Zu jedem der logischen Zeichen ... gehört genau eine Schlußfigur, die das Zeichen ... „einführt“, und eine, die es „beseitigt“.

Gerhard Gentzen

4. Das Regelwerk für das Schließen

Das erste Kapitel machte über Beispielbetrachtungen mit Projekt und Programm der Vorschule der Philosophie vertraut (1). Das zweite Kapitel spannte ein sprachphilosophisches Netz: Im Zentrum stehen die Konzepte der Redehandlung und der Sprache: Redehandlungen sind von Regeln regiert und Sprachen bilden den Inbegriff dieser Regeln (2). Der Vollzug von Redehandlungen besteht in der Äußerung von Sätzen, die standardmäßig aus Performator und Aussage zusammengestellt sind. Das dritte Kapitel bestimmt die kleinsten Ausdruckseinheiten, aus denen komplexe Verbindungen zusammengesetzt sind, sowie die Wege des Zeichenaufbaus (3). Damit sind u.a. die grammatischen Voraussetzungen für die Behandlung der Folgerungsregeln und der später vorgelegten Definitionsregeln gegeben.

Das folgende Kapitel zielt auf die Motivierung, Formulierung und Anwendung der logischen Regeln. Es gliedert sich in sechs Abschnitte: Zunächst sind die Redehandlung des Annehmens zu gestalten sowie einige Präliminarien zu klären (4.1). Die (hier berücksichtigten) logischen Operatoren umfassen die Kernjunktoren, die Kernquantoren und den Identitätsprädikator. Diese finden in der genannten Reihenfolge Behandlung (4.2 – 4.4). Im letzten Schritt ist das erarbeitete Regelwerk auf einen Blick zusammenzustellen und einer abschließenden Kommentierung zu unterziehen (4.5). Literaturhinweise zum natürlichen Schließen leiten das weitere Studium an (4.6).

4.1. Die Redehandlung des Annehmens

Das Annehmen soll die Möglichkeit eröffnen, jede beliebige Aussage Δ in einem Diskurs als Prämisse für Folgerungsakte einzubringen. Mit dem Annehmen ist hier also keinerlei Plausibilitätszuschreibung verbunden. Der Wunsch nach einer derartigen Redemöglichkeit mag zunächst befremden: Ist damit nicht in dem Sinne der Willkür Tür und Tor geöffnet, als in ihrem Wahrheitsstatus ungesicherte, ja sogar falsche Aussagen in Diskurse eingespeist werden dürfen? Obwohl die soeben beschriebene Möglichkeit tatsächlich mit dem Annehmen geschaffen wird, ist damit die Willkür keineswegs befördert. Zwei Hinweise mögen als Startrechtfertigung für die Einrichtung des Annehmens genügen. Zunächst: Häufig sucht man den alethischen –

oder schwächer: epistemischen – Status einer Aussage Δ dadurch zu ermitteln, dass man sie einer Was-wäre-wenn-Betrachtung bzw. einer hypothetischen Erwägung unterzieht: Was ergäbe sich (als Konsequenz), wenn Δ der Fall wäre. Dazu nimmt man Δ an und versucht, aus Δ und in aller Regel einer Klasse *X* von wahren oder aus anderen Gründen akzeptierbaren Aussagen Γ_1, …, Γ_n Konsequenzen zu ziehen. Ergibt sich ein Widerspruch, dann wird man sich im Regelfall von Δ verabschieden. Resultieren nur verträgliche Aussagen, dann mag man Δ ein (vielleicht auch nur geringes) epistemisches Gewicht zubilligen und weiteren Überprüfungsgängen unterziehen. Damit aber die wie auch immer endende hypothetische Erwägung überhaupt starten kann, muss Δ durch eine geeignete Redehandlung, eben das Annehmen, für das Ziehen von Konsequenzen verfügbar gemacht werden.

Sodann: Gelegentlich möchte man Aussagen Δ ›planmäßig‹ dadurch begründen, dass man ihre Negation, $\neg\Delta$, widerlegt; oder man sucht die Negation von Δ zu begründen, indem man Δ widerlegt. Um den Widerlegungskandidaten überhaupt als ›Zielscheibe‹ zugänglich zu machen, muss man ihn in die Widerlegung/Begründung einbringen: Eben dies leistet das Annehmen. Gelingt die Widerlegung, dann ist das je Widerlegte, Δ oder $\neg\Delta$, falsch. Man hat also, rückblickend betrachtet, tatsächlich Falsches angenommen, aber nur deshalb, um eben dies ans Licht zu bringen.

Im Zuge der Erläuterung der Subjunktoreinführung, der Negatoreinführung (die auch für das obige Szenario einschlägig ist) und der Partikularquantorbeseitigung werden sich die Rolle und damit der Nutzen des Annehmens weiter klären. – Auf Basis dieser Startplausibilisierung kann die betrachtete Redehandlung so geregelt werden:

[1] Es-sei-als-Handlungsanleitung-gesetzt: Man darf jede Aussage Δ annehmen.

Dabei vollzieht man Annahmeakte, indem man Annahmesätze äußert. Diese sind aus dem je gewählten Annahmeperformator und der angenommenen Aussage Δ aufgebaut. Als Annahmeperformatoren dienen die Zeichen ’Sei__’ und ’Wäre__’. Wie üblich kennt die Gebrauchssprache viele weitere Zeichen für den Vollzug des Annehmens (↑9). Die stereotype Wendung ’Es-sei-als-Handlungsanleitung-gesetzt__’ wird bei der Formulierung der weiteren Regeln vernachlässigt. Durch einen Akt des Annehmens werden Aussagen <u>verfügbar</u> gemacht. Einmal verfügbare Aussagen können durch bestimmte annahmetilgende Folgerungsschritte auch wieder unverfügbar gemacht werden. (↑4.2.1, 4.2.5, 4.3.2)

Trotz der Plausibilisierung der Annahmeregel (=AR) verbleibt ein Unbehagen. Sollte nicht offengelegt werden, dass mit dem Annehmen keinerlei ›epistemisches‹ oder ›alethisches‹ Gewicht verbunden ist? Dieses Unbehagen wird durch die im Zuge der Folgerungsregeln weiter eingeführte Verfügbarkeits- resp. die darauf aufbauenden Abhängigkeitsrede aufgenommen.

Folgerungen in Ableitungen, in denen bestimmte Annahmen noch verfügbar sind, hängen von all diesen noch verfügbaren Annahmen (bzw. der Klasse aus diesen Annahmen) ab. Das Annehmen gleicht einer Kreditaufnahme, die im weiteren Gang des Diskurses getilgt werden kann: Man verfügt über das Geld, fängt etwas mit ihm an, muss es aber schlussendlich zurückzahlen. Die Rückzahlung erfolgt dabei über Folgerungsschritte, mit denen die Annahmen getilgt werden, d.h., die die Annahmezeilen wieder unverfügbar machen, und mit denen man sich eben dadurch von den entsprechenden Abhängigkeiten befreit. Kredite, die (noch) nicht zurückgezahlt sind, entsprechen den noch verfügbaren Annahmen im Diskurs.

Auch das später geregelte und im Weiteren in Erläuterungskontexten und Musterüberlegungen benutzte Anziehen von Aussagen, das Einbringen schon als wahr erwiesener Aussagen in Diskurse, macht Aussagen in einer Sequenz verfügbar. Für die Redehandlung des Anziehens ist es allerdings charakteristisch, dass die angezogenen Aussagen nicht wieder getilgt, also unverfügbar gemacht werden können. Das stellt allerdings kein Problem dar, denn anders als das Annehmen stellt eine Anziehung keine Kreditaufnahme da – angezogene Aussagen sind bereits als wahr erwiesen und bilden (um in der monetären Analogie zu bleiben) das bereits erwirtschaftete Guthaben.

