, in der rechten die interpretierenden. Das Zeichen ’..$\simeq_{\text{i}}$..’ wird gelesen als ’..wird interpretiert/gedeutet durch bzw. als..’. Jedem Ausdruck in der linken Spalte darf nur ein Ausdruck in der rechten Spalte zugeordnet werden. Sodann müssen die Einträge in beiden Spalten grammatisch zueinander ›passen‹: Einem k-stelligen Prädikator resp. Funktor in der linken korrespondiert genau ein k-stelliger Prädikator resp. Funktor in der rechten Spalte; und einer Individuenkonstante resp. einem Parameter in der linken entspricht genau eine Individuenkonstante in der rechten Spalte.

Die Forderung nach Gleichstelligkeit von zu interpretierendem und interpretierendem Operator ist im folgenden Sinne cum grano salis zu lesen: Als interpretierender Ausdruck für z.B. ’Handlung(..)’ kann etwa auch ’..<1’ oder ’..ist-Vater-von P.E.Bach’ oder ’$\bigvee y$..>y’ auftreten; und als interpretierender Ausdruck von ’Wird-verfolgt-mit(..,..)’ kann etwa auch ’$\bigvee y$ Ist-Summe-von(y,..,..) benutzt werden. Entscheidend ist dieselbe Anzahl freier Stellen im Interpretandum und Interpretans.

Unter d) erfolgt die Niederschrift der Interpretantia. Diese entstehen dadurch, dass die zu interpretierenden atomaren Eigenausdrücke an allen Stellen ihres Vorkommens durch die interpretierenden Ausdrücke ersetzt werden. Durch diese Operation bleibt die logische Struktur unberührt. Das Interpretationskonzept lässt sich insgesamt so umschreiben: Eine Aussage A (einer Sprache *S*) ist Interpretans einer Aussage B (einer Sprache *S*’) bezüglich eines nichtleeren Individuenbereichs D, wenn man A dadurch erhält, dass man alle Prädikatoren und Funktoren von B uniform durch gleichstellige Prädikatoren bzw. ›Formeln‹ und Funktoren bezüglich D ersetzt und indem man Individuenkonstanten und Parameter von B uniform durch Individuenkonstanten für D-Individuen ersetzt.

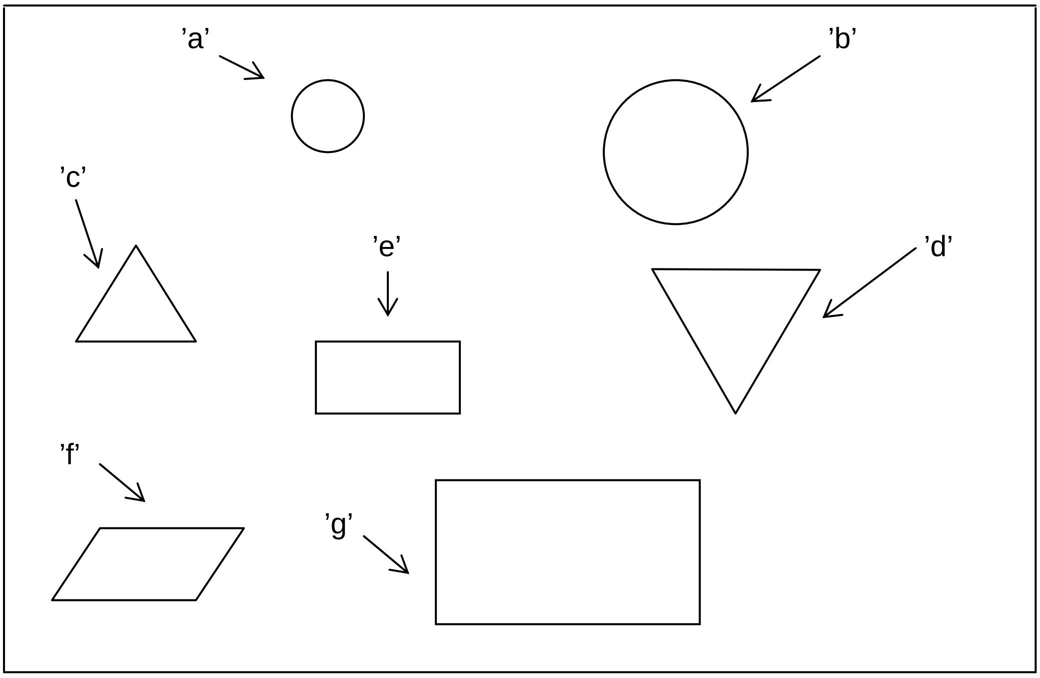
Eine Aussagenklasse wird interpretiert, indem man jede einzelne Aussage dieser Klasse interpretiert; dabei sind die atomaren Eigenausdrücke in allen Aussagen gleich zu interpretieren: Kommt etwa ’Zweck(..)’ in mehreren Aussagen vor, dann ist ’Zweck(..)’ an allen Stellen seines Vorkommens durch denselben interpretierenden Ausdruck zu ersetzen.

In e) erfolgt die Feststellung des Wahrheitsstatus der Interpretantia. Um diesen Akt zu einer leicht nachvollziehbaren und anfechtungsfreien Handlung zu machen, wird als interpretierende Sprache eine übersichtliche, häufig benutzte, gut untersuchte und mit akzeptierten Mitteln als konsistent nachgewiesene Sprache gewählt: Neben Zahlen- und Klassensprachen erstellt man sich auch oft ›Baukastensysteme‹, in denen die alethischen Verhältnisse zweifelsfrei sind; besonders geeignet zur Illustration sind auch Pfeilfiguren.

Eine Interpretation macht eine Aussagenklasse wahr, wenn sie jede Aussage der Klasse bzw. (im Falle endlicher Klassen) die Konjunktion der Aussagen wahr macht, wenn also alle Interpretantia in der Interpretanssprache wahr sind. Stellt man unter e) fest, dass die vorgenommene Interpretation die Aussagenklasse wahr macht, die (vorgebliche) Konsequenz bzw. deren Interpretans jedoch falsch wird, dann kann man das Non-Sequitur diagnostizieren.

Die Beherrschung der Non-Sequitur-Diagnose ist gebunden an die Fertigkeit des Interpretierens; daher soll diese zunächst exemplarisch eingeübt werden. Als erstes Interpretandum diene die Universalaussage ’$\bigwedge x(\mathrm{Mensch}(x)\rightarrow\mathrm{Sterblich}(x))$’ (=i)). Interpretiert man (auf dem Bereich der natürlichen Zahlen) ’Mensch(..)’ durch ’Primzahl(..)’ und ’Sterblich(..)’ durch ’Gerade-Zahl(..)’, dann ergibt sich das falsche Interpretans ’$\bigwedge x(\mathrm{Primzahl}(x)\rightarrow\mathrm{Gerade\text{-}Zahl}\ (x))$’ (=ii)). Deutet man hingegen ’Mensch(..)’ durch ’..>12’ und ’Sterblich(..)’ durch ’..>10’, dann resultiert mit ’$\bigwedge x(x>12\rightarrow x>10)$’ (=iii)) ein wahres Interpretans. – Man betrachte nun folgenden Baukasten:

[13]



Die Buchstaben benennen die Figuren. Für die folgenden Interpretationen werden die Prädikatoren ’Ist-Kreis(..)’, ’Ist-Dreieck(..)’, ’Ist-Viereck(..)’ und ’Ist-Vieleck(..)’ in ihrer üblichen Bedeutung verwendet; so gelten z.B. in der Baukastensprache die Aussagen ’Ist-Dreieck(d)’, ’Ist-Kreis(b)’ und ’$\neg\bigvee x(\mathrm{Kreis}(x)\wedge\mathrm{Ist\text{-}Viereck}(x))$’. – Diese Miniatursprache findet bedarfsweise Erweiterung. Deutet man vor dem Hintergrund des Baukastenuniversums ’Mensch(..)’ durch ’Ist-Viereck(..)’ und ’Sterblich(..)’ durch ’Ist-Vieleck(..)’, dann resultiert mit ’$\bigwedge x(\mathrm{Ist\text{-}Viereck}(x)\rightarrow\mathrm{Ist\text{-}Vieleck}(x))$’ (=iv)) ein wahres Interprans. Dagegen ist die Aussage ’$\bigwedge x(\mathrm{Kreis}(x)\rightarrow\mathrm{Dreieck}(x))$’ (=v)) eine falsches Interpretans in der Baukastensprache; sie entsteht durch die Deutung von ’Mensch(..)’ durch ’Ist-Kreis(..)’ und von ’Sterblich(..)’ durch ’Ist-Dreieck(..)’. Die folgende Liste enthält das Interpretandum sowie die vier vorgenommenen Deutungen:

[14] i) $\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \rightarrow \text{Sterblich}(x))$

ii) $\bigwedge x\,(\text{Primzahl}(x) \rightarrow \text{Gerade-Zahl}\,(x))$

iii) $\bigwedge x\,(x > 12 \rightarrow x > 10)$

iv) $\bigwedge x\,(\text{Ist-Viereck}(x) \rightarrow \text{Ist-Vieleck}(x))$

v) $\bigwedge x\,(\text{Kreis}(x) \rightarrow \text{Dreieck}(x))$

Logisch indeterminierte Aussagen sind dadurch ausgezeichnet, dass sie wahre wie auch falsche Interpretantia besitzen. Anders als bei logisch determinierten Aussagen entscheidet eben nicht schon die Bedeutung der logischen Operatoren alleine über den alethischen Status. – Die folgende Tabelle enthält ein früheres Beispiel (↑[4]) als Interpretandum und wiederum je ein wahres und ein falsches arithmetisches und baukastensprachliches Interpretans; die Deutungszuordnung lässt sich unschwer herstellen:

[15] i) $\neg \bigvee x\,(\text{Duty}(x) \wedge \text{Binds-universally}(x))$

ii) $\neg \bigvee x\,(\text{Gerade-Zahl}(x) \wedge \text{Ungerade-Zahl}(x))$

iii) $\neg \bigvee x\,(\text{Gerade-Zahl}(x) \wedge \text{Primzahl}(x))$

iv) $\neg \bigvee x\,(\text{Dreieck}(x) \wedge \text{Kreis}(x))$

v) $\neg \bigvee x\,(\text{Dreieck}(x) \wedge \text{Vieleck}(x))$

Ü9 Kürzen Sie mit ’..G..’ den Prädikator ’..ist gleichschwer..’ und mit ’P(..)’ den Prädikator ’Ist-physikalischer-Körper(..)’ ab! Liefern Sie je eine Interpretation, die die folgende Aussagenklasse arithmetisch-wahr, arithmetisch-falsch, baukasten-wahr und baukasten-falsch macht:

{’$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,(x \text{ G } y \wedge y \text{ G } z \rightarrow x \text{ G } z)$’, ’$\bigwedge x \bigwedge y\,(\text{P}(x) \wedge \text{P}(y) \rightarrow (x \text{ G } y \vee y \text{ G } x))$’}

Für die Baukasteninterpretation ist die Sprache um geeignete zweistellige Prädikatoren zu erweitern wie etwa ’..ist eckengleich..’, ’..ist eckenkleiner..’ usf.

Wie die Aussagen von Beispiel [15] und von Ü9 zeigen, müssen Interpretanda nicht wahr sein; im ersten Fall ist der Wahrheitsstatus offen, im zweiten Fall ist das Interpretandum als Ganzes falsch. – Die folgende Tabelle bietet eine Interpretation einer Aussage mit Individuenkonstanten:

[16] a) Philosoph(Sokrates) $\wedge$ Lehrer-von(Sokrates, Platon)

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) ’Sokrates’ $\simeq_i$ ’5’

’Platon’ $\simeq_i$ ’10’

’Philosoph(..)’ $\simeq_i$ ’Primzahl(..)’

’Ist-Lehrer-von(..,..)’ $\simeq_i$ ’..<.. ’

d) Primzahl(5) $\wedge$ 5 < 10

e) Das Interpretans ist wahr, d.h. das Interpretandum ist unter der angenommenen arithmetischen Interpretation wahr.

Verändert man die Interpretation von ’Sokrates’, indem man ’4’ als Interpretans wählt, dann ergibt sich das falsche Interpretans ’Primzahl(4)$\wedge$4<10’. – Ein wahres Interpretans aus der Baukastensprache wäre ’Rechteck(e)$\wedge$Eckengleich(e,f)’; mit ’Dreieck(e)$\wedge$Eckengleich(e,f)’ ist hingegen ein falsches Interpretans gegeben.

Interpretiert man den Funktor ’der-Vater-von(..)’ durch ’ quer(..)’ (Lies: die-Quersumme-von(..)), den Funktor ’die-Mutter-von(..)’ durch ’..²’ (Lies: das-Quadrat-von(..)), ferner: den Prädikator ’Verheiratet-mit(..,..)’ durch ’..<..’, schließlich die Individuenkonstante ’Hans’ durch ’4’, dann ergibt sich für das Interpretandum ’Verheiratet-mit(der-Vater-von(Hans),die-Mutter-von(Hans))’ (=i)) das wahre Interpretans ’quer(4)<4^2’ (=ii)). Interpretiert man hingegen ’Verheiratet-mit(..,..)’ durch ’..>..’, dann erhält man das falsche Interpretans ’quer(4)>4^2’ (=iii)).

[17] i) Verheiratet-mit(der-Vater-von(Hans), die-Mutter-von(Hans))

ii) quer(4)<4^2

iii) quer(4)>4^2

Abschließend sei noch erwähnt, dass es auch in dem Sinne ›innere‹ Interpretationen gibt, als z.B. arithmetische Interpretanda arithmetisch interpretiert werden können. So ist etwa ’$\bigwedge x(x>5 \rightarrow x>6)$’ ein (falsches) arithmetisches Interpretans von ’$\bigwedge x(x>10 \rightarrow x \geq 5)$’ und ’$\bigwedge x \bigwedge y(x \cdot y = y \cdot x)$’ ist ein (wahres) arithmetisches Interpretans von ’$\bigwedge x \bigwedge y(x+y=y+x)$’.

Nach dieser Einübung ins Interpretieren soll der Blick nochmals auf den Folgerungsbegriff und seine Charakterisierungen gewendet werden: Die Definition von ’..$\vdash$..’ über den Ableitungsbegriff ist von folgender Idee geleitet: Ob Γ aus *X* folgt, wird durch die Regeln für die logischen Operatoren fixiert. Anders: Es hängt von der Bedeutung der logischen

Operatoren ab – und nur von dieser –, ob eine Aussage aus einer Aussagenklasse folgt. Umgekehrt spielt also die Bedeutung der Eigenausdrücke der Aussagen für das (Nicht)Bestehen der Konsequenzschaft keine Rolle. Man betrachte dazu die Gebilde:

[18] i) $\{'\bigwedge x\ \text{Mensch}(x)'\} \vdash '\neg \bigvee x \neg\ \text{Mensch}(x)'$

ii) $\vdash '\bigwedge x\ \text{Mensch}(x) \rightarrow \neg \bigvee x \neg\ \text{Mensch}(x)'$

i) und ii) sind nach dem Deduktionstheorem bzw. seiner Umkehrung gleichwertig. Den Umstand, dass die Bedeutung der Eigenausdrücke keine Rolle für den Folgerungszusammenhang bzw. die logische Wahrheit spielt, kann man dadurch ausdrücken, dass die Folgerungsbeziehung, die logische Wahrheit, unter jeder Interpretation von 'Mensch(..)' bestehen bleibt. Nimmt man noch den Gedanken hinzu, dass das Schließen nicht von Wahrem zu Falschem führen darf, dann ergibt sich folgende abschließende Charakterisierung von Konsequenzschaft mit Hilfe der Interpretationsbegrifflichkeit: Γ folgt genau dann aus X - $X \vdash \Gamma$ -, wenn jede Interpretation, die X wahr macht, auch Γ wahr macht.

Diese zweite Charakterisierung von Konsequenzschaft ist mit der ersten äquivalent (und auch nur insoweit erlaubt (↑11.)): Es gibt genau dann eine Ableitung von Γ aus X, wenn jede Interpretation, die X wahr macht, auch Γ wahr macht. (↑ANMERKUNG).

Der für die Non-Sequitur-Diagnose hilfreiche Aspekt besteht in der Charakterisierung der Nicht-Konsequenz. Γ ist nicht Konsequenz aus X – $X \nvdash \Gamma$ – genau dann, wenn es wenigstens eine Interpretation gibt, die X wahr macht, Γ aber falsch. – Es ist genau dieser begriffliche Zusammenhang, der die Non-Sequitur-Diagnose zu einem leicht handhabbaren und universell einsetzbaren Verfahren macht. Dies sei nochmals an zwei Beispielen vorgeführt. Zunächst wird gezeigt, dass die Aussage $'\bigwedge y(\text{Naturwissenschaftler}(y) \rightarrow \text{Wissenschaftler}(y))'$ keine Konsequenz aus der Aussagenklasse $\{'\bigwedge z(\text{Physiker}(z) \rightarrow \text{Wissenschaftler}(z))', '\bigwedge w(\text{Physiker}(w) \rightarrow \text{Naturwissenschaftler}(w))'\}$ ist.

[19] a) $\bigwedge z\ (\text{Physiker}(z) \rightarrow \text{Wissenschaftler}(z))$

$\bigwedge w\ (\text{Physiker}(w) \rightarrow \text{Naturwissenschaftler}(w))$

$\bigwedge y\ (\text{Naturwissenschaftler}(y) \rightarrow \text{Wissenschaftler}(y))$

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) 'Physiker(..)' $\simeq_i$ '..> 10 '

'Wissenschaftler(..)' $\simeq_i$ '..> 5'

'Naturwissenschaftler(..)' $\simeq_i$ '..> 1'

d) $\bigwedge z\ (z > 10 \rightarrow z > 5)$

$\bigwedge w\ (w > 10 \rightarrow w > 1)$

$\bigwedge y\ (y > 1 \rightarrow y > 5)$

e) Die Prämissen sind unter der vorgenommenen arithmetischen Interpretation wahr, die (vorgebliche) Konklusion ist jedoch falsch.

Auf Basis der Feststellung der alethischen Gegebenheiten unter e) kann man schließen, dass die (vorgebliche) Konklusion ›in Wirklichkeit‹ nicht aus der Prämissenklasse folgt. – Anbei: Die Elemente der Prämissenklasse sind wahr und die als Konklusion hingestellte Aussage ist ebenfalls wahr. Dennoch stehen sie nicht in der Folgerungsrelation. Das Corpus der wahren Aussagen ist also bezüglich der Konsequenzschaft nicht so gebildet, dass zwischen jeder Klasse wahrer Aussagen und einer wahren Aussage allemal die Folgerungsbeziehung besteht. – Das zweite Beispiel wird nur in den Schritten a) und d) notiert:

[20] a) Südlich-von(Rom, München)

Südlich-von(München, Hamburg)

Südlich-von(Rom, Hamburg)

d) Vorgänger-von(3, 4)

Vorgänger-von(4, 5)

Vorgänger-von(3, 5)

Unter der vorgenommenen arithmetischen Interpretation sind die beiden ersten Aussagen wahr, während die letzte falsch ist. Diese ist also keine Konsequenz aus der Klasse der beiden ersten.

An dieser Stelle mag die Schlussintuition Widerspruch anmelden: Das hängt nicht nur damit zusammen, dass Prämissen und Konklusion wahr sind, sondern wird vornehmlich durch die Natürlichkeit einer ›mitgedachten‹ Prämisse herbeigeführt: Wegen der unterstellten Transitivität des Südlichliegens – $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(Südlich-von($x$, y) $\wedge$ Südlich-von(y, z) $\rightarrow$ Südlich-von(x, z)) – erscheint der Schluss korrekt. Er erfüllt diese Qualität aber erst, wenn man die Transitivität tatsächlich hinzufügt. Die Non-Sequitur-Diagnose zwingt also dazu, ›stillschweigend unterstellte‹ bzw. ›implizite‹ Prämissen aufzudecken.

Ü 10 Zeigen Sie, dass

a) {'$\bigvee x\,(\mathrm{Philosoph}(x) \wedge \mathrm{Gestört}(x))$', '$\bigvee x\,(\mathrm{Professor}(x) \wedge \mathrm{Gestört}(x))$'} $\nvdash$
'$\bigvee x\,(\mathrm{Philosoph}(x) \wedge \mathrm{Professor}(x))$'

b) {'$\bigwedge x\,(\mathrm{Mensch}(x) \rightarrow \mathrm{Organismus}(x))$', '$\bigvee x\,(\mathrm{Organismus}(x) \wedge \mathrm{Kurzlebig}(x))$'} $\nvdash$
'$\bigvee x\,(\mathrm{Mensch}(x) \wedge \mathrm{Kurzlebig}(x))$'

Mit Hilfe der Non-Sequitur-Diagnose lässt sich auch feststellen, ob eine Klasse X konsistent ist: Man hat nur von einer Aussage Δ zu zeigen, dass sie nicht aus X folgt; und dazu muss man lediglich eine Interpretation angeben, die die Elemente von X wahr macht, Δ aber falsch. Das Verfahren lässt sich noch vereinfachen: Man braucht zum Konsistenznachweis lediglich zu zeigen, dass es eine Interpretation gibt, die die Elemente von X wahr macht, da jede Interpretation jede logisch-falsche Aussage falsch macht und es somit zu jeder Interpretation wenigstens eine Aussage gibt, die unter dieser Interpretation falsch ist und damit keine Konsequenz einer unter dieser Interpretation wahren Aussagenklasse darstellt.

Die Non-Sequitur-Feststellung ist auch das geeignete Instrument zur (Un)Entscheidbarkeitsuntersuchung: Zufolge der Definition der (Un)Entscheidbarkeit einer Aussage durch eine Aussagenklasse ist zu untersuchen, ob die Aussage oder ihre Negation aus der Klasse folgt; und um zu zeigen, dass eine ganze Aussagenklasse (nicht)redundant ist, ist für jedes Element der Klasse das Folgerungsverhältnis zum Rest zu klären. – Die auf der Klasse der physikalischen Körper (mittlere Größe) erklärte Relation des Gleichschwerseins ist ein geläufiges Beispiel für Gleichheiten (↑Ü9). Diese können u.a. durch die folgenden drei Prinzipien der Geschlossenheit (=GE), der Reflexivität (=RE) und der Linkskomparativität (=LK) charakterisiert werden:

[21] $\bigwedge x \bigwedge y\,(x \mathrm{G} y \rightarrow \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(y))$ [GE]

$\bigwedge x\,(\mathrm{P}(x) \rightarrow x \mathrm{G} x)$ [RE]

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,(x \mathrm{G} y \wedge x \mathrm{G} z \rightarrow y \mathrm{G} z)$ [LK]

Andere Gleichheitsprinzipien sind aus dieser Dreierklasse unschwer zu gewinnen: Zum Nachweis der Feldeigenschaft – '$\bigwedge x(\mathrm{P}(x) \leftrightarrow \bigvee y(y\mathrm{G}x \vee x\mathrm{G}y))$' – genügt GE und RE. Zum Nachweis der Symmetrie – '$\bigwedge x \bigwedge y(x\mathrm{G}y \rightarrow y\mathrm{G}x)$' – sind alle charakterisierenden Prinzipien nötig. Transitivität – '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x\mathrm{G}y \wedge y\mathrm{G}z \rightarrow x\mathrm{G}z)$' –, Rechtskomparativität – '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x\mathrm{G}z \wedge y\mathrm{G}z \rightarrow x\mathrm{G}y)$' – und Zirkularität – '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x\mathrm{G}y \wedge y\mathrm{G}z \rightarrow z\mathrm{G}x)$' – ergeben sich dann mit Symmetrie.

Ü11 Zeigen Sie, dass Symmetrie, Transitivität, Rechtskomparativität und Feld Konsequenzen aus {GE, RE, LK} sind.

Die Klasse {GE, RE, LK} wäre nun deduktiv redundant bzw. abhängig, wenn wenigstens eine der drei Aussagen aus den verbleibenden ableitbar wäre. Kann hingegen für jede der drei Aussagen gezeigt werden, dass sie keine Konsequenz aus dem Rest ist, dann ist die Aussagenklasse nicht redundant bzw. unabhängig. Die Problemlösung hat folgenden Verlauf:

[22] i) OB {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

ii) OB {GE, RE} $\vdash$ LK

ii-i) Ja ⇢ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

ii-ii) Nein ⇢ weiter zu iii)

iii) OB {GE, LK} $\vdash$ RE

iii-i) Ja ⇢ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

iii-ii) Nein ⇢ weiter zu iv)

iv) OB {LK, RE} $\vdash$ GE

iv-i) Ja ⇢ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

iv-ii) Nein ⇢ {GE, RE, LK} ist nicht deduktiv redundant

Um zu zeigen, dass {GE, RE}$\nvdash$LK, interpretiere man ’P(..)’ durch ’NaZ(..)’, ’..G..’ durch ’..≥..’. Es sind nun einerseits ’$\bigwedge x \bigwedge y(x \geq y \rightarrow \mathrm{NaZ}(x) \wedge \mathrm{NaZ}(y))$’ und ’$\bigwedge x(\mathrm{NaZ}(x) \rightarrow x \geq x)$’ wahre Aussagen der arithmetischen Sprache; andererseits ist aber ’$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x \geq y \wedge x \geq z \rightarrow y \geq z)$’ eine falsche arithmetische Aussage: Mit ’$4 \geq 1 \wedge 4 \geq 3$’ ist nicht ’$1 \geq 3$’ gegeben.

Um zu zeigen, dass {GE, LK}$\nvdash$RE, belasse man es bei der Interpretation von ’P(..)’ durch ’NaZ(..)’; für ’..G..’ resp. ’xGy’ wird mit ’$x>10 \wedge y>10$’ eine konjunktive Formel gewählt. Es sind dann zwar ’$\bigwedge x \bigwedge y(x>10 \wedge y>10 \rightarrow \mathrm{NaZ}(x) \wedge \mathrm{NaZ}(y))$’ sowie ’$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z((x>10 \wedge y>10) \wedge (x>10 \wedge z>10) \rightarrow (y>10 \wedge z>10))$’ wahr unter dieser Interpretation; aber die Aussage ’$\bigwedge x(\mathrm{NaZ}(x) \rightarrow x>10 \wedge x>10)$’ ist arithmetisch falsch.

Ins Anschauliche übersetzt, besagt LK: Trifft ein Pfeil, der von einem Relationsglied ausgeht, auf Relationsziele, dann sind auch diese wechselseitig durch die Relation verbunden. Wegen11*12$\wedge$11*12 gilt für die Relationsziele auch 12*12. Da aber nicht alle Relationsglieder den Rückkehrpfeil aufweisen, ist der *-Prädikator nicht reflexiv.

Um zu zeigen, dass $\{\text{RE, LK}\}\nvdash\text{GE}$ wird 'P(..)' durch 'Primzahl(..)' und '..G..' durch den Identitätsprädikator interpretiert. Es sind '$\bigwedge x(\text{Primzahl}(x)\rightarrow x=x)$' sowie '$\bigwedge x\bigwedge y\bigwedge z(x=y\wedge x=z\rightarrow y=z)$' wahre arithmetische Aussagen; demgegenüber stellt '$\bigwedge x\bigwedge y(x=y\rightarrow\text{Primzahl}(x)\wedge\text{Primzahl}(y))$' eine falsche Aussage unter dieser Interpretation dar.

Insgesamt stellt damit {RE, GE, LK} eine nicht redundante Klasse dar. Zieht man diese Aussagen gemeinsam zur Charakterisierung der Gleichheitsprädikatoren heran, dann kann man auf keine verzichten (↑6.).

Ü12 a) Ersetzen Sie in [21] die Linkskomparativität durch die Transitivität. Untersuchen Sie, ob die Symmetrie dann noch erreichbar ist. Führen Sie dieselbe Untersuchung durch nach Ersetzung der Linkskomparativität durch Rechtskomparativität und Zirkularität.

b) Zeigen Sie, dass die Aussage '$\bigwedge x\bigwedge y(x\text{G}y\leftrightarrow\text{P}(x)\wedge\text{P}(y)\wedge\bigwedge z(z\text{G}x\leftrightarrow z\text{G}y))$' mit der Konjunktion von RE, GE und LK äquivalent ist!

Die ausführliche Untersuchung der Prädikatoren 'P(..)' und '..G..' resp. – in materialer Redeweise – der auf dem Bereich der physikalischen Körper erklärten Gewichtsgleichheit gilt nicht diesen singulären Verhältnissen als solchen; sie finden vielmehr nur insofern Aufmerksamkeit, als sie Gleichheiten X auf einem Bereich Φ repräsentieren. Die charakterisierenden Prinzipien können als metasprachliche Schemata so ausgedrückt werden:

[21]° $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\,(\mathrm{X}(\omega,\xi)\rightarrow\Phi(\omega)\wedge\Phi(\xi))$ [GE]

$\bigwedge\omega\,(\Phi(\omega)\rightarrow\mathrm{X}(\omega,\omega))$ [RE]

$\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\mathrm{X}(\omega,\xi)\wedge\mathrm{X}(\omega,\zeta)\rightarrow\mathrm{X}(\xi,\zeta))$ [LK]

Ganz analog lassen sich auch die folgenden Prinzipien wie Symmetrie und Transitivität oder auch das mit der Konjunktion von GE, RE und LK äquivalente Prinzip aus Ü 12 b) metasprachlich darstellen. – Die gesamte Rede von der Interpretation, von wahren und falschen Interpretantia usf. lässt sich auf derartige Schemata übertragen. So ergibt sich durch Interpretation von X durch '..wertgleich..' und von Φ durch 'Ware(..)' eine wahre Interpretation der unter [21]° gegebenen Prinzipienklasse. Demgegenüber liefert '..<..' für X und 'NaZ(..)' für Φ eine falsche Interpretation.

Ü13 Liefern Sie eine weitere wahre und eine weitere falsche Interpretation für die Prinzipien von [21]°.

ANMERKUNG: Die lehrbuchübliche Darstellung der Logik umfasst vier Teile: Im ersten Teil wird der Begriff der Sprache erster Stufe und der daraus entwickelbaren Begriffe (Terme, Formeln, Teilterme, Teilformeln, Substitution usf.) untersucht. Der zweite Teil bildet die Definition der sogenannten „syntaktischen“, „kalkülmäßigen“ Konsequenzrelation bzw. der Ableitbarkeitsrelation. Im Zuge dieser Ausführungen wird auch Konsistenz, Maximalkonsistenz usf. dargestellt. Der dritte Teil legt eine Definition des sogenannten ›semantischen‹, modelltheoretischen Konsequenzbegriffs dar. Die Begrifflichkeit des zweiten Teils wird im Einzelnen nachgezeichnet. Der logischen Beweisbarkeit korrespondiert z.B. die Allgemeingültigkeit und der Konsistenz entspricht die Erfüllbarkeit. Der vierte Teil zeigt schließlich, dass syntaktische und semantische Konsequenzschaft zusammenfallen. Dieser sogenannte Adäquatheitsbeweis sieht den semantischen Konsequenzbegriff als wesentlich an und zeigt dann, dass der syntaktische gegenüber diesem korrekt und vollständig ist. – Der hier vorgelegte Text ist an dieser Aufgabenstellung der Logik nicht interessiert, sondern zieht aus den bekannten logischen Zusammenhängen nur Nutzen für das verfolgte Propädeutikprojekt. Im Grammatikkapitel werden Begriffe des ersten Teils einer Logikdarstellung erörtert. 5.1 umfasst Vokabel und Theoreme des zweiten Teils und 5.2 übt in die Handhabung der Begriffe des dritten Teils ein. Das Adäquatheitsergebnis wird dankbar übernommen. Außerdem wird die Standardeinstellung nicht geteilt, die sich an der Rede von Adäquatheit des Ableitbarkeitsbegriffs bzgl. des Konsequenzbegriffs ablesen lässt. Diese und verwandte Kontroversen gehören zur Philosophie der Logik.

5.2.2 Diskursabkürzung: Anziehung – Zulässige Regeln

Um nachzuweisen, dass eine Aussage Γ nicht Konsequenz einer Aussagenklasse X ist, ist eine Interpretation vorzunehmen, die X wahr macht, Γ jedoch falsch. Um nachzuweisen, dass eine Aussage Γ Konsequenz einer Aussagenklasse X ist, wird eine Ableitung von Γ aus X vorgelegt. Man betrachte nun die schematische Ableitung des Aussagenschemas $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ aus der leeren Klasse:

[23]	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	2	Wäre$_{1,2}$	A	
	3	Also$_{1,2}$	$A \vee \neg A$	| AE; 2
	4	Also$_{1,2}$	$\neg (A \vee \neg A)$	| W; 1
	5	Also$_1$	$\neg A$	| NE; 2-4
	6	Also$_1$	$A \vee \neg A$	| AE; 5
	7	Also	$\neg \neg (A \vee \neg A)$	| NE; 1-6
→	8	Also	$A \vee \neg A$	| NB; 7
	9	Sei$_9$	A	
	10	Sei$_{9,10}$	B	
	11	Also$_{9,10}$	A	| W; 9
	12	Also$_9$	$B \rightarrow A$	| SE; 10-11
	13	Also$_9$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 12
→	14	Also	$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 9-13
	15	Sei$_{15}$	$\neg A$	
	16	Sei$_{15,16}$	A	
	17	Wäre$_{15,16,17}$	$\neg B$	
	18	Also$_{15,16,17}$	A	| W; 16
	19	Also$_{15,16,17}$	$\neg A$	| W; 15
	20	Also$_{15,16}$	$\neg \neg B$	| NE; 17-19
	21	Also$_{15,16}$	B	| NB; 20
	22	Also$_{15}$	$A \rightarrow B$	| SE; 16-21
	23	Also$_{15}$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 22
→	24	Also	$\neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 15-23
	25	Also	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AB; 8,14,24

Die Ableitung hat zwei Teile: Im ersten Teil wird mit der Ableitung des Tertium-non-datur aus der leeren Klasse die Basis für eine Fallunterscheidung geschaffen (Zeile 1-8). Die

Fallbetrachtungen mit anschließender SE erfolgen in den Zeilen 9-14 resp. 15-24. Abschließend wird durch AB das Resümee gezogen.

Nun ist für zahlreiche Ableitungen und Beweise auf Basis des Tertium-non-datur zu arbeiten. Es stellt aber keinen kognitiven Gewinn dar, dieses Theorem(schema) immer wieder zu beweisen. Zudem ist die ständig zu wiederholende Schreib- bzw. die Kopierarbeit lästig und bindet unnötig Energien. Abhilfe wäre hier dadurch zu schaffen, dass man die Einspeisung schon bewiesener Aussagen(schemata) erlaubt.

Betrachtet man die Untersuchung des ersten Falls, so legt sich eine Abkürzung nahe, die den Umstand ausnutzt, dass auch das Verum-ex-quolibet, das Aussagenschema $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, bereits bewiesen worden ist. Im zweiten Fall könnte man ganz analog auf das Schema $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ rekurrieren. Es ergäbe sich dann folgende Ableitung:

[23]°→	1	[8]	Da	$A \lor \neg A$	
	2	[9]	Sei$_2$	A	
	3		Da$_2$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	
	4	[12]	Also$_2$	$B \rightarrow A$	| SB; 2,3
	5	[13]	Also$_2$	$(A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$	| AE; 4
	6	[14]	Also	$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A))$	| SE; 2-5
	7	[15]	Sei$_6$	$\neg A$	
	8		Da$_6$	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	
	9	[22]	Also$_6$	$A \rightarrow B$	| SB; 7,8
	10	[23]	Also$_6$	$(A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$	| AE; 9
	11	[24]	Also	$\neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A))$	| SE; 7-10
	12	[25]	Also	$(A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$	| AB; 1,6,11

Hinter der Zeilenziffer steht in viereckigen Klammern die Ziffer der Originalableitung. Die Einsparung beträgt mehr als die Hälfte. Die so abgekürzte Ableitung verlässt den durch die Grundregeln gesteckten Rahmen ›im Prinzip‹ nicht: Statt in Zeile 1 die Zeile [8] anzuziehen, könnte man ja die Zeilen 1 bis 8 der Originalableitung notieren; Analoges gilt für die Zeilen 3 und 8. Die folgende Regel macht die in [23]° ausgeführten Anziehungshandlungen ›offiziell‹, die durch 'Da__' signalisiert werden.

[24] Man darf jede bereits bewiesene logisch-wahre und parameterfreie Aussage anziehen.

Das Anziehen macht ebenso wie das Annehmen und das Folgern Aussagen als Prämissen verfügbar, allerdings bleiben die angezogenen Aussagen immer verfügbar. Korrekt angezogene Aussagen sind ja bereits in einem vorherigen Beweis bewiesen worden und nicht in Abhängigkeit von Annahmen im vorliegenden Beweis resp. der vorliegenden Ableitung gewonnen worden: Die anziehbaren Aussagen bilden das bereits gewonnene Guthaben (↑4.1). Die Anziehungsregel [24] ist dabei jeweils auf eine Abfolge von Beweisen logischer Wahrheiten zu beziehen: Wenn in einem so oder auch anders angelegten Aufbau des Beweises logischer Wahrheiten eine Aussage Δ bereits bewiesen worden ist, dann darf man sie in der Fortführung dieses Aufbaus anziehen, sonst nicht. Wäre z.B. das Tertium-non-datur hier noch nicht bewiesen worden, hätte man es in [23]° auch nicht anziehen dürfen. – Die Anziehungsregel wird später (↑9.) erweitert.

Ü14 Gehen Sie zurück in Teil 4. Untersuchen Sie die Beweise in Ü8a), c), [50]°°, Ü11g), i) auf Abkürzungsmöglichkeiten durch Anziehung logisch-wahrer Aussagen gemäß [24]!

Zurück zum Beispiel: Unter [23] wird bei der Betrachtung des ersten Falls in den Zeilen 9 bis 12 aus A die Subjunktion $B \to A$ gewonnen; dabei bleiben die Abhängigkeiten, genauer: die Abhängigkeit von $\{A\}$, bestehen. Man könnte diesen Weg abkürzen, indem man den direkten Übergang von A zu $B \to A$ bei Bestehenbleiben der Verfügbarkeiten und damit der Abhängigkeiten erlaubt. Analog könnte man die zweite Fallbetrachtung abkürzen, indem man den direkten Übergang von $\neg A$ zu $A \to B$ erlaubt. Eine einschlägige Regel könnte so lauten:

[26] Wenn man eine Aussage A resp. $\neg A$ gewonnen hat und B eine Aussage ist, dann darf man $B \to A$ resp. $A \to B$ folgern.

Wenn man eine Aussage nach [26] folgert, dann ist diese Aussage – wie alle gefolgerten Aussagen – nach der Folgerung verfügbar. Alle vorhergehenden Verfügbarkeitsklauseln bleiben in Kraft. Man beachte, dass bei einer Folgerung, die gemäß [26] korrekt ist, dann und nur dann Annahmen getilgt werden, wenn diese Folgerung gleichzeitig auch nach SE oder PB korrekt ist. Der Leser überlege sich, warum eine solche Folgerung nicht gleichzeitig nach NE korrekt sein kann.

Mit diesen beiden Regeln versehen, lässt sich [23]° um zwei weitere Zeilen zu [23]* kürzen; die in eckigen Klammern angesiedelten Zeilennummern stammen weiter aus [23]:

[23]*→ 1 [8] Da $A \vee \neg A$

┌ 2 [9] Sei$_2$ A

3	[12]	Also$_2$	$B \rightarrow A$	| ZR; 2
4	[13]	Also$_2$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 3
5	[14]	Also	$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 2-4
6	[15]	Sei$_6$	$\neg A$	
7	[22]	Also$_6$	$A \rightarrow B$	| ZR; 6
8	[23]	Also$_6$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 7
9	[24]	Also	$\neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 6-8
10	[25]	Also	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AB; 1,5,9

In den Zeilen 3 bzw. 7 wird die neue Regel, die zulässige Regel (=ZR), benutzt. Am rechten Zeilenrand ist die jeweilige Anwendungszeile notiert. – Ein zweites Beispiel: In Beweisen ergibt sich häufig die Situation, dass man eine Adjunktion $A \vee B$ sowie eine Negation $\neg B$ eines Adjunktionsglieds gewonnen hat. Auf Basis dieser Diskurslage möchte man zu A übergehen; das kann wie folgt geschehen, wobei der Indexkommentar nur für die Zeilen n+2 bis n+8 angeführt ist:

[27]	...	...	...	
	n	Ξ	$A \vee B$	
	n+1	Ξ'	$\neg B$	
	n+2	Sei$_{n+2}$	A	
	n+3	Also	$A \rightarrow A$	| SE; n+2
	n+3	Sei$_{n+3}$	B	
	n+4	Wäre$_{n+3,n+4}$	$\neg A$	
	n+5	Also$_{n+3,n+4}$	B	| W; n+3
	n+6	Also$_{n+3,n+4}$	$\neg B$	| W; n+1
	n+7	Also$_{n+3}$	$\neg \neg A$	| NE; (n+4)-(n+6)
	n+8	Also$_{n+3}$	A	| NB; n+7
	n+9	Also	$B \rightarrow A$	| SE; (n+3)-(n+8)
	n+10	Also	A	| AB; n,n+3,n+9
	...	...	...	

Der Folgerungsweg ist nicht durch Eigenarten von A oder B bestimmt, sondern allein durch die Regeln für die Junktoren gebahnt. Man möchte ihn nicht in jeder derartigen Situation neuerlich vollziehen, sondern sogleich von der Adjunktion und der Negation eines Adjunkts zu dem anderen Adjunkt übergehen; als einschlägige Regel bietet sich an:

[28] Wenn man die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B und die Negation von A resp. die Negation von B gewonnen hat, dann darf man die Aussage B resp. A folgern.