Im Weiteren erfolgt die Etablierung eines jeden *n*-stelligen logischen Operators τ^n in Beantwortung von zwei im Ergänzungsverhältnis stehenden Fragen: (i) Unter welchen Bedingungen bzw. bei welcher Diskurslage darf man auf eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ schließen? (ii) Was darf man aus einer Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) schließen? Beispiele: Unter welchen Bedingungen darf man auf eine Konjunktion, Partikularquantifikation, Identitätsaussage usf. schließen? Was darf man aus einer Konjunktion, Partikularquantifikation, Identitätsaussage usf. (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) schließen?

In Übereinstimmung mit dem Eingangszitat zum Kapitel wird die erste Frage durch eine sogenannte Einführungsregel beantwortet, die zweite durch eine Beseitigungsregel. Die allgemeine Form von Einführungsregeln lautet: Unter den und den Bedingungen darf man auf eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ schließen. Beseitigungsregeln folgen dem Schema: Aus einer Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) darf man auf eine Aussage der und der Art schließen.

4.2. Regeln für die Junktoren

In der Folge sind Regelpaare des charakterisierten Typs für die fünf Kernjunktoren anzugeben. Von der grammatischen Seite her handelt es sich bei Subjunktor, Konjunktor, Bisubjunktor und

Adjunktor um zweistellige Junktoren, beim Negator um einen einstelligen. Da der Negator Besonderheiten aufweist, sind zunächst die zweistelligen Operatoren zu behandeln.

4.2.1. Der Subjunktor

Zur Erinnerung: Der Subjunktor '→(__,__)' bzw. '__→__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__→__' auf Formeln A, B ist die Subjunktion aus A und B, also $A \rightarrow B$. Dabei ist A das Antezedens bzw. der Wenn-Teil und B das Sukzedens bzw. der Dann-Teil (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Subjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Subjunktion gefolgert werden darf. Wenn man im Ausgang von der Annahme einer Aussage A eine Aussage B gewonnen hat, dann darf man auf die Subjunktion aus den beiden Aussagen, $A \rightarrow B$, schließen. Wenn man umgekehrt eine derartige Subjunktion $A \rightarrow B$ sowie ihr Antezedens gewonnen hat, dann darf man B ›abtrennen‹, d.h. auf B schließen. Zum Verständnis dieser Antworten kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'Wenn__, dann__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Beseitigungsregel: Sie regiert das Schulbeispiel für das formale Schließen überhaupt: Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich. Nun ist Sokrates ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich. Schematisch: Wenn A, dann B. Nun A. Also B. Wenn man also eine Subjunktion aus A und B gewonnen hat und ferner das Antezedens A, dann darf man auf B schließen. Es ergibt sich folgende <u>Schlussfigur</u> für die Subjunktorbeseitigung:

[2]	Ξ	$A \rightarrow B$
	Ξ'	A
	Also	B

Ξ und Ξ' deuten dabei die Prämissensprechakte des Annehmens, Folgerns oder (für spätere Überlegungen) Anziehens an. Die Regel der <u>S</u>ubjunktor<u>b</u>eseitigung (=SB) liest sich so:

[3] Wenn man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Aussage A gewonnen hat, dann darf man B folgern.

Dabei <u>hat</u> man Aussagen <u>gewonnen</u>, falls man sie verfügbar gemacht hat und sie immer noch verfügbar sind. Die Subjunktion und ihr Antezedens sind die beiden <u>Prämissen</u> des Schlusses nach SB. Die Regel spezifiziert also, was man aus einer Subjunktion <u>und</u> ihrem Antezedens folgern darf. – SB wird häufig auch unter dem Titel 'Modus ponendo ponens', kürzer: 'Modus ponens' oder 'Abtrennungsregel' vorgestellt und angewendet. Durch einen Akt des Folgerns werden Aussagen verfügbar gemacht. Das gilt nicht nur für SB, sondern auch für Folgerungen nach allen anderen Folgerungsregeln. Durch Annahmen und Folgerungen verfügbar gemachte Aussagen können durch bestimmte annahmetilgende Folgerungsschritte – zum Beispiel durch Subjunktoreinführungen – auch wieder unverfügbar gemacht werden, wie im Folgenden zu erläutern ist.

Die Einführungsregel für den Subjunktor (=SE) geht aus von einer Situation, in der man eine Aussage, z.B. 'Sokrates ist sterblich', im Ausgang von der Annahme einer Aussage, z.B. von 'Sokrates ist ein Mensch', (durch hier nicht weiter interessierende Züge) gewonnen hat. Mit der Subjunktoreinführung macht man diesen Zusammenhang explizit, indem man ihn ausdrücklich als Wenn-Dann-Verhältnis fasst: Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich. Der ›vertikale‹ Zusammenhang wird in das ›horizontale‹ Subjunktionsverhältnis überführt. Eine Aussage B hat man dabei im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen, falls A als letzte Annahme verfügbar ist und man B als Satzaussage desselben oder eines nachfolgenden Satzes gewonnen hat. Ist eine Aussage als letzte Annahme verfügbar, dann ist sie nicht unbedingt die einzige noch verbleibende verfügbare Annahme, sondern eine als Annahme verfügbare Aussage *nach* der in der Sequenz keine weiteren verfügbaren (sondern bestenfalls bereits getilgte) Annahmen kommen. Natürlich kann eine solche Annahme auch die einzige noch verbleibende verfügbare Annahme sein. *Vor* der als letzter verfügbaren Annahme mögen also durchaus noch andere Annahmen (auch derselben Aussage) verfügbar sein. Das 'letzte' bezieht sich also nicht auf die Anzahl der noch verfügbaren Annahmen, sondern auf deren Reihenfolge. Verlässt man das Sokrates-Beispiel, dann resultiert folgende Schlussfigur:

[4]	Sei	A	
	...	...	
	Ξ	B	, wobei A als letzte Annahme verfügbar ist
	Also	$A \rightarrow B$	

Hat man eine Aussage B im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen, dann darf man die Subjunktion aus A und B folgern, wobei man sich von jener Annahme befreit. Die Befreiung von der Annahme besteht darin, dass diese Annahme und die Satzaussagen aller folgenden Folgerungssätze, die noch verfügbar waren, unverfügbar gemacht werden, ausgenommen die mit der Subjunktoreinführung gefolgerte Aussage $A \rightarrow B$, die jetzt neuerdings verfügbar ist. (Verfügbare Annahmen können nach der als letzter verfügbaren Annahme gerade nicht mehr vorkommen und müssen resp. können daher nicht ›noch einmal‹ unverfügbar gemacht werden.) In der Schlussfigur [4]: Die Annahmezeile, sowie die durch '…' unterschlagenen Zeilen und die Zeile, in der B gewonnen wurde, sofern es sich nicht um Anziehungszeilen handelt, sind nach dem Schluss mit SE nicht mehr verfügbar. Die gefolgerte Subjunktion in der letzten Zeile der Schlussfigur wird allerdings verfügbar.

Dass man B im Ausgang von einer Annahme von A gewonnen hat, heißt nichts anderes, als dass vor der Anwendung von SE diese Annahme von A als letzte Annahme verfügbar ist. Von allen späteren Annahmen muss man sich also bereits befreit haben. Durch diese Bedingung ist sichergestellt, dass nicht auch Annahmen unverfügbar gemacht werden, von denen man sich nicht befreit hat, (und dass man, um das Bild fortzuführen, mit *einer* Zahlung *mehrere* Kredite tilgt). Man spricht auch davon, dass man eine Aussage, die man gewonnen hat, in Abhängigkeit von genau den Aussagen (resp. der Klasse aus jenen Aussagen) gewonnen hat, die Satzaussagen in noch verfügbaren Annahmezeilen sind. Man hat eine Aussage frei von Abhängigkeiten gewonnen, wenn man sie gewonnen hat und keine Annahmen mehr verfügbar sind. Für die Subjunktoreinführung (=SE) legt sich folgende Formulierung nahe:

[5] Wenn man zuletzt eine Aussage B im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen hat, dann darf man die Subjunktion aus A und B folgern.