Wenn man eine Aussage nach [28] folgert, dann ist diese Aussage nach der Folgerung verfügbar. Auch hier bleiben alle vorhergehenden Verfügbarkeitsklauseln in Kraft. Jede Aussage, die mit Hilfe von [28] aus den beiden Prämissen erreichbar ist, ist allein mit den in Kap. 4 etablierten Regeln erreichbar. Betitelt man diese in Abhebung von den zulässigen Regeln als Grund- bzw. Basisregeln, dann kann man mit der Weg-Ziel-Metapher formulieren: Mit den zulässigen Regeln lassen sich keine Schlussziele erreichen, die nicht auch mit den Grundregeln erreichbar wären; allerdings werden die Ziele auf kürzerem Wege erreicht. Neu ist also nicht das Schlussziel, sondern allein der Schlussweg. – Ein weiteres Beispiel aus der Quantorenlogik, bei dem der Indexkommentar auf die Zeilen n+1 bis n+7 beschränkt ist:

[29]	...	...	...	
	n	Ξ	$\bigwedge \omega\, \Delta$	
	n+1	Wäre$_{n+1}$	$\bigvee \omega\, \neg\, \Delta$	
	n+2	Sei$_{n+1,n+2}$	$\neg\, [\beta, \omega, \Delta]$	
	n+3	Wäre$_{n+1,n+2,n+3}$	$\bigvee \omega\, \neg\, \Delta$	
	n+4	Also$_{n+1,n+2,n+3}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	| UB; n
	n+5	Also$_{n+1,n+2,n+3}$	$\neg\, [\beta, \omega, \Delta]$	| W; n+2
	n+6	Also$_{n+1,n+2}$	$\neg \bigvee \omega\, \neg\, \Delta$	| NE; (n+3)-(n+5)
	n+7	Also$_{n+1}$	$\neg \bigvee \omega\, \neg\, \Delta$	| PB; n+1,(n+2)-(n+6)
	n+8	Also	$\neg \bigvee \omega\, \neg\, \Delta$	| NE; (n+1)-(n+7)
	...	…	…	

Man hat in einem Beweis die Universalquantifikation einer Formel Δ gewonnen und will übergehen zur Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ. Diese rein logischen Schritte will man nicht in jedem Beweis neu vollziehen. Erwünscht ist vielmehr der direkte

Übergang von der Aussage der Zeile n zur Aussage der Zeile n+8; dabei hilft folgende zulässige Regel:

[30] Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ω gewonnen hat, dann darf man die Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ bezüglich ω folgern.

Auch hier bleiben alle vorhergehenden Verfügbarkeitsklauseln in Kraft. Die bisherigen Beispiele für zulässige Regeln legen folgende allgemeine Form nahe:

[31] Wenn man Δ_1 und ... und Δ_n gewonnen hat und $(\Delta_1 \wedge \ldots \wedge \Delta_n) \rightarrow \Gamma$ eine bereits bewiesene logisch-wahre Aussage ist, dann darf man Γ folgern.

Die Zulässigkeit der Regel besteht gerade darin, dass man eben auch unter ausschließlicher Benutzung der Grundregeln von Δ_1 ,..., Δ_n zu Γ gelangen kann. Dass $(\Delta_1 \wedge \ldots \wedge \Delta_n) \rightarrow \Gamma$ logisch wahr ist, ist äquivalent dazu, dass $\{\Delta_1 ,\ldots, \Delta_n\} \vdash \Gamma$ gilt, d.h. dazu, dass es eine mit Grundregeln geführte Ableitung von Γ aus (einer Teilklasse von) $\{\Delta_1,\ldots, \Delta_n\}$ gibt. Folgert man eine Aussage nach einer zulässigen Regel, dann macht man die gefolgerte Aussage damit verfügbar; aller vorhergehenden Verfügbarkeitsklauseln bleiben in Kraft. Man beachte, dass bei einer Folgerung, die gemäß einer zulässigen Regel korrekt ist, dann und nur dann Annahmen getilgt werden, wenn diese Folgerung gleichzeitig auch nach SE oder PB oder NE korrekt ist. Man betrachte dazu die folgende Sequenz:

[32]	0	Es-gilt	$\bigwedge\omega \neg \Delta \rightarrow \neg \bigvee\omega \Delta$	
	1	Sei$_{1}$	$\bigwedge\omega \neg \Delta$	
	2	Wäre$_{1,2}$	$\bigvee\omega \Delta$	
	3	Sei$_{1,2,3}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	4	Also$_{1,2,3}$	$\neg [\beta, \omega, \Delta]$	| UB; 1
	5	Also$_{1,2,3}$	$\neg \bigvee\omega \Delta$	| ZR, 3, 4
	6	Also$_{1,2}$	$\neg \bigvee\omega \Delta$	| PB; 2, 3-5
	7	Also$_{1}$	$\neg \bigvee\omega \Delta$	| NE; 2-6
	8	Also	$\bigwedge\omega \neg \Delta \rightarrow \neg \bigvee\omega \Delta$	| SE; 1-7

Die Folgerung in Zeile 5 ist nach [31] korrekt, da (jede Instanz von) $\Delta \wedge \neg \Delta \rightarrow \Gamma$ bereits durch einen Beweis als logisch-wahr erwiesen wurde und man in den Zeilen 3 und 4 eine

Aussage und ihre Negation gewonnen hat. Allerdings wird hier, obwohl eine Negation gefolgert wird und eine Aussage und ihrer Negation als Prämissen für eben diese Folgerung dienen, keine NE vollzogen und man befreit sich (da SE oder PB ebenso nicht vollzogen werden) von keiner Annahme.

Ü15 Untersuchen Sie die in Ü14 genannten Beweise mit Grundregeln auf Abkürzungsmöglichkeiten durch zulässige Regeln!

Eine weitere, hier nicht vorgestellte Abkürzungsstrategie besteht in der Substitution: Ist eine Aussage Γ logisch äquivalent zu B und hat man eine Aussage Δ gewonnen, die Γ zur Teilformel hat, dann darf man auf $[\mathrm{B}, \Gamma, \Delta]$ schließen (↑10.).

Der guten Ordnung halber ist abschließend das Ableitungskonzept so zu erweitern, dass auch die neu geschaffenen abkürzenden Handlungsmöglichkeiten Berücksichtigung finden: $\mathcal{A}$ ist ein zulässige Ableitung von Γ aus *X* genau dann, wenn $\mathcal{A}$ eine Sequenz ist, so dass für jedes Glied $\mathcal{A}_i$ von $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}_i$ ist ein Annahmesatz gemäß der Annahmeregel AR oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Anziehungssatz gemäß der Anziehungsregel [24] oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Folgerungssatz gemäß einer Grund- oder einer zulässigen Regel und Γ ist die im letzen Glied von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von der Aussagenklasse *X* gewonnene Aussage. Jede zulässige Ableitung lässt sich in eine Ableitung überführen.

5.3 Der Einzigkeitsquantor

Die Exkursion in Begriffe und Verfahren der Metalogik findet ihren Abschluss durch eine ausführliche Behandlung der Einzigkeit. Dadurch wird nicht nur eine zentrale begriffliche Voraussetzung für die Behandlung der Nomination (↑7.) bereitgestellt, sondern auch, damit zusammenhängend, ein Instrument zur Erfassung und Auflösung von Einzigkeitsillusionen aller Art.

Die Vorstellung von Einzigkeitsvarianten bildet den Abschluss des Unterkapitels (5.3.4). Sie wird vorbereitet durch die Behandlung der Mindest- und Höchstzahlquantoren (5.3.3). Diese Art von Quantoren findet zuvor im Spektrum quantitativer Operatoren Situierung (5.3.2). Die Erörterung quantitativer Operatoren macht es nötig, wiederholt Definitionsschemata zu benutzen. Der Umgang mit dieser Sorte von Etablierungsverfahren wird vorbereitend an den logischen Junktoren eingeübt; damit wird zugleich die Darstellung dieser Redeteile ergänzt (↑5.3.1).

5.3.1 Zur Definition von Junktoren

Die früher vorgestellten und seitdem benutzten Junktoren besitzen (jedenfalls näherungsweise) gebrauchssprachliche Äquivalente. Die Gebrauchssprache enthält aber weitere Junktoren bzw. Ausdrücke, die sich als Junktoren darstellen lassen. Einige von diesen Redeteilen lassen sich wiederum mit Hilfe der bekannten Operatoren definieren. So kann der zweistellige Junktor ’weder__noch__’ mit Hilfe von Negator und Konjunktor bestimmt werden und der ebenfalls zweistellige Junktor ’entweder__oder__’ kann mit Adjunktor, Konjunktor und Negator bestimmt werden:

[33] Man darf jede parameterfreie Aussage von der Art:

a) (weder A noch B) $\leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$ resp.

$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n$ ((weder Δ_1 noch Δ_2) $\leftrightarrow (\neg\Delta_1 \wedge \neg \Delta_2)$)

b) (entweder A oder B) $\leftrightarrow (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \neg (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$ resp.

$\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n$ ((entweder Δ_1 oder Δ_2) $\leftrightarrow ((\Delta_1 \vee \Delta_2) \wedge \neg (\Delta_1 \wedge \Delta_2))$)

als Definition setzen.

Die Sprachrelativierung ist wiederum vernachlässigt. Der zu definierende Redeteil, das <u>Definiendum</u>, bildet hier jeweils den Hauptoperator des linken Bisubjunkts, der sogenannten <u>Definiendumformel</u>, während das rechte Bisubjunkt das sogenannte <u>Definiens</u>, also den definierenden Ausdruck bildet. Das Definiens wird auch als <u>Definiensformel</u> angesprochen. Da man derartige Definitionsschemata bzw. ihre Instanzen selbstredend in Diskursen benutzen will, muss ihre Benutzung entsprechend geregelt werden. Dies geschieht, indem man die Anziehung von Definitionen erlaubt:

[34] Man darf parameterfreie Definitionen in Argumentationen anziehen.

Wie für alle Anziehungen gilt für angezogene Definitionen, dass sie nach der Anziehung verfügbar sind und verfügbar bleiben. Wenn man etwa zeigen will, dass die Zweierklasse {weder A noch B, entweder A oder B} inkonsistent ist, kann man die Argumentation bzw. das Argumentationsschema mit folgenden Zügen eröffnen:

[35] Sei$_1$ weder A noch B

Da$_1$ (weder A noch B) $\leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$

Also$_1$ $\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}$

$\text{Sei}_{1,2}$ entweder A oder B

$\text{Da}_{1,2}$ (entweder A oder $B) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$

$\text{Also}_{1,2}$ $(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$

Ü16 Setzen Sie die Argumentation bis zum Nachweis der Inkonsistenz fort! Benutzen Sie nach Belieben zulässige Regeln und die Anziehungsregel [24]!

Die Zeichenverbindung ’entweder__oder__’ wird auch als ausschließendes ’oder’ angesprochen; demgegenüber ist der Adjunktor dann das einschließende ’oder’. Die Gebrauchssprache verwendet häufig schlicht ’oder’; es bleibt dann dem Adressaten überlassen, das autorseitig angezielte Verständnis aus der Äußerungsumgebung zu ermitteln.

Die vorgelegten Definitionsschemata besitzen die Form der (u.U. auch mehrfach universalquantifizierten) Bisubjunktion. Bei der Erlernung des Umgangs mit den Junktoren konnte eine Reihe von (nach De Morgan benannten) Theoremen bewiesen werden, deren eines Bisubjunkt jeweils eine Konjunktion, eine Adjunktion oder eine Subjunktion war, während das andere Bisubjunkt von Negator und den jeweils anderen Junktoren gebildet wird:

[36] a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$

c) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$

d) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (A \rightarrow \neg B)$

e) $(A \vee B) \leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$

f) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

Auch diese Schemata (und die entsprechenden Universalquantifikationen) hätte man als Definitionen wählen können: Wenn Annahme- und Wiederholungsregel etabliert wurden und der Negator und der Subjunktor resp. der Konjunktor sowie der Bisubjunktor schon über die bekannten Einführungs- und Beseitigungsregeln etabliert wurden, sowie , dann lässt sich der Adjunktor mit ihrer Hilfe nach dem Muster von [33] definieren; analog für den Konjunktor. Im Falle des Subjunktors sind zusätzlich die Einführungsregel für den Bisubjunktor und die Beseitigungsregel für den Adjunktor zu ändern, so dass – wenn etwa b) als

Definitionsschema gewählt wird – nunmehr der Schluss von $\neg(A\wedge\neg B)$ und $\neg(B\wedge\neg A)$ auf $A\leftrightarrow B$ resp. der Schluss von $A\vee B$, $\neg(A\wedge\neg\Gamma)$ und $\neg(B\wedge\neg\Gamma)$ auf Γ erlaubt wird.

Denkt man über die damit gegebenen Definitionsmöglichkeiten unter der Frage der Minimierung der Ausdrucksbasis nach, dann resultiert: Sind Annahme- und Wiederholungsregel gesetzt und der Bisubjunktor (geeignet) eingeführt, dann lassen sich mit Hilfe von Negator und Adjunktor resp. Negator und Konjunktor resp. Negator und Subjunktor die übrigen Junktoren definieren. Sei etwa Negator mit Subjunktor verfügbar; dann lässt sich mit f) der Adjunktor und mit d) oder c) der Konjunktor definieren; analog für die beiden übrigen Möglichkeiten.

Basiert man die Junktorenlogik auf den Negator und einen der beiden zweistelligen Junktoren, so sind die übrigen Junktoren in dem Sinne überflüssig, als sie stets durch die basierenden Redeteile ersetzbar sind und sich nach Hinzufügung der Definitionsschemata Aussagen, die die definierten Junktoren nicht enthalten, nur dann aus Klassen ebensolcher Aussagen ableiten lassen, wenn dies auch ohne Anwendung der Definitionsschemata möglich ist. Insofern fügen sie dem System nichts ›Neues‹ im Sinne einer echten Verstärkung hinzu. Für den Zweck der metasprachlichen Analyse ist es überdies einfacher, sich mit weniger Grundzeichen befassen zu müssen.

Für den Gebrauchszweck liegen die Dinge anders: Hier führt die Beschränkung schon bei einfachen Aussagen zu unerwünschten Schwerfälligkeiten und zu Unübersichtlichkeit. Einfacher für den Gebrauch ist es also, mit einer größeren als der kleinstmöglichen Menge an Operatoren zu arbeiten. – Offenkundig ist hier und auch an späteren Stellen (↑) zwischen Einfachheit für die metasprachliche Analyse, kurz: Überschaubarkeit, und Einfachheit für den objektsprachlichen Gebrauch, kurz: Handlichkeit, zu unterscheiden.

Der Bisubjunktor spielt bei den vorgestellten Definitionsschemata eine tragende Rolle: Er verbindet Definiendum- und Definiensformel. Andererseits gilt auch: $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$; und es erhebt sich die Frage nach der Definierbarkeit des Bisubjunktors durch Konjunktor und Subjunktor. Das dabei auftretende Sonderproblem besteht darin, dass eine Etablierung nach dem Vorbild von [31] ausgeschlossen ist: Das zu definierende Zeichen steht eben noch nicht bereit, um Definiendum- und Definiensformel zu verbinden.

Ein Ausweg besteht in der Formulierung von Folgerungsregeln im Rahmen der Einführungs- und Beseitigungssystematik: Hat man die Subjunktion aus A und B sowie die konverse Subjunktion gewonnen, dann darf man bekanntlich auf die Bisubjunktion aus A und B schließen. Zusätzlich lässt sich auch die Beseitigungsregel unter Rückgriff auf den

Subjunktor formulieren: Aus einer Bisubjunktion aus A und B darf man auf die Subjunktion aus A und B sowie auf die konverse Subjunktion aus A und B schließen.

Ein weiterer Ausweg ist die Formulierung von Folgerungsregeln unter Rückgriff auf die Substitution: Wenn man eine Aussage Δ mit $A\leftrightarrow B$ als Teilaussage von Δ gewonnen hat, dann darf man das Ergebnis der Substitution von $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$ für $A\leftrightarrow B$ in Δ folgern, und umgekehrt. – Beide Wege rekurrieren nicht auf den Bisubjunktor als Definitionsmittel. Sie haben jedoch insofern definitorischen Effekt, als die volle Eliminierbarkeit von Bisubjunktionen sowie die Konservativität der Erweiterung gewährleistet ist.

Bei den unter [33] gegebenen Definitionen handelt es sich, genauer betrachtet, um <u>metasprachliche Definitionsschemata</u>; das suggeriert schon der Gebrauch der griechischen Buchstaben. Ein (erstes) Beispiel für eine objektsprachliche Definition wird mit der Einführung des Diversitätsprädikators (↑[38]) gegeben.

5.3.2 Die formelquantifizierende Rede im Überblick

Bei den quantifizierenden Redeteilen handelt es sich um <u>Formelquant(ifikat)oren</u> oder um <u>Termquant(ifikat)oren</u>; in diesem Abschnitt stehen nur die erstgenannten zu einer Grobsortierung an. Zunächst ist zwischen <u>materialen</u> und <u>formalen</u> Quant(ifikat)oren zu unterscheiden. Bei der Etablierung der Mitglieder der ersten Gruppe spielen nichtlogische Redeteile eine tragende Rolle; dies trifft für die Angehörigen der zweiten Gruppe nicht zu.

In Kontroversen, die Existenzfragen betreffen, kommen materiale Partikularquant(ifikat)oren zum Einsatz: So lässt sich etwa der Quantor für raumzeitliche Existenz – z.B. das Zeichen ’es-existiert-raumzeitlich-ein-ξ Δ’ durch ’$\bigvee\xi$(Raum-zeitliches-Gebilde(ξ)$\wedge\Delta$)’ definieren. In analoger Weise kann ein Quantor für fiktionale Existenz eingeführt werden. Wählt man zum Ausdruck fiktionaler Universalität das Zeichen ’für-alle-Ficta ξ’, dann ist dieses etwa durch ’$\bigwedge\xi$(Fiktionales-Gebilde(ξ)$\rightarrow\Delta$)’ definierbar. Die (philosophiehistorisch berühmte) Wendung ’es kann ein ξ gedacht werden, das die und die Eigenschaft Δ hat’ könnte etwa durch ’$\bigvee\xi$ denkbar Δ’ definiert werden.

In den exemplarisch angesprochenen Fällen ist es für das Gelingen ausschlaggebend, dass die materialen Redeteile, als ’Raum-zeitliches-Gebilde(..)’, ’Fiktionales-Gebilde(..)’, ’denkbar__’ ihrerseits einwandfrei mit Bedeutung versorgt worden sind. – Auf dem angedeuteten Weg lassen sich auch quantifizierende gebrauchssprachliche Wendungen wie ’manchmal’, ’immer’, ’irgendwo’, ’überall’, ’irgendjemand’, ’jedermann’ erfassen.

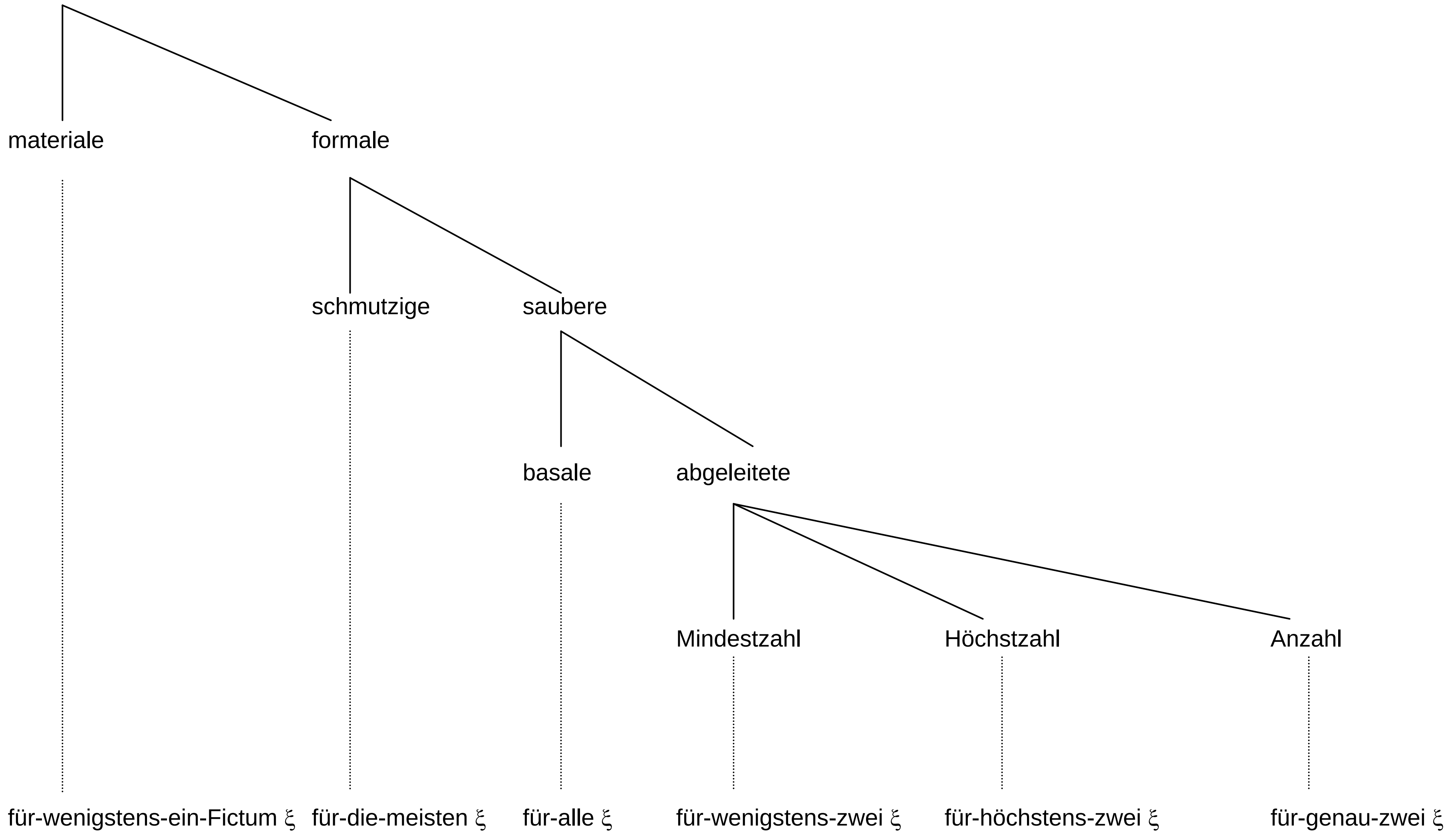
Ü17 Definieren Sie zeit-, raum- und personenbezogene Quantoren, die die soeben erwähnten gebrauchssprachlichen Redeteile erfassen!

Die formalen Quant(ifikat)oren zerfallen (nach einer etwas unglücklichen Terminologie) in die schmutzigen und die sauberen Redeteile. Zu den ersteren zählen Ausdrücke wie 'Die-meisten ξ', 'Nur-wenige ξ', 'Fast-alle ξ', 'Mehrere ξ'. Diese Redeteile finden insbesondere in den Sozialwissenschaften Verwendung: So soll z.B. eine Regel in einer Population in Kraft sein, wenn fast alle/die meisten/viele Mitglieder dieser Population regelgemäß agieren. – Die Festlegung resp. Rekonstruktion der Bedeutung dieser Operatoren ist mit besonderen Schwierigkeiten verbunden.

Die sauberen Quant(ifikat)oren zerfallen in die basalen und die abgeleiteten. Der Partikular- und der Universalquant(ifikat)or sind die beiden basalen, d.h. die (in dem hier zugrundeliegenden Aufbau) nicht definitorisch etablierten. Auf die Möglichkeit der Definition des Universalquantors durch Negator und Partikularquantor bzw. des Partikularquantors durch Negator und Universalquantor wurde deshalb nicht zurückgegriffen, weil diese Interdefinierbarkeit weder in einer minimalen noch in einer intuitionistischen Logik gelten (↑ZUSATZ).

Die abgeleiteten, d.h. die definierten, Quant(ifikat)oren lassen sich gliedern in die Mindestzahlquantoren wie etwa 'für-wenigstens-zwei ξ', die Höchstzahlquantoren wie z.B. 'für-höchstens-zwei ξ' und die Anzahlquantoren wie z.B. 'für-genau-zwei ξ'. Bevor diese Redeteile näher studiert werden, soll die provisorische Sortierung der einstelligen Formelquantifikatoren durch eine Übersicht repräsentiert werden:

[37] Einstellige Formelquant(ifikat)oren



5.3.3 Mindestzahlquantoren und Höchstzahlquantoren

Der Partikularquant(ifikat)or ist der einfachste Mindestzahlquant(ifikat)or. Seine Bedeutung ist über PE und PB festgelegt (↑4.3.2). Diese Subsumtion zeigt, anbei bemerkt, dass die vorgenommene Sortierung an dieser Stelle nicht disjunkt ist. – Um zum Mindestens-zwei-Quantor zu gelangen, kann man den Diversitäts- bzw. den Verschiedenheitsprädikator bereitstellen, indem man die Aussage:

[38] $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y)$

definitorisch setzt: Verschieden ist ein Gebilde von einem Gebilde, wenn sie nicht identisch sind. Bei [38] handelt es sich um eine objektsprachliche Definition – und nicht wie bei [33] um ein metasprachliches Definitionsschema. Da der Diversitätsprädikator unter ausschließlichem Rückgriff auf logische Redeteile definiert wird, ist er selbst als logischer Operator anzusehen.

Kein Gebilde ist von sich selbst verschieden: Der Diversitätsprädikator ist also irreflexiv. Besteht zwischen Gebilden die Verschiedenheit, so gilt sie auch in der umgekehrten Richtung: Der Diversitätsprädikator ist also symmetrisch. Sind ferner Gebilde verschieden, dann ist ein beliebiger Gegenstand von wenigstens einem der beiden Gebilde verschieden.

[39] a) $\bigwedge x\ \neg\, x \neq x$

b) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \rightarrow y \neq x)$

c) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \rightarrow \bigwedge z\ (x \neq z \vee y \neq z))$

Das erste Theorem lässt sich so beweisen:

[39]° 1 Wäre$_1$ $x \neq x$

2 Da$_1$ $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y)$

3 Also$_1$ $\bigwedge y\ (x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y)$

4 Also$_1$ $x \neq x \leftrightarrow \neg\, x = x$

5 Also$_1$ $\neg\, x = x$

6 Also$_1$ $x = x$

7 Also $\neg\, x \neq x$

8 Also $\bigwedge x\ \neg\, x \neq x$

Der Beweis erfolgt indirekt. In Zeile 2 wird die Definition angezogen und passend spezialisiert. Die Annahme führt mit der Definition auf einen Widerspruch zur Totalreflexivität der Identität.

Ü18 Beweisen Sie [39] b) und c)!

Anders als die Identität ist die Diversität nicht transitiv: Es ist $3\neq 4$ und $4\neq 3$, ohne dass $3\neq 3$ wäre. In gleicher Weise lässt sich einsehen, dass auch die Komparativitätseigenschaften und die Zirkularität nicht gelten. – Der Mindestens-zwei-Quantor lässt sich nun durch folgende Partikularquantifikation ausdrücken:

[40] $\bigvee\xi\bigvee\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \xi \neq \omega)$

Dabei ist Δ eine Formel, in der höchstens ξ frei ist und die ω nicht zum Teilterm hat. Es gibt also genau dann wenigstens zwei Δ-Objekte, wenn es ein Δ-Objekt ξ und ein Δ-Objekt ω gibt, dass von ξ verschieden ist.

Ü19 Verdeutlichen Sie sich die Notwendigkeit der Nicht-Teiltermschaft von ω in Δ, indem Sie z.B.’$\bigvee y(\mathrm{NaZ}(y\wedge x>y)$’ für die gesamte Formel Δ und ’x’ für ξ wählen.

Mit [40] ist lediglich das Definiens des Mindestens-zwei-Quantor notiert; wegen fehlender Benutzungshäufigkeit wird im vorliegenden Kontext keine eigene Zeichenverbindung etabliert. – Der Mindestens-drei-Quantor könnte durch:

[41] $\bigvee\xi\bigvee\omega\bigvee\zeta\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \wedge \xi \neq \omega \wedge \omega \neq \zeta \wedge \zeta \neq \xi)$

charakterisiert werden. Dabei ist Δ wie üblich eine Formel, in der allenfalls ξ frei ist; und ferner hat Δ weder ω noch ζ zum Teilterm. Es genügt nicht, nur die Verschiedenheit von ξ und ω und von ω und ζ zu fordern, weil, wie oben bemerkt, die Diversität nicht transitiv ist.

Damit ist prinzipiell der Weg vorgezeichnet, sich die gewünschten Mindestzahlquantoren bereitzustellen. – Betrachtet man das Verhältnis von der Mindestens-ein- resp. Partikularaussage zur Mindestens-zwei-Aussage, dann gilt: Es ist $\bigvee\xi\Delta$ Konsequenz aus $\{\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$; und es ist $\{\bigvee\xi\Delta\}$ verträglich mit $\{\neg\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$ und mit $\{\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$; also ist $\bigvee\omega\bigvee\xi(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)$ nicht entscheidbar durch $\{\bigvee\xi\Delta\}$. Mit Blick auf die Höchstzahlquantoren ist zu beachten, dass $\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)$ mit $\neg\bigwedge\xi\bigwedge\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\rightarrow\omega=\xi)$ äquivalent ist.

Ü20 Begründen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\{\bigvee\xi\bigvee\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)\} \vdash \bigvee\xi\;\Delta$

b) $\bigvee\xi\bigvee\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$ ist nicht entscheidbar durch $\{\bigvee\xi\;\Delta\}$

c) $\bigvee\xi\bigvee\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi) \dashv\vdash \neg \bigwedge\omega\bigwedge\xi\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

Der einfachste Höchstzahlquant(ifikat)or ist die Wendung ’für-höchstens-ein..’ bzw. ’für-höchstens-ein ξ’, gelegentlich auch durch ’es-gibt-höchstens-ein..’ bzw. ’es-gibt-höchstens-ein ξ’ ’für-nicht-mehr-als-ein ξ’ ausgedrückt. Den Sachverhalt, dass es höchstens ein ξ mit der Eigenschaft Δ gibt, kann man so beschreiben: Es ist nicht der Fall, dass ein ξ ein Δ-Ding ist und ein ω ein Δ-Ding ist und ξ verschieden von ω ist. Äquivalent: Falls ξ, ω Δ-Dinge sind, dann sind sie identisch.

[42] $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$

Soll diese Formel als Definiens für den Höchstens-eins-Quantor taugen, dann darf in Δ mit höchstens ξ frei wiederum ω nicht Teilterm sein. – Wegen fehlender Benutzungshäufigkeit wird wiederum kein eigenes Zeichen etabliert. – Den Sachverhalt, dass es höchstens zwei Δ-Dinge gibt, kann man so ausdrücken: Es ist nicht der Fall, dass es ξ, ω, ζ gibt, die Δ sind und voneinander allesamt verschieden; es ist also nicht der Fall, dass es wenigstens drei Δ-Dinge gibt. Äquivalent: Sind beliebige ξ, ω, ζ Δ-Dinge, dann ist $\xi=\omega$ oder $\xi=\zeta$ oder $\omega=\zeta$:

[43] $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\bigwedge\zeta\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$

Es gelten die Teiltermausschlüsse für ω, ζ in Δ. Damit ist prinzipiell der Weg vorgezeichnet, sich die je gewünschten Höchstzahlquantoren bereitzustellen. – Wenn es höchstens ein Δ-Ding gibt, dann gibt es auch höchstens 2 (und 3 und ... n) Δ-Dinge. Gibt es hingegen nicht mehr als 2-Dinge, dann wird dadurch die Aussage nicht entschieden, dass es nicht mehr als ein Δ-Ding gibt; und schließlich ist die Aussage, dass es höchstens ein Δ-Ding gibt unverträglich mit der Aussage, dass es wenigstens zwei Δ-Dinge gibt; analog für die höheren Stufen:

Ü21 Begründen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\{\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)\} \vdash \bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow$

$\omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$

b) $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$ ist nicht entscheidbar durch

$\{\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \xi = \zeta \vee \omega = \zeta)\}$

c) $\{\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi), \bigvee\omega\bigvee\xi\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)\}$ ist inkonsistent.

5.3.4 Varianten der Einzigkeit

Die Anzahlquantoren ergeben sich aus dem konjunktiven Zusammenspiel von Mindest- und Höchstzahlquantoren. Es gibt genau ein Δ-Ding ξ genau dann, wenn es wenigstens und höchstens ein Δ-Ding gibt. Es gibt genau zwei Δ-Dinge genau dann, wenn es wenigstens und höchstens zwei Δ-Dinge gibt usf. Für den in der Folge detailliert erörterten Genau-eins- bzw. Eins- bzw. Einzigkeitsquantor sei festgelegt:

[44] Wenn ξ, ω verschiedene Variablen sind und Δ eine parameterfreie Formel ist, in der höchstens ξ frei ist (resp. ξ und die von ξ verschiedenen Variablen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ frei sind) und in der ω nicht Teilterm ist, dann darf man jede Aussage der Form:

$\mathbf{1}\xi\,\Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\,\Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$ resp.

$\bigwedge\zeta_1\ldots\bigwedge\zeta_n(\mathbf{1}\xi\,\Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\,\Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi))$

als Definition setzen.

Das Zeichen ’**1**..’ ist der Einzigkeits- oder auch Eins- oder auch Genau-eins-Quantifikator; es handelt sich um einen einstelligen, variablenbestimmenden und quantorerzeugenden Operator. Die Zeichenverbindung ’$\mathbf{1}\xi$__’ ist der Einzigkeitsquantor oder der Eins- oder auch Genau-eins-Quantor; es handelt sich um einen einstelligen, formelbestimmenden und formelerzeugenden Operator. Ist Δ eine Formel, dann ist das Ergebnis der Anwendung von ’$\mathbf{1}\xi$__’ auf Δ, also die Formel $\mathbf{1}\xi\Delta$, die Einzigkeitsquantifikation bzw. die Eins- bzw. die Genau-eins-Quantifikation von Δ bzgl. ξ.

Mit einer analogen Definition und bei gleichen grammatischen Bestimmungen lassen sich Zwei-, Dreiquantifikator usf. etablieren. Das Definiens für den Genau-zwei-Quantor lautet etwa:

[45] $\bigvee\xi\bigvee\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi) \wedge$

$\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$

In diesem Fall soll auch die Variable ζ nicht Teilterm von Δ sein. Es gibt genau zwei Δ-Dinge ξ dann und nur dann, wenn es nicht weniger und nicht mehr als zwei Δ-Dinge ξ gibt. Während der ›Weg nach oben‹, also der Weg zur Definition der weiteren Anzahlquantoren vorgezeichnet ist, bleibt die Frage nach der Bestimmung des 'Für-null-Quantifikators' noch zu erledigen. 'Für-null..' bzw. einfacher und sprachnäher 'Kein..' ist durch Negator und Partikularquantifikator unter den üblichen Bedingungen zu definieren.

[46] Kein $\xi\ \Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ \Delta$

In der die Nomination bzw. die Referenz betreffende Literatur ist häufig von der Existenz-, der Eindeutigkeits- und der Einzigkeitsbedingung die Rede. Diese Sprechweisen lassen sich wie folgt nachzeichnen: Sei Δ eine höchstens in ξ offene Formel; dann ist die Partikularquantifikation von Δ bzgl. ξ, also $\bigvee\xi\Delta\xi$, die Existenzbedingung für Δ; analog ist die Höchstens-eins-Quantifikation, also $\bigwedge\xi\bigwedge\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\rightarrow\omega=\xi)$, die Eindeutigkeitsbedingung für Δ, schließlich ist die Einsquantifikation von Δ bzgl. ξ, also $\mathbf{1}\xi\Delta$, die Einzigkeitsbedingung für Δ.. Die Existenz- resp. Eindeutigkeits- resp. Einzigkeitsbedingung für Δ ist (in einer Sprache *S*) erfüllt, wenn sie (in *S*) beweisbar ist; im Falle der Widerlegbarkeit ist sie unerfüllbar.

Das folgende Theoremschema – der Hauptsatz zur Einzigkeit – formuliert geläufige Varianten der Einzigkeitsbedingung. Die über das Beweisschema herstellbare Einsicht in ihren Zusammenhang ist bei Erörterungen bzgl. der Referenz (insbesondere von Kennzeichnungen) hilfreich:

[47] Wenn ξ, ω verschiedene Variablen sind und Δ eine Formel, in der höchstens ξ frei ist und von der ω nicht Teilterm ist, dann sind alle Instanzen aus den Formelschemata (a) bis (i) paarweise äquivalent:

(a) $\mathbf{1}\xi\ \Delta$

(b) $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$

(c) $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge \omega \neq \xi \rightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta])$

(d) $\neg \bigwedge\xi \neg\ \Delta \wedge \neg \bigvee\omega\bigvee\xi\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$

(e) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi))$

(f) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ (\omega \neq \xi \rightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta]))$

(g) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \bigvee\omega\ (\omega \neq \xi \wedge [\omega, \xi, \Delta]))$

(h) $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

(i) $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega \neq \xi \leftrightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta])$

Der Nachweis berücksichtigt nur (a), (b), (e) und (h). Er wird in der Form eines Ringbeweises geführt und nutzt insoweit die Zirkeltransitivität der Äquivalenz aus (↑5.1.2).

[48-a]	1	Sei_{1}	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$	
	2	Da_{1}	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
	3	Also_{1}	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	| BB; 1,2

[48-b]	1	Sei_{1}	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
	2	Also_{1}	$\bigvee\xi\ \Delta$	| KB; 1
	3	$\text{Sei}_{1,3}$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	
	4	$\text{Sei}_{1,3,4}$	$[\beta_2, \xi, \Delta]$	
	5	$\text{Also}_{1,3,4}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta]$	| KE; 3,4
	6	$\text{Also}_{1,3,4}$	$\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$	| KB; 1
	7	$\text{Also}_{1,3,4}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$	| 2xUB; 6
	8	$\text{Also}_{1,3,4}$	$\beta_1 = \beta_2$	| SB; 7,5
	9	$\text{Also}_{1,3}$	$[\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$	| SE; 4-8
	10	$\text{Also}_{1,3}$	$\bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \omega)$	| UE; 9
	11	$\text{Also}_{1,3}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \omega)$	| KE; 3,10
	12	$\text{Also}_{1,3}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	| PE; 11
	13	Also_{1}	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	| PB; 2,3-12

[48-c]	1	Sei_{1}	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \omega)$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 2
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \omega)$	| KB; 2
	5	$\text{Sei}_{1,2,3}$	$\beta_1 = \beta$	
	6	$\text{Also}_{1,2,3}$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	| ZR; 3,5
	7	$\text{Also}_{1,2}$	$\beta = \beta_1 \rightarrow [\beta_1, \xi, \Delta]$	| SE; 5-6

8 Also$_{1,2}$ $[\beta_1, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \beta_1$ | UB; 4

9 Also$_{1,2}$ $\beta = \beta_1 \leftrightarrow [\beta_1, \xi, \Delta]$ | BE; 7,8

10 Also$_{1,2}$ $\bigwedge\omega\ (\beta = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$ | UE; 9

11 Also$_{1,2}$ $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$ | PE; 10

12 Also$_{1}$ $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$ | PB; 1,2-11

[48-d] 1 Sei$_{1}$ $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

2 Sei$_{1,2}$ $\bigwedge\omega\ (\beta = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

3 Also$_{1,2}$ $\beta = \beta \leftrightarrow [\beta, \xi, \Delta]$ | UB; 2

4 Also$_{1,2}$ $\beta = \beta$ | IE

5 Also$_{1,2}$ $[\beta, \xi, \Delta]$ | BB; 3,4

6 Also$_{1,2}$ $\bigvee\xi\ \Delta$ | PE; 5

7 Sei$_{1,2,3}$ $[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta]$

8 Also$_{1,2,3}$ $[\beta_1, \xi, \Delta]$ | KB; 7

9 Also$_{1,2,3}$ $[\beta_2, \xi, \Delta]$ | KB; 8

10 Also$_{1,2,3}$ $\beta = \beta_1 \leftrightarrow [\beta_1, \xi, \Delta]$ | UB; 2

11 Also$_{1,2,3}$ $\beta = \beta_1$ | BB; 8,10

12 Also$_{1,2,3}$ $\beta = \beta_2 \leftrightarrow [\beta_2, \xi, \Delta]$ | UB; 2

13 Also$_{1,2,3}$ $\beta = \beta_2$ | BB; 9,12

14 Also$_{1,2,3}$ $\beta_1 = \beta_2$ | IB; 11,13

15 Also$_{1,2}$ $[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$ | SE; 7-14

16 Also$_{1,2}$ $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$ | 2xUE; 15

17 Also$_{1,2}$ $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$ | KE; 6;16

18 Also$_{1}$ $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$ | PB; 1,2-17

19 Da$_{1}$ $\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$

20 Also$_{1}$ $\mathbf{1}\xi\ \Delta$ | BB; 19,18

In den Zeilen [48-a] wird {(a)} ⊢ (b) nachgewiesen. In [48-b] erfolgt der Aufweis von {(b)} ⊢ (e). [48-c] erweist {(e)} ⊢ (h); und mit [48-d] wird {(h)} ⊢ (a) nachgewiesen und der Zirkel damit geschlossen. Insgesamt gilt dann (a) ⊣⊢ (b) ⊣⊢ (e) ⊣⊢ (h) ⊣⊢ (a).

Zu Einzelheiten: In [48-a] wird lediglich die Definition ausgenutzt. – [48-b] zielt auf eine Partikularquantifikation. Die dafür erforderliche Diskurslage wird in Zeile 11 erreicht. Das linke Glied der Konjunktion steht schon in Zeile 3 bereit und ist schlicht die Ersatzannahme im Blick auf PB in Zeile 2. Dabei ist wie üblich stillschweigend vorausgesetzt, dass β_1 nicht Teilterm von Δ ist; analoges gilt für die Ersatzannahmen in [48-c] und [48-d]. Die Schwierigkeit liegt in [48-b] in der Gewinnung des rechten Konjunkts. Die Annahme des parametrisierten Antezedens erfolgt in Zeile 5; und die konjunktive Zusammenfassung beider Annahmen in Zeile 5 macht das rechte Konjunkt der Annahme aus Zeile 1 benutzbar. Ein entscheidender Punkt der Überlegung ist die doppelte Ausnutzung des parametrisierten linken Konjunkts der Ableitungsbasis.

In [48-c] wird zunächst die parametrisierte Basis aus Zeile 2 in Zeile 3 und 4 zerlegt. Der Gewinn der für die Quantormanöver erforderlichen Bisubjunktion in Zeile 9 erfolgt in der Links-Rechts-Richtung mit dem ersten Konjunkt der Ersatzannahme und in der Rechts-Links-Richtung mit dem universalquantifizierten Konjunkt der Ersatzannahme.

In [48-d] wird der Übergang von (h) zu (b), und dann – in den Zeilen 18 bis 20 – von (b) zu (a) vorgeführt. Um (b) zu gewinnen, müssen zwei Konjunkte gewonnen werden. Das erste, eine Partikularquantifikation, ergibt sich in den Zeilen 2 bis 6 aus der parametrisierten Annahme und der Totalreflexivität der Identität. Die Höchstaussage wird in den Zeilen 7 bis 16 hergeleitet. Der entscheidende Punkt besteht in der Ausnutzung der Ersatzannahme.

Informell lassen sich die Ableitungen so darstellen: Gibt es genau ein Δ-Ding ξ, dann besagt das definitionsgemäß, dass es wenigstens und höchstens ein Δ-Ding ξ gibt ([48-a]). – Gebe es wenigstens ein Δ-Ding ξ, z.B. β_1 und auch höchstens ein Δ-Ding. Angenommen ein β_2 sei ebenfalls Δ. Da es nicht mehr als eines gibt sind β_1 und β_2 identisch. Was immer also Δ ist, ist mit β_1 identisch. Es existiert also, repräsentiert durch β_1, ein Δ-Ding, mit dem alle Δ-Dinge identisch sind ([48-b].

Gebe es ein Δ-Ding, z.B. β, mit dem alle Δ-Gebilde identisch sind, dann ist β mit allen, aber auch nur den Gebilden ω identisch, die ihrerseits Δ sind ([48-c]). – Gebe es schließlich ein Gebilde, z.B. β, das mit allen und nur den Gebilden identisch ist, die Δ sind. Daraus, dass β mit sich identisch ist, folgt, dass es selbst ein Δ-Ding ist; mit β gibt es ein Δ-Ding. Seien nun beliebige β_1, β_2 Δ-Dinge. Nach Annahme müssen sie mit β und damit auch untereinander gleich sein. Es gibt also nicht mehr als ein Δ ([48-d]).

Ü22 Die im Beweis nicht berücksichtigten Formulierungen der Einzigkeit ergeben sich aus den übrigen. Machen Sie sich deutlich, aufgrund welcher Operationen dies geschieht!

Im Sinne der Sensibilisierung für Einzigkeitsunterstellungen und -illusionen ist es angezeigt, sich mit gebrauchssprachlichen Wiedergaben der Einzigkeitsbedingung vertraut zu machen; das geschieht in der folgenden ergänzungsfähigen Liste:

[49] (a) es gibt genau/gerade/präzise/just ein Δ, für genau ein Δ, es gibt genau ein ξ, das Δ ist, für genau ein Δ-Ding ξ

(b) es gibt wenigstens und höchstens/nur/allenfalls/nicht mehr als ein Δ-Ding ξ, für wenigstens und höchstens ein Δ-Ding ξ, es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ und wenn ξ und ω Δ-Dinge sind, sind sie identisch

(c) es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ und alles, was von einem beliebigen Δ-Ding ω verschieden ist, ist kein Δ-Ding

(d) nicht alles ist nicht Δ und es gibt keine voneinander verschiedenen Δ-Dinge

(e) es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ, mit dem alle Δ-Dinge ω identisch sind

(f) es gibt wenigstens ein Δ-Ding derart, dass alle von ihm verschiedenen Gebilde keine Δ-Dinge sind.

(g) es gibt wenigstens ein Δ-Ding, zu dem es keine verschiedenen Δ-Dinge gibt

(h) es gibt wenigstens ein Gebilde, mit dem alle und nur die Δ-Dinge identisch sind

(i) es gibt wenigstens ein Gebilde, von dem alle und nur die Dinge, die nicht Δ sind, verschieden sind

Es ist nützlich, diese Formulierungen an Beispielen durchzuspielen. Einfache Instanzen für Δ wären etwa ’*x* ist gerade Primzahl’, ’*x* ist heutiger König von Frankreich’, ’*x* ist alles bestimmende Wirklichkeit’, ’*x* ist Verfasser der „Principia Mathematica“’, ’*w* ist ein Ungeheuer von Loch Ness’.

Um eine Einzigkeitsunterstellung als Einzigkeitsillusion entlarven zu können, ist die Beherrschung der Negationen der Einzigkeitsbedingung hilfreich. Paarweise äquivalent unter den üblichen Bedingungen sind die Instanzen folgender Formelschemata:

[50] (a) $\neg\, \mathbf{1}\xi\, \Delta$

(b) $\neg \bigvee\xi\, \Delta \vee \neg \bigwedge\xi\bigwedge\omega\, (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

(c) $\neg \bigvee\xi\, \Delta \vee \neg \bigwedge\xi\bigwedge\omega\, (\Delta \wedge \omega \neq \xi \rightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta])$

(d) $\bigwedge\xi\, \neg\, \Delta \vee \bigvee\xi\bigvee\omega\, (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$

(e) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \bigwedge\omega\, ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi))$

(f) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \bigwedge\omega\, (\omega \neq \xi \rightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta]))$

(g) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \neg \bigvee\omega\, (\omega \neq \xi \wedge [\omega, \xi, \Delta]))$

(h) $\neg \bigvee\xi\bigwedge\omega\, (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

(i) $\neg \bigvee\xi\bigwedge\omega\, (\omega \neq \xi \leftrightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta])$

Die Reihenfolge der Negationen von [50] korrespondiert der Reihenfolge der Negate aus [47]. Analog entsprechen sich die gebrauchssprachlichen Lesarten von [49] und [51], wobei unter [51] die Varianten entfallen:

[51] (a) es gibt nicht genau ein Δ-Ding ξ.

(b) es gibt kein Δ-Ding ξ, oder es ist nicht der Fall, dass Δ-Dinge ξ, ω identisch sind.

(c) es gibt kein Δ-Ding ξ, oder es ist nicht der Fall, dass ein von einem Δ-Ding ξ verschiedenes ω ein Δ-Ding ist.

(d) alles und jedes ist nicht Δ oder es gibt verschiedene Δ-Dinge.

(e) kein Δ-Gebilde ξ, ist mit allen Δ-Dingen ω identisch.

(f) es gibt kein Δ-Ding ξ, von dem nur die Nicht-Δ-Dinge ω verschieden sind.

(g) es gibt kein Δ-Ding ξ, für das es kein Δ-Ding ω gibt, das von ihm verschieden ist.

(h) es gibt keine Gebilde ξ, die mit allen und nur den Δ-Dinge identisch sind.

(i) es gibt kein ξ, das von allen und nur den Nicht-Δ-Dingen verschieden ist.

Auch hinsichtlich der negierten Einzigkeitsbedingung ist es hilfreich, die Formulierung mit einfachen Instanzen durchzuspielen. – Aus der Partikularquantifikation der Konjunktion von Δ und B, also aus $\bigvee\xi(\Delta\wedge\mathrm{B})$, folgt nicht die Universalquantifikation von Δ und B, also $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\mathrm{B})$; während die Aussage ’$\bigvee x$($x$ ist männlich $\wedge$ x ist ledig)’ wahr ist, trifft die Aussage ’$\bigwedge x$(x ist männlich $\rightarrow$ x ist ledig)’ nicht zu. Gäbe es hingegen nicht mehr als ein Δ-Ding, dann wäre die

Universalquantifikation Konsequenz. Am Beispiel: Sei x ist männlich und x ist ledig. Sei y männlich. Da es nicht mehr als ein männliches Wesen gibt ist x=y. Also ist y ledig.

Umgekehrt folgt aus $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\mathrm{B})$ nicht $\bigvee\xi(\Delta\wedge\mathrm{B})$. Es sind z.B. alle geraden Primzahlen größer 5 natürliche Zahlen; dennoch gibt es keine gerade Primzahl größer 5, die natürliche Zahl ist. Das Gegenbeispiel gibt die Diskurslage an, die den Übergang lizenzieren würde: Gibt es ein Δ-Ding, dann ist dieses auch B, weil eben alle Δ-Dinge B sind.

Fasst man beide Überlegungen zusammen, dann ergibt sich: Unter der Eindeutigkeitsbedingung ist die Universalquantifikation eine Konsequenz der Partikularquantifikation. Unter der Existenzbedingung ist die Partikularquantifikation eine Konsequenz der Universalquantifikation. Damit sind Partikular- und Universalquantifikation unter der Einzigkeitsbedingung logisch äquivalent. Anders formuliert: Die Subjunktion aus der Einzigkeitsbedingung und der Bisubjunktion aus der Partikular- und Universalquantifikation ist logisch wahr. Eine Variante in aristotelischer Terminologie: Gilt Einzigkeit für den Subjektbegriff, dann fallen universell und partikular bejahende Urteile über das Subjekt zusammen. Unter den üblichen Bedingungen gilt:

[52] 0 Es gilt $\mathbf{1}\xi\ \Delta \rightarrow (\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B}))$

1 Sei$_{1}$ $\mathbf{1}\xi\ \Delta$

2 Da$_{1}$ $\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$

3 Also$_{1}$ $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$ | BB; 1,2

4 Also$_{1}$ $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$ | KB; 3

5 Sei$_{1,5}$ $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$

6 Sei$_{1,5,6}$ $[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$

7 Also$_{1,5,6}$ $[\beta, \xi, \Delta]$ | KB; 6

8 Also$_{1,5,6}$ $[\beta, \xi, \mathrm{B}]$ | KB; 6

9 Sei$_{1,5,6,7}$ $[\beta_1, \xi, \Delta]$

10 Also$_{1,5,6,7}$ $[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta_1, \xi, \Delta]$ | KE; 7,9

11 Also$_{1,5,6,7}$ $\bigwedge\omega\ ([\beta, \xi, \Delta] \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \omega)$ | UB; 4

12 Also$_{1,5,6,7}$ $[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta_1, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \beta_1$ | UB; 11

13 Also$_{1,5,6,7}$ $\beta = \beta_1$ | SB; 10,12

14 Also$_{1,5,6,7}$ $[\beta_1, \xi, \mathrm{B}]$ | IB; 13,8

15	Also$_{1,5,6}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \to [\beta_1, \xi, \mathrm{B}]$	| SE; 9-14
16	Also$_{1,5,6}$	$\bigwedge\xi\, (\Delta \to \mathrm{B})$	| UE; 15
17	Also$_{1,5}$	$\bigwedge\xi\, (\Delta \to \mathrm{B})$	| PB; 5,6-16
18	Also$_{1}$	$\bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B}) \to \bigwedge\xi\, (\Delta \to \mathrm{B})$	| SE; 5-17

19	Sei$_{1,19}$	$\bigwedge\xi\, (\Delta \to \mathrm{B})$	
20	Also$_{1,19}$	$\bigvee\xi\, \Delta$	| KB; 3
21	Sei$_{1,19,21}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	
22	Also$_{1,19,21}$	$[\beta, \xi, \Delta] \to [\beta, \xi, \mathrm{B}]$	| UB; 19
23	Also$_{1,19,21}$	$[\beta, \xi, \mathrm{B}]$	| SB; 22,21
24	Also$_{1,19,21}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$	| KE; 21,23
25	Also$_{1,19,21}$	$\bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B})$	| PE; 24
26	Also$_{1,19}$	$\bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B})$	| PB; 20,21-25
27	Also$_{1}$	$\bigwedge\xi\, (\Delta \to \mathrm{B}) \to \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B})$	| SE; 19-26

28	Also$_{1}$	$\bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\, (\Delta \to \mathrm{B})$	| BE; 18,27
29	Also	$\mathbf{1}\xi\, \Delta \to (\bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\, (\Delta \to \mathrm{B}))$	| SE; 1-28

In den Zeilen 1 bis 4 wird die Voraussetzung einsatzfähig gemacht. In den Zeilen 5-17 wird der Übergang von der Partikularquantifikation zur Universalquantifikation vollzogen und in Zeile 19 durch SE ›dokumentiert‹; dabei wird wie üblich in Zeile 6 vorausgesetzt, dass β nicht Teilterm von Δ und B ist. In den Zeilen 19 bis 26 wird unter Ausnutzung der Existenzbedingung der Übergang von der Universalquantifikation zur Partikularquantifikation vorgeführt und dann in Zeile 27 mit SE horizontalisiert.

Ü23 a) Ordnen Sie die folgenden Aussagen der theistischen, atheistischen, monotheistischen und polytheistischen Position zu:

(i) $\bigvee x\, \mathrm{Gott}(x)$

(ii) $\bigwedge x \bigwedge y\, (\mathrm{Gott}(x) \wedge \mathrm{Gott}(y) \to x = y)$

(iii) $\neg \bigvee x\, \mathrm{Gott}(x)$

(iv) $\neg \bigwedge x \bigwedge y\, (\mathrm{Gott}(x) \wedge \mathrm{Gott}(y) \to x = y)$

(v) $\bigvee x\, (\mathrm{Gott}(x) \wedge \neg \bigvee y\, (\mathrm{Gott}(y) \wedge x \neq y))$

(vi) $\bigvee x\,(\text{Gott}(x) \wedge \bigvee y\,(\text{Gott}(y) \wedge x \neq y))$

(vii) $\mathbf{1}x\,\text{Gott}(x)$

b) Bilden Sie das Logische Quadrat zu der Aussage ’Alle Probleme haben genau eine Lösung’.

c) Beweisen Sie das Aussagenschema:

$(\bigvee\xi\,(\Delta \wedge \Gamma) \leftrightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \bigvee\xi\,\Delta$

d) Widerlegen Sie (z.B. im Rückgriff auf die Baukastenelemente von [13]):

$(\bigvee\xi\,(\Delta \wedge \Gamma) \leftrightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

Mit Blick auf die Kennzeichnungsterme (↑7.) ist festzuhalten: Es gibt eine Gegebenheit, welche das einzige Δ-Ding ist und außerdem B ist, wenn es genau ein Δ-Ding gibt, und wenn wenigstens ein Δ-Ding B ist bzw. wenn alle Δ-Dinge B sind. Paarweise äquivalent (unter den üblichen Bedingungen) sind mithin die Instanzen folgender Schemata:

[53] (a) $\bigvee\xi\,(\bigwedge\omega\,(\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B})$

(b) $\mathbf{1}\xi\,\Delta \wedge \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \mathrm{B})$

(c) $\mathbf{1}\xi\,\Delta \wedge \bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \mathrm{B})$

Der Nachweis erfolgt wiederum im Ring:

[54-a]1 Sei $\bigvee\xi\,(\bigwedge\omega\,(\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B})$

2 Sei $\bigwedge\omega\,(\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$

3 Also $\bigwedge\omega\,(\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

4 Also $[\beta, \xi, \mathrm{B}]$

5 Also $\bigvee\xi\bigwedge\omega\,(\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

6 Da $\mathbf{1}\xi\,\Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\bigwedge\omega\,(\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

7 Also $\mathbf{1}\xi\,\Delta$

8 Also $\beta = \beta \leftrightarrow [\beta, \xi, \Delta]$

9 Da $\beta = \beta$

10 Also $[\beta, \xi, \Delta]$

11 Also $[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$

12 Also $\bigvee\xi\,(\Delta \wedge \mathrm{B})$

13 Also $\mathbf{1}\xi\,\Delta \wedge \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \mathrm{B})$

14 Also $\mathbf{1}\xi\,\Delta \wedge \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \mathrm{B})$

[54-b]1 Sei $\mathbf{1}\xi\,\Delta \wedge \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \mathrm{B})$

2 Also $\mathbf{1}\xi\,\Delta$

3 Da $\mathbf{1}\xi\,\Delta \rightarrow (\bigvee\xi\,(\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \mathrm{B}))$

4 Also $\bigvee\xi\,(\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \mathrm{B})$

5 Also $\bigvee\xi\,(\Delta \wedge \mathrm{B})$

6 Also $\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \mathrm{B})$

7 Also $\mathbf{1}\xi\,\Delta \wedge \bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \mathrm{B})$

[54-c]1 Sei $\mathbf{1}\xi\,\Delta \wedge \bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \mathrm{B})$

2 Also $\mathbf{1}\xi\,\Delta$

3 Da $\mathbf{1}\xi\,\Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\bigwedge\omega\,(\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

4 Also $\bigvee\xi\bigwedge\omega\,(\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

5 Sei $\bigwedge\omega\,(\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

6 Also $\beta = \beta \leftrightarrow [\beta, \xi, \Delta])$

7 Also $\beta = \beta$

6 Also $[\beta, \xi, \Delta]$

7 Also $\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \mathrm{B})$

8 Also $[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \mathrm{B}]$

9 Also $[\beta, \xi, \mathrm{B}]$

10 Also $\bigwedge\omega\,(\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$

11 Also $\bigvee\xi\,(\bigwedge\omega\,(\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B})$

12 Also $\bigvee\xi\,(\bigwedge\omega\,(\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B})$

Zuletzt ist das Verhältnis zwischen zwei Sachverhalten zu betrachten, die nur in eine Richtung in der Folgerungsbeziehung stehen: Gibt es genau ein Δ-Ding, das ferner B ist, dann gibt es genau ein Ding, das Δ und B ist. Die Umkehrung gilt nicht: Gibt es genau ein Ding, das Δ und B ist, dann folgt nicht, dass es genau ein Δ-Ding gibt, das auch noch B ist:

Daraus, dass es genau eine Gegebenheit gibt, die Primzahl und gerade ist, folgt nicht, dass es genau eine Primzahl gibt, die überdies gerade ist.

Ü24 a) Ergänzen Sie in die zulässigen Ableitungen [54-a] bis [54-c] durch Indexkommentar oder grafischen Kommentierung und durch einen Regelkommentar.

b) Beweisen Sie: $\bigvee\xi\ (\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B}) \rightarrow \mathbf{1}\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$

Die Einzigkeit hängt eng mit dem (bzw. den) bestimmten Artikel(n) zusammen. Wenn die Rede ist von dem-Soundso, dann setzen wir in vielen Umgebungen voraus, dass es genau ein Soundso gibt. Ist die Einzigkeitsbedingung dann nicht erfüllt, gerät man sofort in Schwierigkeiten (↑7.).

Gerade in philosophischen Kontexten signalisiert man durch die Verwendung des bestimmten Artikels häufig die Einzigkeitsunterstellung: ’der Sinn des Lebens’, ’das Ziel der Geschichte’, ’der Anfang der Welt’, ’das höchste Wesen’, ’die alles bestimmende Wirklichkeit’ ’der letzte Einheitspunkt des Strebens’ usf. Bei allen diesen Wendungen ist nach (dem Nachweis) der Erfüllbarkeit der Einzigkeitsbedingung zu fragen.

Ü25 a) Formulieren Sie für die Wendungen mit dem bestimmten Artikel die Einzigkeitsbedingung!

b) Geben Sie aus dem philosophischen und den nichtphilosophischen Bereichen weitere Wendungen mit dem bestimmten Artikel und formulieren Sie die dazugehörige Einzigkeitsbedingung!

Zusatz: Logischer Pluralismus

A. Die in den beiden vorstehenden Kapiteln eingeübte Logik ist die klassische Logik. Schon die Auszeichnung als klassisch weist darauf hin, dass es alternative Vorschläge zur Reglementierung der logischen Operatoren gibt. Faktisch herrscht ein Pluralismus der Logiken. In der Folge sind zwei abweichende Optionen vorzustellen. Die Ausführungen sind nur für Interessenten an Logik und Philosophie der Logik gedacht; ihre Kenntnis ist für den Fortgang nicht nötig.

Die positive Junktorenlogik (= PJL) bildet den Ausgangspunkt: Sie umfasst die Regeln AR, KB, KE, AB, AE, SB, SE, BB, BE, W also alle für die Junktoren einschlägigen Regeln ausnehmlich der Negatorregeln:

[1] PJL = {AR, KB, KE, AB, AE, SB, SE, BB, BE, W}

Die klassische Kette aus minimaler, intuitionistischer und klassischer Logik ergibt sich durch Hinzufügung verschiedener Negatorregeln: Gibt man PJL die Regel NE bei, dann entsteht die minimale Junktorenlogik (= MJL):

[2] MJL = {NE} $\cup$ PJL

Im Rahmen von MJL kann man auf vorliegenden ›Trouble‹ reagieren, indem man eine ›Ursache‹ beseitigt, also eine Aussage negiert, von der Δ oder die Negation von Δ abhängt; das ist die einzige Verwendungsmöglichkeit für den Negator in MJL. – Die intuitionistische Junktorenlogik (= IJL) fügt der MJL das Ex-falso-quod-libet (= Efq) hinzu, das der Einheitlichkeit halber als Regel formuliert wird:

[3] Wenn man die Konjunktion aus einer Aussage B und der Negation von B gewonnen hat, dann darf man eine beliebige Aussage Δ folgern.

MJL ist durch [3] verstärkt. In MJL lässt sich das Ex-falso-quod-libet-negatum, die Aussage $\mathrm{B}\wedge\neg\mathrm{B}\to\neg\Delta$, beweisen, nicht aber das Efq (als Aussage), also $\mathrm{B}\wedge\neg\mathrm{B}\to\Delta$. Insgesamt gilt:

[4] IJL = {Efq} $\cup$ MJL

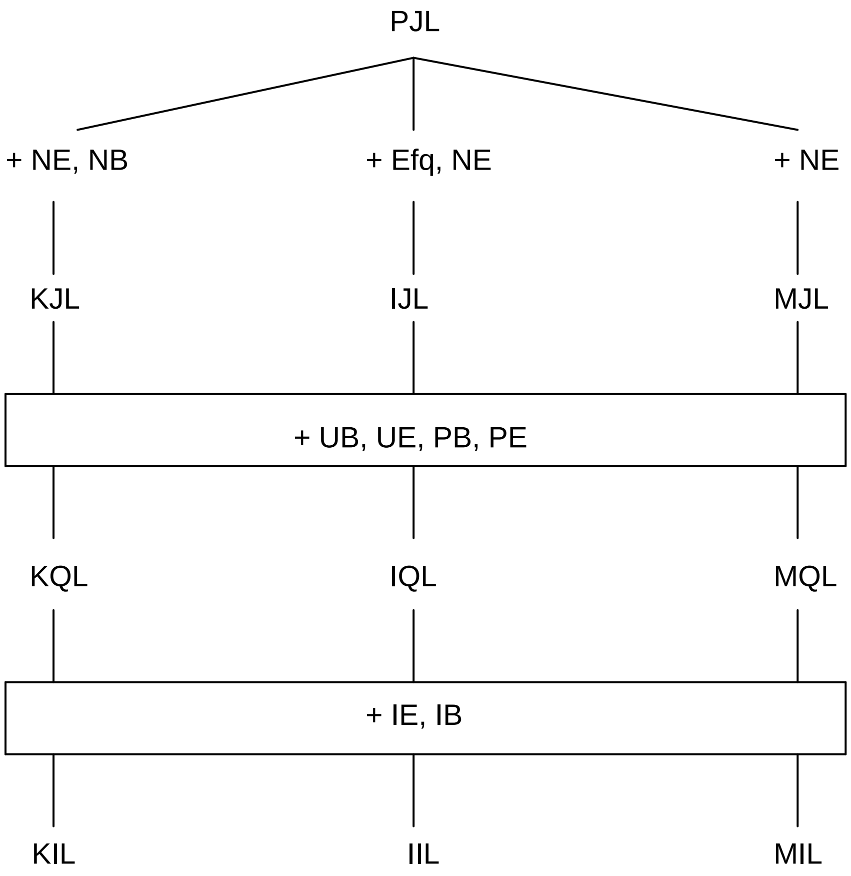
Um die klassische Junktorenlogik (= KJL) zu erhalten, geht man ebenfalls von der MJL aus, fügt aber statt Efq NB, die doppelte Negatorbeseitigung, hinzu:

[5] KJL = MJL $\cup$ {NB}

Die NB ist stärker als Efq: Mit Efq lässt sich in IJL nicht das NB-Theorem $\neg\neg\mathrm{A}\to\mathrm{A}$ und auch kein Tertium-non-datur beweisen; das ist in KJL der Fall.

Die Quantor- und die Identitätsregeln sind in allen Varianten gleich. Minimale, intuitionistische und klassische Logik sind also junktorendifferente Logiken: Der zwischen ihnen auszutragende Streit bezieht sich (zunächst) nicht auf Quantoren oder Identitätsprädikat. Minimale, intuitionistische und klassische Quantoren- und Identitätslogik (= MQL, IQL, KQL) ergeben sich durch Hinzufügung der entsprechenden Quantor- und Identitätsregeln zur junktorenlogischen Basis:

[6]



Die drei vorgestellten Logiken sollen an einigen Punkten verglichen werden. Die Aussage $(A\rightarrow\Gamma)\vee(\Gamma\rightarrow A)$ gilt klassisch, aber weder intuitionistisch noch (a fortiori) minimal. Das Schema enthält Adjunktor und Subjunktor, aber keinen Negator. Durch die Negatorregeln, hier: durch NB, wird also auch die Bedeutung der anderen Operatoren ›affiziert‹. Das Principium Contradictionis gilt in seinen junktoren- und quantorenlogischen Varianten in allen betrachteten Logiken.

Das Tertium-non-datur ist nur klassisch gültig, seine doppelte Negation hat auch minimalen und intuitionistischen Bestand. Das Efq gilt, wie schon gesagt, klassisch und intuitionistisch, nicht aber minimal. Das Contrarium- bzw. Reductio-Gesetz $(A\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A$ gilt durchgehend, die klassische Variante $(\neg A\rightarrow A)\rightarrow A$ jedoch nur klassisch. Während man durchgängig von einer Aussage Δ zu ihrer doppelten Negation übergehen darf, ist die Umkehrung, also $\neg\neg A\rightarrow A$, nur klassisch gültig. Unter der Bedingung des Tertium-non-datur gilt sie auch intuitionistisch. Minimal ist aber selbst $(A\vee\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ kein Theorem. Das klassische Dilemma $(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B)\rightarrow B$ gilt erwartungsgemäß nur klassisch. Dasselbe gilt für die Kontraposition mit negierten Subjunkten in der Ausgangssubjunktion, also für $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$. Auch $\neg(A\wedge\neg B)\rightarrow(A\rightarrow B)$ ist intuitionistisch und minimal ungültig. Es ist hingegen $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$ minimal nicht zu beweisen, wohl aber intuitionistisch und a fortiori klassisch. Gleiches gilt für den disjunktiven Syllogismus, also für $\neg A\wedge(A\vee B)\rightarrow B$. – Die klassisch gegebenen Interdefinierbarkeiten zwischen Negator, Adjunktor, Subjunktor und Konjunktor sind also in den erörterten schwächeren Logiken nicht zu halten.

Die junktorenlogischen Gegebenheiten vererben sich auf die quantorenlogischen Verhältnisse fort. So gilt etwa $\bigwedge\omega(\Delta\vee\neg\Delta)$, eine quantorenlogische Variante des Tertium-non-datur, zwar klassisch, aber sonst nicht: hingegen gilt $\bigwedge\omega\neg\neg(\Delta\vee\neg\Delta)$ in allen drei Logiken. Bei den Quantorumformungen ist $\neg\bigvee\omega\neg\Delta\rightarrow\bigwedge\omega\Delta$ sowie die duale Formel $\neg\bigwedge\omega\neg\Delta\rightarrow\bigvee\omega\Delta$ intuitionistisch und minimal ungültig.

B. Die Existenz dreier Logiken weist zunächst darauf hin, dass es nicht angezeigt ist, von der Logik zu sprechen. Es besteht jedoch auch Anlass, einige Folgefragen aufzuwerfen und wenigstens im Ansatz zu beantworten. Zunächst: Sind die drei vorgestellten Logiken faktisch die einzigen Kandidaten?

Die Antwort ist negativ: Gegenwärtig wird eine Reihe weiterer Logiken, etwa parakonsistente oder relevantistische, diskutiert. Das vorgestellte Trio bildet nur insofern eine klassische Kette, als bereits eine langdauernde Konkurrenz besteht und die interlogischen Verhältnisse gut untersucht sind. Einige cum grano salis zu lesende Ergebnisse: Minimallogische Wahrheiten sind auch intuitionistisch beweisbar; und Wahrheiten der intuitionistischen Logik sind auch klassisch beweisbar. Negationen folgen aus einer Aussagenklasse genau dann klassisch, wenn dies auch intuitionistisch der Fall ist. Eine beliebige Aussage Δ folgt genau dann klassisch aus einer Aussagenklasse X, wenn ihre doppelte Negation $\neg\neg\Delta$ intuitionistisch aus X folgt.

Sodann: Gibt es (andere als nur historische) Gründe, die klassische Logik in der Lehre bevorzugt zu behandeln? Ja: Die klassische Logik ist – erstens – die Bezugslogik für die Präsentation abweichender Logiken, und zwar sowohl der abschwächenden wie auch der modifizierenden (konnexiven) Varianten. Die klassische Logik ist – zweitens – die in der klassischen Mathematik und damit auch in den (zunehmend) mathematischen Wissenschaften verwendete Logik. Was die intuitionistische und minimale Logik angeht, kann ergänzt werden: In der Informatik spielen sie die leitende Rolle; dort ist – so scheint es heute – für den Übergang von $\neg\neg A$ zu A und äquivalente Formulierungen kein Platz.

Drittens: Wie verschafft man sich überhaupt einen Überblick über die de facto konkurrierenden bzw. prinzipiell konkurrenzfähigen Logiken? Die Frage hat eine eher mathematische und eine eher philosophische Seite; nur die zweite soll hier erörtert werden. Ohne Vollständigkeitsanspruch werden vier Rücksichten namhaft gemacht, deren Veranschlagung zur Herstellung von Überschaubarkeit beiträgt: (i) Aus welchem Anlass wird überhaupt die Präsentation einer neuen Logik ins Auge gefasst? – Der Intuitionist sieht sich etwa durch die Geltung des Tertium-non-datur für unendliche Bereiche zur Ablehnung der klassischen Logik und zur Errichtung einer eigenen veranlasst. Der Relevanzlogiker lehnt die sogenannten Paradoxe der Subjunktion, also $\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$ und $A\rightarrow(B\rightarrow A)$, ab. Der parakonsistente Logiker will aus manchen Widersprüchen nicht Beliebiges folgern lassen usf.

(ii) In welchem Feld setzt die Revision an? – Hier wären junktor-, quantor- und identitätsbezügliche Neuvorschläge zu unterscheiden. Besonders dicht ist das Feld im Kernbereich, also im junktorbezüglichen Feld. Die an UB und PE ansetzende freie Logik ist ein Beispiel für die zweite Gruppe. – (iii) Welcher Zweck wird der Logik zugedacht bzw. in welchem Szenario wird der Zweck der Logik entwickelt? Die Stichworte ’Dialog’/’Disput’, ’diskursiver Übergang’/’Folgern’, ’Erwartung’/’Erfüllung’, ’Aufgabe’/’Lösung’, ’Orientierung’, ’Information’ bietet eine Basis fürs weitere Sammeln. – (iv) Welche Prinzipien der Rechtfertigung werden zugrunde gelegt? – Während Konsistenz (schwächer: Nichttrivialisierbarkeit) und Kategorizität allgemein akzeptiert scheinen, sind alle weiteren, z.B. Separiertheit, Harmonie, Stabilität usf., strittig.

Schließlich: Welchen Anforderungen sollte ein neuer Logikvorschlag genügen? – (i) Der Revisionsanlass sollte namhaft gemacht werden. Zugleich ist gegebenenfalls anzugeben, warum anlassgleiche Vorschläge zielfehlend sind und warum andere Revisionsanlässe keine Berücksichtigung finden. (ii) Zweck und Szenario der Logik sind vorzustellen. Zugleich sind alternative Zwecke/Szenarien als uneinschlägig auszuscheiden bzw. mit dem favorisierten zu vermitteln. (iii) Die Rechtfertigungsprinzipien sind ausdrücklich zu formulieren und als erfüllt nachzuweisen. Abweichende Prinzipien wären als uneinschlägig zurückzuweisen oder mit den eigenen zu vermitteln. (iv) Die Logik ist nach den mathematischen Üblichkeiten metatheoretisch zu untersuchen. (v) Die Logik sollte kalkülinvariant, d.h. in allen bekannten Kalkültypen, präsentiert werden. (vi) Ein geläufiges Theoriestück, z.B. aus der Arithmetik, der Klassentheorie, der elementaren Physik, usf. ist in der neuen Logik zu formulieren.

C. Die in Kapitel 4. vorgelegte Bedeutungsfixierung für die logischen Operatoren berücksichtigt (wie alle akzeptablen Begriffsbildungen (↑5.1.3)) die Konsistenzforderung. Sie ist ferner an der Eindeutigkeits- bzw. Kategorizitätsforderung orientiert: Wird ein logischer Operator κ sowie ein logischer Operator κ^* über dieselben Regeln der Einführung charakterisiert, dann soll Äquivalenz vorliegen. Für jeweilige Junktoren φ muss demzufolge etwa $(A\varphi B)\leftrightarrow(A\varphi^*B)$ gelten. Angenommen, zwei Identitätsprädikatoren ’..=..’ und’..=*..’ seien über dieselben Einführungs- resp. Beseitigungsregeln eingeführt, die dann mit ’=E’, ’=B’, ’=*E’, ’=*B’ bezeichnet werden. Der Kategorizitätsnachweis hat dann folgenden Verlauf:

[7]	1	Sei$_1$	$x = y$	
	2	Also$_1$	$x =* x$	| =* E
	3	Also$_1$	$x =* y$	| = B; 1,2
	4	Also	$x = y \rightarrow x =* y$	| SE; 1-3
	5	Sei$_5$	$x =* y$	
	6	Also$_5$	$x = x$	| = E
	7	Also$_5$	$x = y$	| =* B; 5,6
	8	Also	$x =* y \rightarrow x = y$	| SE; 5-7
	9	Also	$x = y \leftrightarrow x =* y$	| BE; 4,8
	9	Also	$\bigwedge x \bigwedge y\, (x = y \leftrightarrow x =* y)$	| 2xUE; 9

Eine weitere leitende Forderung ist die Separiertheit: Jeder Operator soll frei von Rückgriffen auf andere Operatoren etabliert werden. Gegen diese Forderung verstößt (jedenfalls dem Buchstaben nach) die Regel [3], das Efq in Regelform; Gleiches gilt für BE und AB. Dieses Postulat wird etwa auch von CURRY's Regel der strikten Negation nicht erfüllt: Dieses Schema erlaubt den Übergang von $\neg\Delta\rightarrow\Delta$ zu Δ, ist also die Regelfassung der klassischen Reduction bzw. Retorsion. Sie stellt in CURRY's Logik eine Art NB dar.

Die durchgeführte Einführungs-/Beseitigungssystematik ist ferner so angelegt, dass bei der Einführung das jeweilige Zeichen Hauptoperator der Konklusion ist und bei der Beseitigung als Hauptoperator der Hauptprämisse dient. Dieses Vorgehen wird durch NB durchbrochen: Der Negator kommt zweimal vor. Anders: Die negierte Aussage ist nicht beliebig, sondern ihrerseits eine Negation.

Die meisten Autoren gehen (seit und mit GENTZEN) davon aus, dass die Einführungsregeln bedeutungskonstitutiv sind, die Beseitigungsregeln hingegen bedeutungsexplikativ. Beispiel: SE erlaubt den Schluss auf $\Delta\rightarrow\Gamma$, falls Γ im Ausgang von der Annahme von Δ gewonnen worden ist. Hat man nun Δ gewonnen, dann darf man bei Gegebenheit von $\Delta\rightarrow\Gamma$ auf Γ schließen, denn $\Delta\rightarrow\Gamma$ „dokumentiert“ (GENTZEN) ja gerade die Erreichbarkeit von Γ auf Basis von Δ.

Das nächste Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln soll durch zwei Prinzipien moderiert werden. Das Harmonieprinzip verlangt, dass die Beseitigungsregel nicht ›stärker‹ sein darf als die Einführungsregel. Umgekehrt fordert das Stabilitätsprinzip, dass die Beseitigungsregel nicht ›schwächer‹ sein darf als die Einführungsregel. Beide Prinzipien liegen in vielen Varianten vor, die aber alle explikationsbedürftige Teilvokabel enthalten. – Allerdings darf vermutet werden, dass unter jeder plausiblen Deutung von ’stärker’ die NB das Harmonieprinzip verletzt.

5.4. Literatur

Cordes, M.; Reinmuth, F.: Ein Redehandlungskalkül. Ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens nebst Metatheorie. Version 2.0. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00532643/en/. Greifswald 2011.

Kap. 4 enthält Beweise der wichtigsten der in diesem Kapitel der Denkwerkzeuge aufgeführten metalogischen Theoreme. Kap. 5 entwickelt den modelltheoretischen Konsequenzbegriff für den hier veranschlagten grammatischen Rahmen. Kap. 6 zeigt die Korrektheit und Vollständigkeit des hier verwendeten Kalküls.

Gensler, H.J.: Formal Ethics; London/New York 1996.

Für die Ausführungen dieses Kapitels ist insbesondere Teil 2, „Logicality“, einschlägig. Gensler zeigt, warum man sich – auch und gerade im Bereich der Ethik – an die Konsistenzmaxime halten sollte. Das ganze Werk demonstriert, wie man mit begrifflichen Verfahren Probleme der praktischen Philosophie angreift.

Hackstaff, L.H.: Systems of Formal Logic; Dordrecht 1966.

Dieses Werk empfiehlt sich für Leser, die sich in das klassische Trio von minimaler, intuitionistischer und klassischer Logik ohne allzu massiven formalen Aufwand einarbeiten wollen.

Hunter, G.: Metalogic. An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic; Berkley/Los Angeles 1973.

Der Titel charakterisiert den Stoff. Eine gut lesbare Einführung, die sich auch zum Nachschlagen eignet. Im ersten Teil werden auch die klassensprachlichen Begriffe erläutert, die für das metalogische Geschäft unverzichtbar sind. Hilfreich ist im Appendix 2 die Synopsis der metatheoretischen Resultate. Die Literatur listet die meisten klassischen Werke der Logik auf.

Kalish, D.; Montague, R.; Mar, G.: Logic. Techniques of formal reasoning. 2. Aufl. San Diego 1980.

Bietet eine Behandlung weiterführender Themen, insbesondere verschiedener Kennzeichnungstheorien in einem Kalkül, der dem hier verwendeten sehr ähnlich ist.

Suppes, P.: Introduction to Logic, New York 1957.

Diese Einführung in die Logik ist ein Klassiker. Der Autor ist ein Meister in der knappen informellen Darstellung formaler Zusammenhänge. Für die Non-Sequitur-Methode ist insbesondere Kapitel 4.2, „Interpretation and Validity“, wichtig. Das Kapitel 8 enthält im Übrigen die Standarddarstellung der Definitionstheorie. Für wissenschaftstheoretisch Interessierte empfiehlt sich auch der zweite Teil, der in der mengentheoretischen Formulierung der axiomatischen Methode gipfelt.

Tennant, N.: The Taming of the True; Oxford 1997.

Im Kapitel 10, “Finding the right Logic”, findet der Leser Überlegungen, die in die im Zusatz erwähnten Themen einführen. – Der Autor ist Fachmann für den Logischen Pluralismus.

6. Die Prädikation 275

Immerhin gibt es zu denken, daß wir an keinem Dinge eine Eigenschaft erkennen können, ohne damit zugleich den Gedanken, daß dieses Ding diese Eigenschaft habe, wahr zu finden.
Gottlob Frege

6. Die Prädikation

Die Philosophie stellt eine für den erfolgreichen Erkenntnisvollzug gleich welcher Art und gleich auf welchem Gebiet hilfreiche Grundausrüstung bereit (1.). Wer sich dieses Werkzeug aneignen möchte, sollte sich zunächst im Prinzipiellen über die Natur von Redehandlungen und den Zusammenhang von Wahrheit und Bedeutung Klarheit verschaffen (2.). Die Detailarbeit setzt dann ein mit der Darstellung der Rationalen Grammatik, die für alle weiteren Ausführungen vorausgesetzt bleibt (3.). Danach werden die logischen (Kern)Redeteile mit Bedeutung versorgt, indem ihnen Verwendungsregeln zugewiesen werden; damit stehen Ausdrücke bereit, die auch für alle weiteren Darlegungen ein verlässliches Gerüst bilden (4.). Weiter findet die metalogische Begrifflichkeit im Ansatz Entfaltung. Ferner legt es sich nahe, ergänzende schlussbezügliche Redeteile sowie abkürzende Techniken für das Folgern und Mittel für die Folgerungsbeurteilung bereitzustellen (5.).