Der Abschnitt, der mit der Annahme des Antezedens beginnt und mit der Gewinnung des Sukzedens endet, stellt als Ganzes den Prämissenabschnitt des Schlusses nach SE dar. Die Regel spezifiziert also, dass man die Subjunktion aus A und B dann folgern darf, wenn man das Sukzedens im Ausgang vom Antezedens gewonnen hat. Man beachte, dass die angenommenen und gefolgerten Satzaussagen des Prämissenabschnitts, sofern sie nicht bereits unverfügbar waren, auch dann unverfügbar werden, wenn der Schluss nicht nur nach SE, sondern auch nach einer anderen Regel korrekt ist.

SE gibt den Weg vor, um auf eine Subjunktion zu schließen. Befreit man sich durch diese Anwendung von SE von der einzigen noch verfügbaren Annahme in der Satzfolge, dann ist die gefolgerte Subjunktion beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern legt SE den Beweis- bzw. – allgemeiner – den Wahrheitsqualifizierungsweg für Subjunktionen fest. SB eröffnet die Möglichkeit, auf eine Aussage zu schließen, sofern sie Sukzedens einer Subjunktion ist und sowohl diese als auch ihr Antezedens verfügbar sind. Wird die gefolgerte Aussage dabei frei von Abhängigkeiten gewonnen, dann ist sie beweisbar bzw. – allgemein – wahr. Insofern spezifiziert SB den Beweis- bzw. – allgemeiner – den Wahrheitsqualifizierungsweg für Aussagen, die als Sukzedentia in der beschriebenen Konstellation vorkommen und damit die Rolle von Subjunktionen als Wahrheitsbasen.

Es gibt einen Grenzfall von SE, in dem die angenommene Aussage auch schon die Aussage ist, die das Sukzedens stellen soll; wenn also A und B, Antezedens und Sukzedens dieselbe Aussage sind. In dieser Situation entfallen jegliche zwischengeordnete Folgerungen, die Annahme des Antezedens ist sogleich die Gewinnung des Sukzedens und damit auch als letzte Annahme verfügbar. Der durch 'Ξ' schematisch mitgeteilte Performator aus [4] bezeichnet dann also gerade den Annahmeperformator und die Schlussfigur reduziert sich auf zwei Zeilen:

[6]	Sei	A
	Also	$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$

Allgemein gilt *für die Folgerungsregeln und die Schlussfiguren*, dass verschiedene Mitteilungszeichen nicht ausschließlich für verschiedene Redeteile stehen. Am Beispiel der Schlussfigur für SB (↑[2]): 'Ξ' und 'Ξ'' stehen für jeweils den Folgerungs-, Anziehungs- oder einen der Annahmeperformatoren. Im konkreten Fall können beide Mitteilungszeichen auch durch denselben Performator instanziiert werden. Das tritt etwa ein, wenn beide Prämissenredehandlungen Folgerungen sind; beide Mitteilungszeichen, 'Ξ' und 'Ξ'', stehen dann für den Ausdruck 'Also__'.

In der Folge werden drei Aussagenschemata von der Form der Subjunktion bewiesen. Dadurch wird Vertrautheit im Umgang mit den Regeln und Einsicht in den Zusammenhang von Wahrheit(squalifizierung) und Bedeutung(sfestlegung) gewonnen (↑2.4.6, 2.4.7). Das erste Theorem wird unter dem Titel 'Kürzung des neutralen Faktors' geführt: Gilt unter A, dass Γ falls A, dann gilt Γ unter A. Als Behauptungssatz:

[7]	Es-gilt	$(\mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)$

Zu beweisen ist eine Subjunktion. Dazu ist eine Satzfolge vorzulegen bzw. zu äußern (d. h. eine entsprechende Redehandlungssequenz ist zu vollziehen), in der die Subjunktion in der letzten Zeile frei von Abhängigkeiten gewonnen wird, in der also die Subjunktion in der letzten Zeile gewonnen wurde und keine Annahmen mehr verfügbar sind. Der projektierte (und daher hier grau notierte) letzte Beweisschritt lautet also:

[7]+	k	Also	$(\mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)$

Dabei beziffert k die letzte Zeile des geplanten Beweises, die die behauptete Aussage im Folgerungsmodus enthält. Dieser Schritt wäre legitim nach SE, falls es gelingt, im Ausgang von der Annahme des Antezedens das Sukzedens zu gewinnen, falls also folgende Diskurslage hergestellt werden kann:

[7]*	1	Sei	$\mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)$

…	…	…	
k-1	Also	$A \rightarrow \Gamma$	
k	Also	$(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE

Die unter [7]* in den Zeilen 1 bis k-1 gegebene Diskurslage erlaubt nach SE den unter [7]+ angezeigten Folgerungsschritt zu vollziehen, der in [7]* wiederum in Zeile k notiert ist – vorausgesetzt, dass alle eventuell ›unterwegs‹ aufgenommenen Annahmen bereits wieder getilgt wurden. Die Restaufgabe lautet darauf, $A \rightarrow \Gamma$ im Ausgang von $A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$ zu folgern. Die projektierte Zielaussage ist also wiederum eine Subjunktion. Diese wird nach SE erreicht, indem Γ im Ausgang von A gefolgert wird:

[7]°	1	Sei	$A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	
	2	Sei	A	
	...	...	...	
	k-2	Also	Γ	
	k-1	Also	$A \rightarrow \Gamma$	SE
	k	Also	$(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE

Um Γ in Zeile k-2 im Ausgang von A zu gewinnen, darf man nicht nur auf die Annahme in Zeile 2, sondern auch auf jene in Zeile 1 zurückgreifen. Um in Fortsetzung der ersten beiden Zeilen sich der Zeile k-2 zu nähern bietet sich SB an: In Zeile 2 steht das Antezedens der in Zeile 1 angenommenen Subjunktion; damit sind eine Subjunktion und ihr Antezedens in der Satzfolge, die aus den Zeilen 1 und 2 besteht, verfügbar und man darf $A \rightarrow \Gamma$ folgern. Der Vorrat an verfügbaren Aussagen wird damit um diese Subjunktion erweitert. Auch in $A \rightarrow \Gamma$ ist die Satzaussage von Zeile 2 das Antezedens, so dass wiederum eine Subjunktion und ihr Antezedens verfügbar sind und nach SB damit die Folgerung von Γ erlaubt ist. Diese Folgerung ist bereits in Zeile k-2 notiert, womit sich die vormals angepeilte Folgerung nunmehr als erreicht präsentiert:

[7]**	1	Sei	$A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	
	2	Sei	A	
	3	Also	$A \rightarrow \Gamma$	SB; 1,2
	4	Also	Γ	SB; 2,3
	5	Also	$A \rightarrow \Gamma$	SE

6	Also	$(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$	SE

Wie zuvor geplant, kann nun, nachdem Zeile 4 erreicht wurde, SE durchgeführt werden, da im Ausgang von der Annahme in Zeile 2 die Aussage in Zeile 4 gewonnen wurde. In Zeile 2 findet sich dementsprechend die als letzte verfügbare Annahme, deren Satzaussage (A) das Antezedens der in Zeile 5 zu folgernden Subjunktion stellt. Die Satzaussage von Zeile 4 (Γ) stellt das Sukzedens dar. Durch die in Zeile 5 vollzogene Folgerung befreit man sich von der Annahme in Zeile 2 und es werden diese Annahme, sowie die Folgerungen in den Zeilen 3 und 4 unverfügbar. Dafür ist neuerdings die Aussage in Zeile 5 verfügbar. Da die Annahme in Zeile 2 nun nicht mehr verfügbar ist, findet sich die letzte noch verfügbare Annahme in Zeile 1 – man hat also die Aussage in Zeile 5 im Ausgang von der Annahme von $A \to (A \to \Gamma)$ gewonnen. Damit lässt sich wie zuvor mittels SE die Subjunktion aus den beiden Aussagen folgern. Durch diesen Schritt befreit man sich von der Annahme in Zeile 1 und macht mithin diese Annahme sowie die Aussagen in allen nachfolgenden Zeilen bis einschließlich Zeile 5 unverfügbar (insofern sie nicht ohnehin schon unverfügbar waren).