Standen in den beiden vorausgegangenen Kapiteln die logischen (Kern)Junktoren und (Kern)Quantoren im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit, so sind nun die Prädikatoren und im nächsten Schritt die Nominatoren zu untersuchen. Dabei stehen jedoch nicht einzelne Redeteile wie früher z.B. der Negator oder der Universalquantor zur Regulierung an; vielmehr geht es um Eigenheiten, die allen Prädikatoren und Nominatoren oder doch größeren Gruppen solcher Redeteile bereichsübergreifend zukommen.

Einleitend ist, teilweise in Erinnerung an schon Ausgeführtes, die Prädikation im Felde der Redeteilhandlungen zu platzieren und als unverzichtbar auszuweisen. Ferner ist eine Operation vorzustellen, die Formeln in Prädikatoren umwandelt (6.1). Nach dieser Vorbereitung wird eine detaillierte Typologie von Prädikatoren angeboten, die viele traditionelle und intuitiv geläufige Unterscheidungen aufnimmt und systematisiert (6.2). Der zweite Hauptabschnitt zielt auf die elementare Prädikation, die gegeben ist, wenn als Operand des geäußerten Satzes eine elementare Aussage auftritt; dabei steht die Wahrheit elementarer Aussagen im Mittelpunkt. In diesem Kontext erfährt auch der Zusammenhang von Prädikator, Begriff, Eigenschaft und Klasse, also das (in überkommener Terminologie)

Universalienproblem, eine erste Ordnung (6.3). Kommentierte Literaturhinweise schließen wie üblich das Kapitel ab (6.4).

Dieses Unterkapitel greift häufig auf die Ausführungen über die Nomination (↑7.) vor, ergeben doch erst Nomination und Prädikation zusammen die atomare Prädikation: Autoren beziehen sich mit einem Nominator auf einen Gegenstand, um mit dem Prädikator von ihm auszusagen. Umgekehrt werden somit Passagen aus dem Nominationskapitel als Nachtrag zur Prädikation zu lesen sein.

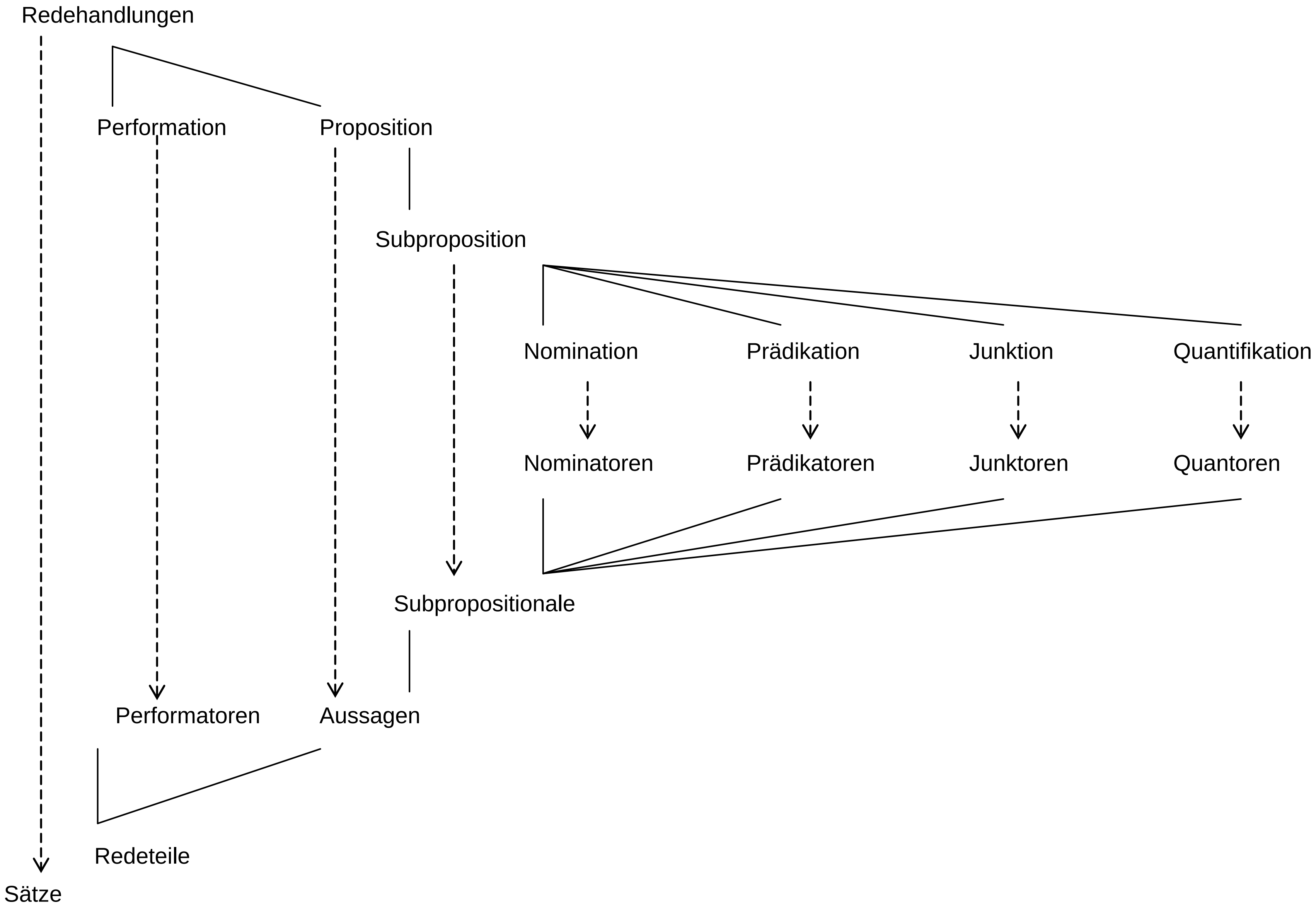
6.1 Vorbereitung: Situierung und Konvertierung

Prädikationen werden vollzogen, indem Prädikatoren in Sätzen Verwendung finden. Es entspricht dem Stellenwert und den Verflechtungen dieser Redehandlung, wenn hinsichtlich des zugeordneten Redemittels eine früher schon erwähnte (↑3.2.1) hohe Synonymendichte herrscht: Die Ausdrücke 'Prädikat', 'Prädikatausdruck', 'Prädikatkonstante', 'prädikative Zeichenverbindung', '(All)Gemeinname', 'genereller/universeller/allgemeiner Term', 'Eigenschaftswort', 'Begriffsausdruck', 'Relationszeichen', 'Relator', 'Beziehungswort' usf. dürfen (mit vielen anderen) als zumindest partielle Synonyme gelten. Die vier ersten Titel stellen wie auch 'Prädikator' darauf ab, dass in Prädikationen von etwas ausgesagt wird. Die beiden folgenden Varianten erinnern daran, dass Prädikatoren im Normalfall auf viele Gegenstände zutreffen (↑6.2.2). Die Vokabeln 'Eigenschaftswort' und 'Begriffsausdruck' machen auf Gegebenheiten aufmerksam, auf Eigenschaften und Begriffe, die mit einstelligen Prädikatoren in aufzuklärender Weise zusammenhängen (↑6.3.3); bei mehrstelligen Prädikatoren besteht entsprechend eine wie immer geartete Verknüpfung zu Relationen bzw. relationalen Eigenschaften und relationalen Begriffen.

6.1.1 Die Prädikation im Ensemble der Redehandlungen

Der Vollzug einer Redehandlung umfasst Performation und Proposition als Teilhandlungen. Die Proposition besteht ihrerseits aus weiteren Teilhandlungen, nämlich aus Prädikation, Nomination, Junktion und Quantifikation. Redehandlungen werden ausgeführt durch Äußerung von Sätzen. Die Performation, Proposition, Nomination, Junktion und Quantifikation erfolgt durch Verwendung von Performatoren, Prädikatoren, Nominatoren, Junktoren und Quantoren. Der Handlungsaufbau spiegelt sich im Satzaufbau. Prädikation, Nomination, Junktion und Quantifikation bilden gemeinsam die subpropositionalen Redeteilhandlungen. Das folgende Schaubild fasst die beschriebene Sachlage zusammen. Der senkrechte gestrichelte Pfeil ist zu lesen als '.. wird vollzogen durch Verwendung von..'.

[1]


Redehandlungen
Performation
Proposition
Subproposition
Nomination
Prädikation
Junktion
Quantifikation
Nominatoren
Prädikatoren
Junktoren
Quantoren
Subpropositionale
Performatoren
Aussagen
Redeteile
Sätze

Bei der Behandlung der grammatischen Kategorien konnte schon darauf hingewiesen werden, dass Prädikatoren in dem Sinn unverzichtbar sind, als jede Aussage und damit jeder Satz wenigstens einen Prädikator enthält. Das ergibt sich aus dem induktiven Formelaufbau: Jede Formel hat wenigstens eine atomare Formel zur Teilformel und damit wenigstens einen Prädikator zum Teilausdruck. Demgegenüber sind Junktoren und Quantoren keine Teilausdrücke von Atomaussagen; und Nominatoren sind nicht in allen Quantoraussagen erforderlich. Man betrachte z.B. die Aussagen:

[2] a) $2 > 5$

b) $2 > 5 \vee 2 < 5$

c) $\bigwedge x \bigwedge y \, (x > y \vee x < y)$

In a) fehlen Junktoren und Quantoren, in b) nur Quantoren und in c) ist kein Nominator Teilausdruck. Demgegenüber finden sich in allen Aussagen Prädikatoren. In diesem Sinne sind Prädikatoren (im vorausgesetzten Rahmen von Sprachen erster Stufe) unverzichtbare Redemittel; Analoges resultiert bei Sprachen höherer Stufen.

Überträgt man diesen Sachverhalt von der Seite der Redemittel auf die Seite der Redehandlungen, so ergibt sich: Prädikationen sind Teilhandlungen jeder Redehandlung und insofern für diesen Vollzug unverzichtbar. – Wird ein Satz mit der unter a) notierten Aussage, also mit einer atomaren Aussage, als Hauptoperand, geäußert, dann liegt eine atomare bzw. elementare Prädikation vor; diese findet unten gesonderte Behandlung (↑6.3).

6.1.2 Die Verwandlung von Formeln in Prädikatoren

Prädikatoren sind, so eine unstrittige intuitive Vorgabe, jedenfalls solche Redeteile, die von etwas ausgesagt werden können, ganz gleichgültig, ob die entstehende Aussage wahr oder falsch ist. So kann der Prädikator '..ist-ein-sakrales-Bauwerk' vom Kölner Dom oder vom Kölner Hauptbahnhof ausgesagt werden. Im ersten Fall ist die entstehende Aussage, 'Der Kölner Dom ist-ein-sakrales-Bauwerk', wahr; im zweiten Fall ist die entsprechende Aussage, 'Der Kölner Hauptbahnhof ist-ein-sakrales-Bauwerk', falsch. Die herausgestellte Eigenart des Ausgesagtwerdenkönnens kommt intuitiv nicht nur Prädikatoren zu, sondern auch offenen Formeln. Man betrachte etwa folgende Zeichenverbindungen:

[3] a) x ist-ein-sakrales-Bauwerk und x ist-Bischofskirche

b) $\text{Mann}(x) \wedge \bigvee z \, (\text{Frau}(z) \wedge \text{Zeugte-mit}(x, z, y))$

Unter a) ist eine in ‘x’ offene Formel notiert, unter b) eine in ‘x’ und ‘y’ offene Formel (↑3.2.3). Dabei sollte der Umstand, dass in b) eine stärker normierte Schreibweise benutzt wird, nicht irritieren. Man ist insofern geneigt, auch diese Ausdrucksverbindungen als Prädikatoren aufzufassen, als man auch sie von Gegebenheiten bzw. Gegebenheitspaaren aussagen möchte. Ein Realisierungsweg liegt nahe: Substituiert man in a) ‘x’ durch ‘der Kölner Dom’ und in b) ‘x’ durch ‘J.S. Bach’ und ‘y’ durch ‘P.E. Bach’, dann erhält man mit

[3] a*) der Kölner Dom ist-ein-sakrales-Bauwerk und der Kölner Dom ist-Bischofskirche

b*) Mann(J.S. Bach) $\wedge \bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(J.S. Bach, z, P.E. Bach))

Aussagen, in denen von den jeweiligen Gegebenheiten das Gewünschte ausgesagt wird. Allerdings geschieht das nicht in der gewünschten Form, nämlich nicht so, dass das Ausgesagte als eigener und einheitlicher Prädikator auftritt. Um diese Möglichkeit verfügbar zu machen, soll ein Operator, der **l**-Konvertor, eingeführt werden, der offene Formeln in Prädikatoren konvertiert. So sollen durch Anwendung von ‘**l**x’ auf ‘x ist-ein-sakrales-Bauwerk und x ist-Bischofskirche’ sowie durch Anwendung von ‘**l**x,y’ auf ‘Mann(x) $\wedge \bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(x, z, y))’ die Prädikatoren:

[3] a°) **l**x (x ist-ein-sakrales-Bauwerk und x ist-Bischofskirche) (..)

b°) **l**x,y (Mann(x) $\wedge \bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(x, z, y))) (..,..)

generiert werden. Eine genau in einer Variable offene Formel wird durch einen einfachen Variablenbinder ‘**l**x__’ in einen einstelligen Prädikator überführt; analog wird aus einer in genau zwei Variablen offenen Formel durch einen zweifachen Variablenbinder ‘**l**x,y__’ ein zweistelliger Prädikator erzeugt; die Verallgemeinerung zeichnet sich ab: Durch einen k-stelligen Operator ‘**l**$\xi_1,\ldots,\xi_k$’ soll aus einer in $\xi_1,\ldots,\xi_k$ offenen Formel Δ ein k-stelliger Prädikator erzeugt werden.

Der semantische Aspekt, d.h. die Verwendung, ist so zu regeln, wie die hinführenden Überlegungen nahelegen: Der durch Konversion erzeugte Prädikator soll auf einen Gegenstand resp. eine Gegenstandssequenz genau dann zutreffen, wenn das einschlägige Substitutionsresultat gilt. Am Beispiel:

[3] a^+) **l**x (x ist-sakrales-Bauwerk und x ist-Bischofskirche) (der Kölner Dom) $\leftrightarrow$ (der Kölner Dom ist-sakrales-Bauwerk und der Kölner Dom ist-Bischofskirche)

b^+) **l**x,y (Mann(x) $\wedge \bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(x, z, y))) (J.S. Bach, P.E. Bach) $\leftrightarrow$ (Mann(J.S. Bach) $\wedge \bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(J.S. Bach, z, P.E. Bach)))

Die exemplarisch erläuterten Intuitionen sind nun festzuzurren: Grammatische Festlegung: Es sei '$\mathbf{I}\xi_1,...,\xi_k$' ein k-facher variablenbindender Operator, der genau in $\xi_1,...,\xi_k$ offene Formeln Δ in k-stellige Prädikatoren konvertiert. Für die folgende semantische Festlegung sei ϑ_i jeweils ein geschlossener Term und ω_i jeweils eine nicht Δ auftretende Variable; die Substitutionsschreibweise bezieht sich auf alle i mit $1 \le i \le k$.

[3]* Man darf jede parameterfreie Aussage der Form

$\mathbf{I}\xi_1,...,\xi_k\ \Delta(\vartheta_1,...,\vartheta_k) \leftrightarrow [\vartheta_i, \xi_i, \Delta]$ resp.

$\bigwedge\omega_1 ... \bigwedge\omega_k(\mathbf{I}\xi_1,...,\xi_k\ \Delta(\omega_1,..., \omega_k) \leftrightarrow [\omega_i, \xi_i, \Delta])$

kategorisch setzen.

Wie für Definitionen und Axiome gilt für kategorisch gesetzte Aussagen, dass sie in Beweisen angezogen werden dürfen. Man kann '$\mathbf{I}\xi_1,...,\xi_k$' etwa lesen als 'Für solches $\xi_1,...,\xi_k$'. '$\mathbf{I}$' stellt, grammatisch genau genommen, eine neue Form von Quantifikator dar, dessen Hinzufügung zu den Mitteln einer Sprache auch eine Neudefinition des Formel- und Prädikatorenbegriffs erzwingt. In diesem Zusammenhang müsste man dann auch zwischen einfachen und zusammengesetzten bzw. $\mathbf{I}$-Prädikatoren unterscheiden. Diese Feinheiten seien hier vernachlässigt! Die Arbeitsweise des eingeführten Konvertierungsoperators kann an folgender Tabelle nachgehalten werden:

$[3]^+$ a) Däne(x) $\vee$ Schwede(x)

$\mathbf{I}x$ (Däne(x) $\vee$ Schwede(x)) (..)

b) $\bigvee u$ (Stadt(u) $\wedge$ Liegt-zwischen(w, u, z))

$\mathbf{I}w,z$ ($\bigvee u$ (Stadt(u) $\wedge$ Liegt-zwischen(w, u, z))) (..,..)

c) Summe-von(x, y, z)

$\mathbf{I}x,y,z$ (Summe-von(x, y, z)) (..,..,..)

Die Konversion von Formeln in Prädikatoren bietet eine Möglichkeit, jede Aussage, die einen geschlossenen Term enthält, in eine atomare Aussage umzuformen. So wird die Aussage '$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Fürchtet(x, Dracula))' zu '$\mathbf{I}y \bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Fürchtet(x, y)) (Dracula)'. Informell: Die Aussage 'Alle Menschen fürchten Dracula' wird zu 'Dracula ist ein solcher, dass alle Menschen ihn fürchten'. Dabei wählt man stets eine neue, d.h. eine in der Ausgangsformel nicht vorkommende Variable als Variable für den $\mathbf{I}$-Konvertor. – Mit Hilfe der $\mathbf{I}$-Konversion ist auch eine bequeme Möglichkeit geschaffen, in der Folge Beispiele für so und so beschaffene Prädikatoren anzugeben.

Ü1 Beweisen Sie die Aussage:

$\mathbf{I}u\ (\bigvee z\ (\text{Natürliche-Zahl}(z) \wedge z > u))\ (3)$

unter Benutzung der **I**-Konversion sowie durch Anziehung der Aussagen:

Natürliche-Zahl(3), $\bigwedge w\ (\text{Natürliche-Zahl}(u) \rightarrow \bigvee z\ (\text{Natürliche-Zahl}(z) \wedge z > u))$

6.2 *Prädikatorentypen*

Prädikatorentypen ergeben sich unter ganz verschiedenen Einteilungsrücksichten. In der Folge ist zunächst an grammatische zu erinnern (6.2.1). Diesen stehen verschiedene semantische gegenüber: Die exemplarbezogene Einteilung fragt danach, ob der Prädikator auf Exemplare zutrifft bzw. ob er auf Exemplare nicht zutrifft (6.2.2). Die systembezogene Gliederung geht auf die Stellung der Prädikatoren im Prädikatorensystem (6.2.3). Die strukturbezogene Typisierung ergibt sich aus strukturellen Eigenschaften der Prädikatoren (6.2.4). Zur besseren Übersicht werden sodann die exemplar-, system- und strukturbezogenen Definitionen zusammengestellt (6.2.5). Abschließend sind einige materiale Prädikatorarten kursorisch vorzustellen (6.2.6).

Wenn man einen Prädikator einer bereits vorliegenden Sprache analysiert, seine ›logische Geographie‹ erstellt, das ›Terroir‹ aufschlüsselt, dann klärt man seine grammatischen, exemplar-, system- und strukturbezogenen, manchmal auch einige seiner materialen Eigenschaften. Führt man einen Prädikator hingegen in eine Sprache ein, dann hat dies zur Folge, dass er Eigenschaften aus den aufgezählten Eigenschaftsgruppen annimmt bzw. mit diesen ausgestattet wird (↑6.2.5).

6.2.1 Grammatische Prädikatorentypen – Erinnerung

Vernachlässigt man die Unterscheidung von einfachen und zusammengesetzten, d.h. **I**-Prädikatoren, dann ergeben aus der Sicht der Rationalen Grammatik zwei Gesichtspunkte für eine Einteilung der Prädikatoren: zum einen die *Stelligkeit*, zum anderen die *Stufigkeit*.

Zufolge des Stelligkeitsgesichtspunktes lassen sich ein-, zwei-, drei-, vier-, ..., *n*-stellige Prädikatoren unterscheiden, dabei ist *n* eine positive natürliche Zahl. – Die Feststellung bzw. die Festsetzung der Stelligkeit eines Prädikators ist eine nicht-triviale Angelegenheit; darauf wurde schon im Startkapitel (↑1.1.1) sowie bei der Behandlung der Grammatik (↑3.4.3) hingewiesen.

Ü2 Nehmen Sie an, der ›subjektive‹ Prädikator ‘..schön-für..’ ist durch ‘$\bigwedge x \bigwedge y$ (x ist schön für y $\leftrightarrow$ (y betrachtet x $\rightarrow$ x gefällt y))’ definiert; im Anschluss daran sei ‘..ist schön’ durch ‘$\bigwedge x$ (x ist schön $\leftrightarrow$ $\bigvee y$ x ist schön für y)’ charakterisiert. In derselben Sprache sei der ›objektive‹ Prädikator ‘..ist schön’ durch ‘$\bigwedge x$ (x ist schön $\leftrightarrow$ $\bigwedge y$ (y betrachtet x $\rightarrow$ x gefällt y))’ definiert. Unter welcher naheliegender Bedingung führen diese Charakterisierungen zur Inkonsistenz? Wie könnte die Inkonsistenz vermieden werden? – Vergleichen Sie dazu auch die Neuigkeitsforderung in den Definitionsregeln (↑11.).

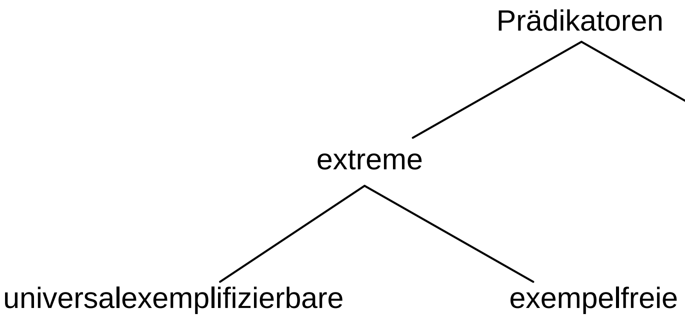
Zufolge des Stufigkeitsgesichtspunktes lassen sich Prädikatoren erster, zweiter, dritter, ..., k-ter Stufe unterscheiden; dabei ist k eine positive natürliche Zahl. Diese Unterscheidung ist jedoch nur dann einschlägig, wenn man den (hier in der Regel vorausgesetzten) Rahmen von Sprachen erster Stufe verlässt (↑3.3.3). Die Aussage ‘Hans ist mit Fritz verwandt’ – formatiert: ‘Ist-verwandt-mit(Hans,Fritz)’ – entsteht aus der Anwendung des zweistelligen Prädikators erster Stufe ‘ist-verwandt-mit(..,..)’ auf die Individuenkonstanten/Eigennamen ‘Hans’ und ‘Fritz’. Die Aussage ‘Verwandtsein ist symmetrisch’ – formatiert: ‘Ist-symmetrisch(Ist-verwandt-mit(..,..))’ entsteht aus der Anwendung des einstelligen Prädikators zweiter Stufe ‘Ist-symmetrisch(—)’ auf den zweistelligen Prädikator erster Stufe ‘Ist-verwandt-mit(..,..)’. Die Aussage ‘Symmetrie ist eine Relationseigenschaft’ – formatiert: ‘Ist-eine-Relationseigenschaft(Ist-symmetrisch(—))’ entsteht aus der Anwendung des einstelligen Prädikators dritter Stufe ‘Ist-eine-Relationseigenschaft(++)’ auf den einstelligen Prädikator zweiter Stufe ‘Ist-symmetrisch(—)’. Die Zeichenverbindungen ‘Ist-symmetrisch(—)’ und ‘Ist-eine-Relationseigenschaft(++)’ sind demnach höherstufige Prädikatoren.

In höherstufigen Sprachen kann man dann auch homogene von inhomogenen Prädikatoren unterscheiden: Die Operanden homogener Prädikatoren gehören derselben Stufe an, die Operanden inhomogener Prädikatoren sind auf verschiedenen Stufen angesiedelt. Ein Beispiel für einen zweistelligen inhomogenen Prädikator, an dessen erster Stelle ein Prädikator und an dessen zweiter Stelle ein Term steht, wäre dann etwa ‘..wird-exemplifiziert-durch..’: Weise wird-exemplifiziert-durch Sokrates. Stärker normiert: Wird-exemplifiziert-durch(Ist-weise(..),Sokrates). Der erste Operand ist ein Prädikator erster Stufe, der zweite Operand zählt zu den Individuenkonstanten (↑3.3.3).

6.2.2 Exemplarbezogene Prädikatorentypen

Prädikatoren, die überhaupt auf Gegenstände zutreffen, sind exemplifizierbar (oder auch erfüllbar); ist dieser Sachverhalt nicht gegeben, so sind sie exempelfrei. Prädikatoren, die auf einige Gegenstände nicht zutreffen, sind gegenexemplifizierbar; ist dieser Sachverhalt nicht gegeben, so sind sie universalexemplifizierbar. Prädikatoren, die sowohl exemplifizierbar als auch gegenexemplifizierbar sind, gelten als normal; Prädikatoren, die nicht normal sind, sind extrem. Die damit gegebene und aufgezeichnete Einteilungssequenz ist in der Folge im Detail zu erläutern.

[4]



In der Folge steht Φ für einen n-stelligen Prädikator einer geeigneten Sprache S erster Stufe; diese Charakterisierungsbedingung wird nicht eigens vorangestellt.

Ein Prädikator Φ ist in einer Sprache S exemplifizierbar genau dann, wenn die Partikularaussage $\bigvee \xi_1 \ldots \bigvee \xi_n\ \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in S gilt. Handelt es sich um einen einstelligen Prädikator, dann ist dieser demzufolge exemplifizierbar, wenn die Aussage $\bigvee \xi\ \Phi(\xi)$ in der Sprache wahr ist. – Die Prädikatoren '..ist-männlich', '..ist-Vater-von..', 'Zeugte-mit(..,..,..)' sind Beispiele für exemplifizierbare ein-, zwei- und dreistellige Prädikatoren in der biologischen Verwandtschaftssprache. Sie stellen damit zugleich Gegenbeispiele für exempelfreie Prädikatoren dar.

Ein Prädikator Φ ist in einer Sprache S exempelfrei genau dann, wenn die Negation $\neg \bigvee \xi_1 \ldots \bigvee \xi_n\ \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in S beweisbar ist. Handelt es sich um einen einstelligen Prädikator, dann ist dieser demzufolge exempelfrei, wenn die Aussage $\neg \bigvee \xi\ \Phi(\xi)$ in der Sprache wahr ist. Die Prädikatoren '..ist-gerade-Primzahl->5', '$\mathbf{I} x,y\ (x > y \wedge y > x)(..,..)$', '$\mathbf{I} x,y,z\ (x = y + z \wedge x \neq y + z)(..,..,..)$' sind Beispiele für exempelfreie ein-, zwei- und dreistellige Prädikatoren der arithmetischen Sprache. Sie sind zugleich Gegenbeispiele für exemplifizierbare Prädikatoren.

Bemerkung: Die kontradiktorischen Prädikatoren – in überkommener lateinischer Terminologie: die contradictiones in adiecto – sind alle exempelfrei, obwohl nicht alle exempelfreien Prädikatoren auch kontradiktorische darstellen: So ist etwa die Ausdrucksverbindung '..ist-im-Jahre-2000-freilebender-Elefant-in-Greifswald' ein exempelfreier, jedoch kein kontradiktorischer Prädikator (↑5.1.4).

Ein Prädikator Φ ist in einer Sprache S gegenexemplifizierbar genau dann, wenn die Partikularaussage $\bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n \neg \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in S wahr ist. Handelt es sich um einen einstelligen Prädikator, dann ist dieser demzufolge gegenexemplifizierbar, wenn die Aussage $\bigvee\xi \neg \Phi(\xi)$ in der Sprache gilt. – Die Prädikatoren '..ist-männlich', '..ist-Vater-von..', 'Zeugte-mit(..,..,..)' sind Beispiele für ein-, zwei- und dreistellige gegenexemplifizierbare Prädikatoren der biologischen Sprache.

Ein Prädikator Φ ist in einer Sprache S universalexemplifizierbar genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in S wahr ist. Handelt es sich um einen einstelligen Prädikator, dann ist dieser demzufolge universalexemplifizierbar, wenn die Aussage $\bigwedge\xi \Phi(\xi)$ in der Sprache gilt. Die Prädikatoren '**I**y (y ist-gerade-Zahl $\vee$ y ist-ungerade-Zahl) (..)', '**I**x,y ($x > y \rightarrow \neg\, y > x$) (..,..)' und '**I**$x,y,z$ (x ist-Summe-von y und z $\vee$ $\neg$ x ist-Summe-von y und z)(....,..)' sind Beispiele für universalexemplifizierbare Prädikatoren der arithmetischen Verwandtschaftssprache.

Bemerkung: Prominente Beispiele für universalexemplifizierbare Prädikatoren aus der philosophischen Tradition sind die sogenannten transzendentalen Prädikatoren 'unum', 'bonum', 'verum'. Versucht man die Leitintuition in den hier bestimmenden Rahmen zu übertragen, so ergibt sich: '..est-bonum' ist insofern ein universalexemplifizierbarer Prädikator, als in der unterlegten philosophischen Sprache die Aussage 'Für alle y: y est-bonum' gilt; dabei bedeutet '..est-bonum' etwa '..kann-Objekt-des-Strebevermögens-werden'. Analog lässt sich '..est-verum' deuten als '..kann-Objekt-des-Erkenntnisvermögens-werden'. Die Vokabel 'unum' könnte man als '..ist-ein-Gegenstand' deuten; dieser Prädikator wäre etwa durch '$x = x$' definierbar; wegen Totalreflexivität der Identität (↑4.4) ergäbe sich dann das Gewünschte.

Φ ist extremer Prädikator in S genau dann, wenn Φ universalexemplifizierbarer oder exempelfreier Prädikator in S ist; Beispiele für universalexemplifizierbare bzw. exempelfreie Prädikatoren sind demnach auch Beispiele für extreme Prädikatoren. – Φ ist normaler Prädikator in S genau dann, wenn Φ sowohl exemplifizierbarer als auch gegenexemplifizierbarer Prädikator in S ist. Beispiele für normale Prädikatoren sind also Redeteile, die sowohl Beispiele für exemplifizierbare als auch Beispiele für gegenexemplifizierbare Prädikatoren sind. Sie sind damit zugleich Gegenbeispiele für extreme Prädikatoren.

Φ ist schließlich exklusiv-exemplifizierbarer Prädikator in S genau dann, wenn die Einzigkeitsaussage $\mathbf{1}\xi\ \Phi(\xi)$ in S beweisbar ist; hierbei ist ausschließlich an einstellige Prädikatoren gedacht, wie etwa '..ist-Verfasser-der-„Die Buddenbrooks“' oder '..ist-gerade-

Primzahl'. Zentraler definierender Ausdruck ist der Einzigkeitsquant(ifikat)or, der seinerseits im Rückgriff auf Partikularquantor, Universalquantor, Konjunktor, Subjunktor und Identitätsprädikator charakterisiert wird (↑5.3.4). – Enthält das durch die Sprache gegebene Diskursuniversum mehr als eine Gegebenheit, gilt also die Aussage $\bigvee\xi\bigvee\omega\ \xi \neq \omega$ in der Sprache, dann sind die exklusiv- exemplifizierbaren Prädikatoren normale Prädikatoren.

Bemerkung: Exklusiv-exemplifizierbare Prädikatoren finden sich (jedenfalls dem Anspruch nach) v.a. in der Gotteslehre. Proponenten einer solchen gehen davon aus, dass die Redeteile '..ist-allmächtig', '..ist-allgültig', '..ist-allwissend', '..ist-unendlich', '..ist-allgegenwärtig' auf genau ein Gebilde, nämlich auf Gott, zutreffen. Ihre Opponenten versuchen demgegenüber zu zeigen, dass es sich dabei um exempelfreie Prädikatoren handelt. Die der Auseinandersetzung zugrundeliegende Schwierigkeit besteht in der/einer für die Parteien einvernehmlichen Explikation der aufgezählten Prädikatoren. – Im Alltag finden sich exklusiv-exemplifizierbare Prädikatoren insbesondere bei einer Sorte superlativischer Redeteile wie etwa '..ist-schnellster-Sprinter-im-Jahre-2000', '..ist-bester-Pfälzer-Riesling-der-letzten-10-Jahre'.

Universale Prädikatoren lassen sich – erläutert für den einstelligen Fall – so bilden, dass man ausgeht von einer wahren Universalaussage, den Universalquantor wegstreicht und den von der Variablen her geeigneten Konversionsquantor voransetzt: So ist etwa 'Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich' eine wahre Universalaussage. Wegstreichung des Universalquantors führt zu 'Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich'. Voranstellung des '*x*' bindenden Konversionsquantors hat dann den universalen einstelligen Prädikator '**l***x* (Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich)(..)' zum Ergebnis. In analoger Weise lassen sich exempelfreie und normale Prädikatoren bilden. – Nur normale Prädikatoren können die Prädikationen üblicherweise zugedachten Unterscheidungsaufgaben übernehmen (↑6.3.2).

Ü3 Suchen Sie aus Gebrauchssprache, aus einer fachwissenschaftlichen und aus der philosophischen Sprache je ein Beispiel für einen ein-, zwei-, dreistelligen normalen, leeren und universalen Prädikator!

6.2.3 Systembezogene Prädikatorentypen

Prädikatoren bilden Systeme, Gewebe oder Netze; sie stehen zueinander im Verhältnis von Ein- und Ausschluss, Unter- und Überordnung, Umkehrung usf. Einige dieser Beziehungen sind genauer zu charakterisieren, und zwar in der Reihenfolge Unter- bzw. Überordnung, Konversität, Negativität, Disjunktheit, Exhaustivität, Klassifikativität. Φ, X, Ψ sind dabei jeweils gleichstellige Prädikatoren der unterlegten Sprache *S*.

Es ist Φ Subprädikator zu Ψ in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \to \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$ in *S* beweisbar ist. Es ist umgekehrt Ψ Superprädikator zu Φ in *S* genau dann, wenn Φ Subprädikator zu Ψ in *S* ist. Wenn also eine Aussage der Art $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \to \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$ wahr ist, dann ist der Antezedensprädikator Subprädikator des Sukzedensprädikators und der Sukzedensprädikator ist Superprädikator des Antezedensprädikators. – Die folgende Auflistung gibt einige Beispiele für einstellige Sub- bzw. Superprädikatoren aus geeignet gewählten Sprachen:

[5] ↱ ist Subprädikator zu ↴

..hämmert	..handelt
..gerade-Zahl	..natürliche-Zahl
..ist-Fagott	..ist-Musikinstrument
..ist-ein-Fluss	..ist-fließendes-Gewässer
..ist-eine-Großstadt	..ist-eine-Stadt
..ist-ein-Hund	..ist-ein-Lebewesen
..ist-dunkelrot	..ist-rot

↰ ist Superprädikator zu ↵

In der biologischen Verwandtschaftssprache lässt sich z.B. folgende Kette von (von links gelesen) zweistelligen Subprädikatoren bzw. (von rechts gelesen) von Superprädikatoren angeben:

[6] ..ist-Vater-von.., ..ist-Elter-von.., ..ist-Vorfahr-von.., ..ist-verwandt-mit..

Prädikatorenketten können von beträchtlicher Länge sein: '..ist-silberne-ziffernlose-Taschenuhr', '..ist-ziffernlose-Taschenuhr', '..ist-Taschenuhr', '..ist-Uhr', '..ist-Messgerät', '..ist-Gerät', '..ist-Artefakt', '..ist-sinnenfälliger-Gegenstand'.

Wenn – in einer Sprache *S* – Φ Subprädikator von Ψ ist und Ψ umgekehrt Subprädikator von X, dann ist auch Φ Subprädikator von X. Diese – später als Transitivität betitelte (↑6.2.4) – Eigenschaft beruht darauf, dass eine Aussage der Art $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \to \mathrm{X}(\xi_1, ..., \xi_n))$ Konsequenz aus der Klasse von Aussagen der Art $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \to \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$, $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Psi(\xi_1, ..., \xi_n) \to \mathrm{X}(\xi_1, ..., \xi_n))$ ist. Weiß man von einem beliebigen ϑ-Gegenstand, dass er ein Φ ist, dann treffen auf den ϑ-Gegenstand auch alle Superprädikatoren von Φ zu.

Φ ist koextensiver bzw. koextensionaler Prädikator zu Ψ in *S* genau dann, wenn Φ sowohl Sub- als auch Superprädikator von Ψ in *S* ist, wenn also die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n$ $(\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ in *S* beweisbar ist. – Es sind z.B. die einstelligen Prädikatoren '..ist-Lebewesen-mit-Herz' und '..ist-Lebewesen-mit-Nieren' oder die zweistelligen Prädikatoren '..ist-Vater-von..' und 'ιuw (u ist-männlich $\wedge$ u zeugte w) (..,..)' in geeignet gewählten Sprachen zueinander koextensive Prädikatoren. – Ferner: Es ist Φ Subprädikator/Superprädikator von Ψ und außerdem Ψ Subprädikator/Superprädikator von Φ genau dann, wenn Φ und Ψ in der jeweiligen Sprache koextensive Prädikatoren sind.

Ist Φ ein exemplifizierbarer Prädikator, dann ist auch jeder Superprädikator von Φ exemplifizierbar; es ist nämlich eine Aussage der Art $\bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n\, \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ Konsequenz aus einer Klasse von Aussagen der Art $\bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n\, \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n\, (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_n))$. Es ist weiter jeder Prädikator Superprädikator zu exempelfreien Prädikatoren; das beruht darauf, dass eine Aussage der Art $\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n\, (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ Konsequenz aus einer Klasse von einer Aussage der Art $\neg \bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n\, \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist. Schließlich ist – wegen $\{\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n\, \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\} \vdash \bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n\, (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ – ein universal-exemplifizierbarer Prädikator Superprädikator zu jedem Prädikator.

Ü4 a) Suchen Sie in einer Sprache Ihrer Wahl

  aa) eine Prädikatorenkette mit sechs Gliedern für einstellige Prädikatoren

  ab) eine Prädikatorenkette mit vier Gliedern für zweistellige Prädikatoren

  ac) eine Prädikatorenkette mit drei Gliedern für dreistellige Prädikatoren

b) Bilden Sie eine wenigstens fünfgliedrige Prädikatorenkette, deren mittleres Glied die Zeichenverbindung '..ist-ein-Pudel' ist!

Es ist Φ ein zu Ψ konverser Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega$ $(\Phi(\xi, \omega) \leftrightarrow \Psi(\omega, \xi))$ eine in *S* wahre Aussage ist; hierbei ist vorausgesetzt, dass Φ und Ψ zweistellige Prädikatoren sind. So sind beispielsweise '..Elter-von..' und '..Kind-von..', '..<..' und '..>..', '..nördlich-von..' und '..südlich-von..' zueinander konverse Prädikatoren in der jeweiligen Sprache. Bei dieser Formulierung ist durch Verwendung des Wortes 'zueinander' schon die Tatsache benutzt, dass Ψ auch zu Φ konverser Prädikator ist, falls Φ zu Ψ konverser Prädikator ist.

Ist Φ ein zu Ψ konverser Prädikator und ist Φ Subprädikator zu X_1, dann ist Ψ Subprädikator zu jedem zu X_1 konversen Prädikator X_2. Diese Behauptung lässt sich informell so begründen: Sei $\Phi°$ zu $\Psi°$ konverser Prädikator. Sei $\Phi°$ Subprädikator zu $X_1°$. Sei $X_2°$ konverser Prädikator zu $X_1°$. Sei $\beta_1\Psi°\beta_2$. Nach der ersten Voraussetzung ist dann $\beta_2\Phi°\beta_1$.

Zufolge der zweiten Voraussetzung ist $\beta_2 X_1{}^\circ\beta_1$. Gemäß der dritten Voraussetzung ist dann $\beta_1 X_2{}^\circ\beta_2$; damit ist $\beta_1\Psi{}^\circ\beta_2 \rightarrow \beta_1 X_2{}^\circ\beta_2$; durch UE und mit Hilfe der Konversendefinition folgt das Gewünschte.

Die zunächst auf den hauptsächlichen Anwendungsbereich beschränkte Begriffsbildung kann auf *n*-stellige Prädikatoren mit $n \geq 2$ erweitert werden: Φ ist zu Ψ an der *i*-ten und der *k*-ten Stelle konverser Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_i ... \bigwedge\xi_k ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_i, ..., \xi_k, ..., \xi_n) \leftrightarrow \Psi\ (\xi_1, ..., \xi_k, ..., \xi_i, ..., \xi_n))$ wahr ist; dabei ist $1 \leq i$ und $k \leq n$. So ist z.B. '..ist-relativ-zu..Fortschritt-im-Blick-auf..' an der ersten und zweiten Stelle konverser Prädikator zu '..ist-relativ-zu..Rückschritt-im-Blick-auf..' z.B. in einer technikhistorischen, einer geschichtsphilosophischen oder einer politischen Sprache.

Es ist Φ Negatprädikator von Ψ in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \leftrightarrow \neg\Psi\ (\xi_1, ..., \xi_n))$ in *S* wahr ist. So sind etwa '..ist-rot' und '**I**y ($\neg$ y ist rot)(..)' zueinander Negatprädikatoren einstelliger Art. Identitäts- und Diversitätsprädikator sind Negatprädikatoren der zweistelligen Art in beliebigen Sprachen, in denen sie vorkommen; wenn Φ Negatprädikator von Ψ ist, dann gilt auch das Umgekehrte. – In überkommener Terminologie spricht man auch davon, dass Φ kontradiktorisches Gegenteil von Ψ ist.

Es ist Φ zu Ψ disjunkter bzw. konträrer Prädikator in *S* genau dann, wenn die Negation $\neg \bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \wedge \Psi\ (\xi_1, ..., \xi_n))$ in *S* wahr ist. Für einstellige Prädikatoren formuliert: Es gibt keine Gegebenheit, auf die beide Prädikatoren zutreffen. Wenn immer Φ zutrifft, fehlt Ψ, und umgekehrt. Was ein Reh ist, ist kein Hase; mithin sind '..ist-Hase' und '..ist-Reh' konträre Prädikatoren der einstelligen Art. Wenn jemand Sohn von jemandem ist, dann stehen die betrachteten Personenfolgen nicht auch im Tochterverhältnis zueinander; '..ist-Sohn-von..' und '..ist-Tochter-von..' sind demnach zueinander konträre Prädikatoren der zweistelligen Art. Ist Φ zu Ψ disjunkter Prädikator, dann gilt auch das Umgekehrte.

Wenn Φ Negatprädikator von Ψ ist, dann ist Φ auch zu Ψ disjunkter Prädikator. Diese Tatsache beruht darauf, dass die die Disjunktheit definierende Formel Konsequenz der die Negativität definierenden Formel ist. Das Umgekehrte ist jedoch nicht der Fall: So sind z.B. '..ist-Reh' und '..ist-Hase' zueinander keine Negatprädikatoren: Was nicht Hase ist, ist nicht schon deshalb ein Reh. Es ist das kontradiktorische Gegenteil also ein Spezialfall des konträren. – Die Darstellung der polarkonträren Prädikatoren macht Gebrauch von den strukturellen Eigenschaften und ist demzufolge erst später einzufügen (↑6.2.3).

Es sind Φ und Ψ X-exhaurierende Prädikatoren in *S*, wenn in *S* die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \vee \Psi(\xi_1, ..., \xi_n) \leftrightarrow X(\xi_1, ..., \xi_n))$ beweisbar ist. So exhaurieren '..ist-Bayer' und ‘..ist-deutscher-Nicht-Bayer’ den Prädikator ‘..ist-Deutscher’. Ebenso exhaurieren etwa ‘..ist-Vater-von..’ und ‘..ist-Mutter-von..’ den Prädikator ‘..ist-Elter-von..’.

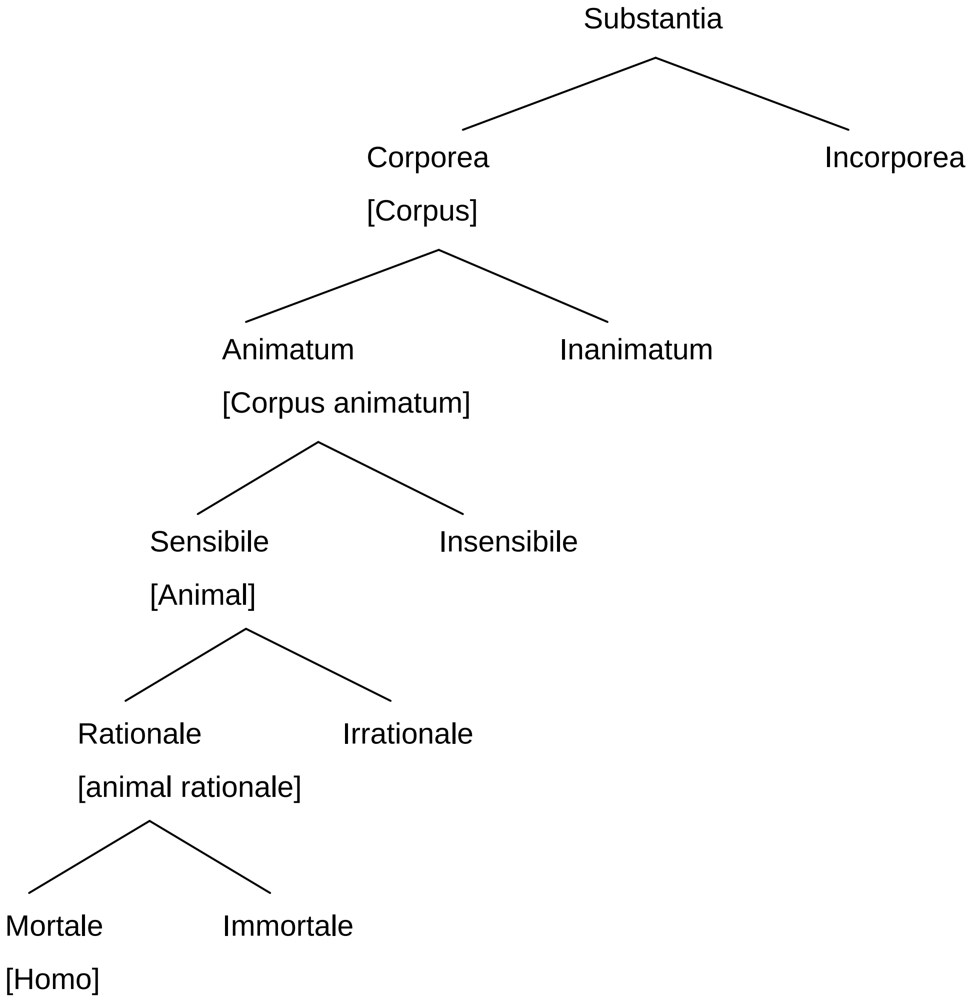
Exhaustivität, Disjunktheit und Exemplifizierbarkeit können zum Gedanken der Klassifikation zusammengeführt werden: Φ <u>und</u> Ψ <u>klassifizieren in</u> S X genau dann, wenn Φ und Ψ in S disjunkte Prädikatoren sind, Φ und Ψ in S X exhaustieren und Φ und Ψ in S exemplifizierbar sind. ‘..ist-männlich’ und ‘..ist-weiblich’ klassifizieren ‘..ist-Mensch’, ‘..ist-rot’ und ‘**I**z (¬ *z* ist rot)(..)’ klassifizieren ‘..ist-einfarbiger-Körper’, ‘..ist-Bruder-von..’ und ‘..ist-Schwester-von..’ klassifizieren ‘..ist-Geschwister-von..’.

Die Klassifikationsidee lässt sich in dem Sinne verallgemeinern, als n Prädikatoren Φ_1,..., Φ_n X klassifizieren, also paarweise disjunkt sind, gemeinsam X exhaurieren und außerdem exemplifizierbar sind. Zerlegen zwei bzw. drei Prädikatoren X, dann spricht man von einer <u>Dichotomie</u> bzw. von einer <u>Trichotomie</u>.

Man kann ferner Klassifikationen hintereinanderschalten; dann entstehen <u>Klassifikationsfolgen</u> bzw. <u>Klassifikationsbäume</u>, im besonderen Fall auch Folgen von Dichotomien. So wird unter [4] der Prädikator ‘..ist ein Prädikator’ durch ‘..ist ein extremer Prädikator’ und ‘..ist ein normaler Prädikator’ klassifiziert. Ferner wird ‘..ist ein extremer Prädikator’ durch ‘..ist ein universalexemplifizierbarer Prädikator’ und ‘..ist ein exempelfreier Prädikator’ klassifiziert. – Es empfiehlt sich, die genauere Charakterisierung von Klassifikation und Klassifikationsfolgen in einem bequemeren, expliziteren und insoweit leistungsfähigeren sprachlichen Rahmen vorzunehmen (↑ZUSATZ).

<u>Bemerkung</u>: Die historisch wohl bekannteste Dichotomisierungsfolge ist die „arbor porphyreana“, die sich (in überkommener Terminologie) so anschreiben lässt:

[7]



Im Kontext der traditionellen Logik dient der Klassifikationsbaum der Erläuterung des Verhältnisses von genus (Gattung) und species (Art). In der hier entwickelten Perspektive liegt eine sechsgliedrige Dichotonisierungssequenz vor: So bilden z.B. '..est-corpus-animatum' und '..est-corpus-inanimatum' eine Klassifikation von '..est-corpus'. Um im letzten Klassifikationsschritt beim rechten Glied die Exemplifizierbarkeitsforderung aufrechterhalten zu können, sind allerdings kühne theologische Spekulationen erforderlich.

Prädikatoren bilden in allen Sprachen ›Netze‹, ›Gewebe‹, ›Systeme‹, ›Gefüge‹, ›Landschaften‹, ›Territorien‹ usf.; und die dort herrschenden Verhältnisse lassen sich mit Hilfe der entwickelten Begriffe beschreiben. Dazu abschließend ein Beispiel aus der Gebrauchssprache. Der Prädikator '..ist-eine-Taschenuhr' besitzt konträre Prädikatoren, z.B. '..ist-eine-Turmuhr', '..ist eine Armbanduhr', oder '..ist-eine-Standuhr'. Die genannten Prädikatoren haben alle '..ist-eine-Uhr' zum Superprädikator, der seinerseits unverträglich mit '..ist-eine-Waage' und '..ist-ein-Zollstock' ist. Die letztgenannten Prädikatoren sind, gemeinsam mit '..ist-eine-Uhr', Subprädikatoren von '..ist-ein-Messgerät'. Dieser Ausdruck schließt wiederum '..ist-ein-Turngerät' und '..ist-ein-Schneidgerät' aus. Weitere Superprädikatoren dazu wären etwa '..ist-ein-Gerät' und sodann '..ist-ein-Artefakt'.

Geht man umgekehrt von '..ist-ein-Schneidgerät' ›nach unten‹, also zu Subprädikatoren, kommt man etwa zu '..ist-ein-Messer' bzw. '..ist-eine-Schere', die zueinander konträr sind. Subprädikator von '..ist-ein-Messer' wäre etwa '..ist-ein-Küchenmesser'; und dieser Redeteil hätte dann etwa die untereinander paarweise konträren Prädikatoren '..ist-ein-Tomatenmesser', '..ist-ein-Filetiermesser', '..ist-ein-Schinkenmesser' zu Subprädikatoren.

Ü5 a) Suchen Sie einen konversen Prädikator zu '..ist-Sohn-von..', '..ist-Großelter-von..', '..ist-Bruder-von..'!

b) Geben Sie eine wenigstens fünfgliedrige Dichotomisierungssequenz!

c) Beschreiben Sie ein kleineres Gewebe zweistelliger Prädikatoren aus einer Sprache Ihrer Wahl!

6.2.4 Strukturbezogene Prädikatorentypen

Die Darlegung der strukturbezogenen Prädikatorentypen konzentriert sich auf die zweistelligen Prädikatoren und gibt nur gelegentlich einen exemplarischen Hinweis auf Erweiterungen. Zweistellige Prädikatoren stellen Relationen dar; und es ist hilfreich, gelegentlich in materialer Redeweise von Relationen und dem Stehen-in-Relationen usf. zu sprechen. Ebenso fördert die Verwendung von Pfeildiagrammen den verständigen Mitvollzug.

Fragt man danach, ob beliebige Gebilde (einer bestimmten Sorte) zu sich selbst in der betrachteten X-Relation stehen, dann untersucht man X auf Reflexivität (6.2.4.1). Gilt das Interesse der Umkehrbarkeit einer Relation X, dann überprüft man X auf Symmetrie (6.2.4.2). Eigenschaften aus der Gruppe der Transitivität werden betrachtet, wenn – vergröbernd und nicht ganz korrekt ausgedrückt – jeweils drei beliebige Gebilde in ihrem Verhalten bezüglich einer Relation X untersucht werden (6.2.4.3). Wird das Problem aufgeworfen, ob zwischen beliebigen Gebilden die Relation X in wenigstens einer Richtung besteht, dann untersucht man X auf Konnexität (6.2.4.4). Fragt man danach, ob – wiederum vergröbernd – zwischen durch X aufeinander Bezogenen Identitäten vorliegen, dann untersucht man X auf Deutigkeit (6.2.4.5). Diese einfachen strukturellen Eigenschaften lassen sich zu komplexen zusammenfügen. Die Gleichheiten (6.2.4.6) sowie die Ordnungen (6.2.4.7) sind wegen ihres häufigen Vorkommens und wegen der mit ihnen gegebenen begriffsbildnerischen Möglichkeiten von überragender Bedeutung.

6.2.4.1 Die Reflexivitätsgruppe

Besitzt die X-Relation die Eigenschaft, dass ein jedes Gebilde zu sich in X steht? Bei affirmativer Antwort ist X totalreflexiv. Genauer: X ist in *S* totalreflexiv genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\ \xi X\xi$ in *S* wahr ist. Der Identitätsprädikator ist in allen Sprachen so festgelegt, dass die erwähnte Universalaussage gilt; insofern ist er das Musterbeispiel für einen totalreflexiven Prädikator. Ein weiteres Beispiel wäre etwa '..ist-kardinaläquivalent-zu..' in einer reinen Klassensprache. Ist der Redebereich einer Sprache beschränkt auf Menschen, dann wären auch die Prädikatoren '..ist-gleichalt..' oder '..ist-gleichgroß..' totalreflexiv in dieser Sprache.

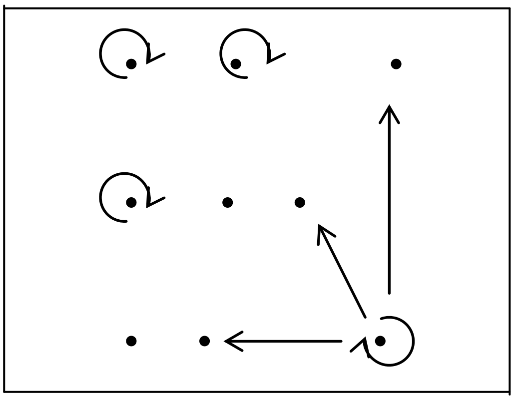
Bezüglich der Prädikatoren, die nicht totalreflexiv sind, ist die Gruppe auszuzeichnen, die das Zu-sich-in-X-stehen völlig ausschließen: X ist in *S* irreflexiv genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\ \neg\ \xi X\xi$ bzw. die negierte Partikularaussage $\neg\ \bigvee\xi\ \xi X\xi$ in *S* beweisbar ist. Beispiel für irreflexive Prädikatoren sind alle Komparative (wie etwa '..ist-länger/schwerer/früher/wärmer/klüger/freundlicher-als..' usf.), '..ist-Vorfahr-von..', '..ist..vorzuziehen/nachzusetzen', '..ist-verschieden-von..' bzw. '..≠..', '..ist-Hohlraum-in/durch..', '..ist-geboren-am..'. Diese Prädikatoren stellen zugleich Gegenbeispiele zu totalreflexiven Prädikatoren dar; umgekehrt sind die oben aufgeführten Prädikatoren Gegenbeispiele zur Irreflexivität.

Zahlreiche Prädikatoren sind nur für ein bestimmtes Gebiet (aus dem Gesamtredebereich) interessant. So will man etwa '..ist-gleichzeitig..' ausschließlich auf Ereignisse anwenden; und auf diese Gebilde wird man nicht die Prädikatoren '..ist-intelligenzgleich..' oder '..ist-ebenso-humorvoll-wie..' anwenden. So ist man auch für ein bestimmtes Gebiet daran interessiert, ob jedes Gebilde dieses Gebiets zu sich in der Relation X steht. Das ›Gebiet‹ wird durch einen einstelligen Prädikator Φ ins Spiel gebracht: Es ist X reflexiv auf Φ in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \rightarrow \xi X\xi)$ in *S* wahr ist.

Die Prädikatoren '..ist-richtungsgleich..', '..ist-gleichlang..', '..liebt..', '..ist-gattungsgleich..', sind reflexiv auf '..ist-Gerade', '..ist-kantentragender-Körper', '..ist-Mensch', '..ist-Lebewesen' in der geometrischen, physikalischen, aristotelischen, biologischen Sprache. – Für alle diese Beispiele gilt auch umgekehrt: Steht ein Gebilde zu einem Gebilde in der Relation, dann zählen sie auch zu dem einschlägigen Bereich. Nur wenn z.B. a und b auch Geraden sind, ist a richtungsgleich b. Allgemein kann man definieren: X ist geschlossen auf Φ in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega X\xi \rightarrow \Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi))$ in *S* wahr ist. Wenn eine Gleichheit – allgemeiner: eine Relation – sich ausschließlich auf einem Bereich Φ abspielt, wenn also alle und nur die durch X aufeinander Bezogenen auch Φ–Gegebenheiten sind, dann stellt Φ das Feld der X-Relation dar: Φ ist in *S* Feldprädikator bezüglich X genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \leftrightarrow \bigvee\omega\ (\omega X\xi \vee \xi X\omega))$ in *S* beweisbar ist. Φ ist in *S* Feldprädikator bezüglich X , falls X geschlossen und reflexiv auf Φ in *S* ist.

Betrachtet man den zweistelligen Prädikator '..rasiert..' unter der Reflexivitätsfrage – stehen alle/einige/alle (nicht) zu sich in der '..rasiert..'-Relation, dann ergibt sich: Einige rasieren sich selbst, andere nicht. Diejenigen, die sich nicht selbst rasieren, können von anderen rasiert werden, oder werden weder von sich noch von anderen rasiert. Diese Relation ist also auf '..Mensch' nicht reflexiv, aber sie ist auch nicht irreflexiv. Solche Prädikatoren besitzen eine Mittelstellung und werden gelegentlich als partimreflexiv angesprochen. Beschränkt man eine Sprache auf das Diskursuniversum, das durch '..ist-Mensch' fixiert ist, und symbolisiert man das Stehen-zu-sich durch einen Rückkehrpfeil, dann ergibt sich als Pfeildiagramm für die '..rasiert..'-Relation:

[6]



Totalreflexive Relationen werden so dargestellt, dass jedes Relat, d.h. jedes in der Relation stehende Gebilde, einen Rückkehrpfeil besitzt. Das besagt nicht – man denke an den Prädikator '..ist kardinaläquivalent..' –, dass zwischen verschiedenen Relaten kein Pfeil eingetragen werden kann. So sind z.B. die Klasse mit den Elementen 1 und 2 und die Klasse mit dem Kölner Dom und dem Eiffelturm als Elementen kardinaläquvalent, aber verschieden. Für den Identitätsprädikator gilt allerdings stets, dass zwischen den Relata kein Pfeil verläuft. Irreflexive Relationen enthalten keinen Rückkehrpfeil. Auf einem Bereich reflexive Relationen sind am Rückkehrpfeil in ihrem Territorium erkennbar.

Auf Basis der vorgenommenen Bestimmungen und unter Hinzuziehung der in den vorangegangenen Abschnitten zusammengestellten Begriffe ergeben sich Folgefragen, z.B. diese: Sind alle totalreflexiven Prädikatoren reflexiv? Unter welcher Bedingung sind reflexive Prädikatoren totalreflexiv? Sind Subprädikatoren totalreflexiver, reflexiver, irreflexiver Prädikatoren ihrerseits totalreflexiv, reflexiv, irreflexiv? Wie steht es mit den entsprechenden

Superprädikatoren? Bleibt die jeweilige Eigenschaft bei den konversen, den konträren, den kontradiktorischen Prädikatoren erhalten? Sind universale (zweistellige) Prädikatoren totalreflexiv? Sind umgekehrt totalreflexive Prädikatoren universale (zweistellige) Prädikatoren?

Eine umfassende Beantwortung dieser und anderer, hier ungestellter Fragen soll in einem bequemeren Sprachrahmen vorgenommen werden (↑ZUSATZ). Hier sind exemplarisch zwei Probleme aufzunehmen. Die Frage danach, ob Subprädikatoren irreflexiver Prädikatoren ihrerseits irreflexiv sind, lässt sich bejahen. Die ausformulierte Antwort lautet: Wenn Φ ein in *S* irreflexiver Prädikator ist und Ψ in *S* Subprädikator von Φ ist, dann ist Ψ in *S* irreflexiver Prädikator. Begründung: Sei $\Phi°$ ein in S irreflexiver Prädikator; dann ist definitionsgemäß die Aussage $\bigwedge\xi \neg \xi\Phi°\xi$ in S beweisbar. Sei ferner $\Psi°$ in S Subprädikator von $\Phi°$; dann ist die Aussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega\Psi°\xi \rightarrow \omega\Phi°\xi)$ in S beweisbar. Nun ist aber die Aussage $\bigwedge\xi \neg \xi\Psi°\xi$ in S Konsequenz der beiden erwähnten Universalaussagen; definitionsgemäß ist dann $\Psi°$ ein in S irreflexiver Prädikator.

Subprädikatoren totalreflexiver Prädikatoren oder auch auf einem Prädikator reflexiver Prädikatoren sind nicht notwendig reflexiv. Man denke, um ein schon erwähntes Beispiel zu wiederholen, an die Kardinaläquivalenz. Definiert man etwa einen neuen Prädikator ‘..ist kardinaläquivalent*..’ durch ‘..ist kardinaläquivalent $y \wedge x \neq y$’, verliert der so bestimmte Prädikator, der ersichtlich Subprädikator zu ‘..ist kardinaläquivalent..’ ist, die Reflexivität.

Ü6 a) Zeigen Sie, dass Φ Feldprädikator bezüglich X ist, falls X reflexiv auf Φ ist und X geschlossen auf Φ ist!

b) Zeigen Sie, dass X_1 in *S* totalreflexiver Prädikator ist genau dann, wenn X_2 in *S* totalreflexiver Prädikator ist, falls X_1 konverser Prädikator zu X_2 in *S* ist!

c) Untersuchen Sie, welche Reflexivitätseigenschaften ein exempelfreier zweistelliger Prädikator besitzt!

6.2.4.2 Die Symmetriegruppe

Die Frage, die zu den Unterscheidungen der Symmetriegruppe führt, lautet: Wie steht es um die Umkehrbarkeit der Beziehung? Genauer: Angenommen, eine Gegebenheit steht zu einer Gegebenheit in der X-Relation; gilt dann auch die Umkehrung? Wird diese Frage für beliebige Gegenstände bejaht, dann ist die X-Relation symmetrisch; wird sie hingegen für beliebige Gegenstände verneint, dann ist die X-Relation asymmetrisch.

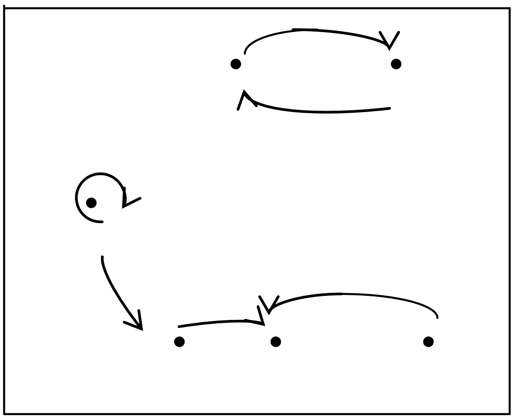
Im einzelnen: Es ist X ein symmetrischer Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega X\xi \rightarrow \xi X\omega)$ in *S* beweisbar ist. Der Identitätsprädikator, der Diversitätsprädikator, die Prädikatoren '..ist-gleichalt..', '..ist-Zeitgenosse-von..', '..ist-verwandt-mit..' sind symmetrische Redeteile. Die Intuition kann man sich auch in der anschaulichen Richtungssprechweise verdeutlichen: Besteht die X-Relation zwischen einem Gebilde und einem Gebilde in der einen Richtung, dann gilt sie auch in der Umkehrrichtung.

In Anknüpfung an diese Formulierung lässt sich die Asymmetrie so beschreiben: Besteht die X-Relation zwischen einem Gebilde und einem Gebilde in der einen Richtung, dann besteht sie keinesfalls in der Umkehrrichtung. Genauer: Es ist X ein asymmetrischer Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega X\xi \rightarrow \neg\ \xi X\omega)$ in *S* wahr ist. Falls irgendwelche Gebilde überhaupt in der X-Relation stehen, stehen sie nur in der einen Richtung in der Relation. Die bei Exemplifizierung der Irreflexivität aufgezählten Prädikatoren sind, mit Ausnahme des Diversitätsprädikators, zugleich Beispiele für asymmetrische Prädikatoren; die für symmetrische Prädikatoren gegebenen Beispiele sind hingegen Gegenbeispiele für Asymmetrie, und umgekehrt.

Auch diese Begriffsbildungen lassen sich für *n*-stellige Prädikatoren bezüglich der *i*-ten und der *k*-ten Stelle verallgemeinern. So ist etwa die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\bigwedge\zeta\ (X(\xi,\omega,\zeta) \rightarrow \neg\ X(\omega,\xi,\zeta))$ in einer geschichtsbezogenen Sprache für die Prädikatoren '..ist-Fortschritt-gegenüber..bezüglich..' und '..ist-Rückschritt-gegenüber..bezüglich..' beweisbar. Hier liegt Asymmetrie bezüglich der ersten und zweiten Stelle vor. Eben diese Eigenschaft besitzen auch die Prädikatoren '..liegt-links-von..bezüglich..' bzw. '..liegt-rechts-von..bezüglich..'; damit ist eine in den Startüberlegungen beanspruchte Begrifflichkeit geklärt (↑1.1.1).

Stellt man nun bezüglich der Liebesrelation bzw. bezüglich des Prädikators '..liebt..' die Symmetriefrage, dann lautet die (zunächst negative) Antwort: Es ist nicht der Fall, dass die Liebesrelation symmetrisch ist; denn gelegentlich bleibt die Liebe unerwidert. Es liegt aber auch keine Asymmetrie vor: Denn gelegentlich wird zurückgeliebt. Es gibt also – um zur positiven Antwort überzugehen – Gebilde *x,y,* so dass *x y* liebt , aber *y x* nicht liebt*;* aber es gibt auch Gebilde *x,y*, so dass *x y* liebt und auch *y x* liebt. Solche Relationen nennt man partimsymmetrisch. Stellt man das Bestehen einer X-Relation wiederum durch einen Pfeil dar, dann lässt sich die Pfeilfigur für eine partimsymmetrische Relation mit überschaubar wenigen Relata so wiedergeben:

[7]



Die dargestellte Liebesrelation ist zugleich partimreflexiv: Es sind Rück- und Umkehrpfeile vorhanden, aber auch Relata, von denen nur ein Pfeil ausgeht bzw. auf die nur ein Pfeil auftrifft, ohne dass die Umkehrrichtung realisiert ist.

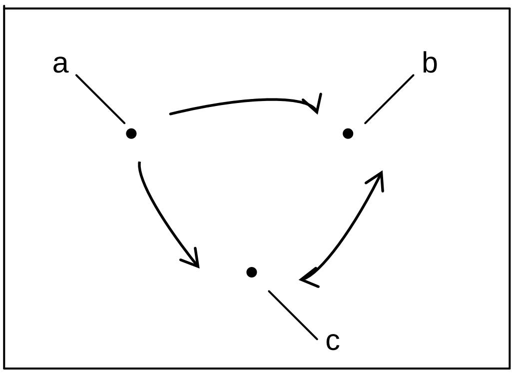
Führt der Umstand, dass eine Relation X zwischen einer Gegebenheit und einer Gegebenheit in beiden Richtungen besteht, dazu, dass die Bezogenen identisch sind, dann ist diese Relation antisymmetrisch. In kontraponierter Formulierung: Ist eine Gegebenheit von einer Gegebenheit verschieden, dann stehen sie in wenigstens einer Richtung nicht in der X-Beziehung. X ist ein in *S* antisymmetrischer Prädikator genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\xi X\omega \wedge \omega X\xi \rightarrow \omega = \xi)$ in *S* beweisbar ist. Der Teilklassenprädikator '..$\subseteq$..' ist ein in den üblichen Klassensprachen antisymmetrischer Prädikator; der Kleinergleich-Prädikator ist ein Beispiel aus der arithmetischen Sprache. Asymmetrische Relationen sind trivialerweise, d.h. wegen unerfülltem Antezedens, antisymmetrisch. Sowohl irreflexive wie auch antisymmetrische Relationen sind asymmetrisch.

Mit Blick auf die Ordnungsprädikatoren (↑6.2.4.7) ist zu definieren: X_1 ist ein bezüglich X_2 antisymmetrischer Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\xi X_1\omega \wedge \omega X_1\xi \rightarrow \omega X_2\xi)$ in *S* wahr ist. So ist etwa '..ist-nicht-schwerer-als..' bezüglich '..ist-gleich-schwer..' antisymmetrischer Prädikator in der physikalischen Sprache. Wird für X_2 der Identitätsprädikator gewählt, dann fällt die bezügliche Antisymmetrie mit der einfachen Antisymmetrie zusammen: Identitätsantisymmetrische Prädikatoren sind antisymmetrisch schlechthin.

Ebenso wie nach der Darstellung der Reflexivitätsgruppe ergeben sich eine Reihe von Folgefragen: Sind Sub- resp. Superprädikatoren symmetrischer, asymmetrischer, antisymmetrischer Prädikatoren ihrerseits symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch? Wie verhalten sich die konversen bzw. die Negatprädikatoren bei Gegebenheit einer Symmetrieeigenschaft. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen der Reflexivitäts- und der Symmetriegruppe? Genauer: Sind Eigenschaften der Symmetriegruppe hinreichende oder notwendige Bedingungen für Eigenschaften aus der Reflexivitätsguppe?

Der wichtigste Zusammenhang ist die Verknüpfung zwischen Asymmetrie und Irreflexivität. Wenn X in *S* asymmetrisch ist, dann ist X in *S* irreflexiv. Sei X° in *S* asymmetrisch; dann ist die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega X^{\circ}\xi \rightarrow \neg\ \xi X^{\circ}\omega)$ in *S* wahr. Nun ist aber die Aussage $\bigwedge\xi\ \neg\ \xi X^{\circ}\xi$ eine Konsequenz aus $\{\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega X^{\circ}\xi \rightarrow \neg\ \xi X^{\circ}\omega)\}$. Mithin ist X° in *S* auch irreflexiv. Ist die Asymmetrie eines Prädikators erkannt, dann braucht man sie auf Reflexivitätseigenschaften nicht mehr eigens zu untersuchen. Damit sind alle Beispiele für asymmetrische Relationen auch Beispiele für irreflexive Relationen. Natürlicherweise ergibt sich die Umkehrfrage: Erzeugt Irreflexivität auch Asymmetrie? Folgende Pfeilfigur (und auch der oben schon erwähnte Diversitätsprädikator) zeigt, dass die Antwort negativ ist:

[8]



Das Fehlen des Rückkehrpfeils zeigt die Irreflexivität an. Zwischen b und c besteht die Beziehung jedoch in beide Richtungen: Asymmetrie liegt demnach nicht vor. Die Relation kann man z.B. als '..bewundert..' eingeschränkt auf drei Personen a, b und c, deuten. Die vorgenommene Anführung irreflexiver Prädikatoren als Beispiele für Asymmetrie ist also nicht dadurch legitimiert, dass alle irreflexiven Prädikatoren auch asymmetrisch sind.

Ü7 Wenn es kein Gebilde gibt, das zu einer und zu dem eine beliebige Gegebenheit in einer Relation steht, dann ist diese asymmetrisch und irreflexiv.

- a) Geben Sie eine korrekte Formulierung dieses intuitiv artikulierten Sachverhalts!
- b) Liefern Sie einen Beweis!
- c) Suchen Sie drei Beispiele für asymmetrische Prädikatoren, die diese Bedingung erfüllen!

6.2.4.3 Die Transitivitätsgruppe

Das Transitivitätsszenario geht aus von (höchstens) drei beliebigen Gegebenheiten; zwischen diesen besteht die X-Relation so, dass eine Gegebenheit zweimal Relat ist. Gefragt ist dann, ob die beiden anderen Bezogenen ebenfalls in X stehen. Je nach Gestaltung der Ausgangsbezogenheit sind wiederum verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Ein Prädikator X ist transitiv in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\omega\, \mathrm{X}\, \xi \wedge \xi\, \mathrm{X}\, \zeta \rightarrow \omega\, \mathrm{X}\, \zeta)$ in *S* wahr ist. Geht, metaphorisch gesprochen, die Relation von einem ersten zu einem zweiten, um von dort zu einem dritten weiterzuführen, dann besteht auch eine ›Brücke‹ vom ersten zum dritten; das Pfeildiagramm enthält einen sogenannten Überbrückungspfeil. Fehlt dieser durchgehend, dann liegt Intransitivität vor: Es ist X ein intransitiver Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\omega\, \mathrm{X}\, \xi \wedge \xi\, \mathrm{X}\, \zeta \rightarrow \neg\, \omega\, \mathrm{X}\, \zeta)$ in *S* wahr ist.

Geht es bei der Transitivität um Überbrückung vom ersten zum dritten Relat, so ist es bei der Zirkularität um den Rücklauf vom dritten zum ersten Bezogenen zu tun, eben um das Sich-Schließen der Beziehungslinie: X ist ein zirkulärer Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\omega\, \mathrm{X}\, \xi \wedge \xi\, \mathrm{X}\, \zeta \rightarrow \zeta\, \mathrm{X}\, \omega)$ in *S* beweisbar ist.

Bei den komparativen bzw. drittengleichen Prädikatoren ist die Ausgangslage anders: Eine erste Gegebenheit steht zu einer zweiten sowie zu einer dritten in der Relation bzw. eine erste Gegebenheit steht zu einer zweiten und eine dritte steht ebenfalls zu der zweiten in der Relation; sind dann auch die im Antezedens nur über ein ›Drittes‹ Verknüpften durch die Relation im Sukzedens direkt verbunden, dann liegt Komparativität bzw. Drittengleichheit vor. Es ist X rechts- resp. linkskomparativ in *S* genau dann, wenn die Universalaussagen $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\omega\, \mathrm{X}\, \xi \wedge \zeta\, \mathrm{X}\, \xi \rightarrow \omega\, \mathrm{X}\, \zeta)$ bzw. $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\xi\, \mathrm{X}\, \omega \wedge \xi\, \mathrm{X}\, \zeta \rightarrow \omega\, \mathrm{X}\, \zeta)$ in *S* beweisbar sind.

Beispiele für Intransitivität sind die Prädikatoren '..ist(-direkter)-Nachfolger-von..' oder '..ist-Elter-von..'. Die Prädikatoren '..ist-kardinaläquivalent..', '..ist-gleichalt..', '..ist-gleichgroß..' sind transitiv, zirkulär, links- und rechtskomparativ. Dahingegen exemplifizieren die Redeteile '..>..', '..ist-schwerer-als..' zwar Transitivität, nicht aber die drei übrigen Eigenschaften. So ist '5 > 3' und '5 > 2', ohne dass damit auch schon '2 > 3' oder '2 > 5' wahr wäre.

Die beiden soeben betrachteten Beispielgruppen legen die Vermutung nahe, dass Transitivität, Zirkularität, Links- und Rechtskomparativität zusammenfallen, falls der betrachtete Prädikator X symmetrisch ist: Wenn X in *S* symmetrisch ist, dann gilt: X ist in *S* transitiv genau dann, wenn X in *S* linkskomparativ ist; genau dann, wenn X in *S* rechtskomparativ ist, genau dann, wenn X in *S* zirkulär ist. Für den Beweis dieser Behauptung wird neben der Voraussetzung insbesondere die Kommutativität des Konjunktors benötigt.

An dieser Stelle soll auch die Frage neuerlich aufgenommen werden, wie man die Irreflexivität verstärken muss, um die Asymmetrie zu erzwingen: Wenn X sowohl irreflexiver als auch transitiver Prädikator ist, dann ist X auch asymmetrischer Prädikator. Der Kern des Beweises rekurriert auf die Tatsache, dass die Aussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\xi\ X\ \omega \rightarrow \neg\ \omega\ X\ \xi\ )$ eine Konsequenz der Aussagenklasse $\{\bigwedge\xi \neg\ \xi\ \Pi\ \xi,\ \bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\xi\ (\omega\ X\ \xi \wedge \xi\ X\ \xi \rightarrow \omega\ X\ \xi)\}$ ist.

Ü8 a) Zeigen Sie, dass Links- und Rechtskomparativität voneinander unabhängige Eigenschaften sind, d.h. dass die definierenden Formeln sich gegenseitig nicht entscheiden!

b) Beweisen Sie die im Text formulierte Tatsache, dass Transitivität, Zirkularität, Rechtskomparativität und Linkskomparativität bei Gegebenheit von Symmetrie zusammenfallen!

c) In welchem Sinne ist die Frage nach Transitivität, Intransitivität und Zirkularität von Prädikatoren X trivial, für die die Aussage $\neg \bigvee\xi\ (\bigvee\omega\ \omega\ X\ \xi \wedge \bigvee\omega\ \xi\ X\ \omega)$ gilt?

6.2.4.4 Die Konnexitätsgruppe

Die für die Konnexität einschlägige Frage lautet: Stehen (höchstens) zwei beliebige Gebilde eines Gebietes Φ in wenigstens einer Richtung zueinander in der X-Relation? Es ist ein Prädikator X in *S* strikt konnex auf Φ genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X\ \xi \vee \xi\ X\ \omega)$ in *S* wahr ist. Anders formuliert: Wenn eine beliebige Φ-Gegebenheit zu einer beliebigen Φ-Gegebenheit nicht in X steht, dann steht die zweite zur ersten in X. Wenn X streng konnex auf Φ ist, dann ist X auch reflexiv auf Φ. Wie die folgende schematische Ableitung zeigt, ist nämlich die Aussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \rightarrow \xi\ X\ \xi)$ eine Konsequenz aus $\{\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X\ \xi \vee \xi\ X\ \omega)\}$.

[9] 1 Sei$_1$ $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X\ \xi \vee \xi\ X\ \omega)$

2 Sei$_{1,2}$ $\Phi(\beta)$

3 Also$_{1,2}$ $\Phi(\beta) \wedge \Phi(\beta)$

4 Also$_{1,2}$ $\beta\ X\ \beta \vee \beta\ X\ \beta$

5 Also$_{1,2}$ $\beta\ X\ \beta$

6 Also$_1$ $\Phi(\beta) \rightarrow \beta\ X\ \beta$

7 Also$_1$ $\bigwedge\omega\ (\Phi(\omega) \rightarrow \omega\ X\ \omega)$

Der Kern der Begründung ist dieser: Da beliebig gegriffene Φ-Gebilde in wenigstens einer Richtung in X stehen, steht ein einziges, aber zweimal gegriffenes Gebilde in jedem Fall zu sich in der Beziehung.

Es ist X ein auf Φ konnexer Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X\ \xi \vee \omega = \xi \vee \xi\ X\ \omega)$ in *S* wahr ist. Die Konnexität ist eine Abschwächung der strikten Konnexität, insoweit das Sukzedens eine dritte Option enthält. Gemeinsam mit der Reflexivität erzwingt sie jedoch die strikte Konnexität.

Die Prädikatoren '..>..' und '..<..' sind konnex auf '..ist-eine-natürliche-Zahl'. Sie sind allerdings nicht strikt konnex: Keine natürliche Zahl steht nämlich zu sich selbst in der '..>..'-resp. '..<..'-Beziehung. Demgegenüber sind '..≥..' und '..≤..' streng konnex auf '..ist-eine-natürliche-Zahl'. – Die Bespiele geben Anlass zu folgender Konversenvermutung, die auch beweisbar ist: Wenn X_1 ein konverser Prädikator zu X_2 ist, dann gilt: X_1 ist auf Φ konnexer bzw. strikt konnexer Prädikator genau dann, wenn X_2 auf Φ konnexer bzw. strikt konnexer Prädikator ist.

Schließlich ist noch eine Abschwächung der Konnexität zu definieren, die dadurch entsteht, dass der Identitätsprädikator durch einen beliebigen zweistelligen Prädikator ersetzt wird; der definierte Prädikator wird dadurch vierstellig: X_1 ist X_2-konnex auf Φ in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X_1\ \xi \vee \omega\ X_2\ \xi \vee \xi\ X_1\ \omega)$ in *S* gilt. Es ist z.B. der Prädikator '..älter..' bzgl. des Prädikators '..gleichalt..' konnex auf '..ist-Mensch' in der deutschen Gebrauchssprache.

Mit Blick auf die Ordnungsprädikatoren ist ein letzter Begriff zu charakterisieren: Es ist X_1 in *S* X_2-extensionaler Prädikator genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1\bigwedge\omega_1\bigwedge\xi_2\bigwedge\omega_2\ (\xi_1\ X_2\ \omega_1 \wedge \xi_2\ X_2\ \omega_2 \wedge \xi_1\ X_1\ \xi_2 \rightarrow \omega_1\ X_1\ \omega_2)$ in *S* gilt. Es ist z.B. der Kleiner- oder der Größerprädikator ein zum Identitätsprädikator extensionaler Prädikator. Ebenso ist etwa der Schwerer-Prädikator ein zum Gleichschwer-Pädikator extensionaler Prädikator.