Damit lässt sich der gesamte Beweis notieren. Die Behauptung der zu beweisenden Aussage wird als Zeile 0 dem Beweis vorangestellt. In Ergänzung der Kommentierung durch die Regelnamen und die Prämissenzeilen resp. -abschnitte in der rechten Spalte ergibt sich:

[7]°°	0	Es-gilt	$(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$	
	1	Sei	$A \to (A \to \Gamma)$	AR
	2	Sei	A	AR
	3	Also	$A \to \Gamma$	SB; 1,2
	4	Also	Γ	SB; 2,3
	5	Also	$A \to \Gamma$	SE; 2-4
	6	Also	$(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$	SE; 1-5

Mit der Folgerung in Zeile 6 hat man sich von der zuletzt noch verbliebenen Annahme (in Zeile 1) endgültig befreit. Da nun keine Annahmen verfügbar sind, hat man dadurch die Satzaussage der letzten Zeile, also $(A \to (A \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$, frei von Abhängigkeiten gewonnen und somit bewiesen. Anmerkung zur Notation: Da der Verweis auf die Annahmeregel in den Zeilen 1 und 2 keine nennenswerte Zusatzinformation enthält, wird er im Folgenden weggelassen. Hinter dem Kurznamen der Folgerungsregeln sind die Prämissenzeilen bzw. -abschnitte namhaft gemacht.

Damit der Beweis [7]°° korrekt ist, muss vorausgesetzt werden, dass die Mitteilungszeichen 'A' und 'Γ' nicht zufälligerweise dieselben Aussagen bezeichnen. Genauer: Instanzen des Beweisschemas unter [7]°° sind nur dann Beweise, wenn 'A' und 'Γ' nicht durch dieselben Aussagen instanziiert werden. Wäre das nämlich der Fall, so würde in Zeile 3 eine Subjunktion mit identischem Antezedens und Sukzedens gemäß Schlussfigur [6] gefolgert. Das aber macht die Folgerung zu einer Folgerung nach SE und mithin wird die Annahme von A in Zeile 2 unverfügbar und schon Zeile 4 kann nicht mehr gefolgert werden, weil für den gewünschten SB-Schluss eben gerade das Antezedens in Zeile 2 verfügbar sein muss. Dann aber handelt es sich bei [7]°° nicht um einen korrekten Beweis.

Für die schematischen Satzsequenzen soll daher fortan gelten, dass verschiedene Mitteilungszeichen für verschiedene Ausdrücke stehen und dass Formeln, die durch verschiedene Mitteilungszeichen bezeichnet werden, keine Teilformeln voneinander sind. Diese Einschränkung soll als <u>Verschiedenheitsforderung</u> geführt werden. Erinnerlich gilt die Forderung <u>nicht</u> für die Folgerungsregeln und die Schlussfiguren, die gerade auf größtmögliche Allgemeinheit ausgelegt sind: SE und SB sollen etwa auch dann gelten, wenn Antezedens und Sukzedens identisch sind. Die Verschiedenheitsforderung wird die aufgeweckte Leserin schnell zu der Frage provozieren, ob beispielweise eine Formel der Form $(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$ auch dann beweisbar ist, wenn 'A' und 'Γ' dieselbe Aussage vertreten. Die Frage kann affirmativ beantwortet werden, allerdings gestaltet sich der Beweis anders. Zunächst bietet es sich an, zu Gunsten eines der beiden Mitteilungszeichen (etwa 'A') auf das andere ('Γ') zu verzichten. Ein Beweis des resultierenden Schemas $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ kann dann etwa so aussehen:

[8]	0	Es-gilt	$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	
	1	Sei	$A \rightarrow (A \rightarrow A)$	
	2	Sei	A	
	3	Also	$A \rightarrow A$	SE; 2-2
	4	Also	$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	SE; 1-3

Allgemein gilt: Kann man einen schematischen Beweis für ein Aussagenschema unter der Verschiedenheitsforderung führen, so sind alle Instanzen des Aussagenschemas beweisbar, also auch solche Instanzen, in denen verschiedene Mitteilungszeichen durch denselben Ausdruck instanziiert werden. Die Beweise [7]°° und [8] illustrieren diesen Zusammenhang.

Das zweite Theorem hört auf den Namen 'Kettenschluss'. Die Kommentierung wird dem Beweis nachgestellt:

[9]	0	Es-gilt	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$

1	Sei	$A \rightarrow B$	
2	Sei	$B \rightarrow \Gamma$	
3	Sei	A	
4	Also	B	SB; 1,3
5	Also	Γ	SB; 2,4
6	Also	$A \rightarrow \Gamma$	SE; 3-5
7	Also	$(B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE; 2-6
8	Also	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$	SE; 1-7

Zu beweisen ist eine Subjunktion. Um das zu tun, empfiehlt es sich, ihr Antezedens anzunehmen, um mit Blick auf SE im Ausgang davon das Sukzedens zu gewinnen. Die Annahme erfolgt in Zeile 1. Das Sukzedens der zu beweisenden Aussage ist dabei selbst eine Subjunktion. Um diese zu folgern, ist wiederum ihr Antezedens anzunehmen – das geschieht in Zeile 2 – um im Ausgang davon ihr Sukzedens ($A \rightarrow \Gamma$) zu folgern. Auch diese Aussage ist eine Subjunktion: Es ist also in Zeile 3 ihr Antezedens (A) anzunehmen, um im Ausgang davon ihr Sukzedens (Γ) zu gewinnen. Die Annahmeschritte machen drei Aussagen verfügbar, die sukzessive SB nahelegen. Auf diese Weise gelangt man in zwei Schritten zu der zuletzt projektierten Gewinnung von Γ (Zeile 5). Durch die drei geplanten SE-Anwendungen konstruiert man die zu beweisende Aussage, wobei man sich bei jedem Schritt nach und nach von den Annahmen befreit – und zwar in rückwärtiger Reihenfolge. Diese Annahmen (sowie die Aussagen in den sich anschließenden Zeilen) werden damit unverfügbar gemacht, bis schließlich keine Annahme mehr verfügbar ist und so die zu beweisende Aussage tatsächlich bewiesen wurde.

Zuletzt ist die Reflexivität des Subjunktors nachzuweisen. Das kann in einem Zweizeiler (mit Behauptung: Dreizeiler) geschehen:

[10]	0	Es-gilt	$\Gamma \rightarrow \Gamma$	
	1	Sei	Γ	
	2	Also	$\Gamma \rightarrow \Gamma$	SE; 1-1

Nimmt man eine Aussage A an, so hat man sie im Ausgang von sich selbst gewonnen (↑[6]). Damit ist eine die Anwendung von SE erlaubende Diskurslage gegeben, falls A Antezedens wie auch Sukzedens der Subjunktion ist. Im vorliegenden Fall entspricht A aus [6] der Aussage Γ.

Ü 1 a) Beweisen Sie das folgende Aussagenschema:

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\Gamma \rightarrow A) \rightarrow (\Gamma \rightarrow B))$

b) Beweisen Sie die Satzaussage aus Zeile 0 in [9] für den Fall, dass 'A' und 'B' dieselbe Aussage bezeichnen, d.h. beweisen Sie die Aussage $(A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$!

Mit dem vorgestellten Regelpaar SE bzw. SB ist festgelegt, auf welchem Weg man zu Subjunktionen gelangt bzw. welcher Weg von Subjunktionen (und ihrem Antezedens) ausgeht. Damit ist, um es zu wiederholen, insbesondere festgelegt, wie man Subjunktionen als wahr erweist bzw. beweist und was man aus wahren Subjunktionen (und ihrem Antezedens) als wahr erweisen/beweisen kann.

SB sagt, was man aus einer Subjunktion *und* ihrem Antezedens folgern darf: Die Subjunktion ist die Hauptprämisse, das Antezedens die Nebenprämisse des Schlusses bzw. der Schlussfigur. Die Unterscheidung zwischen Haupt- und Nebenprämisse greift auch bei Adjunktor-, Bisubjunktor-, Partikular- und Identitätsbeseitigung.

4.2.2. Der Konjunktor

Zur Erinnerung: Der Konjunktor '∧(__,__)' bzw. '__∧__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__∧__' auf Formeln A, B ist die Konjunktion aus A und B, also $A \wedge B$. A, B sind die Konjunkte bzw. Konjunktionsglieder. A ist das linke, B das rechte Konjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Konjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Konjunktion gefolgert werden darf. Die Antwortideen sind (zumindest an der Oberfläche) einfach: Aus zwei Aussagen darf man auf ihre Konjunktion schließen und aus einer Konjunktion darf man beide Konjunkte folgern. – Zur Beantwortung der Leitfragen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen '__und__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Konjunktoreinführung: Wenn man die Aussagen 'Sokrates ist weise' und 'Xanthippe ist zänkisch' gewonnen hat, dann soll man auf die Konjunktion aus den Aussagen, d.h. 'Sokrates ist weise und Xanthippe ist zänkisch', schließen dürfen. Allgemein: Aus A und B soll man auf die Konjunktion $A \wedge B$ schließen dürfen. Es ergibt sich folgende Schlussfigur für die Konjunktoreinführung:

[11]	Ξ	A
	Ξ'	B
	Also	$A \wedge B$

Die Regel der Konjunktoreinführung (=KE) lautet:

[12] Wenn man eine Aussage A und eine Aussage B gewonnen hat, dann darf man die Konjunktion aus A und B folgern.

Die Konjunktorbeseitigung kehrt die Konjunktoreinführung um: Wenn man die Konjunktion aus 'Sokrates ist weise' und 'Xanthippe ist zänkisch' gewonnen hat, also 'Sokrates ist weise und Xanthippe ist zänkisch', dann darf man jedes der beiden Konjunkte, also sowohl 'Sokrates ist weise' als auch 'Xanthippe ist zänkisch', folgern. Allgemein: Aus Konjunktionen $A \wedge B$ darf man beide Konjunktionsglieder, also sowohl A als auch B, folgern. Es ergeben sich folgende zwei Schlussfiguren für die Konjunktorbeseitigung:

[13]	Ξ	$A \wedge B$	Ξ	$A \wedge B$
	Also	A	Also	B

Die Regel der Konjunktorbeseitigung (=KB) lautet entsprechend:

[14] Wenn man die Konjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, dann darf man sowohl A als auch B folgern.

Wie durch jede Folgerungshandlung werden auch durch Folgerungen nach KE und KB die gefolgerten Aussagen verfügbar gemacht. – KE gibt den Weg vor, um auf eine Konjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Aussage beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. KE bahnt den Weg zum Beweis bzw. – allgemeiner – zur Wahrqualifizierung von Konjunktionen. KB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern sie Konjunkte einer verfügbaren Konjunktion sind. Ist die verfügbare Konjunktion wahr, dann sind auch die gefolgerten Konjunkte wahr. KB spezifiziert also, in welchem Sinne Konjunktionen als Wahrheitsbasis einsetzbar sind.

In der Folge werden die Regeln im Zuge der Beweise dreier Aussagen ›in Aktion‹ vorgeführt. Die erste ist die Transitivität des Subjunktors. Sie lässt sich erst jetzt formulieren, weil im Antezedens der Konjunktor Hauptoperator ist: Bedingt A B, B aber Γ, dann bedingt A auch Γ:

[15] Es-gilt $((A \to B) \wedge (B \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion. Um eine Subjunktion zu beweisen, genügt es, im Ausgang von der Annahme ihres Antezedens ihr Sukzedens zu gewinnen; auf die so erzeugte Diskurslage greift dann SE zu:

[15]+ 1	Sei	$(A \to B) \wedge (B \to \Gamma)$
...	...	...

k	Also	$A \rightarrow \Gamma$	
k+1	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE

Die verbleibende Aufgabe lautet darauf, im Ausgang von der Annahme der Konjunktion in Zeile 1 $A \rightarrow \Gamma$ zu gewinnen.

Da es sich bei der Aussage in Zeile k wiederum um eine Subjunktion handelt, ist das Antezedens in der Absicht anzunehmen, das Sukzedens im Ausgang von dieser Annahme zu gewinnen:

[15]*	1	Sei	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)$	
	2	Sei	A	
	...	...	...	
	k-1	Also	Γ	
	k	Also	$A \rightarrow \Gamma$	SE
	k+1	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE

Als Prämissen kommen für die verbleibende Aufgabe nur die Aussagen der ersten und zweiten Zeile in Frage. Hier greift jedoch keine (bisher vorgestellte) Regel direkt. Man muss versuchen, die Prämissen zielführend aufzubereiten: Trennt man jedoch die erste Annahme mit KB, dann kann man aus A und dem linken Konjunkt B folgern, um dann aus B und dem rechten Konjunkt auf Γ zu schließen. Insgesamt ergibt sich dann folgender Beweis der Transitivität des Subjunktors:

[15]°	1	Sei	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)$	
	2	Sei	A	
	3	Also	$A \rightarrow B$	KB; 1
	4	Also	$B \rightarrow \Gamma$	KB; 1
	5	Also	B	SB; 2,3
	6	Also	Γ	SB; 4,5
	7	Also	$A \rightarrow \Gamma$	SE; 2-6
	8	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE; 1-7

Das Exportationstheorem überführt die Subjunktion aus $A \wedge B$ einerseits und Γ andererseits in die Subjunktion aus A einerseits und die Subjunktion aus B und Γ andererseits:

[16]	0	Es-gilt	$((A \wedge B) \to \Gamma) \to (A \to (B \to \Gamma))$	
	1	Sei	$(A \wedge B) \to \Gamma$	
	2	Sei	A	
	3	Sei	B	
	4	Also	$A \wedge B$	KE; 2,3
	5	Also	Γ	SB; 1,4
	6	Also	$B \to \Gamma$	SE; 3-5
	7	Also	$A \to (B \to \Gamma)$	SE; 2-6
	8	Also	$((A \wedge B) \to \Gamma) \to (A \to (B \to \Gamma))$	SE; 1-7

Das Verum-ex-quolibet besagt in intuitiver Lesung, dass, falls eine Aussage gilt, sie auch unter einer beliebigen Bedingung gilt; das Vorschieben einer Bedingung ist eine Abschwächung der Aussage und Schwächeres gilt ›a fortiori‹, wenn Stärkeres gilt:

[17] Es-gilt $A \to (\Gamma \to A)$

Die Aussage enthält den Subjunktor als einzigen Operator; der Konjunktor ist nicht Teilausdruck. Zum Beweis muss man $\Gamma \to A$ im Ausgang von einer Annahme von A gewinnen; um $\Gamma \to A$ so zu gewinnen, muss man A im Ausgang von einer Annahme von Γ gewinnen. Folgender Beweisplan scheint aussichtsreich:

[17]+	1	Sei	A	
	2	Sei	Γ	
	...	...	...	
	k	Also	A	
	k+1	Also	$\Gamma \to A$	SE
	k+2	Also	$A \to (\Gamma \to A)$	SE

Nun ist prima facie nicht zu sehen, wie die bekannten Folgerungsregeln in Anschlag zu bringen sind, um das in Zeile 1 bereits verfügbare A in die k-te Zeile ›hinüber zu transportieren‹. Keine der vier Regeln SE, SB, KE, KB, erlaubt es, A nach der Annahme von Γ einfach zu wiederholen. Hier hilft – secunda facie – die Nacheinanderausführung von KE und KB: Man folgert im dritten Schritt die Konjunktion aus A und Γ und wiederholt anschließend A als Glied dieser Konjunktion mit KB unterhalb von der Annahme von Γ in Zeile 2. Folgert man nun so im vierten bzw. k-ten Schritt A, dann hat man – wie geplant – A im Ausgang von der Annahme von Γ gewonnen. Im Überblick:

[17]*	1	Sei	A	
	2	Sei	Γ	
	3	Also	$A \wedge \Gamma$	KE; 1,2
	4	Also	A	KB; 3
	5	Also	$\Gamma \rightarrow A$	SE; 2-4
	6	Also	$A \rightarrow (\Gamma \rightarrow A)$	SE; 1-5

Mithilfe von KE und KB lassen sich also bereits verfügbare Aussagen wiederholen, so dass sie nach Bedarf in der jeweils letzten Zeile erscheinen und so im Ausgang von der als letzter verfügbaren Annahme gewonnen wurden. Die Möglichkeit der Wiederholung von Aussagen, die bereits vor der als letzter verfügbaren Annahme gewonnen wurden, lässt ahnen, dass, anbei bemerkt, die Konjunktorregeln vielleicht doch nicht so harmlos sind, wie sie scheinen.

Die Möglichkeit KE und KB zwecks Wiederholung einer bereits verfügbaren Aussage nacheinander auszuführen ist stets gegeben, so dass sich jede bereits verfügbare Aussage wiederholen lässt. Dieser Zusammenhang rechtfertigt die Einbindung einer Regel, die die folgernde Wiederholung von Aussagen gestattet, ohne mittels KE und KB zunächst die Konjunktion aus der zu wiederholenden Aussage und einer beliebigen Aussage und dann eigens die zu wiederholende Aussage zu folgern. Die <u>W</u>iederholungsregel (W) erlaubt genau diese ›Abkürzung‹:

[18] Wenn man eine Aussage A gewonnen hat, dann darf man A folgern.

Legt man nun nochmals das Verum-ex-quolibet zum Beweis vor, so verkürzt sich der Weg um eine Zeile:

[19]	1	Sei	A	
	2	Sei	Γ	
	3	Also	A	W; 1
	4	Also	$\Gamma \rightarrow A$	SE; 2-3
	5	Also	$A \rightarrow (\Gamma \rightarrow A)$	SE; 1-4

Gegenüber den Regeln KE und KB (und den sonstigen Regeln) kann W als eine zulässige Regel eingeordnet werden; die Regel eröffnet nicht die Möglichkeit, Aussagen zu folgen, die ohne sie nicht folgerbar wären, sondern kürzt bestehende Folgerungswege ab. Die Leserin ist angehalten, sich die Abkürzung vor Augen zu führen, indem sie in der folgenden Übung für die Teilaufgabe Ü2b) einen Beweis ohne Anwendung von W und einen Beweis unter Anwendung von W vorlegt.

Ü 2 Beweisen Sie folgende Aussagenschemata:

a) $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$

b) $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma))$

c) $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge \Gamma))$

d) $(A \rightarrow (B \wedge \Gamma)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \Gamma))$

e) $(A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow \Gamma)$

4.2.3. Der Bisubjunktor

Zur Erinnerung: Der Bisubjunktor '↔(__,__)' bzw. '__↔__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__↔__' auf Formeln A, B ist die Bisubjunktion $A \leftrightarrow B$. A und B sind die Bisubjunkte bzw. Bisubjunktionsglieder, A ist das linke und B ist das rechte Bisubjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Bisubjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Bisubjunktion gefolgert werden darf. Hat man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die <u>Konverse</u> dieser Subjunktion, also die Subjunktion aus B und A gewonnen, dann darf man die Bisubjunktion aus A und B folgern. Hat man umgekehrt eine Bisubjunktion aus A und B sowie ein Bisubjunkt gewonnen, dann darf man auf das jeweils andere Bisubjunkt schließen. – Auch zum Verständnis dieser Regulierungen kann eine hilfsweise Orientierung am gebrauchssprachlichen '__genau dann, wenn__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Der Name 'Bisubjunktor' drückt aus, dass der zu organisierende Operator ein Subjunktor ›in beide Richtungen‹ sein soll: $A \leftrightarrow B$ soll äquivalent mit der Konjunktion aus $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ sein. Ebenso soll man aus $A \leftrightarrow B$ und A auf B und aus $A \leftrightarrow B$ und B auf A schließen können. Dementsprechend tritt in der Regel der Bisubjunktoreinführung die Verfügbarkeit der entsprechenden Subjunktionen als Bedingung auf. Inhaltliche Überlegungen können sich an der Bedeutungsverleihung für den Subjunktor orientieren. Für die Bisubjunktoreinführung ergibt sich folgende Schlussfigur:

[20] Ξ $A \rightarrow B$

Ξ' $B \rightarrow A$

Also $A \leftrightarrow B$

Die Formulierung der Bisubjunktoreinführung (=BE) lautet:

[21] Wenn man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Subjunktion aus B und A gewonnen hat, dann darf man die Bisubjunktion aus A und B folgern.

Die Regel der Bisubjunktorbeseitigung hat die Subjunktorbeseitigung zum Vorbild, nimmt aber anders als BE keinen ausdrücklichen Bezug auf Subjunktionen. Erinnerlich darf man gemäß SB aus einer Subjunktion $A \rightarrow B$ und ihrem Antezedens A das Sukzedens B folgern. In der Bisubjunktion ›stecken‹ nun zwei Subjunktionen; dementsprechend darf man vom linken Bisubjunkt auf das rechte und vom rechten Bisubjunkt auf das linke, jeweils bei Gegebenheit der Bisubjunktion, schließen. Die zwei Schlussfiguren:

[22] Ξ $A \leftrightarrow B$ Ξ $A \leftrightarrow B$

Ξ' A Ξ' B

Also B Also A

Die Regel der Bisubjunktorbeseitigung (=BB) lautet:

[23] Wenn man die Bisubjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie das linke bzw. das rechte Bisubjunkt, also A bzw. B, gewonnen hat, dann darf man das rechte bzw. linke Bisubjunkt, also B bzw. A, folgern.

Die Bisubjunktion ist die Hauptprämisse des Schlusses, das linke resp. das rechte Bisubjunkt stellt die Nebenprämisse dar. – BE gibt den Weg vor, um auf eine Bisubjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Aussage beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert BE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Bisubjunktionen. BB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern sie Bisubjunkt einer verfügbaren Bisubjunktion sind, deren anderes Bisubjunkt ebenfalls verfügbar ist. Sind die Prämissen wahr, dann ist auch das jeweils gewonnene Bisubjunkt wahr. Insofern spezifiziert BB die Rolle von Bisubjunktionen als Wahrheitsbasen.