Ü9 a) Konnexität und Reflexivität erzwingen strikte Konnexität.

- aa) Geben Sie eine korrekte Formulierung dieses intuitiv artikulierten Sachverhalts!
- ab) Liefern Sie einen Beweis!

b) Beweisen Sie die oben formulierte Konversenvermutung!

c) Suchen Sie je zwei Beispiele für strikt konnexe, konnexe und X-konnexe Prädikatoren!

6.2.4.5 Die Deutigkeitsgruppe

Im Deutigkeitsszenario betrachtet man, ebenso wie bei den Transitivitätseigenschaften, (höchstens) drei beliebige Gegebenheiten, so aber, dass auf der linken bzw. auf der rechten Seite der X-Relation dasselbe Relatum steht; gefragt wird dann danach, ob die beiden übrigen Relata identisch sind. Bei bejahender Antwort steht zu selbigem Relatum höchstens eine Gegebenheit in der Relation bzw. steht selbiges Relatum zu höchstens einer Gegebenheit in der Relation; im ersten Fall liegt Links-, im zweiten Fall liegt Rechtseindeutigkeit vor.

Genauer (und unter Umsteuerung bei der informellen Erläuterung unvermeidbarer Inkorrektheiten): Ein – auch hier zweistelliger – Prädikator X ist in *S* linkseindeutig genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X\ \zeta \wedge \xi\ X\ \zeta \rightarrow \omega = \xi)$ in *S* wahr ist; zu beliebigem ζ steht also allenfalls eine Gegebenheit in X. Es ist X hingegen rechtseindeutig in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\zeta\ X\ \omega \wedge \zeta\ X\ \xi \rightarrow \omega = \xi)$ in *S* beweisbar ist; beliebiges ζ steht mithin zu allenfalls einer Gegebenheit in X.

Die Prädikatoren '..ist-Mutter-von..' und '..ist-Vater-von..' sind in der biologischen Verwandtschaftssprache linkseindeutig, aber nicht rechtseindeutig; es kann nämlich eine Mutter bzw. ein Vater mehrere Kinder haben. Ebenso stellt der Prädikator '..ist-Preis-von..' in der ökonomischen Sprache einen links-, aber keinen rechtseindeutigen Prädikator dar; es können nämlich verschiedene Waren mit demselben Preis ausgezeichnet sein. – Die Prädikatoren '..ist-geboren-am..' und '..ist-geboren-in..' sind Beispiele für rechtseindeutige Prädikatoren in der Gebrauchssprache. Sie sind jedoch nicht linkseindeutig; denn es können verschiedene Lebewesen am selben Ort und zur selben Zeit geboren sein.

Manche Prädikatoren sind sowohl links- wie auch rechtseindeutig, z.B. '..ist-Fingerabdruck-von..', '..ist-Geburtsregisternummer-von..', '..ist-Nachfolger-von..', aber auch '..=..'. Es wird definiert: X ist eineindeutig in *S* genau dann, wenn X in *S* sowohl links- als auch rechtseindeutig ist. X ist in *S* hingegen eindeutig genau dann, wenn X in *S* links- oder rechtseindeutig ist. – Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, dass es auch Prädikatoren gibt, die nicht eindeutig sind, also weder links- noch rechtseindeutig. Beispiele für solche mehrmehrdeutigen Prädikatoren wären etwa aus der Gebrauchssprache ‘..ist-befreundet-mit..’ oder ‘..ist-sympathischer-als..’. Der Größer- und der Teilklassenprädikator exemplifizieren in der mathematischen Sprache Mehrmehrdeutigkeit.

Wenn X_1 ein in *S* links-, rechts-, einein- resp. eindeutiger Prädikator ist und X_2 in *S* Subprädikator von X_1, dann ist auch X_2 ein in *S* links-, rechts-, einein- resp. eindeutiger Prädikator. Sei zunächst X_1° ein in S linkseindeutiger Prädikator; dann ist definitionsgemäß $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X_1^\circ\ \zeta \wedge \xi\ X_1^\circ\ \zeta \rightarrow \omega = \xi)$ in S wahr. Sei ferner X_2° Subprädikator von X_1° in S; dann ist die Aussage $\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\xi\ X_2^\circ\zeta \rightarrow \xi X_1^\circ\zeta)$ in S wahr. Nun ist aber die Definitionsformel für die Linkseindeutigkeit von X_2°, also die Aussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X_2^\circ\ \zeta \wedge \xi\ X_2^\circ\ \zeta \rightarrow \omega = \xi)$, eine Konsequenz aus der Klasse der bei der Voraussetzungsauflösung erwähnten Aussagen. Mithin ist X_2° linkseindeutig in S. – Die Rechtseindeutigkeit wird analog begründet; Eindeutigkeit und Eineindeutigkeit ergeben sich aus den Resultaten für Links- und Rechtseindeutigkeit.

Zwei weitere Tatsachen sind festzuhalten: Wenn X_1 ein in *S* links-, rechts-, einein- resp. eindeutiger Prädikator ist und X_2 in *S* ein zu X_1 konverser Prädikator ist, dann ist X_2 ein in *S* rechts-, links-, einein- resp. eindeutiger Prädikator; so ist z.B. ‘..ist-Mutter-von..’ links-eindeutig und der Prädikator ‘..hat-zum-weiblichen-Elternteil..’ ist rechtseindeutig. – Wenn X_1 sowie X_2 in *S* links-, rechts- resp. eineindeutige Prädikatoren sind, dann ist $\mathbf{I}\xi,\omega\ (\bigvee\zeta\ (\omega\ X_1\ \zeta \wedge \zeta\ X_2\xi)$ (..,..) ebenfalls links-, rechts- resp. eineindeutiger Prädikator in *S*. Es sind z.B. ‘..ist-Mutter-von..’ und ‘..ist-Vater-von..’ linkseindeutige Prädikatoren der biologischen Verwandtschaftssprache; damit ist auch ‘$\mathbf{I}x,y$ ($\bigvee z$ (*x* ist Mutter von *z* $\wedge$ *z* ist Vater von *y*)) (..,..)’, definitorisch abgekürzt durch ‘..ist-Großmutter-väterlicherseits-von..’, ein linkseindeutiger Prädikator.

Ü10 a) Suchen Sie aus einer Sprache Ihrer Wahl je zwei Beispiele für links-, rechts- und eineindeutige Prädikatoren!

b) Beweisen Sie für eine Deutigkeitseigenschaft das Konversenlemma!

6.2.4.6 Gleichheitsprädikatoren

Einzelne Prädikatoren können Eigenschaften der verschiedenen Gruppen auf sich vereinigen. Es wurde schon dargelegt, dass asymmetrische Prädikatoren auch irreflexiv sein müssen und dass Transitivität und Irreflexivität Asymmetrie nach sich zieht. Von besonderem Interesse sind u.a. solche Prädikatoren, die auf Φ geschlossen und reflexiv sind, ferner symmetrisch und transitiv; diese Redeteile nennt man auch Gleichheits- oder Äquivalenzprädikatoren.

Das besondere Interesse beruht auf (wenigstens) zwei Umständen: Zum einen finden sich Gleichheitsprädikatoren in allen Bereichen an ausgezeichneter Stelle. Dies mag repräsentativ und in materialer Sprechweise belegt werden: Die Verwendungsgleichheit resp. Synonymie zwischen Ausdrücken, die Beschreibungsgleichheit zwischen Aussagen, die Bezeichnungsgleichheit zwischen Nominatoren, die Vollzugsgleichheit zwischen Einzelhandlungen, die Typgleichheit unter Zeichentoken sind Beispiele (vornehmlich) aus der (Sprach)Philosophie. Die Zählgleichheit zwischen Ziffern, die Koextensität zwischen Prädikatoren, die Gleichmächtigkeit zwischen Klassen, die Parallelität zwischen Geraden sind Beispiele aus der Mathematik. Die Gewichtsgleichheit zwischen Körpern, die Gleichzeitigkeit zwischen Ereignissen, die Artgleichheit von Lebewesen, die Längengleichheit von kantentragenden Körpern, die Stoffgleichheit von Proben sind Beispiele aus den Naturwissenschaften.

Zum anderen geben derartige Gleichheiten Anlass zu einem ›Übergang‹ zu (sogenannten) ›Abstrakta‹: von der Synonymie zur Bedeutung, von der Beschreibungsgleichheit zum Sachverhalt, von der Bezeichnungsgleichheit zum Gegenstand, von der Vollzugsgleichheit zum Handlungsschema, von der Typgleichheit zum Zeichentyp, von der Zählgleichheit zur Zahl, von der Koextensität zur Klasse/Extension, von der Gleichmächtigkeit zur Anzahl, von der Parallelität zur Richtung, von der Gewichtsgleichheit zum Gewicht, von der Gleichzeitigkeit zum Zeitpunkt, von der Artgleichheit zur Art, von der Längengleichheit zu Längen, von der Stoffgleichheit zu Stoffen.

Der Übergang zu den Abstrakta wird hier nicht behandelt, aber im Zusammenhang mit der Behandlung des Universalien (↑6.3.3) exemplarisch vollzogen. An dieser Stelle geht es nur um eine vielseitige Charakterisierung der Gleichheitsprädikatoren. Diese beruht auf folgendem Hauptsatz der Gleichheitslehre:

[10] Wenn *S* eine Sprache erster Stufe ist und X ein zweistelliger Prädikator von *S* und Φ ein einstelliger Prädikator von *S* ist, dann gilt:

Die Aussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \leftrightarrow \Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \wedge \bigwedge\zeta(\xi\ \mathrm{X}\ \omega \leftrightarrow \zeta\ \mathrm{X}\ \xi))$ ist in *S* wahr

gdw

X ist geschlossen auf Φ in *S* und X ist reflexiv auf Φ in *S* und X ist rechtskomparativ in *S*

gdw

X ist geschlossen auf Φ in *S* und X ist reflexiv auf Φ in *S* und X ist linkskomparativ in *S*

gdw

X ist geschlossen auf Φ in *S* und X ist reflexiv auf Φ in *S* und X ist zirkulär in *S*

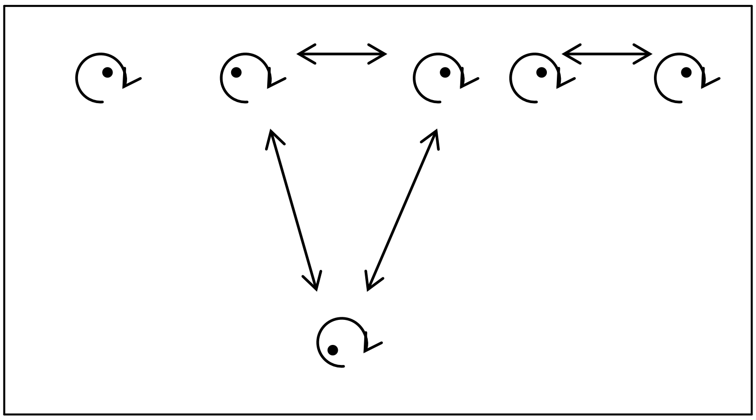
gdw

X ist geschlossen auf Φ in *S* und X ist reflexiv auf Φ in *S* und X ist symmetrisch in *S* und X ist transitiv in *S*

Die geläufigste und oben schon erwähnte Definition der Gleichheitsprädikatoren lautet: X ist in *S* Gleichheitprädikator auf Φ genau dann, wenn X in *S* geschlossener Prädikator auf Φ ist und X ist in *S* reflexiver Prädikator auf Φ und X ist in *S* symmetrischer und transitiver Prädikator. Zufolge des Hauptsatzes könnte man auch eine der vier anderen Bisubjunkte als Definiens wählen. – Wenn X_1 Gleichheitprädikator auf Φ in *S* ist und X_2 zu X_1 konverser Prädikator in *S* ist, dann ist auch X_2 in *S* Gleichheitprädikator auf Φ.

Für Gleichheiten ergibt sich (bei Wahl von überschaubar wenigen Φ-Dingen) folgende Pfeilfigur:

[11]



Gleichheiten neigen ersichtlich zu maximaler Gruppen- bzw. Zellenbildung: Alle Mitglieder der Zelle stehen untereinander in der Gleichheit, jedoch zu keinem Mitglieder einer anderen Zelle. Dieser Aspekt kommt sehr klar in der LR-Lesung der ersten Charakterisierung zum

Ausdruck: Wenn ein ϑ_1-Gegenstand zu einem ϑ_2-Gegenstand in X steht, dann gilt für beliebige Gebilde, dass sie genau dann zu ϑ_1 in X stehen, wenn sie auch zu ϑ_2 in X stehen. Anders: Stehen Gebilde zueinander in X, dann verhalten sie sich zu allen Gegebenheiten auf der X-Schiene gleich.

Der erwähnte Abstraktionsschritt besteht nun darin, dass man den Mitgliedern einer Zelle jeweils das selbe Abstraktum zuordnet, z.B. den jeweils gewichtsgleichen Körpern dasselbe Gewicht und den jeweils synonymen Ausdrücken dieselbe Bedeutung. Die verschiedenen Abstraktionsverfahren unterscheiden sich (u.a.) in der Regulierung dieses Übergangs. Im Zuge der klassensprachlichen Abstraktion wird das Abstraktum z.B. mit der jeweiligen Äquivalenzklasse identifiziert. Die Bedeutung eines Ausdrucks μ ist dann die Klasse der zu μ bedeutungsgleichen Ausdrücke.

Totale Gleichheiten entbehren der Φ-Beschränkung: Es ist X totaler Gleichheitsprädikator in *S* genau dann, wenn X totalreflexiver, symmetrischer und transitiver Prädikator in *S* ist; das ist wiederum genau dann der Fall, wenn X totalreflexiver und linkskomparativer Prädikator in *S* ist bzw. wenn X totalreflexiver und zirkulärer Prädikator in *S* ist; das trifft wiederum genau dann zu, wenn die Aussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \leftrightarrow \bigwedge\zeta\ (\zeta\ \mathrm{X}\ \omega \leftrightarrow \zeta\ \mathrm{X}\ \xi)$ in *S* wahr ist. – Beispiele für totale Gleichheitsprädikatoren sind die Identitätsprädikatoren in jeder Sprache sowie der Prädikator '..ist-gleichmächtig-mit..' in Klassensprachen. Der Identitätsprädikator in einer Sprache ist Subprädikator eines jeden totalreflexiven Prädikators in dieser Sprache.

Ü11 a) Suchen Sie wenigstens vier weitere Gleichheitsprädikatoren!

b) Beweisen Sie den Hauptsatz der Gleichheitslehre!

6.2.4.7 Ordnungsprädikatoren

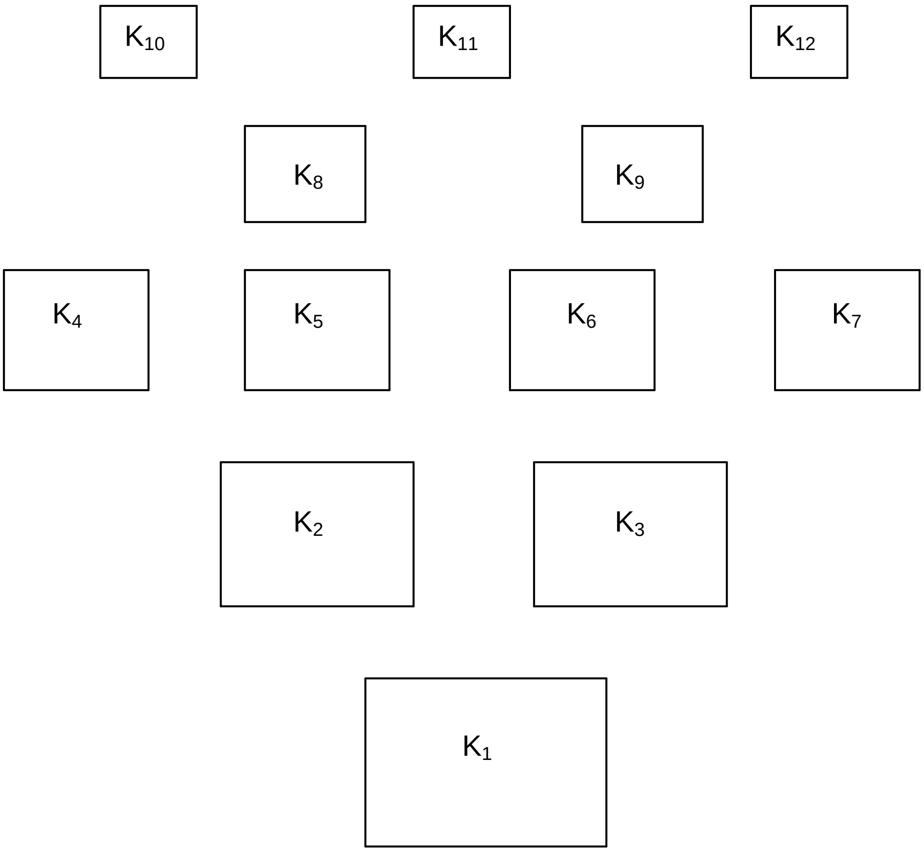
Ein zweistelliger Prädikator X einer Sprache *S* ist ein partieller Ordnungsprädikator genau dann, wenn X in *S* antisymmetrisch und transitiv ist, wenn also die Aussagen $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \wedge \xi\ \mathrm{X}\ \omega \rightarrow \omega = \xi)$ und $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\bigwedge\zeta\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \wedge \xi\ \mathrm{X}\ \zeta \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \zeta)$ in *S* gelten. X ist in *S* ein totaler Ordnungsprädikator auf Φ genau dann, wenn X in *S* partieller Ordnungsprädikator ist und wenn X zudem auf Φ konnex ist, wenn also $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \xi \vee \omega = \xi \vee \xi\ \mathrm{X}\ \omega)$ in *S* wahr ist, und wenn X auf Φ in *S* geschlossen ist.

Der Teilklassenprädikator '..$\subseteq$..' und der Kleinergleichprädikator '..$\leq$..' exemplifizieren partielle Ordnungsprädikatoren, die zusätzlich totalreflexiv bzw. auf geeignet gewählten Prädikatoren reflexiv sind. '..$\leq$..' ist zudem ein totaler Ordnungsprädikator auf 'Natürliche-Zahl(..)', weil die Aussage '$\bigwedge x\bigwedge y$ (Natürliche-Zahl(x) $\wedge$ Natürliche-Zahl(y) $\rightarrow x \leq y \vee x = y \vee y \leq x$)' in der arithmetischen Sprache wahr ist und ferner Geschlossenheit auf ‘Natürliche-Zahl(..)’ vorliegt. Eine entsprechende Konnexitätseigenschaft gilt hingegen nicht für den Teilklassenprädikator, weil Klassen z.B. auch kein Element gemeinsam haben können und deshalb weder Identität noch Teilklassenschaft in eine Richtung vorliegt. Der echte Teilklassenprädikator ‘..$\subset$..’ und der Kleinerprädikator ‘..<..’ stellen ebenfalls partielle Ordnungsprädikatoren dar. ‘..<..’ ist zudem totaler Ordnungsprädikator auf ‘Natürliche-Zahl(..)’; der (echte) Teilklassenprädikator ist hingegen kein totaler Ordnungsprädikator. – Die Elemente der ersten Beispielgruppe sind zusätzlich reflexiv, die der zweiten sind irreflexiv. Reflexivität und Irreflexivität tragen nichts zum Ordnungscharakter eines Prädikators bei; desungeachtet bilden reflexive und irreflexive Prädikatoren die hauptsächlich untersuchten Ordnungsprädikatoren.

Es formt X_1 mit X_2 auf Φ in S eine Quasireihe genau dann, wenn X_2 auf Φ ein Gleichheitsprädikator in S ist, X_1 in S bzgl. Φ geschlossen ist, X_1 transitiv in S ist und ferner X_1 in S X_2-antisymmetrisch, X_2-konnex und X_2-extensional ist. So bildet etwa ‘Ist-Schwerer-als(..,..)’ mit ‘Ist-Gleichschwer(..,..)’ auf ‘Ist-wägbarer-Gegenstand(..)’ in der physikalischen Sprache eine Quasireihe, denn: ‘Ist-Gleichschwer(..,..)’ ist Gleichheitsprädikator auf ‘Ist-wägbarer-Gegenstand(..)’, ‘Ist-Schwerer-als(..,..)’ ist geschlossen auf ‘Ist-wägbarer-Gegenstand(..)’, d.h. alles, was in der Schwerer-Beziehung steht, ist ein wägbarer Körper, ‘Ist-Schwerer-als(..,..)’ ist transitiv, und ferner gelten in der physikalischen Sprache folgende Aussagen: ‘$\bigwedge x \bigwedge y$ (Ist-Schwerer-als(x, y) $\wedge$ Ist-Schwerer-als(y, x) $\rightarrow$ Ist-Gleichschwer(x, y))’ (=Antisymmetrie), ‘$\bigwedge x \bigwedge y$ (Wägbarer-Körper(x) $\wedge$ Wägbarer-Körper(y) $\rightarrow$ Schwerer-als(x, y) $\vee$ Ist-Gleichschwer(x, y) $\vee$ Schwerer-als(y, x))’ (=Konnexität), ‘$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \bigwedge u$ (Ist-Gleichschwer(x, y) $\wedge$ Ist-Gleichschwer(z, u) $\wedge$ Schwerer-als(x, z) $\rightarrow$ Schwerer-als(y, u))’ (=Extensionalität). – Auch der Prädikator ‘Nicht-leichter-als(..,..)’ bildet mit ‘Ist-Gleichschwer(..,..)’ eine Quasireihe.

Die begrifflich dargestellten Verhältnisse sollen im (modifizierten) Pfeildiagramm visualisiert werden. Dazu wird das Universum der wägbaren Körper auf zwölf beschränkt; der Gleichheitsprädikator wird durch das Angeordnetsein der jeweils gleichschweren Körper auf einer Ebene signalisiert; Körper auf einer Ebene bilden also die Gleichheitszellen. Der Schwererprädikator wird durch das Angeordnetsein auf einer tieferen Ebene signalisiert: Liegt K_i tiefer K_j, dann ist K_i schwerer als K_j. Dabei ist das Tieferliegen nicht nur das unmittelbare, sondern auch das vermittelte Tieferliegen:

[12]



Der Φ-Prädikator dieser Quasireihe ist so umrissen, dass alle und nur die $K_1,...,K_{12}$ dazugehören. In der Schwererrelation stehen z.B. K_8 zu K_{10} und K_1 zu allen übrigen Körpern. In der Gleichschwerbeziehung stehen z.B. K_4 zu K_7 und K_2 zu sich selbst. Der Schwererprädikator bildet den Reihenteil. Zu den Eigenschaften, die den Reihen- und den Gleichheitsteil verbinden: Die Antisymmetrie gilt trivial: Für kein K_i und K_j gilt, dass K_i schwerer ist als K_j und umgekehrt. Die Konnexität: Für beliebige Körper gilt, dass der eine schwerer, gleichschwer oder leichter ist als der andere; bei K_1 und K_8 tritt der erste, bei K_1 und K_5 der zweite und bei K_6 und K_3 der dritte Fall ein. Die Extensionalität: Es ist K_8 gleichschwer K_9 und K_2 gleichschwer K_3 sowie K_2 schwerer als K_8; damit ist auch K_3 schwerer als K_9.

Die Struktur der Quasireihe findet sich in allen Bereichen: So formen z.B. 'Reicher-als(..,..)', 'Intellegenter-als(..,..)', 'Empfindlicher-als(..,..)', 'Älter-als(..,..)' mit 'Ebenso-reich-wie(..,..)', 'Ebenso-intellegent-wie(..,..)', 'Ebenso-empfindlich-wie(..,..)', 'Ebenso-alt-wie(..,..)' auf 'Ist-Mensch(..)' eine Quasireihe. Es verwundert daher nicht nur nicht, sondern es ist vielmehr ein Gebot der intellektuellen Ökonomie, derartige Strukturen als solche (und nicht als einzelne) zu untersuchen; das geschieht in der (alte Terminologie) metaphysica generalis bzw. in der (neue Sprechweise) (Struktur)Mathematik. Solche Überlegungen schaffen zugleich die (strukturellen) Grundlagen für die Metrisierung, eine spezielle Form der Begriffsbildung, die der Messpraxis, der Messung, zugrunde liegt.

Früher wurden konträre Prädikatorenpaare Φ, Ψ so charakterisiert, dass sie nicht zusammen auf einen Gegenstand bzw. eine Gegenstandssequenz zutreffen können (↑6.2.3). Ein Spezialfall konträrer Prädikatoren sind die polarkonträren, die an die Quasireihenprädikatoren rückgebunden sind.

Die Intuition: Sei eine Quasireihe durch die Reihen- und die Gleichheitsrelation gegeben; dann kann man zwei einander gegenüberstehende ›polare‹ Eigenschaften dadurch bestimmen, dass man im unteren resp. oberen Segment der Quasireihe je einen Gegenstand auswählt und die Eigenschaft dann zuschreibt, wenn ein Reihen- oder Gleichheitsverhältnis zu dem ausgewählten Gegenstand besteht. Dabei ist für die Polarität wichtig, dass ein ›Abstand‹ zwischen den Standardgegenständen besteht, dass also wenigstens eine ›Schicht‹ zwischen den Standardgegenständen liegt.

Ein Beispiel: Gelten etwa die Aussagen '$\bigwedge x$ (Schwer(x) $\leftrightarrow$ Gleichschwer(x, K_3) $\vee$ Schwerer(x, K_3))' sowie '$\bigwedge x$ (Leicht(x) $\leftrightarrow$ Gleichschwer(x, K_9) $\vee$ Schwerer(K_9, x))', dann sind 'Schwer(..)' und 'Leicht(..)' polarkonträre Prädikatoren relativ auf die exemplarischen Quasireihenprädikatoren. Die K_4-Schicht sichert in diesem Fall die Polarität: Es gibt Körper, die weder leicht noch schwer sind.

Weitere Beispiele wären etwa (bei Unterstellung einer geeigneten Quasireihe) 'Klein(..)' und 'Groß(..)', 'Kurz(..)' und 'Lang(..)', 'Gut(..)' und 'Schlecht(..)', 'Heiß(..)' und 'Kalt(..)', 'Jung(..)' und 'Alt(..)'. – Eine präzise Charakterisierung polarkonträrer Prädikatorenpaare bedürfte weiterer Redemittel, die in diesem Rahmen nur umständlich bereitzustellen sind (↑ZUSATZ).

Die informelle Charakterisierung polarkonträrer Prädikatoren genügt allerdings schon, um eine weitere Taktik zur Inkonsistenzbeseitigung bereitzustellen: Wird etwa auf 'Schwer(dies-da)' und 'Leicht(dies-da)' erkannt, damit aber wegen '$\bigwedge x$ (Schwer(x) $\rightarrow$ $\neg$ Leicht(x))' 'Leicht(dies-da)' und '$\neg$ Leicht(dies-da)' in Kauf genommen, dann ist zu überprüfen, ob die beteiligten Parteien die maßgeblichen Standardgegenstände übereinstimmend gewählt haben. – Eine weiter Fehlerquelle ist die (unzulässige) Mehrfachbestimmung: 'Schwer(..)' und 'Leicht(..)' werden zunächst vor der Etablierung von 'Schwerer(..,..)' und 'Gleichschwer(..,..)' bestimmt oder in bestimmter Weise verwendet, um später mit Rückgriff auf die Quasireihe charakterisiert zu werden. Ein solches Vorgehen wäre nur zulässig, wenn man im Anschluss an die zweite Charakterisierung einen entsprechenden Verträglichkeitsnachweis führt (↑11.).

Der Kontext gibt Anlass, auf eine weitere Inkonsistenzgenese hinzuweisen, die sich dem Wechsel und dem anschließenden Ineinanderschieben der durch Φ angegebenen Grundbereiche verdankt: Der Dackel Siggi ist schwer, der Elefant Willi ist leicht. Was schwer ist, ist schwerer als alles, was leicht ist. Also ist der Dackel Siggi schwerer als der Elefant Willi. Das wiederum trifft nicht zu: Widerspruch! Die Lösung ist klar. Die polarkonträren Prädikatoren sind auf Quasireihen mit verschiedenem, durch 'Dackel(..)' und 'Elefant(..)' charakterisierten, Grundbereich bezogen. Die Weglassung des Grundbereichs bleibt unproblematisch, solange die Redeumgebung erkennen lässt, von welchen Dingen das Schwer- bzw. das Leichtsein ausgesagt wird; das unbemerkte Ineinanderschieben der Grundbereiche zeitigt hingegen Inkonsistenz.

Ü12 a) Suchen Sie fünf weitere Beispiele für Quasireihen!

b) Suchen Sie vier weitere polarkonträre Prädikatorenpaare!

c) Beweisen Sie folgendes Theorem: X ist in *S* genau dann ein totaler Ordnungsprädikator auf Φ, wenn X mit $\mathbf{I}\xi\omega\,(\xi = \omega \wedge \Phi(\xi))$ (..,..) auf Φ in *S* eine Quasireihe bildet.

d) Untersuchen Sie die strukturbezogenen Eigenschaften sowie die systembezogenen Zusammenhänge der Längenrede, also der Prädikatoren '..ist-gleichlang-wie..', '..ist-länger-als..', '..ist-höchstens-so-lang-wie..', '..ist-mindestens-so-lang-wie..', '..ist-gleichkurz-wie..', '..ist kürzer-als..', '..ist-höchstens-so-kurz-wie..', '..ist-mindestens-so-kurz-wie..'; dabei fungiere '..ist-kantentragender-Körper' als Bereichsprädikator! – Suchen Sie ferner die (zahlreichen) gebrauchssprachlichen Synonyme zu diesen Redeteilen!

6.2.5 Tafel der exemplar-, system- und strukturbezogenen Definitionen

Die nachfolgende Liste präsentiert die Definitionen der Abschnitte 6.2.2 bis 6.2.4 zur besseren Übersicht. Es handelt sich durchweg um bedingte Charakterisierungen. Jede Bedingung gilt bis zur nächsten:

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe und Φ ein *n*-stelliger Prädikator von *S* ist, dann:

Φ ist in *S* exemplifizierbarer Prädikator

gdw

die Partikularaussage $\bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n\, \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist in *S* wahr

Φ ist in *S* exempelfreier Prädikator

gdw

die Negation $\neg \bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ ist in *S* wahr

Φ ist in *S* gegenexemplifizierbarer Prädikator

gdw

die Partikularquantifikation $\bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n \neg \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ ist in *S* wahr

Φ ist in *S* universalexemplifizierbarer Prädikator

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ ist in *S* wahr

Φ ist in *S* extremer Prädikator

gdw

Φ ist universalexemplifizierbarer oder exempelfreier Prädikator in *S*

Φ ist in *S* normaler Prädikator

gdw

Φ ist exemplifizierbarer und gegenexemplifizierbarer Prädikator in *S*

Φ ist in *S* exklusiv-exemplifizierbarer Prädikator

gdw

die Einzigkeitsaussage $\mathbf{1}\xi\, \Phi(\xi)$ ist in *S* beweisbar

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ sowie Ψ gleichstellige *n*-stellige Prädikatoren von *S* sind, dann:

Φ ist Subprädikator zu Ψ in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$ ist in *S* wahr

Ψ ist Superprädikator zu Φ in *S*

gdw

Φ ist Subprädikator zu Ψ in *S*

Φ ist koextensiver bzw. koextensionaler Prädikator zu Ψ in *S* gdw

Φ ist sowohl Sub- als auch Superprädikator von Ψ in *S*

Φ ist ein zu Ψ konverser Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Phi(\xi, \omega) \leftrightarrow \Psi(\omega, \xi))$ ist in *S* wahr

Φ ist Negatprädikator von Ψ in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1,\ldots, \xi_n) \leftrightarrow \neg\ \Psi\ (\xi_1,\ldots, \xi_n))$ ist in *S* wahr

Φ ist zu Ψ disjunkter bzw. konträrer Prädikator in *S*

gdw

die Negation $\neg\ \bigvee\xi_1\ldots\bigvee\xi_n\ (\Phi(\xi_1,\ldots, \xi_n) \wedge \Psi\ (\xi_1,\ldots, \xi_n))$ ist in *S* wahr

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ, Ψ und X gleichstellige *n*-stellige Prädikatoren von *S* sind, dann:

Φ ist mit Ψ ein X-exhaurierender Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1\ldots\bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1,\ldots, \xi_n) \vee \Psi(\xi_1,\ldots, \xi_n) \leftrightarrow \mathrm{X}(\xi_1,\ldots, \xi_n))$ ist in *S* wahr

Φ und Ψ klassifizieren X in *S*

gdw

Φ und Ψ sind in *S* disjunkte Prädikatoren, Φ und Ψ exhaurieren in *S* X und Φ und Ψ sind in *S* exemplifizierbar

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und X zweistelliger Prädikator von *S* ist, dann:

X ist in *S* totalreflexiver Prädikator

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\ \xi\mathrm{X}\xi$ ist in *S* wahr

X ist in *S* irreflexiver Prädikator

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\ \neg\ \xi\mathrm{X}\xi$ ist in *S* wahr

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger und X ein zweistelliger Prädikator von *S* ist, dann:

X ist reflexiver Prädikator auf Φ in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \rightarrow \xi X\xi)$ ist in *S* wahr

X ist geschlossener Prädikator auf Φ in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega X\xi \rightarrow \Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi))$ ist in *S* wahr

Φ ist in *S* Feldprädikator bezüglich X

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \leftrightarrow \bigvee\omega\ (\omega X\xi \vee \xi X\omega))$ ist in *S* wahr

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und X zweistelliger Prädikator von *S* ist, dann:

X ist symmetrischer Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega X\xi \rightarrow \xi X\omega)$ ist in *S* wahr

X ist asymmetrischer Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega X\xi \rightarrow \neg\ \xi X\omega)$ ist in *S* wahr

X ist antisymmetrischer Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\xi X\omega \wedge \omega X\xi \rightarrow \omega = \xi)$ ist in *S* wahr

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger Prädikator und X, X_1 und X_2 zweistellige Prädikatoren von *S* sind, dann:

X_1 ist bezüglich X_2 antisymmetrischer Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\xi X_1\omega \wedge \omega X_1\xi \rightarrow \omega X_2\xi)$ ist in *S* wahr.

X ist strikt konnexer Prädikator auf Φ in *S* gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X\ \xi \vee \xi\ X\ \omega)$ ist in *S* wahr

X ist auf Φ konnexer Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X\ \xi \vee \omega = \xi \vee \xi\ X\ \omega)$ ist in *S* wahr

X_1 ist X_2-konnexer Prädikator auf Φ in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X_1\ \xi \vee \omega\ X_2\ \xi \vee \xi\ X_1\ \omega)$ ist in *S* wahr

X_1 ist X_2-extensionaler Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1\bigwedge\omega_1\bigwedge\xi_2\bigwedge\omega_2\ (\xi_1\ X_2\ \omega_1 \wedge \xi_2\ X_2\ \omega_2 \wedge \xi_1\ X_1\ \xi_2 \rightarrow \omega_1\ X_1\ \omega_2)$ ist in *S* wahr

X ist linkseindeutiger Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X\ \zeta \wedge \xi\ X\ \zeta \rightarrow \omega = \xi)$ ist in *S* wahr

X ist rechtseindeutiger Prädikator in *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\zeta\ X\ \omega \wedge \zeta\ X\ \xi \rightarrow \omega = \xi)$ ist in *S* wahr

X ist eineindeutiger Prädikator in *S*

gdw

X ist in *S* linkseindeutiger Prädikator und X ist in *S* rechtseindeutiger Prädikator

X ist eindeutiger Prädikator in *S*

gdw

X ist in *S* linkseindeutiger Prädikator oder X ist in *S* rechtseindeutiger Prädikator

X ist in *S* Gleichheitprädikator auf Φ

gdw

X ist in *S* geschlossener Prädikator auf Φ und X ist in *S* reflexiver Prädikator auf Φ und X ist in *S* symmetrischer und transitiver Prädikator

X ist totaler Gleichheitsprädikator in *S*

gdw

X ist in *S* totalreflexiver, symmetrischer und transitiver Prädikator

X ist partieller Ordnungsprädikator in *S*

gdw

X ist in *S* antisymmetrischer und transitiver Prädikator

X_1 bildet mit X_2 auf Φ in *S* ein Quasireihenprädikatorensystem

gdw

X_2 ist auf Φ ein Gleichheitsprädikator in *S* und X_1 ist bzgl. Φ geschlossener Prädikator in *S* und X_1 ist transitiver Prädikator in *S* und X_1 ist in *S* X_2-antisymmetrischer, X_2-konnexer und X_2-extensionaler Prädikator

X ist ein totaler Ordnungsprädikator auf Φ in *S*

gdw

X ist partieller Ordnungsprädikator in *S* und X ist auf Φ konnexer Prädikaor und X ist in *S* auf Φ geschlossener Prädikator

Bei der Analyse und der Einführung eines Prädikators lassen sich, wie früher schon angedeutet, eine Reihe von Routinefragen aufwerfen, die mit den hier zusammengefassten Definitionen gegeben sind: (i) Global: Wie verhält sich der Prädikator bezüglich Exemplifizierbarkeit? Im einzelnen: Ist er normal oder extrem? Im ersten Fall: Welche Gebilde sind z.B. Exemplare, welche sind Gegenexemplare? Ferner: Ist der Prädikator exklusiv-exemplifizierbar? Im zweiten Fall: Ist der Prädikator leer oder universal? (ii) Global: Welches ist der Ort des Prädikators im jeweiligen Prädikatorensytem? Im einzelnen: Welche Ausdrücke sind z.B. Sub- und Superprädikatoren, welche Zeichen sind z.B. koextensive Prädikatoren? Welche Gebilde sind z.B. konverse Prädikatoren? Welche Ausdrücke sind z.B. Negatprädikatoren oder konträre Prädikatoren? In welchen Klassifikationssystemen spielt der Prädikator z.B. eine Rolle? (iii) Global: Welche strukturellen Eigenschaften besitzt der Prädikator? – Im einzelnen: Wie verhält sich der Prädikator bezüglich der Eigenschaften der Reflexivitäts-, Symmetrie-, Transititvitäts-, Konnexitäts-, Deutigkeitsgruppe? Welche Eigenschaften aus diesen Gruppen vereinigt er auf sich?

6.2.6 Materiale Prädikatorentypen

Die bislang vorgetragenen Unterscheidungen von Prädikatorentypen sind formaler Natur und befinden sich in einem gut bearbeiteten Zustand. Die in der Folge angebotenen Auszeichnungen von Prädikatorensorten sind demgegenüber materialer Art. Zudem sind die ihrer theoretischen Erfassung geltenden Bemühungen noch in vollem Fluss. Der mit den kommenden Hinweisen verbundene Anspruch ist daher ein sehr eingeschränkter: Mit einigen in der gegenwärtigen Literatur intensiv erörterten Prädikatorengruppen, den Sortalen und Massenprädikatoren (6.2.6.1), den Dispositionsprädikatoren (6.2.6.2) und den vagen Prädikatoren (6.2.6.3) soll erste Bekanntschaft hergestellt werden.

6.2.6.1 Sortale Prädikatoren und Massenprädikatoren

Beispiele für sortale Prädikatoren, kurz: Sortale, sind etwa die Ausdrucksverbindungen '..ist-ein-Stuhl', '..ist-eine-Katze', '..ist-ein-Fluss', '..ist-eine-Erdumdrehung'. Gegenbeispiele sind '..ist-Mehl', '..ist-Wasser', '..ist-Geld', '..ist-rot', '..ist-gut'; die drei ersten Gegenbeispiele exemplifizieren zugleich die Massen- oder Stoffprädikatoren.

Mit einer sortalen Prädikation wird auf solche Was-ist-Fragen geantwortet, die auf die Art/Sorte von Gegenständen zielen: Was ist das (für ein Tier)? Das ist eine Katze. Was ist das (für ein Instrument)? Das ist eine Fagott. Mit einer sortalen Prädikation kann man allerdings nicht auf Woraus-Fragen antworten. Das ist hingegen möglich mit einer Stoffprädikation: Woraus ist dieses Fagott? Dieses Fagott ist aus Holz. – Historischer Hinweis: Sortale oder auch Gestaltausdrücke sind den aristotelischen Substanzausdrücken, genauer: den Bezeichnungen für die zweite Substanz, nahe verwandt.

Trifft ein Sortal auf einen Gegenstand zu, dann trifft das Sortal nicht auf einen Teil dieses Gegenstands zu. Objektsprachlich am Beispiel ausgedrückt: Wenn Lisa eine Katze ist, dann sind Katzenteile, z.B. Katzenköpfe, Katzenpfoten, Katzenhaare, ihrerseits keine Katzen. Wenn das da ein Stuhl ist, dann sind Stuhlteile, z.B. die Stuhlbeine, die Sitzfläche, die Rückenlehne, keine Stühle. Massenprädikatoren verhalten sich diesbezüglich anders: Wenn etwas z.B. Mehl ist, dann sind auch die Teile dieser Gegebenheit aus Mehl; und auch wenn man Wasser teilt, ergibt sich allemal (eine neue Portion) Wasser.

Weiter: Fügt man Substanzen zusammen, auf die ein Stoffprädikator zutrifft, dann trifft der Stoffprädikator auch auf das Ergebnis der Zusammenfügung zu. Schüttet man Wasser oder Mehl zusammen, dann ergibt sich wiederum Wasser oder Mehl. Fügt man hingegen Kühe oder Stühle zusammen, dann ergeben sich Kuhherden oder Stuhlansammlungen, jedoch keine weiteren Kühe oder Stühle. Fügt man also Gebilde zusammen, auf die ein Sortal zutrifft, dann trifft das Sortal nicht wieder auf das Ergebnis der Zusammenfügungen zu. – Insgesamt gilt: Sortale ›vererben‹ sich, anders als Massenprädikatoren, weder nach oben noch nach unten weiter.

Mit Sortalen sind externe und interne Unterscheidungskriterien verbunden: Wer Sortale versteht, ist in der Lage, Pro- und Gegenbeispiele des jeweiligen Sortals zu unterscheiden. Wer die Bedeutung von '..ist-ein-Stuhl' kennt, kann Stühle von Tischen und Tigern unterscheiden. Wer Sortale versteht, ist aber auch imstande, Gegenstände zu unterscheiden, auf die das Sortal zutrifft. Wer die Bedeutung von '..ist-ein-Stuhl' kennt, kann diesen von jenem Stuhl unterscheiden. Damit ist zugleich die Grundlage der Zählbarkeit geschaffen: Externe Unterscheidungskriterien verhindern, dass Kühe mitgezählt werden, wenn Stühle zu zählen sind; und interne Kriterien sorgen dafür, dass auch wirklich alle Stühle, aber kein Stuhl zweimal gezählt wird. Mit Massenprädikatoren ist keine Zählbarkeitsmöglichkeit verbunden: 'drei Wasser' ist keine sinnvolle Ausdrucksverbindung, es sei denn, damit ist dasselbe wie mit 'drei Gläser Wasser' oder 'drei Flaschen Wasser' gemeint. '..ist-ein-Glas-Wasser' oder '..ist-eine-Flasche-Wasser' sind aber wieder Sortale und keine Massenprädikatoren.

Man pflegt räumliche und zeitliche Sortale zu unterscheiden: Zur ersten Gruppe zählt etwa '..ist-ein-Stuhl', '..ist-ein-Fagott', '..ist-ein-Tiger', zur zweiten '..ist-eine-Geburt', '..ist-eine-Blinddarmoperation', '..ist-ein-Welpe', '..ist-ein-Lamm'. Ferner unterscheidet man natürliche Sortale wie '..ist-ein-Tiger' von Artefaktsortalen wie '..ist-ein-Fagott'.

Zuletzt ist auf den Zusammenhang von Eigennamen und Sortal hinzuweisen: Wer die Bedeutung eines Eigennamens kennt, kennt zumindest ein Sortal, das auf den benannten Gegenstand zutrifft. Wer die Bedeutung von 'Themse' kennt, weiß z.B., dass die Themse ein Fluss ist; und wer die Bedeutung von 'London' kennt, weiß z.B., dass London eine europäische Großstadt ist.

6.2.6.2 Dispositionsprädikatoren

'Disposition' ist das dem Lateinischen entstammende Fremdwort für 'Neigung', 'Tendenz', 'Fähigkeit', 'Vermögen' usf. Es ist *x* eine Disposition von *y*, wenn *x* die Fähigkeit, Fertigkeit, Neigung, Tendenz, das Vermögen, die Möglichkeit von *y* darstellt, sich unter bestimmten Umständen in bestimmter Weise zu verhalten bzw. auf eigens hergerichtete Umstände zu reagieren. Derartige Dispositionen sind in aller Regel nicht direkt wahrnehmbar wie etwa

Farben, Geräusche, Gerüche, Geschmäcker, Tastempfindungen. Um Dispositionen zu beobachten, muss man Verhaltensweisen der Dispositionsträger in Situationen beobachten, die oft eigens zu diesem Zweck hergestellt werden. Prädikatoren für derartige Eigenschaften sind Dispositionsprädikatoren.

Einige Beispiele aus Physik und Materialkunde (in Kurznotation): ‘wasserlöslich’, ‘wasserfest’, ‘(un)zerreißbar’, ‘(un)zerbrechlich’, ‘(un)dehnbar’, ‘(un)elastisch’ ‘..hart’, ‘fest’, ‘steif’, ‘rissausbreitungsresistent’, ‘(un)verformbar’, ‘magnetisch’, ‘Säure’, ‘Base’. Exempel aus der Psychologie: ‘gutmütig’, ‘jähzornig’, ‘scharfsinnig’, ‘introvertiert’, ‘intelligent’. Gelegentlich überraschen die Beispiele auch: Erklärt man als schön resp. hässlich solche Gegebenheiten, die bei sinnenhafter Zuwendung ge- resp. missfallen, dann fallen auch ‘..ist-schön’ und ‘..ist-hässlich’ unter die Dispositionsprädikatoren.

Wie die Beispielsammlung zeigt, enden viele Dispositionsprädikatoren auf ‘lich’, ‘bar’, ‘isch’; die Endsilbe kann also zur Formulierung einer entsprechenden Faustregel zur Unterscheidung von Dispositionsprädikatoren hergenommen werden. Die Beispielsammlung zeigt indes auch, dass das Kriterium unvollständig und inkorrekt ist: Es gibt einerseits Dispositionsprädikatoren wie etwa ‘..ist-schön’ und ‘..ist-tapfer’, die auf keine der genannten Silben enden; andererseits gibt es auch solche Prädikatoren wie etwa ‘..ist-beweisbar’, ‘..ist-logisch determinierbar’, die die entsprechenden Endungen aufweisen, aber keine Dispositionsprädikatoren sind.

Dispositionsprädikatoren werden in Lebenswelt und Wissenschaft problemlos verwendet; dennoch bereitet die Rekonstruktion ihrer Bedeutung erhebliche Schwierigkeiten. Einen Teil dieser Redemittel kann man mit Verfahren etablieren, die für Grundprädikatoren taugen, also mit Bedeutungspostulaten und Konstatierungsregeln (↑10.). Andere wird man indes definieren wollen; und hier beginnen die Probleme. ‘..ist-wasserlöslich’ definiert man naheliegenderweise so:

[13] $\bigwedge x$ (x ist wasserlöslich $\leftrightarrow$ (x wird in Wasser gegeben $\rightarrow$ x löst sich auf))

Wasserlöslich sind demnach alle und nur die Gebilde, die sich auflösen, falls sie ins Wasser gegeben werden. Die Umstände: ins-Wasser-gegeben-werden, die Reaktion: das-Sich-auflösen. Diese plausible Definition hat die unplausible Konsequenz, dass alles, was nicht ins Wasser gegeben wird, auch schon wasserlöslich ist:

[14] $\bigwedge x$ ($\neg$ x wird in Wasser gegeben $\rightarrow$ x ist wasserlöslich)

Gelegentlich – und auch hier – wird die Implausibilität noch erhöht, indem man die Kontraposition der Universalaussage bildet: All das, was nicht wasserlöslich ist, wird ins Wasser gegeben.

Der wohl naheliegendste Ausweg ist der Übergang zur bedingten Definition (↑11.): Wasserlöslichkeit wird für den Bereich der Dinge erklärt, die ins Wasser gelegt werden, und bleibt ansonsten unerklärt:

[15] $\bigwedge x$ (x wird in Wasser gelegt $\rightarrow$ (x ist wasserlöslich $\leftrightarrow$ x löst sich auf))

Der Vorzug dieser Etablierungsweise liegt auf der Hand: Für den als kritisch erkannten Fall – eine Gegebenheit wird nicht ins Wasser gelegt – bietet [15] keinen Ansatzpunkt. Aber auch der Nachteil ist offenkundig: Man will eben auch von solchen Gegenständen, die nicht ins Wasser gelegt werden, wissen bzw. entscheiden können, ob sie wasserlöslich sind; und auch für Befriedigung dieses Anliegen bietet die bedingte Definition keinen Weg.

Damit ist nur das Ausgangsproblem und der erste Schritt in einer langandauernden, v.a. in der Wissenschaftsphilosophie ausgetragenen, Kontroverse angedeutet. Die beschrittenen Wege zerfallen in zwei Großgruppen: Die logischen Auswege schlagen eine Reglementierung des Wenn-dann vor, die den Schluss von [13] auf [14] blockiert. Die außerlogischen Auswege behalten die klassische oder eine sonstige Logik mit den (sogenannten) Paradoxen der Subjunktion bei und versuchen inhaltliche Auswege.

6.2.6.3 Vage Prädikatoren

Prädikatoren mit durchgehend schlechter Presse sind die <u>vagen</u>, denen die <u>präzisen</u> gegenübergestellt werden. Von vagen Prädikatoren redet man dann, wenn es einen Bereich von Gegebenheiten gibt, für die sich (bedeutungsbedingt) nicht ausmachen lässt, ob der Prädikator auf sie zutrifft oder nicht. – Obwohl die folgenden Beispiele einstellige Prädikatoren sind, ist eine allgemeine Charakterisierung der Vagheit so anzulegen, dass ein *n*-stelliger Prädikator an der *k*-ten Stelle vage ist.

Ist dieses Sitzmöbel, um mit dem Standardbeispiel zu starten, noch ein Stuhl – oder eher ein Sessel? ‘..ist-ein-Stuhl’ und ‘..ist-ein-Sessel’ sind vage Prädikatoren; man kann sich ›fließende‹ Übergänge denken Ist dieses Kleid (noch) rot oder (schon) orange; die lebensweltlichen Farbprädikatoren sind vage. Ist dieser Text eine Beweisskizze – oder nur ein Beweishinweis? ‘..ist-eine-Beweisskizze’ und ‘..ist-ein-Beweishinweis’ sind vage Prädikatoren. Ist der Angeklagte zurechnungsfähig – oder doch eher unzurechnungsfähig? ‘..ist-zurechnungsfähig’ und ‘..ist-unzurechnungsfähig’ sind vage Prädikatoren. Ist der Patient arbeitsunfähig – oder doch eher arbeitsfähig? ‘..ist arbeitsfähig’ und ‘..ist-arbeitsunfähig’ sind vage Prädikatoren. Folgt A intuitiv aus *X* – oder besteht eine intuitive Non-Sequitur-Beziehung? ‘..folgt-intuitiv-aus..’ und ‘..steht-im-intuitiven-non-sequitur-zu..’ sind vage Prädikatoren. Ist ein Embryo schon ein Mensch oder eine Person – oder aber ein Lebewesen in einem vormenschlichen oder vorpersonalem Stadium? ‘..ist-ein-Mensch’ und ‘..ist-ein-Person’ sowie ‘..ist-vormenschliches-Lebewesen’ und ‘..ist-vorpersonales-Lebewesen’ sind vage Prädikatoren.

Vagheit ist hier nicht in einem kontingenten, sondern in einem strukturellen Sinn verstanden. Es geht nicht darum, dass ein Autor die Regeln für einen Prädikator zufälligerweise nicht genügend kennt, um ihn erfolgreich zu- oder absprechen zu können. Es fehlt ihm auch nicht an den nötigen Mitteln usf. Die jeweilige Aussage ist also nicht entscheidungsunzugänglich. Die Regeln sind vielmehr so, dass auch der ideal(st)e Autor unter ideal(st)en Informationsbedingungen nicht erfolgreich zu- oder absprechen vermag; die jeweilige Aussage ist also unentscheidbar.

Bezüglich der vagen Prädikatoren herrschen vornehmlich zwei Vorurteile. Das erste lautet darauf, dass nur empirische Prädikatoren, d.h. Prädikatoren mit synthetisch-operationalen Bedeutungsanteilen, vage sind. Die namhaft gemachten Beispiele zeigen, dass diese Auffassung irrig ist: ‘..folgt-intuitiv-aus..’, aber auch ‘..ist-konstruktives-Beweisverfahren’ sind vage Prädikatoren, die nicht empirisch sind.

Das zweite Vorurteil läuft darauf hinaus, dass vage Redemittel unbrauchbare Redemittel sind. ‘Unbrauchbarkeit’ kann hier nur besagen, dass man keine Prädikationsentscheidungen mit diesen Ausdrücken treffen kann; und das ist in der Regel nicht der Fall. So kann man von vielen Gegenständen unstrittig sagen, dass sie Stühle sind; und ebenso kann man von vielen Gebilden ohne Kontroverse das Stuhlsein negieren. Die Existenz einer Vagheitszone schließt also nicht aus, dass es zu einem Prädikator einen Positiv- und einen Negativbereich, also einen entscheidbaren Kernbereich, gibt.

Damit soll nicht das Problem geleugnet werden, das durch Vagheitszonen entsteht. Wenn nun darüber zu befinden ist, ob ein einzelnes Exemplar oder Exemplare einer bestimmten Sorte Φ-Dinge sind, dann entsteht die Aufgabe der Nachjustierung, der bedarfsgerechten (nicht: der „absoluten“) Verschärfung der Bedeutung des Prädikators. Gelegentlich kann es auch zu nur dezisionistisch behebbaren Notsituationen kommen: Dieser Fall wird gelegentlich bei der Entscheidung über Arbeits(un)fähigkeit eintreten. Häufiger geht es aber darum, für einen Unterbezirk der Vagheitszone eine Regulierung vorzunehmen: So wurde z.B. in der neueren Rechtssprechung der Prädikator ‘..ist-bezugsfertige-Eigentumswohnung’ so nachjustiert, dass das Fertiggestelltsein der Außenanlagen keine notwendige Bedingung für die Bezugsfertigkeit darstellt. – Die Prozedur der Nachjustierung wird in der Explikationslehre behandelt (↑12.).

Ü13 a) Geben Sie je drei weitere Beispiele für Sortale und Massenprädikatoren!

b) Zeigen Sie, dass [14] Konsequenz aus {[13]} ist!

c) Was sind Paradoxe der Vagheit? – Benutzen Sie Nachschlagewerke!

Zusatz: Zum Darstellungsrahmen

Die folgende methodologische Zwischenüberlegung rekapituliert die Darlegung der Absätze 6.2.2 bis 6.2.5 unter der Rücksicht der verwendeten Darstellungsmittel. Leitend ist dabei die Frage, ob sich nicht deutlich einfachere Artikulationsmöglichkeiten auffinden bzw. herstellen lassen.

In Absatz 6.2.2 werden Prädikatoren betrachtet unter der Rücksicht, ob sie auf Gegenstände zutreffen bzw. nicht zutreffen. In Absatz 6.2.3 werden Prädikatoren thematisiert mit Blick auf ihren Ort in Prädikatorensystemen d.h. mit Blick auf ihr Verhältnis zu anderen Prädikatoren. In Absatz 6.2.4 geht es vornehmlich um zweistellige Prädikatoren; diese werden untersucht unter strukturellen Gesichtspunkten wie etwa der Umkehrbarkeit einer Beziehung.

Im Zuge dieser Untersuchungen haben sich zwei Eindrücke herausgebildet und zunehmend verstärkt. Zum einen: Bei jedem Punkt hat sich ein Bedarf nach weiterer Thematisierung und Systematisierung eingestellt. Besonders deutlich war dies bei der Betrachtung der Ordnungsprädikatoren: Hier würde man gerne in methodisch kontrollierter Weise (und nicht nur intuitiv) von der untersten und obersten Schicht der Quasireihe bzw. von den untersten und obersten Elementen sprechen oder aber überhaupt von einer Schicht in der Quasireihe. Aber auch schon die Klassifikationsbegrifflichkeit verlangt (mit Blick auf die begriffliche Durchdringung der Klassifikationspraxis) nach weiteren Redemitteln: So will man etwa von Klassifikationsfolgen und -bäumen sprechen. Zum anderen: Die Darstellung wird durchweg als kompliziert empfunden, v.a. bei den gelegentlich versuchten Beweisskizzen. Dieser Eindruck dürfte v.a. deshalb entstehen, weil sich intuitiv bereits eine Alternative abzeichnet, die auch gebrauchssprachlich gut eingeschliffen ist.

Dieser doppelte Eindruck – Systematisierungsbedarf und Kompliziertheitsempfinden – veranlassen in ihrem Zusammenwirken die Frage danach, ob nicht einfachere Darstellungsmittel auffind- oder herstellbar sind.

Mit dem Prädikator '..ist-ein-Apfel' spricht man über konkrete Gegenstände der Lebenswelt; mit dem Prädikator '..ist-Vater-von..' setzt man Personen zueinander in Beziehung. Stellt man nun fest, dass der Prädikator '..ist-ein-Apfel' ein normaler Prädikator in der lebensweltlichen Sprache ist oder dass '..ist-Vater-von..' ein asymmetrischer Prädikator in der Verwandtschaftssprache ist, dann macht man diese Redemittel ihrerseits zum Gegenstand der Betrachtung bzw. der Rede. Dies geschieht einerseits durch Anführung bzw. durch qualifizierende Zusetzung, andererseits durch ausdrückliche Mitnennung der jeweiligen Sprache. In allgemeiner Rede treten die metasprachlichen Mitteilungsvariablen hinzu. Diese Form der Vergegenständlichung möge die metasprachliche Vergegenständlichung heißen. Das eben angezeigte Bemühen geht also, neu formuliert, auf Alternativen zur metasprachlichen Vergegenständlichung.

Zuvor ist jedoch ein Hinweis auf den Zweck der Vergegenständlichung hilfreich. Wozu verlässt man überhaupt die ›untere‹ Ebene, das Reden über Äpfel und Väter, um zu weiteren Gegenständen ›aufzusteigen‹? Die Antwort lautet: Um unsere Rede- und Erkenntnisanstrengungen kürzer gestalten zu können. Der Abkürzungszweck soll an zwei Beispielen illustriert werden: Wenn man weiß, dass Hans Vater von Inge ist, und ferner weiß, dass '..ist-Vater-von..' Subprädikator zu '..ist-Elter-von..' ist, dieser Redeteil Subprädikator von '..ist-Vorfahr-von..', der letzterwähnte Ausdruck Subprädikator von '..ist-verwandt-mit..', dann kann man ohne weitere empirische Untersuchung darauf schließen, dass Hans Vorfahr von Inge ist. Weiß man, dass '..ist-Vater-von..' ein asymmetrischer Prädikator ist, dann braucht man nicht eigens zu untersuchen, ob er auch irreflexiv ist; denn dies ist als allgemeiner Zusammenhang bekannt. Damit erübrigt sich auch jede Frage dahingehend, ob Hans Vater von sich selbst ist.

Die Vergegenständlichung verdankt sich dem Abkürzungszweck und der metasprachliche Weg verlangt wegen allzu großer Kompliziertheit nach Alternativen. Die zu überwindende Kompliziertheit ist zunächst im Detail am Beispiel zu studieren; die Transitivität der Subprädikatorschaft hat, voll ausformuliert, folgende Gestalt:

[16] Für alle Φ, für alle X, für alle Ψ, für alle *S* (Wenn *S* eine so-und-so beschaffene Sprache erster Stufe ist und Φ, X, Ψ jeweils *n*-stellige Prädikatoren von *S* sind und wenn Φ Subprädikator von X in *S* ist und X Subprädikator von Ψ in *S* ist, dann ist auch Φ Subprädikator von Ψ in *S*)

Störend ist – schon auf den ersten Blick – die Bezugnahme auf Sprachen, und zwar sowohl im Sinne des dauernden ›Mitschleppens‹ der Sprachvariablen '*S*' als auch im Sinne des die Mitspieler ›vorstellenden‹ Antezedens.

Will man beide Umständlichkeiten vermeiden, so muss man die metasprachliche Vergegenständlichung durch objekt- bzw. innersprachliche Formen ersetzen. Hier bieten sich wiederum zwei Optionen an: Zum einen kann man Sprachen höherer Stufe als Darstellungsrahmen wählen: Vergegenständlichung durch Stufenerhöhung. Zum anderen kann man Sprachen erster Stufe um klassensprachliche Redemittel erweitern: Vergegenständlichung durch Klassenbildung. Dies geschieht dadurch, dass man Prädikatoren Klassen zuordnet, also z.B. dem Prädikator '..ist-rot' die Klasse '{*z*|*z* ist rot}' zuweist. Der Subprädikatorschaft korrespondiert dann die Teilklassenschaft, die meist durch '..$\subseteq$..' ausgedrückt wird. Die Transitivität der Teilklassenschaft hat dann folgenden Ausdruck:

[16]* Für alle *x*, Für alle *y*, Für alle *z* (Wenn $x \subseteq y$ und $y \subseteq z$, dann $x \subseteq z$)

Es liegt auf der Hand, dass die Klassenvergegenständlichung weitaus handlicher ist als die metasprachliche; sie ist aber auch der objektsprachlichen Vergegenständlichung durch Stufenerhöhung unter dem Einfachheitsgesichtspunkt überlegen. Will man also die in den drei vorangegangenen Abschnitten angerissenen Zusammenhänge weiter verfolgen, dann wird man in einen klassensprachlichen Rahmen überwechseln. Kern dieses Sprachtyps ist die oben erwähnte Zuordnung von Klassen zu Prädikatoren, die in der Folge an mehreren Stellen beschäftigen wird (↑6.4 sowie (ausführlich) 14.).

6.3 Die elementare Prädikation

Die Prädikation konnte vorbereitend im Ensemble der Redehandlungen plaziert werden; ferner war eine prädikatorbildende Operation bereitzustellen (6.1). Der zweite Schritt galt der formalen und der (angedeuteten) materialen Sortierung der Prädikatoren, der Redemittel also, mit deren Verwendung Autoren Prädikationen vollziehen (6.2). – In der Folge geht die Aufmerksamkeit auf die elementare Prädikation, d.h. auf die Art des Prädizierens, die durch Äußerung von Sätzen mit elementaren Aussagen realisiert wird. Zunächst ist die elementare Prädikation auszugrenzen und nach Innen in Formen zu differenzieren (6.3.1). Sodann kann, in Aufnahme des Korrektheitsgesichtspunktes, von der Wahrheit elementarer Aussagen gehandelt werden (6.3.2). Schließlich ist das Universalienproblem (im Ansatz) darzustellen, die Frage nach Funktion, Existenz und Natur von Begriffen, Eigenschaften und Klassen (6.3.3).

Zur Erinnerung: Die dargelegte Prädikationslehre zählt zu den klassischen, zweiteiligen Prädikationskonzeptionen; dreiteilige Ansätze, die neben Prädikator und Nominator noch eigene (affirmative, negative und gegebenenfalls neutrative) Prädikationsoperatoren vorsehen, finden in dieser Vorschule keine Darstellung (↑3.3.5 und 6.4). Gleichwohl sei hervorgehoben, dass sich auch derartige Sichtweisen nach entsprechender Anpassung der grammatischen Vorgaben in die entwickelte Makroperspektive einfügen lassen.

6.3.1 Elementare Prädikation – Substantielle Prädikation – Zu-/Absprechung

Ein Autor prädiziert in einer Sprache (hier und in der Folge stets: erster Stufe), wenn er einen Satz dieser Sprache äußert, der einen Prädikator zum Teilausdruck hat, in dessen Aussage also ein Prädikator Teilausdruck ist. Wer etwa die Sätze:

[17] a) Mutmaßlich sind alle Philosophen Vampire.

b) Trifft es zu, dass einige Vampire ängstlich sind?

c) Ich bezweifle, dass Dracula cool ist.

äußert, vollzieht in einer vampirkundlichen Sprache Prädikationen. In a) werden ‘Philosoph’ und ‘Vampir’ prädiziert, in b) ‘Vampir’ und ’ängstlich’ und in c) der Redeteil ‘cool’. Diese Prädikationen sind eingebettet in die Redehandlungen a) des Vermutens, b) des (Ob-) Fragens, c) des Bezweifelns. Wer immer prädiziert, vollzieht eine Redehandlung. Variiert: Nur wer redehandelt, prädiziert. Kontraponiert und rhetorisch modalisiert: Wer keine Redehandlung vollzieht, kann auch gar nicht prädizieren. Umgekehrt wird aber auch mit jeder Redehandlung eine Prädikation vollzogen. Insoweit genügt zur Charakterisierung des Prädizierens auch schon das Element des Äußerns eines Satzes; die Eingangsbestimmung ist redundant (↑6.1.1). Insgesamt gilt: Ein Autor vollzieht genau dann eine Redehandlung, wenn er prädiziert.

Dieses generelle Prädikationskonzept wird nun in zweifacher Weise eingeschränkt, und zwar in grammatischer und in performativer (semantischer) Hinsicht. Die grammatische Einschränkung betrifft die Satzaussage: Insoweit nur elementare Aussagen als Hauptoperand des geäußerten Satzes auftreten, liegt eine elementare Prädikation vor. Die semantische Einschränkung betrifft den Performator und damit den Redehandlungstyp: Insoweit nur die für substantielle Redehandlungen charakteristischen Performatoren als Hauptoperator des geäußerten Satzes auftreten, liegt eine substantielle Prädikation vor. – Ausdifferenzierungen innerhalb der substantiellen Prädikation nach ihrer alethischen ›Stärke‹ und nach ihrer alethischen ›Richtung‹ sowie die Kombination von elementaren und substantiellen Prädikationsformen führen zu weiteren Untertypen.

Vier vorbereitende Bemerkungen sind angezeigt: Zunächst ist an die Definition der elementaren Aussage zu erinnern (↑3.2.3): Es ist Γ eine elementare Aussage genau dann, wenn Γ eine atomare Aussage oder die Negation einer atomaren Aussage darstellt; atomare Aussagen entstehen aus der Anwendung eines *n*-stelligen Prädikators Φ auf *n* Nominatoren $\vartheta_1,\ldots, \vartheta_n$, besitzen also die Form $\Phi(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n)$. Die nicht-atomaren elementaren Aussagen sind Negationen von atomaren Aussagen.

Sodann ist auf eine Vereinfachung hinzuweisen: Die Explikationen beziehen sich auf einfache atomare Aussagen, also auf atomare Aussagen der Form $\Phi(\vartheta)$; die Berücksichtigung der übrigen Typen atomarer Aussagen erforderte einen erheblichen technischen Mehraufwand. Demgegenüber ist die intuitiv-exemplarische Übertragung auf diese Fälle unschwer nachvollziehbar und wird auch am Ende des Abschnitts vorgenommen.

Ferner: In der Folge wird das Standardverständnis des Prädizierens aufgenommen. Dieses lautet (in der berühmten Formulierung des Aristoteles) darauf, dass etwas von etwas (ti kata tinos) prädiziert wird: Ein Prädikator wird von einem Gegenstand, einem Ding, einem Objekt, einer Gegebenheit usf. ausgesagt. Dieser Gegenstand ist in der Rede durch einen entsprechenden Nominator vertreten. Aus der Lehre von der Nomination wird die Wendung 'das..-Nominatum in..' benötigt.

Endlich ist auf die gerade erwähnte Nomination vorwegnehmend einzugehen (↑7.); denn elementare Prädikationen sind an den Vollzug von Nominationen geknüpft. Eine exemplarische Intuition lautet: Wer 'Ich bezweifle, dass Dracula cool ist' äußert, bezieht sich in einer vampirkundlichen Sprache innerhalb des geäußerten Satzes mit dem Eigennamen 'Dracula' auf den Fürsten der Nacht. Die beispielübergreifende Explikation liest sich so: Ein Autor *A* nominiert (bezieht sich auf, referiert auf usf.) *x* innerhalb Σ mit ϑ in *S* genau dann, wenn *S* eine Sprache erster Stufe ist, Σ ein Satz und ϑ ein Nominator von *S* ist und ferner gilt: ϑ ist Teilterm der Aussage von Σ und *x* ist das ϑ-Nominatum in *S* und *A* äußert Σ. Durch Wegbinden der Variablen entstehen geläufigere Referenzbegriffe wie etwa '..referiert auf..', '..referiert mit..auf..'. Es gilt (unter Vernachlässigung des Sprachbezugs): Wenn ein Autor einen Nominator in einem Satz verwendet, dann und nur dann referiert er mit diesem Nominator innerhalb des Satzes auf den diesem Nominator zugeordneten Referenten.

Der Begriff der elementaren Prädikation ist denkbar weit angelegt: Ein Autor *A* prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* genau dann, wenn *S* eine Sprache erster Stufe ist, Φ ein einstelliger Prädikator, ϑ ein Nominator und Σ ein Satz von *S* ist und ferner gilt: Die Aussage von Σ ist das Ergebnis der Anwendung von Φ auf ϑ oder die Negation des Ergebnisses der Anwendung von Φ auf ϑ und *x* ist das ϑ-Nominatum in *S* und *A* äußert Σ. –

Wer etwa die Sätze 'Ich bezweifle, dass Dracula cool ist', 'Trifft es zu, dass Dracula cool ist', 'Also: nicht (Dracula ist cool)', 'Es gilt: Dracula ist cool' äußert, prädiziert '..ist cool' innerhalb der erwähnten Sätze mit Hilfe von 'Dracula' von dem Fürsten der Nacht; die Prädikation ist dabei eingebettet in die Redehandlung des Zweifelns, des Ob-Fragens, des Folgerns und des Behauptens.

Durch Wegbinden von Stellen entstehen geläufigere Prädikationskonzepte: So prädiziert etwa *A* von *x* elementar Φ genau dann, wenn es eine Sprache *S*, einen Satz Σ und einen Nominator ϑ gibt, so dass *A* innerhalb Σ Φ von *x* mit ϑ in *S* elementar prädiziert. So prädiziert ein Autor elementar genau dann, wenn es eine Sprache, einen Satz, einen Gegenstand und einen geschlossenen Term gibt, so dass der Autor in der Sprache den Prädikator mit Hilfe des Nominators von dem Gegenstand elementar prädiziert. Aus der Definition und den grammatischen Festlegungen ergibt sich: Ein Autor prädiziert genau dann elementar, wenn er einen Satz äußert, dessen Hauptoperand eine elementare Aussage ist.

Unmittelbar aus den Definitionen des Nominierens und des Elementarprädizierens resultiert: Die Nomination ist eine notwendige Bedingung der Elementarprädikation. Ausführlich: Wenn ein Autor *A* elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* prädiziert, dann nominiert *A x* innerhalb Σ mit ϑ in *S*. Am Beispiel: Um von Dracula '..ist cool' elementar zu prädizieren, muss man mit 'Dracula' oder einem bezeichnungsgleichen Nominator auf den Fürsten der Nacht referieren. Umgekehrt ist die Nomination jedoch nicht an die elementare Prädikation gebunden: Mit der Äußerung von 'Es ist zu bestreiten, dass alle Kinder Dracula lieben' bezieht der Autor sich ebenfalls auf Dracula, jedoch ohne in diesen Zweifelsakt eine elementare Prädikation einzubetten.

Wenn ein Autor elementar prädiziert, dann prädiziert er auch. Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Nur in [17]c), also in 'Ich bezweifle, dass Dracula cool ist', wird elementar prädiziert; mit der Äußerung von [17]a), 'Mutmaßlich sind alle Philosophen Vampire', und [17]b), 'Trifft es zu, dass einige Vampire ängstlich sind?', werden hingegen nicht-elementare Prädikationen ausgeführt. Ein Autor prädiziert nicht-elementar genau dann, wenn er einen Satz äußert, dessen Hauptoperand eine nicht-elementare Aussage darstellt, also eine molekulare Aussage, die aber nicht die Negation einer atomaren Aussage ist. Eine Redehandlung, die eine elementare Prädikation umfasst, enthält nicht mehr als gerade diese elementare Prädikation, also genau eine elementare Prädikation; hingegen können, wie die Beispiele [17]a) und b) zeigen, mehrere nicht-elementare Prädikationen in eine Redehandlung eingelassen sein. – Alle Aufmerksamkeit gilt in der Folge den Formen der elementaren Prädikation. In terminologischer Hinsicht ist hervorzuheben, dass in der Literatur ‘Prädikation’ häufig wie ‘elementare Prädikation’ verwendet wird.

Es macht einen Unterschied, ob eine elementare Prädikation in eine Frage oder eine Folgerung einerseits oder aber in eine Vermutung oder Bestreitung andererseits eingebettet ist. Mit der Äußerung einer Frage oder einer Folgerung möchte man nicht auch schon wissen lassen, dass der Prädikator von dem Nominatum wahr/falsch ist. Bei einer Vermutung oder Bestreitung gibt man hingegen der Auffassung Ausdruck, dass der Prädikator auf das Nominatum zutrifft oder ihm abgeht. In der ersten Fallgruppe soll von nicht-substantieller, in der zweiten soll von substantieller Prädikation die Rede sein.

In Hinführung zu diesen Begriffen ist an eine früher gegebene Sortierung der (kognitiven) Redehandlungen zu erinnern (↑2.4.2). Erkenntnishandlungen zerfallen in die interrogativen und die nicht-interrogativen Akte. Letztere lassen sich in die subsidiären oder Hilfshandlungen (wie das Annehmen oder das Folgern) und die substantiellen Handlungen aufteilen. Letztgenannte wiederum gliedern sich in die stark qualifizierenden oder alethischen (wie das Behaupten oder das Bestreiten) und in die schwach qualifizierenden oder präalethischen Akte (wie das Vermuten oder das Bezweifeln). Die alethischen wie die präalethischen Erkenntnishandlungen umfassen eine affirmative und eine negative Untergruppe. Demzufolge sind einerseits stark affirmative Akte (wie Behaupten oder Feststellen) von schwach affirmativen Akten (wie Vermuten oder hypothetisch Setzen) zu unterscheiden, andererseits stark negative Handlungen (wie Bestreiten oder kategorisch Verwerfen) von schwach negativen Handlungen (wie Bezweifeln oder hypothetisch Verwerfen) zu trennen. – Prinzipiell lässt sich das Konzept der elementaren Prädikation auch auf nicht-kognitive Redehandlungen erweitern.

Diese Einteilung der Erkenntnishandlungen ist nun mit der elementaren Prädikation in Bezug zu setzen. Ein Autor A prädiziert substantiell Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S genau dann, wenn A prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S und der Performator von Σ ist ein substantieller Performator. Mit der Äußerung von ‘Vermutlich: nicht(Ist-cool(Dracula))’ oder von ‘Ich stelle fest: Ist-cool(Dracula)’ wird ‘Ist-cool(..)’ vom ‘Dracula’-Nominatum substantiell prädiziert.

Ein Autor A prädiziert nicht-substantiell Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S genau dann, wenn A prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S und der Performator von Σ ist ein nicht-substantieller Performator. Mit der Äußerung von ‘Trifft es zu: nicht(Ist-cool(Dracula))’ oder von ‘Also: Ist-cool(Dracula)’ wird ‘Ist-cool(..)’ vom ‘Dracula’-Nominatum nicht-substantiell prädiziert.

Ein Autor prädiziert demnach substantiell genau dann, wenn er elementar prädiziert und der Performator des geäußerten Satzes ein substantieller Performator ist; substantielle Prädikationen sind also in substantielle Redehandlungen eingebettet. Ein Autor prädiziert hingegen nicht-substantiell genau dann, wenn er elementar prädiziert und der Performator des geäußerten Satzes ein nicht-substantieller, also ein subsidiärer oder ein interrogativer Performator ist; nicht-substantielle Prädikationen sind also in subsidiäre oder interrogative Erkenntnishandlungen eingelassen. – Setzt man voraus, dass die Einteilung in substantielle und nicht-substantielle Redehandlungen bzw. Performatoren disjunkt und exhaustiv ist, dann trifft dies auch auf die Zerlegung der elementaren Prädikationen in substantielle und nicht-substantielle zu, also auf die zweite Verzweigung von Schaubild [18].

Substantielle Prädikationen können – will man Feinheiten außer acht lassen (↑6.3.2) – eine affirmative oder eine negative Ausrichtung gewinnen: Ein Autor A prädiziert affirmativ Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S bzw. ein Autor A spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ x in S zu genau dann, wenn A prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S, die Aussage von Σ ist das Ergebnis der Anwendung von Φ auf ϑ und der Performator von Σ ist ein affirmativer Performator. Kurz und variiert: Ein Autor prädiziert affirmativ bzw. spricht zu genau dann, wenn er einen affirmativen Satz äußert, dessen Aussage atomar ist; affirmative Prädikationen resp. Zusprechungen sind also substantielle Prädikationen, wobei der geäußerte Satz aus einen affirmativen Performator und einer atomaren Aussage aufgebaut ist. Mit der Äußerung von 'Vermutlich: Ist-cool(Dracula)' oder von 'Ich stelle fest: Ist-cool(Dracula)' sprechen Autoren dem Fürsten der Nacht den Prädikator 'Ist-cool(..)' zu; die Wendungen 'beilegen' und 'zuschreiben' mögen als Synonyme zu 'affirmativ prädizieren' bzw. 'zusprechen' gelten.

Ein Autor A prädiziert negativ Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S bzw. ein Autor A spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ x in S ab genau dann, wenn A prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S und (i) die Aussage von Σ ist das Ergebnis der Anwendung von Φ auf ϑ und der Performator von Σ ist ein negativer Performator oder (ii) die Aussage von Σ ist die Negation der Anwendung von Φ auf ϑ und der Performator von Σ ist ein affirmativer Performator. Kurz und variiert: Ein Autor prädiziert in zwei Fällen negativ bzw. spricht ab: Wenn er einen Satz mit negativem Performator äußert, dessen Aussage atomar ist, oder wenn er einen Satz mit affirmativem Performator äußert, dessen Aussage die Negation einer atomaren Aussage darstellt. Mit der Äußerung von 'Vermutlich: nicht(Ist-cool(Dracula))' oder von 'Ich bestreite: Ist-cool(Dracula)' sprechen Autoren dem Fürsten der Nacht den Prädikator 'Ist-cool(..)' mit unterschiedlicher Stärke ab. – Enthält eine Sprache keine negativen Redehandlungen bzw. Performatoren, dann tritt der Fall (i) nicht ein; das Absprechen kann sich dann nur des

Negators und eines affirmativen Performators bedienen. Ist eine Sprache hingegen negatorfrei, dann muss sie negative Performatoren enthalten, falls das Absprechen als Handlung möglich sein soll.

Zusprechungen und Absprechungen stellen substantielle Prädikationen dar; und keine substantielle Prädikation ist sowohl Zu- als auch Absprechung. Allerdings wird der Bereich der substantiellen Prädikationen durch die beiden unterschiedenen Sorten nicht ausgeschöpft. Man betrachte den Satz 'Ich bestreite: nicht(Ist-cool(Dracula))'. Da die Satzaussage elementar ist, handelt es sich um eine elementare Prädikation. Da die Prädikation in das Bestreiten, eine stark negative Redehandlung, eingebettet ist, liegt eine substantielle Prädikation vor. Nun ist die Aussage nicht atomar; daher ist keine Zusprechung gegeben. Ferner ist der Performator negativ; es kann sich also auch nicht um eine Absprechung handeln. Damit ist das Gebiet der substantiellen Prädikationen nicht erschöpfend in Zu- und Absprechungen eingeteilt; also ist die dritte Verzweigung von [18] nicht exhaustiv.

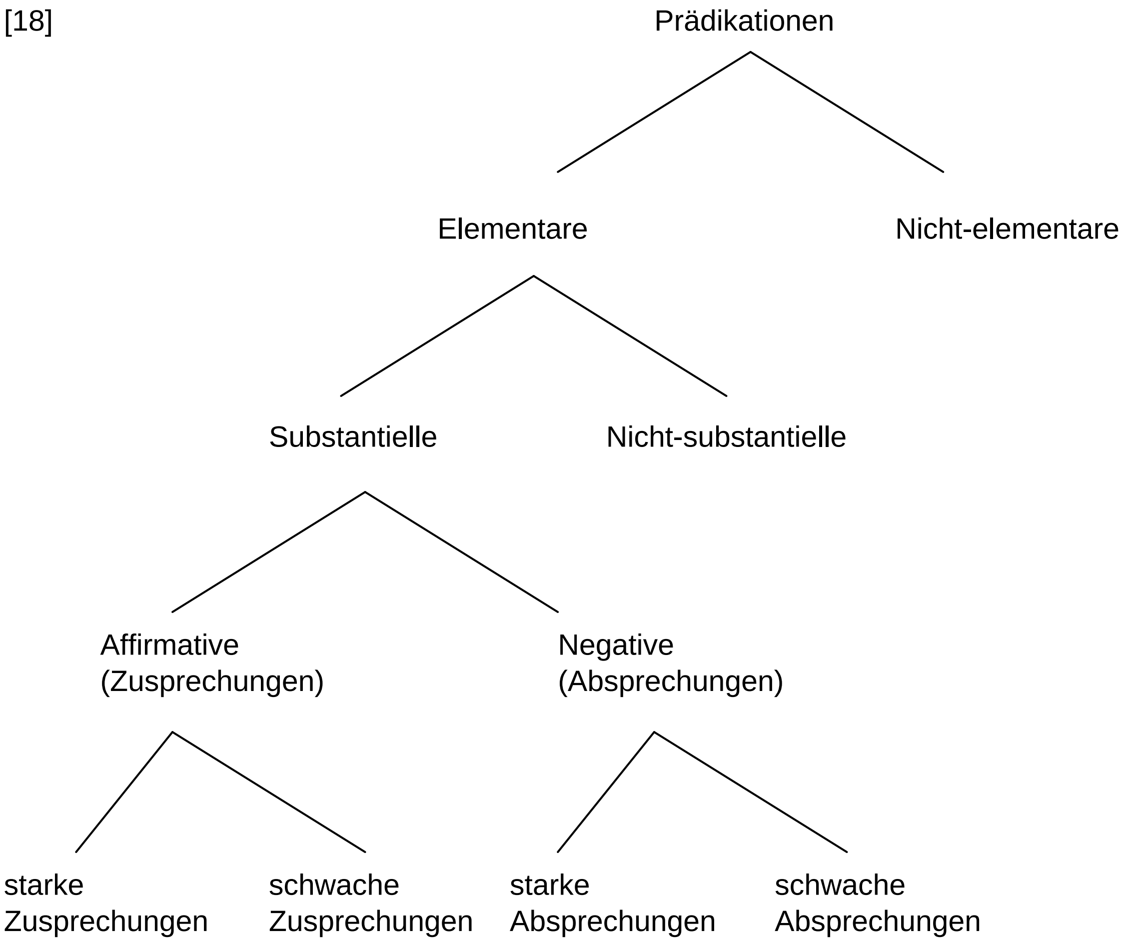
Bezüglich der inhaltlichen Erörterung dieser dritten Kategorie substantieller Prädikationen ist die intendierte Bedeutung des Negators und des negativen Performators ausschlaggebend: Wenn die Bestreitung einer Aussage Δ (hier: 'nicht(Ist-cool(Dracula))') erlaubt ist, falls es einen Beweis für die Negation von Δ (hier: 'nicht(nicht(Ist-cool(Dracula)))') gibt, also die Behauptung der Negation von Δ erlaubt ist, falls ferner der Negator klassisch reguliert ist, wird man die Beispieläußerung als Zusprechung ansehen wollen und entsprechende Subsumtionsmöglichkeiten schaffen. – Zur Nicht-Exhaustivität gelangte man im übrigen auch, wenn man neben affirmativen und negativen auch neutrative Redehandlungen und Performatoren für eine Sprache vorsieht.