Am Beweis der Kommutativität des Konjunktors soll erste Vertrautheit mit BE hergestellt werden:

[24] Es-gilt $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

Der Beweiskandidat ist eine Bisubjunktion. Auf die Bisubjunktion kann man schließen, wenn man beide Subjunktionen, $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ und $(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$, gewonnen hat. Der Beweis ist also in zwei Teile zu gliedern. Will man die erste dieser Subjunktionen beweisen, d.h. frei von Abhängigkeiten folgern, dann muss man im Ausgang von der Annahme des linken Bisubjunkts das rechte gewinnen:

[24]'	0	Es-gilt	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	
	1	Sei	$A \wedge B$	
	...	...	...	
	k	Also	$B \wedge A$	
	k+1	Also	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	| SE
	...	...	...	
	m	Also	$(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$	
	m+1	Also	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	| BE

Die erste Lücke zwischen den Zeilen 1 und k ist mit doppelter KB und einfacher KE schnell geschlossen. Die Zeilen k und k+1 entsprechen dann den Zeilen 4 und 5:

[24]+	0	Es-gilt	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	
	1	Sei	$A \wedge B$	
	2	Also	A	| KB; 1
	3	Also	B	| KB; 1
	4	Also	$B \wedge A$	| KE; 3,2
	5	Also	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	| SE; 1-4
	...	...	...	
	m	Also	$(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$	
	m+1	Also	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	| BE

Der Beweis einer Bisubjunktion über BE hat immer zwei Teile, den Weg von links nach rechts und den Weg von rechts nach links. In [24]+ ist der erste Teil in den Zeilen 1 bis 5 bereits vollendet. Der zweite Teil steht noch aus. Es ist zu bedenken, dass durch die SE in Zeile 5 die Abhängigkeit von der Annahme in Zeile 1 getilgt wurde und mithin die Zeilen 1 bis 4 unverfügbar gemacht wurden. Auf diese Zeilen darf man im zweiten Teil des Beweises nicht mehr zurückgreifen. Um daran zu erinnern, wird in der folgenden Darstellung an dem Performator in jeder Zeile ein Indexkommentar angehängt, der jeweils über die Zeilennummern angibt, die Annahmen aus welchen Zeilen noch verfügbar sind. Tätigt man zur Fortsetzung des Beweises noch die Annahme für die Einführung des Subjunktors in Zeile m, so stellt sich der bisherige Beweisweg wie folgt dar:

[24]°	0	Es-gilt	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	
	1	Sei_1	$A \wedge B$	
	2	Also_1	A	| KB; 1
	3	Also_1	B	| KB; 1
	4	Also_1	$B \wedge A$	| KE; 3,2
	5	Also	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	| SE; 1-4
	6	Sei_6	$B \wedge A$	

In [24]° ist an der Oberfläche erkennbar, dass im zweiten Beweisabschnitt keine der im Ausgang von Annahme 1 gewonnenen Aussagen noch verfügbar ist. Lediglich die Aussage in Zeile 5 wurde frei von Abhängigkeiten gewonnen. Die Aussagen in Zeile 6 steht in der Abhängigkeit von sich selbst. Aus diesen Verfügbarkeitsverhältnissen ergibt sich, dass die nach Zeile 6 angepeilte Konjunktion $A \wedge B$ nicht einfach durch KE auf die Zeilen 2 und 3 gefolgert werden kann, weil eben diese Zeilen nicht mehr verfügbar sind. Es müssen daher im zweiten Beweisteil eigens die beiden Konjunkte aus Zeile 6 mittels KB gefolgert werden, bevor KE zu der gewünschten Konjunktion führt. Der fertige Beweis mit Indexkommentar sieht dann so aus:

[24]*	0	Es-gilt	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	
	1	Sei_1	$A \wedge B$	
	2	Also_1	A	| KB; 1
	3	Also_1	B	| KB; 1
	4	Also_1	$B \wedge A$	| KE; 3,2
	5	Also	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	| SE; 1-4
	6	Sei_6	$B \wedge A$	
	7	Also_6	B	| KB; 6
	8	Also_6	A	| KB; 6
	9	Also_6	$A \wedge B$	| KE; 8,7
	10	Also	$(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$	| SE; 6-9

11 Also $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ | BE; 5, 10

Am Indexkommentar lässt sich zunächst erkennen, dass die Aussagen in den Zeilen 5, 10 und insbesondere 11 frei von Abhängigkeiten gewonnen und damit wahr erwiesen wurden. Darüber hinaus markiert der Indexkommentar anschaulich die ›Unterbeweise‹ in dem Beweis; der eine Unterbeweis beginnt in Zeile 1 und endet in Zeile 4; der andere Unterbeweis beginnt in Zeile 6 und endet in Zeile 9. Besonders bei geschachtelten Beweisen hilft der Indexkommentar dabei, den Überblick über die Beweisstruktur zu behalten.

An einem zweiten Theorem soll die Methode der grafischen Kommentierung vorgestellt werden, die durch Liniensetzung eine ähnliche Hilfestellung wie der Indexkommentar leistet. Das Theorem erinnert nochmals daran, dass die Bisubjunktion die konjunktive Zusammenfassung der Subjunktionen in beide Richtungen ist, bzw. kann als Aufweis der Adäquatheit der vorgenommenen Bedeutungsverteilung gelesen werden:

[25] Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

Der Beweis wird hier strikt von oben nach unten konstruiert. – Zu beweisen ist eine Bisubjunktion. Um diese zu zeigen, sind zunächst die entsprechenden zwei Subjunktionen, $(A\leftrightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$ und $((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))\rightarrow(A\leftrightarrow B)$ zu zeigen. Der erste Beweisteil beginnt demgemäß mit der Annahme des Antezedens der ersten Subjunktion:

[25]' 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

1 Sei $A \leftrightarrow B$

Anvisiert ist nun die Folgerung von $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$. Um das linke Konjunkt zu folgern wird zunächst dessen Antezedens angenommen:

[25]+ 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

1 Sei $A \leftrightarrow B$

2 Sei A

Mit den Aussagen in den Zeilen 1 und 2 sind nun eine Bisubjunktion und ihr linkes Bisubjunkt verfügbar, womit die Folgerung des rechten Bisubjunkts durch BB erlaubt ist. Anschließende SE-Anwendung liefert die erste gewünschte Subjunktion:

[25]* 0 Es-gilt $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

1 Sei $A \leftrightarrow B$

2 | Sei A

3 | Also B | BB; 1,2

	4	Also	$A \rightarrow B$	| SE; 2-3

An dieser Stelle setzt die grafische Kommentierung an: Der Abschnitt von Zeile 2 bis 3 ist der Prämissenabschnitt für die SE in Zeile 4 – in einer anderen Redeweise: Der Abschnitt ist der Unterbeweis für die Folgerung in Zeile 4. Durch die anschließende Folgerung gemäß SE werden diese beiden Zeilen unverfügbar gemacht. Die unverfügbaren Zeilen – der Unterbeweis – werden mit einem senkrechten Strich als unverfügbar markiert.