Substantielle Prädikationen können ferner nach ihrer ›Stärke‹ unterschieden werden; diese Unterscheidung betrifft die affirmative wie auch die negative Seite. Ein Autor A prädiziert stark/schwach affirmativ Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S bzw. ein Autor A spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ x in S stark/schwach zu genau dann, wenn A spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S zu und der Performator von Σ ist ein stark/schwach affirmativer Performator. Ein Autor A prädiziert stark/schwach negativ Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S bzw. ein Autor A spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ x in S stark/schwach ab genau dann, wenn A spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S ab und der Performator von Σ ist im Fall (i) ein stark/schwach negativer Performator und im Fall (ii) ein stark/schwach affirmativer Performator.

Mit der Äußerung von 'Es gilt: Ist-cool(Dracula)', 'Vermutlich: Ist-cool(Dracula)', 'Ich bestreite: Ist-cool(Dracula)', 'Vermutlich: nicht(Ist-cool(Dracula)' vollzieht der Autor eine starke

Zusprechung, eine schwache Zusprechung, eine starke Absprechung, eine schwache Absprechung. Wenn die affirmativen resp. negativen Redehandlungen/Performatoren vollständig in starke und schwache zerfallen, dann lassen sich auch Zu- und Absprechungen vollständig in starke und schwache gliedern. – Die bisherige Entwicklung lässt sich in folgender Tafel von Prädikationstypen darstellen:

[18]



Zur exemplarischen Festigung der entwickelten Begrifflichkeit ist die folgende Tabelle zu betrachten:

[19] a) Vermutlich: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

b) Es-gilt: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

c) Ich-bezweifle: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

d) Ich-suspiziere: nicht(Ist-schlechtbeweibt(Sokrates))

e) Ich-bestreite: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

f) Es-gilt: nicht(Ist-schlechtbeweibt(Sokrates))

g) Also: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

h) Ob: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

Wer a) äußert, spricht 'Ist-schlechtbeweibt' dem Lehrer Platons schwach zu. Diese schwache Zusprechung ist zugleich ein Beispiel für Zusprechungen, für substantielle und für elementare Prädikationen. Es ist ein Gegenbeispiel für nicht-elementare und nicht-substantielle Prädikationen sowie für Absprechungen und auch für starke Zusprechungen. – Wer b), äußert spricht dem Gatten der Xanthippe den Prädikator 'Ist-schlechtbeweibt(..)' stark zu. Diese starke Zusprechung ist ein Beispiel für Zusprechungen, für substantielle und elementare Prädikationen. Es ist damit ein Gegenbeispiel für nicht-elementare und nicht-substantielle Prädikationen, für Absprechungen und für schwache Zusprechungen. Mit c) und d) werden schwache Absprechungen, mit e) und f) starke Absprechungen vollzogen. g) und h) exemplifizieren die nicht-substantiellen elementaren Prädikationen.

Die (intuitive!) Übertragung auf elementare Aussagen mit mehrstelligen Prädikatoren versteht sich von selbst: Mit der Äußerung von [20]a) wird der zweistellige Prädikator 'Ist-größer-als(..,..)' Hans und Inge (in dieser Reihenfolge) abgesprochen. Mit der Äußerung von [20]b) wird der dreistellige Prädikator 'Liegt-zwischen-und(..,..,..)' von Köln, Bonn und München (in dieser Reihenfolge) nicht-substantiell prädiziert. Mit [20]c) schließlich wird der sechsstellige Prädikator 'Spricht-innerhalb-mit-in(..,..,..,..,..,..)' Hans, 'Ist-cool(..)', 'Es gilt: Ist-cool(Dracula)', 'Dracula', dem Fürst der Nacht und der vampirkundlichen Sprache (in dieser Reihenfolge) zugesprochen:

[20] a) Mutmaßlich: nicht (Ist-größer-als(Hans, Inge))

b) Also: Liegt-zwischen-und(Köln, Bonn, München)

c) Es gilt: Spricht-zu-innerhalb-mit-in(Hans, 'Ist-cool(..)', 'Es gilt: Ist-cool (Dracula)', 'Dracula', der Fürst der Nacht, die vampirkundliche Sprache)

Die detaillierte und vergleichsweise formelle Darlegung der Prädikationsbegrifflichkeit verdankt sich hauptsächlich dem Um- bzw. (besser) Missstand, dass die überkommene Prädikationslehre meist nicht zwischen der Redehandlung als ganzer und der Teilhandlung des Prädizierens unterscheiden. So wird das Zu- und das Absprechen selbst eine Redehandlung und nicht eine Teilhandlung einer so und so beschaffenen Redehandlung. Dieser Umstand führt dann häufig zu Konfusionen, insbesondere dann, wenn es um die bisher ausgeblendeten, aber sogleich zu behandelnden Fragen des korrekten Prädizierens geht.

6.3.2 Die Wahrheit elementarer Aussagen

Das Prädizieren in allen seinen Spielarten ist in (hier stets: kognitiven) Redehandlungen eingebettet. Diese Vollzüge können nun regelgemäß bzw. korrekt oder regelwidrig bzw. inkorrekt ins Werk gesetzt werden; entsprechend sind korrekte von inkorrekten Prädikationen zu unterscheiden. Der Maßstab der Korrektheit wird dabei stets von den einschlägigen Redehandlungsregeln gebildet.

Angenommen, eine z.B. philosophiehistorische Sprache wäre so eingerichtet, dass man Kennzeichnungen (↑7.) nur dann verwenden dürfte, wenn für die Kennzeichnungsformel die Einzigkeitsbedingung erfüllt wäre, dann würde man mit ʽOb: Ist-Empirist(der Verfasser der „Principia Mathematica")' oder mit ʽWäre: Ist-Empirist(der Verfasser der „Principia Mathematica")' eine inkorrekte nicht-substantielle Prädikation vollziehen. Hingegen führte man mit Äußerung von ʽOb: Ist-Empirist(Russell)' oder mit ʽWäre: Ist-Empirist(Russell)' korrekt nicht-substantielle Prädikationen aus. So ist ferner jede Folgerung und damit auch jede Prädikation der Art ʽAlso: Russell=Russell' korrekt; und auch die subsidiäre Prädikation von ʽIst-schlechtbeweibt(..)' von Sokrates, die mit ʽAlso: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)' vollzogen wird, ist korrekt, wenn für eine Folgerungsregel im voranstehenden Diskurs ein passendes Anwendungsszenario bereitsteht, z.B. eine Subjunktion mit der betrachteten Aussage als Sukzedens und ferner das Antezedens dieser Subjunktion.

Vollständig analog ist im Bereich des substantiellen Prädizierens, des Zu- und des Absprechens, zu verfahren. Angenommen, die Regel des Vermutens verlangt u.a. Verträglichkeit mit den schon als wahr etablierten Aussagen, dann wäre mit der Äußerung von ʽVermutlich: nicht(Ist-Philosoph(Sokrates))' eine inkorrekte Vermutung und damit eine inkorrekte schwache Absprechung ausgeführt. Verlangt man für das Bezweifeln Unverträglichkeit mit schon als wahr oder als mutmaßlich wahr etablierten Aussagen, dann vollzöge man mit 'Ich bezweifle: Ist-gutbeweibt(Sokrates)' eine korrekte schwache Absprechung.

Im alethischen Bereich soll das starke Zu- und Absprechen betrachtet werden, insoweit es in affirmative Redehandlungen eingebettet ist; mit negativen Redehandlungen ist analog zu verfahren. Ausgangspunkt ist folgende Liste:

[21] a) Axiom: Ist-eine-natürliche-Zahl(0)
b) Feststellung: Ist-größer-als(Hans, Inge)
c) Es-gilt: nicht(Ist-größer-als(Inge, Hans))
d) Definition: 1 = der-Nachfolger-von(0)

Mit der Äußerung von a) wird dem '0'-Nominatum der Prädikator 'Ist-eine-natürliche-Zahl(..)' korrekt zugesprochen: Die Regel für das axiomatische Setzen, die lediglich Verträglichkeit mit schon gesetzten Aussagen fordert, wird bei dieser (unterstellterweise) ersten Setzung trivial befolgt. Ein inkorrektes Absprechen läge demzufolge dann vor, wenn die Reihe der Setzungen mit der Äußerung von 'Axiom: nicht(Ist-eine-natürliche-Zahl(0))' fortgesetzt würde. – Insoweit mit a) eine korrekte starke Zusprechung vollzogen wird, trifft der Prädikator 'Ist-eine-natürliche-Zahl(..)' auf das '0'-Nominatum zu bzw. er ist wahr von dem '0'-Nominatum.

Mit der Äußerung von b) wird dem 'Hans'-Referenten und dem 'Inge'-Referenten der Prädikator 'Ist-größer-als(..,..)' nach Ausführung einer (z.B. messenden) Vergleichsoperation (unterstellterweise) korrekt zugesprochen. Die einschlägige Konstatierungsregel ist (unterstellterweise) erfüllt. Ein inkorrektes Zusprechen oder auch Absprechen läge vor, wenn das Konstatieren einer elementaren Aussage nicht durch eine entsprechende Konstatierungsregel abgedeckt wäre. – Insoweit mit b) eine korrekte starke Zusprechung vollzogen wird, trifft der Prädikator 'Ist-größer-als(..,..)' auf Hans und Inge zu bzw. ist wahr von Hans und Inge.

Mit der Äußerung von c) wird eine Absprechung vollzogen. Es möge folgende Begründung vorgelegt werden: Da: Ist-größer-als(Hans, Inge). Da: Für alle *x*, *y* (Ist-größer-als(*x*, *y*) → nicht(Ist-größer-als(*y*, *x*))). Also: Ist-größer-als(Hans, Inge) → nicht(Ist-größer-als(Inge, Hans)). Also: nicht(Ist-größer-als(Inge, Hans)). Es gibt also eine einschlägige Begründung für die behauptete Elementaraussage. Insoweit liegt eine korrekte Absprechung vor: Der Prädikator 'Ist-größer-als(..,..)' geht fehl von bzw. ist falsch von Inge und Hans. – Wird eine Behauptung einer Elementaraussage vorgetragen, für die es keine Begründung gibt, dann entspricht dieser Vollzug nicht der Behauptungsregel und ist damit inkorrekt; es kann weder eine korrekte Zu- noch eine korrekte Absprechung vorliegen.

Mit der Äußerung von d) wird der Identitätsprädikator (im unterstellten üblichen Aufbau einer arithmetischen Sprache) korrekt zugesprochen. Inkorrekt wäre (in einem solchen Aufbau) etwa die definitorische Setzung von ‘0 = der-Nachfolger-von(1)’: Die Definitionsregel lässt es nicht zu, dass ein schon etablierter Ausdruck, hier: die Individuenkonstante ‘0’, neuerlich etabliert wird. – Insoweit in d) eine korrekte Zusprechung des Identitätsprädikators stattfindet, trifft der Identitätsprädikator auf 1 und den Nachfolger von 0 zu bzw. ist von diesen beiden Gebilden in dieser Reihenfolge wahr.

Mit der Betrachtung dieser Beispiele ist bereits die Perspektive zur Behandlung der Wahrheit von elementaren Aussagen eingerichtet. Sie unterscheidet sich nicht von der alethiologischen Generalperspektive bzw. lässt keine Modifikation dieses Sichtungsrahmens als angezeigt erscheinen: Eine Aussage Δ ist in einer Sprache S wahr genau dann, wenn sie zufolge einer Wahrheitsregel (= einer Behauptungsregel, einer Konstatierungsregel, einer Setzungsregel, einer Definitionsregel usf.) korrekt als wahr klassifiziert werden kann, wenn sie also Theorem, Empirem, Axiom oder Definition usf. ist. Eben dies gilt, wie exemplarisch vorgeführt, auch für elementare Aussagen.

Die Wendung ‘..ist wahr von..’ bzw. ‘..trifft zu auf..’ lässt sich im Rückgriff auf den allgemeinen Wahrheitsbegriff erklären: Ein Prädikator Φ ist wahr von den resp. trifft zu auf die $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n$-Nominata genau dann, wenn die Aussage $\Phi(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n)$ wahr ist. Die Wendungen ‘..ist wahr von..’ bzw. ‘..trifft zu auf..’ besitzen zahlreiche Synonyme, z.B. diese: ‘..gilt von..’, ‘..ist (mit Recht) anwendbar auf..’, ‘..ist .. (mit Recht) zuschreibbar’, ‘..ist..(mit Recht) zusprechbar’ ‘..ist..beilegbar’. – Die Wendung ‘..ist falsch von..’ wird entsprechend charakterisiert: Φ ist falsch resp. geht fehl von den $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n$-Nominata bzw. ist diesen mit Recht absprechbar genau dann, wenn die Aussage $\Phi(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n)$ falsch ist (oder die Negation von $\Phi(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n)$ wahr ist); für die Charakterisierung der Falschheit bestehen, ist Wahrheit einmal bestimmt, verschiedene Möglichkeiten (↑).

Die Frage nach der Wahrheit bzw. Falschheit von elementaren Aussagen führt (wie die generelle Frage nach Wahrheit und Falschheit von Aussagen) zu den Regeln für die alethischen Vollzüge, genauer: in das Antezedens dieser Regeln und damit auf die Bedeutung der an der Aussage beteiligten Ausdrücke. Um in einer Sprache über die Wahrheit/Falschheit von Aussagen zu befinden bzw. um diese Befindungsverfahren zu analysieren, rekurriert man hingegen nicht auf Eigenschaften oder Begriffe oder Ideen oder Klassen, die den Nominata zukommen oder abgehen bzw. unter oder neben die die Nominata fallen bzw. an denen die Nominata teilhaben oder auch nicht bzw. von denen die Nominata Element sind oder nicht. Die Rede von Begriffen, Eigenschaften, Ideen oder

Klassen, vom Zukommen und Abgehen, vom Fallen-unter und Fallen-neben, vom Teilhaben und Nicht-Teilhaben, vom Element- oder Nicht-Element-Sein hat offenkundig eine andere Funktion (↑6.3.4).

Zur Erleichterung des Verständnisses der prädikationstheoretischen Literatur sind abschließend zwei Hinweise angezeigt. Erstens: Die keimzentrierte Auffassung der Sprache konzipiert Sprachen als einen Prozess, dessen Ausgangs- und Rekurspunkt die ›Keime‹ der elementaren Prädikation sind. Ausgehend von diesen Keimen können dann Zug um Zug logische Operatoren etabliert und motiviert/gerechtfertigt werden. Dabei wird die elementare Prädikation etwas anders konzipiert: Das Zusprechen und das Absprechen sind selbst eigenständige Redehandlungen; ein Negator ist auf dieser untersten Stufe noch nicht vorhanden. Anzunehmen sind dann also geeignete Performatoren und eigene Regeln für das Zu- und Absprechen: Als eigenständige Redehandlungen sind sie eben nicht in andere Redehandlungen eingebettet; das Behaupten ist auf dieser Entwicklungsstufe noch gar nicht vorhanden. – Hat man in einem späteren Stadium das Folgern und das Behaupten eingerichtet, dann ist darauf zu achten, dass das Zu- und Absprechen als autonome Redehandlungen nicht mit dem Zu- und Absprechen als Teilhandlung von Redehandlungen konfundiert wird.

Zweitens: Im Zuge der Erläuterung des Prädizierens spielen in der Literatur die Bezugnahme auf Tätigkeiten wie Charakterisieren, Einordnen, Klassifizieren, Rubrizieren, Bestimmen, Subsumieren, Vergleichen, Gleichsetzen, Unterscheiden, Ab- bzw. Ausgrenzen und viele andere eine Rolle. Bezüglich solcher Versuche ist eine Warnung angezeigt: Die erläuternde Funktion kann nur dann erfolgreich wahrgenommen werden, wenn die aufgezählten Handlungen ihrerseits ohne Rückgriff auf das Prädizieren charakterisiert worden sind bzw. (in einem bestimmten Rahmen) charakterisierbar sind. Prima facie scheint eher der umgekehrte Weg aussichtsreich. So könnte man etwa den Unterscheidungsprädikator so explizieren: Ein Autor *A* unterscheidet *x* von *y* mittels Φ genau dann, wenn er Φ *x* korrekt im starken Sinne zuspricht und Φ *y* in starkem Sinne korrekt abspricht, oder umgekehrt; so lässt sich etwa mit ‘Ist-Philosoph(..)’ Aristoteles von Alexander dem Großen unterscheiden. Prädikatoren (oder die zugeordneten Begriffe oder Eigenschaften), mit denen man unterscheiden kann, könnte man als unterscheidende Prädikatoren, kurz: als Unterschiede, ansprechen. Die in einer Sprache vorhandenen Unterschiede fallen mit den normalen Prädikatoren dieser Sprache zusammen.

6.3.3 Universalien: Prädikator – Begriff – Eigenschaft – Klasse

Nach den bisherigen Erläuterungen gilt: Eine atomare Aussage $\Phi(\theta)$ ist wahr genau dann, wenn der Prädikator Φ auf den θ-Referenten zutrifft; falsch ist eine derartige Aussage genau dann, wenn der Prädikator Φ den θ-Referenten verfehlt. Da ‘Ist-Primzahl(2)’ wahr ist, trifft ‘ist-Primzahl(..)’ auf den ‘2’-Referenten, also auf 2, zu. Da ‘Ist-Primzahl(4)’ falsch ist, verfehlt ‘ist-Primzahl(..)’ den ‘4’-Referenten, also die 4. Die Erklärungsrichtung sollte dabei die sein, dass mit Hilfe der allgemeinen alethiologischen Prädikatoren ‘wahr’ und ‘falsch’ das spezielle alethiologische Sprechen vom Zutreffen und Verfehlen von Prädikatoren auf Nominata charakterisiert wird.

Mit den Prädikatoren (in bestimmungsbedürftiger Weise) ›verbunden‹ sind nun Begriffe, Eigenschaften und Klassen; und die Rede von Zutreffen und Fehlgehen von Prädikatoren findet (in ebenfalls erläuterungsbedürftiger Weise) Übertragung auf Begriffe, Eigenschaften und Klassen. So spricht man davon, dass z.B. die 2 bzw. die 4 unter bzw. neben den Begriff der Primzahl fällt, dass die Primzahleigenschaft der 2 bzw. der 4 zukommt bzw. abgeht, dass die 2 bzw. die 4 Element bzw. Nicht-Element der Klasse der Primzahlen ist.

Zwischen diesen Redeweisen besteht ein Genau-dann-wenn-Zusammenhang, der unabhängig von der jeweiligen Auffassung von Begriffen, Eigenschaften und Klassen akzeptiert wird. Ausführlich sowohl für die Wahr- wie auch die Falsch-Seite formuliert: (i) Die Aussage ‘Ist-Primzahl(2)’ ist genau dann wahr, wenn der Prädikator ‘Ist-Primzahl(..)’ auf den-‘2’-Referenten zutrifft; der Prädikator ‘Ist-Primzahl(..)’ trifft genau dann auf den-‘2’-Referenten zu, wenn der-‘2’-Referent unter den-Begriff-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ fällt; der-‘2’-Referent fällt unter den-Begriff-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ genau dann, wenn die-Eigenschaft-zu ‘Ist-eine-Primzahl(..)’ dem-‘2’-Referenten zukommt; die-Eigenschaft-zu ‘Ist-eine-Primzahl(..)’ kommt dem-‘2’-Referenten genau dann zu, wenn der-‘2’-Referent Element der-Klasse-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ ist. (ii) Die Aussage ‘Ist-Primzahl(4)’ ist genau dann falsch, wenn der Prädikator ‘Ist-Primzahl(..)’ den-‘4’-Referenten verfehlt; der Prädikator ‘Ist-Primzahl(..)’ verfehlt genau dann den-‘4’-Referenten, wenn der-‘4’-Referent neben den-Begriff-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ fällt; der-‘4’-Referent fällt neben den-Begriff-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ genau dann, wenn die-Eigenschaft-zu ‘Ist-eine-Primzahl(..)’ dem-‘4’-Referenten abgeht; die-Eigenschaft-zu ‘Ist-eine-Primzahl(..)’ geht dem-‘4’-Referenten genau dann ab, wenn der-‘4’-Referent Nicht-Element der-Klasse-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ ist.

Der exemplarisch vorgeführte Zusammenhang zwischen Prädikator, Begriff, Eigenschaft und Klasse lässt sich allgemein und unter Berücksichtigung des Sprachbezugs zum (affirmativen bzw. negativen) <u>Hauptsatz der Universalienlehre</u> verallgemeinern; die affirmative Variante lautet:

[22] Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger Prädikator von *S* ist und θ ein Nominator von *S* ist, dann gilt:

a) Die Aussage Φ(θ) ist wahr in *S*

gdw

b) der Prädikator Φ trifft auf den-θ-Referenten in *S* zu

gdw

c) der-θ-Referent fällt in *S* unter den-Begriff-zu Φ

gdw

d) die-Φ-Eigenschaft kommt in *S* dem-θ-Referenten zu

gdw

e) der-θ-Referent ist in *S* Element der-Φ-Klasse

Die negative, der Falschheit gewidmete Variante besitzt entsprechend folgenden Wortlaut:

[23] Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist, Φ ein einstelliger Prädikator von *S* ist und θ ein Nominator von *S* ist, dann gilt:

a) Die Aussage Φ(θ) ist falsch in *S*

gdw

b) der Prädikator Φ verfehlt in *S* den-θ-Referenten

gdw

c) der-θ-Referent fällt in *S* neben den-Begriff-zu Φ

gdw

d) die-Φ-Eigenschaft geht dem-θ-Referenten in *S* ab

gdw

e) der-θ-Referent ist in *S* Nicht-Element der-Φ-Klasse

Die Betitelung des notierten Satzes bedarf einer ausführlicheren (etymologischen und historischen) Erläuterung: Ein Universale ist dem Wortsinn nach ein Allgemeines; und Prädikatoren sind all den Einzelnen bzw. Singulären gemein(sam), auf die sie zutreffen. Deshalb gelten – zunächst und wenigstens an der Oberfläche – die Prädikatoren als

Universalien. Mit Prädikatoren verbunden werden aber, wie schon bemerkt, Begriffe, Eigenschaften und (historisch später) Klassen; und der überkommene, insbesondere im späten Mittelalter ausgetragene, aber immer wieder aufflammende Streit geht darum, ob nicht etwa Eigenschaften oder Begriffe (oder eine weitere Entitätensorte) in einem ›ursprünglichen‹ oder ›eigentlichen‹ Sinn Universalien sind.

In dieser Kontroverse kristallisierten sich (wenigstens) drei Problemgruppen heraus, die im Sinne der Startinformation so wiedergegeben werden können: (i) Fragen nach der Natur von Universalien: Was sind überhaupt Universalien? Wie soll der Prädikator '..ist-Universale(-in..)' expliziert werden? Stellen sich auf Basis einer derartigen Explikation Prädikatoren, Begriffe, Eigenschaften, Klassen oder andere, hier nicht aufgezählte Gebilde als Universalien heraus? (ii) Fragen nach der Existenz bzw. Existenzform: Existieren Universalien (›überhaupt‹)? Wenn ja: Handelt es sich um sprachliche, sprachabhängige, mentale, geistabhängige, subjektive usf. oder um nichtsprachliche, sprachunabhängige, reale, geistunabhängige, objektive usf. Gebilde? (iii) Fragen der Zugänglichkeit: Sind die (so oder so bestimmten) Universalien der Erkenntnis ›zugänglich‹. Wenn ja: Worin besteht diese Zugänglichkeit?

An diesem Fragekatalog fällt zweierlei auf: Zum einen handelt es sich durchweg um Frageprovisorien; Antworten werden variieren je nachdem, wie die Eigenausdrücke der Fragen expliziert werden. Zum anderen – und in Konkretisierung des gerade namhaft gemachten Gesichtspunktes – sollten im Sinne der methodischen Ordnung die Fragen nach der Natur der Universalien als erste beantwortet werden.

Der Hauptsatz hat nun insofern eine Sonderstellung, als alle Parteien geeint sind in dem Willen, ihm in ihrem Ansatz als Theorem Geltung zu verschaffen. Dies kann freilich nur dadurch geschehen, dass den beteiligten Eigenausdrücken eine entsprechende Bedeutung verliehen bzw. in Anspruch genommen wird; für den Schritt von a) zu b) wurde dies bereits getan. – Ohne nun auf Vorzüge und Abträglichkeiten konkurrierender Ansätze einzugehen, sollen die Redeteile aus der Begriffs- und der Eigenschaftsgruppe so weit expliziert werden, dass die Übergänge nach c) und d) einsichtig werden. Dabei wird auch die Perspektive deutlich, in die die Universaliendebatte gestellt wird. Dadurch zeichnen sich Antworten auf einige Fragen des eben präsentierten Katalogs ab.

Die Mitglieder der um die Vokabel 'Begriff' gescharten Vokabelmannschaft haben meist mehrer Bedeutungen und zahlreiche Synonyme. Die folgende Erläuterungen verzichten auf die Behandlung des Ambiguitäts- und des Synonymitätssyndroms (und auch auf die Ausführung weiterer präexplikativer Sondierungen); dasselbe gilt für die anschließenden

Explikationsbemühungen zur Eigenschaftsrede (↑6.4); auch die Beschränkung auf einstellige Prädikatoren wird aufrechterhalten.

Jedem Benutzer von Gebrauchssprachen ist das Phänomen der Synonymie geläufig: Prädikatoren sind synonym resp. verwendungsgleich resp. bedeutungsgleich, wenn sie bei Wahrung der Korrektheit der jeweiligen Redehandlung, in deren Satz sie Teilausdruck sind, austauschbar sind. In der hier benutzen Sprache sind z.B. die zweistelligen Prädikatoren ‘..ist-verwendungsgleich-mit..’, ‘..ist-bedeutungsgleich-mit..’, ‘..ist-synonym-mit..’ verwendungsgleiche Redeteile. In der kulinarischen Sprache wären etwa ‘..ist-Kirschtomate’, ‘..ist-Cherrytomate’, ‘..ist-Cocktailtomate’ synonyme einstellige Prädikatoren. In einer mathematischen Sprache könnten ‘..ist-leere-Menge’, ‘..ist-leere-Klasse’, ‘..ist-Nullmenge’, ‘..ist-Nullklasse’ als bedeutungsgleiche einstellige Prädikatoren auftreten.

Die genauere Charakterisierung der Synonymiebeziehung kann nur relativ auf eine entsprechend scharf umrissene Sprache erfolgen. Für die weiteren Überlegungen ausschlaggebend ist nur dies: ‘..ist-synonym-mit..(in..)’ ist als Gleichheitsprädikator auf ‘..ist-einstelliger-Prädikator(-in..)‘ erklärt (↑6.2.4.6). Eigenschaften wie Einstelligkeit, Exemplifizierbarkeit, Subprädikatorschaft oder Sortalität (und viele andere) sind nun in folgendem Sinn invariant bezüglich der Synonymiebeziehung: Ist ein Prädikator einstellig, exemplifizierbar, Subprädikator (von diesem oder jenem Prädikator), ein Sortal, dann ist auch jeder zu ihm synonyme Prädikator einstellig, exemplifizierbar, Subprädikator oder Sortal. So ist etwa ‘..ist-Cherrytomate’ einstellig, exemplifizierbar, Subprädikator z.B. von ‘..ist-Tomate’ und überdies sortaler Prädikator; selbiges trifft auch auf alle Synonyme zu. Es ist ferner ‘..ist-leere-Klasse’ exklusiv-exemplifizierbar; auch dieses trifft auf die Synonyme zu. Will man nun markieren, dass man über einen Prädikator synonymieinvariant redet, dann kann man dies durch Vorsetzung des Funktors ‘der-Begriff-zu..(in..)’ zu verstehen geben: ‘der-Begriff-zu ‘..ist-Cocktailtomate’’ meint dann dasselbe wie das an ‘..ist-Cocktailtomate’ Invariante bezüglich Synonymie.

Um diese Intuition genauer formulieren zu können, muss zunächst die Beziehung zwischen dem Prädikator und seiner Invariante von der strukturellen Seite her gestaltet werden: (i) Nach dem Existenzpostulat soll jeder Prädikator wenigstens eine Invariante (= einen Begriff) bedeuten. (ii) Nach dem Korrelationspostulat gilt: Prädikatoren Φ, Ψ sollen genau dann synonym sein, wenn sie dasselbe bedeuten. (iii) Nach dem Differenzpostulat wird kein Prädikator seinerseits bedeutet.

Vor dem Hintergrund der so verfassten Bedeutungsrelation lässt sich dann die Funktionskonstante ‘der-Begriff-zu..in..’ in folgender Weise bedingt definieren: Wenn *S* eine

Sprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger Prädikator von S ist, dann gilt für beliebige x: der-Begriff-zu Φ in $S = x$ gdw Φ bedeutet x. Kurz: Begriffe sind das von Prädikatoren Bedeutete. Eine unmittelbare Konsequenz lautet: Sind Prädikatoren in ihrem Begriff identisch, so sind sie synonym – und umgekehrt.

Will man den Unterschied zwischen Prädikatoren und (ihren) Begriffen wahren, dann müssen die invarianten Redeteile an die Begriffe adjustiert werden. So sollen z.B. die Prädikatoren ‘..ist-leer’ und ‘..ist-erfüllbar’ als Adjustierungen der Redeteile ‘..ist-exempelfrei’ und ‘..ist-exemplifizierbar’ in folgender Weise etabliert werden: x ist leer bzw. erfüllbar genau dann, wenn es einen Prädikator Φ gibt, so dass x = der-Begriff-zu Φ und Φ ist exempelfrei bzw. exemplifizierbar. Der Prädikator ‘..ist-Unterbegriff-von..’ wird als Adjustierung von ‘..ist-Subprädikator-von..’ definiert: x ist Unterbegriff von y dann und nur dann, wenn es Prädikatoren Φ, Ψ gibt, so dass x = der-Begriff-zu Φ und y der-Begriff-zu Ψ und Φ ist Subprädikator zu Ψ.

Die Rede vom Fallen-unter-einen-Begriff und vom Fallen-neben-einen Begriff lassen sich nun gerade als Adjustierungen des Zutreffens bzw. des Fehlgehens bezüglich der zweiten Stelle definieren: x fällt unter resp. neben y genau dann, wenn es einen Nominator θ und einen Prädikator Φ gibt, so dass x = der-Referent-von θ und y = der-Begriff-zu Φ und Φ trifft zu auf bzw. geht fehl von dem-Referent-von θ. Aus diesen Festlegungen folgt unmittelbar der Übergang von b) zu c): Φ triff zu auf bzw. geht fehl von dem-θ-Referenten genau dann, wenn der-θ-Referent unter bzw. neben den-Begriff-zu Φ fällt.

Die Funktionskonstante ‘der-Begriff-zu..in..’ wurde im Rückgriff auf die Gleichheitsbeziehung der Synonymie etabliert. Zwischen Prädikatoren bestehen aber noch andere Äquivalenzen, u.a. die früher bereits definierte und mit Beispielen versehene Koextensionalität: Prädikatoren Φ, Ψ sind genau dann koextensional in einer Sprache, wenn Φ Sub- und Superprädikator von Ψ ist. So sind z.B. in der arithmetischen Sprache die Prädikatoren ‘Ist-Primzahl(..)’ und ‘**l**x(Ist-Teilbar-durch(x,x) $\wedge$ Ist-Teilbar-durch(x,1))(..)’ koextensional. In der biologischen Sprache sind die Prädikatkonstanten ‘Ist-Lebewesen-mit-Herz(..)’ und ‘Ist-Lebewesen-mit-Nieren(..)’ koextensional. Es handelt sich ersichtlich um einen Gleichheitsprädikator, auf dem Bereich der Prädikatoren, der wiederum die Etablierung eines Abstraktums, in diesem Fall, die Etablierung von Eigenschaften ermöglicht.

Um Eigenschaften als das an Prädikatoren Invariante bezüglich Koextensionalität darstellen zu können, ist es wiederum nötig, zwischen den Prädikatoren und dieser Invariante eine Relation, die Bezeichnungsbeziehung, gemäß den von der Synonymie her bekannten Postulaten zu gestalten: (i) Jeder Prädikator hat wenigstens ein Bezeichnetes. (ii)

Prädikatoren Φ, Ψ bezeichnen genau dasselbe, wenn sie koextensional sind. (iii) Kein Bezeichnetes ist seinerseits Prädikator. – Damit lässt sich definieren: Wenn *S* eine Sprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger Prädikator von *S* ist, dann gilt für beliebige *x*: die-Eigenschaft-zu Φ in *S* = *x* gdw Φ bezeichnet *x*. Kurz: Eigenschaften sind das von Prädikatoren Bezeichnete. Eine unmittelbare Konsequenz lautet: Sind Prädikatoren in ihrer Eigenschaft identisch, so sind sie koextensional – und umgekehrt.

Wiederum können, ganz analog zum Vorgehen bei den Begriffen, invariante Redeteile adjustiert werden: So sollen z.B. die Prädikatoren '..ist-instanzenfrei' und '..ist-instanziierbar' als Adjustierungen der Redeteile '..ist-exemplefrei' und '..ist-exemplifizierbar' in folgender Weise etabliert werden: *x* ist instanzenfrei bzw. instanziierbar genau dann, wenn es einen Prädikator Φ gibt, so dass *x* = die-Eigenschaft-zu Φ und Φ ist exempelfrei bzw. exemplifizierbar. Unter Einbezug der analogen Adjustierungen in der Begriffsrede gilt dann: Ein Prädikator Φ ist exempelfrei bzw. exemplifizierbar genau dann, wenn der bedeutete Begriff leer bzw. erfüllbar ist; und das ist wiederum genau dann der Fall, wenn die bezeichnete Eigenschaft instanzenfrei bzw. instanziierbar ist.

Die Rede vom Zukommen und vom Abgehen einer Eigenschaft lässt sich wiederum als Adjustierungen des Zutreffens bzw. des Fehlgehens bezüglich der zweiten Stelle definieren: *x* kommt *y* zu resp. geht *y* ab genau dann, wenn es einen Nominator θ und einen Prädikator Φ gibt, so dass *x* = der-Referent-von θ und *y* = die-Eigenschaft-zu Φ und Φ trifft zu auf bzw. geht fehl von dem-Referent-von θ. Aus diesen Festlegungen folgt unmittelbar der Übergang von b) zu d): Φ trifft zu auf bzw. geht fehl von dem-θ-Referenten genau dann, wenn die-Eigenschaft-zu Φ dem-θ-Referenten zukommt bzw. abgeht. Damit lässt sich insgesamt auch der Zusammenhang zwischen c) und d) klären: Die-Eigenschaft-zu Φ kommt dem-θ-Referenten genau dann zu bzw. geht ihm genau dann ab, wenn der-θ-Referent unter bzw. neben den Φ-Begriff fällt.

Mit der Skizzierung (eines Teils) der Begriffs- und der Eigenschaftsrede zeichnen sich auch schon Möglichkeiten ab, sog. abstrakte singuläre Terme ordnungsgemäß zu etablieren. So könnte etwa 'Röte' durch Setzung der Aussage 'Röte = die-Eigenschaft-zu 'Ist-rot(..)'' und 'Rotheit' durch Setzung der Aussage 'Rotheit = der-Begriff-zu 'Ist-rot(..)'' definiert werden. Es gilt dann: Der Prädikator 'Ist-rot(..)' trifft auf einen geeigneten Referenten genau dann zu bzw. geht von ihm genau dann fehl, wenn ihm Röte zukommt bzw. abgeht; das ist wiederum genau dann der Fall, wenn er unter bzw. neben Rotheit fällt.

Ob man nun Prädikatoren, Begriffe oder Eigenschaften – oder vielleicht andere Abstrakta von Prädikatoren – als Universalien wählt, mag hier offenbleiben. Ebensowenig soll entschieden werden, ob man die (platonische) Rede von Ideen und der Teilhabe von Einzeldingen an Ideen mit der Etablierung von Begriffen und Eigenschaften und den entsprechenden Adjustierungen als bereits rekonstruiert ansieht oder ob man dazu eigene (, aber analoge) Anstrengungen unternimmt. Entscheidend ist für den vorgetragenen Ansatz lediglich zweierlei: Zum einen sind die allgemeinen Wahrheitsprädikatoren in der Explikationsordnung ein Explikans für die abstraktiven Vokabeln – und nicht umgekehrt. Zum anderen verdanken sich die Begriffs- und die Eigenschaftsrede dem Interesse an der bezüglich Synonymie oder Koextensionalität invarianten Rede über Prädikatoren; sie werden hingegen nicht von davon verschiedenen ›ontologischen‹ Interessen auf die Bahn gebracht.

Im vorgegebenen Rahmen und bei Deutung der Existenzrede im Sinne des Partikularquantors lassen sich einige der Fragen nach der Existenz von Begriffen oder Eigenschaften unschwer affirmativ beantworten. Insoweit Begriffe und Eigenschaften von Prädikatoren verschiedene Gebilde sind, könnte man sie als nichtsprachliche Entitäten auffassen. Insoweit jedoch nur von Prädikatoren bedeutete oder bezeichnete Gegebenheiten Begriffe resp. Eigenschaften sind, wären sie als sprachgebunden anzusehen. – Begriffe und Eigenschaften sind ferner insofern der Erkenntnis zugänglich, als man, wie gesehen, mit den entsprechenden Redeteilen, z.B. mit den Funktionskonstanten ‘der-Begriff-zu..in..’ und ‘die-Eigenschaft-zu..in..’, Einsichten formulieren kann, also z.B. Behauptungen aufstellen und begründen kann, die die erwähnten Zeichenverbindungen zum Teilausdruck haben.

Angenommen, ein Autor behauptet Aussagen wie ‘2 ist ein Primzahl’ oder ‘Eutyphron ist cool’. Damit stellt er diese Aussage bzw. den bedeuteten Gedanken bzw. die bedeutete Proposition als wahr hin. Es wäre nun nicht fernliegend, die Eigenschaftsrede so weiterzubilden und das Konzept des Etwas-an-etwas-erkennen so zu explizieren, dass das bei Frege gelesene Kapitelmotto zum Theorem würde: „Immerhin gibt es zu denken, daß wir an keinem Dinge eine Eigenschaft erkennen können, ohne damit zugleich den Gedanken, daß dieses Ding diese Eigenschaft habe, wahr zu finden“.

6.4 Literatur

Kamlah/Lorenzen: Logische Propädeutik, 1.Kapitel „Die elementare Prädikation“. – Beispiel für eine dreiteilige Prädikationskonzeption, die den Redehandlungsaspekt erst im nachhinein (in der zweiten Auflage im VI. Kapitel) ›einmontiert‹ hat.

Kraml: Sprachphilosophie II, 3.2. „Prädikatoren“. – Kraml bietet eine Genese der sprachlichen Einrichtungen aus konstruktiver Perspektive; er ist (auch) als Beispiel für eine keimzentrierte Sprachauffassung zu lesen. Enthält ferner eine hilfreiche Übersicht zu materialen Prädikatorentypen.

Siegwart: Vorfragen zur Wahrheit, §18. – Bietet formale Distinktionen zum Prädizieren, insbesondere Desambiguierungen und ausführliche Synonymenlisten; enthält auch Hinweise zu nichtklassischen (dreiteiligen) Prädikationskonzepten und zu keimzentrierten Sprachkonzeptionen; einschlägig für 6.3.1 und 6.3.2.

Siegwart: Begriff. – Entwickelt auf Handbuchniveau die im Text dargelegte Charakterisierung des Begriffs unter Beachtung der üblichen Anforderungen an Explikationen; einschlägig für 6.3.3.

Siegwart: Moderne Abstraktionstheorie. – Stellt auf Handbuchniveau das Verfahren der Abstraktion unter einer Gleichheit dar; einschlägig für 6.3.3.

Sinowjew/Wessel: Logische Sprachregeln. Siebentes Kapitel „Einfache Aussagen“. – Entwickelt eine dreiteilige Konzeption der atomaren Aussage mit einem Operator der Unbestimmtheit.

Tugendhat/Wolf: Logisch-semantische Propädeutik, Kapitel 8. – Klare Schilderung der Prädikationskonzeption(en) in der analytischen Philosophie vor ihrem historischen Hintergrund.