Im Anschluss ist nun die zweite Subjunktion zu gewinnen. Dabei kann nicht mehr auf die Aussagen in den Zeilen 2 und 3, aber durchaus auf die Bisubjunktion in Zeile 1 zurückgegriffen werden. Im Ausgang von der Annahme von B wird mittels BB A gewonnen. Die SE in Zeile 7 folgt dann diesem weiteren Unterbeweis, der sich auf die Zeilen 5 und 6 erstreckt. Eine entsprechende Markierung wird vorgenommen:

[25]°	0	Es-gilt	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	
	1	Sei	$A \leftrightarrow B$	
	2	Sei	A	
	3	Also	B	| BB; 1,2
	4	Also	$A \rightarrow B$	| SE; 2-3
	5	Sei	B	
	6	Also	A	| BB; 1,5
	7	Also	$B \rightarrow A$	| SE; 5-6

An dieser Stelle ist daran zu erinnern, dass die beiden Subjunktionen in den Zeilen 4 und 7 gewonnen wurden, um die Links-Rechts-Richtung der eingangs behaupteten Bisubjunktion zu gewinnen. KE auf diese beiden Zeilen erbringt nun einen Unterbeweis, der die beiden vorigen Unterbeweise umfasst und als Prämissenabschnitt für die anschließende SE dient. Die Markierung des entsprechenden Unterbeweisabschnitts signalisiert die Unverfügbarkeit der Aussagen in den Zeilen 1 bis 8 für die verbleibenden Folgerungsschritte:

[25]''	0	Es-gilt	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	
	1	Sei	$A \leftrightarrow B$	
	2	Sei	A	
	3	Also	B	| BB; 1,2
	4	Also	$A \rightarrow B$	| SE; 2-3
	5	Sei	B	
	6	Also	A	| BB; 1,5
	7	Also	$B \rightarrow A$	| SE; 5-6
	8	Also	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	| KE; 4,7
	9	Also	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	| SE; 1-8

Für die Rechts-Links-Richtung, also für den Beweis von $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$, muss deren Antezedens, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, angenommen werden. Mit zweifacher KB und anschließender BE gelangt man zu deren Sukzedens, $A \leftrightarrow B$. Jetzt sind SE und BE möglich, um den ganzen Beweis abzuschließen. Die SE-Anwendung folgt abermals einem Unterbeweis, der durch die Liniensetzung markiert wird:

[25]**	0	Es-gilt	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	
	1	Sei	$A \leftrightarrow B$	
	2	Sei	A	
	3	Also	B	| BB; 1,2
	4	Also	$A \rightarrow B$	| SE; 2-3
	5	Sei	B	
	6	Also	A	| BB; 1,5
	7	Also	$B \rightarrow A$	| SE; 5-6
	8	Also	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	| KE; 4,7
	9	Also	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	| SE; 1-8

10	Sei	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	
11	Also	$A \to B$	| KB; 10
12	Also	$B \to A$	| KB; 10
13	Also	$A \leftrightarrow B$	| BE; 11,12
14	Also	$((A \to B) \wedge (B \to A)) \to (A \leftrightarrow B)$	| SE; 10-13
15	Also	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$	| BE; 9,14

Die Linienmarkierungen entsprechen den Unterbeweisen. An ihnen lässt sich auch die ›geschachtelte‹ Struktur des Beweises erkennen. Wird der Beweis mit einem Indexkommentar versehen, so ist die Schachtelung der Unterbeweise ebenfalls recht leicht erkennbar:

[25]** 0	Es-gilt	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$	
1	Sei_{1}	$A \leftrightarrow B$	
2	$\text{Sei}_{1,2}$	A	
3	$\text{Also}_{1,2}$	B	| BB; 1,2
4	Also_{1}	$A \to B$	| SE; 2-3
5	$\text{Sei}_{1,5}$	B	
6	$\text{Also}_{1,5}$	A	| BB; 1,5
7	Also_{1}	$B \to A$	| SE; 5-6
8	Also_{1}	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	| KE; 4,7
9	Also	$(A \leftrightarrow B) \to ((A \to B) \wedge (B \to A))$	| SE; 1-8
10	Sei_{10}	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	
11	Also_{10}	$A \to B$	| KB; 10
12	Also_{10}	$B \to A$	| KB; 10
13	Also_{10}	$A \leftrightarrow B$	| BE; 11,12
14	Also	$((A \to B) \wedge (B \to A)) \to (A \leftrightarrow B)$	| SE; 10-13
15	Also	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$	| BE; 9,14

Die zwei Kommentierungsmethoden helfen dabei, den Beweisweg nachzuvollziehen. Allerdings sind sie – wie der Regelkommentar – nicht Teil des Beweises selbst, sondern kommentieren ihn eben nur. Sie sind auch nicht Teil der Objektsprache, was schon dadurch garantiert ist, dass in der rationalen Grammatik keine Indizes für Performatoren vorgesehen sind (↑3.2). Die Kommentare sind in Bezug auf die Korrektheit oder Inkorrektheit eines Beweises überflüssig; auch ohne sie kann festgestellt werden, welche Aussagen noch verfügbar sind und ob einzelne Sätze an bestimmten Stellen im Beweis geäußert werden dürfen oder nicht. Dass in [25]** etwa mit der Äußerung des Satzes in Zeile 4 die zwei vorangehenden Zeilen unverfügbar werden, lässt sich auch ohne Verfügbarkeits- und Regelkommentar feststellen. Die Folgerung in Zeile 4 genügt der Regel der Subjunktoreinführung, wie sich allein an den Sätzen (also den Performatoren und Aussagen) in den Zeilen 2, 3 und 4 und ihrer Reihenfolge erkennen lässt. Dieser Sachverhalt garantiert, dass die Zeilen 2 und 3 unverfügbar werden, während die Zeile 4 neuerdings verfügbar wird (um später selbst wieder unverfügbar zu werden). Eine Bezugnahme auf die Kommentarspalten ist nicht nötig, sondern nur eine Hilfe beim Erstellen und Lesen von Beweisen. Im Weiteren soll genau dann von einem <u>kommentierten Beweis(schema)</u> gesprochen werden, wenn der (das) Beweis(schema) mit einem Regelkommentar sowie mit einem Indexkommentar oder einer grafische Kommentierung im hier vorgestellten Sinne versehen ist.

Ohne prosaische Ausführungen ist abschließend der (nur mit Regelkommentar versehene) Beweis für die Idempotenz des Konjunktors zu notieren. Der Leser ist angehalten, dieses Beispiel zum Nachvollzug mit einem Indexkommentar oder einer grafischen Kommentierung zu versehen.

[26]	0	Es-gilt	$A \leftrightarrow (A \wedge A)$	
	1	Sei	A	
	2	Also	$A \wedge A$	| KE; 1,1
	3	Also	$A \rightarrow (A \wedge A)$	| SE; 1-2
	4	Sei	$A \wedge A$	
	5	Also	A	| KB; 5
	6	Also	$(A \wedge A) \rightarrow A$	| SE; 4-5
	7	Also	$A \leftrightarrow (A \wedge A)$	| BE; 3,6

Ü 3 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $A \leftrightarrow A$

b) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$

c) $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \leftrightarrow \Gamma)$

d) $(A \wedge (B \wedge \Gamma)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge \Gamma)$

e) $((A \wedge B) \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma))$

4.2.4. Der Adjunktor

Zur Erinnerung: Der Adjunktor '∨(__,__)' bzw. '__∨__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__∨__' auf Formeln A, B ist die Adjunktion $A \vee B$. A und B sind die Adjunkte bzw. Adjunktionsglieder; A ist das linke, B das rechte Adjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Adjunktion geschlossen werden darf und was aus einer Adjunktion gefolgert werden darf. Die Antworten sind einfach: Man darf aus einer beliebigen Aussage A auf die Adjunktion aus A und B bzw. aus B und A schließen; und man darf aus einer Adjunktion $A \vee B$ all das schließen, was sowohl aus A als auch aus B folgt. – Bei der Erläuterung beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am (einschließenden) gebrauchssprachlichen '__oder__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Adjunktoreinführung: Gegeben sei das Szenario einer kleinen Ostseeuniversität, an der baltische Folklore eine alles, also auch die Stipendienvergabe, beherrschende Rolle spielt: Wer Däne, Schwede oder Finne ist, erhält einen Bonus. Nun ist Torsten Finne. Um zu zeigen, dass er einen Bonus erhält, muss man so argumentieren: Torsten ist Finne. Also ist er Schwede oder Finne. Also ist er Däne oder Schwede oder Finne. Nach dem erwähnten Vergabeprinzip erhält er deshalb einen Bonus. Diese informelle Überlegung lässt sich schematisch so darstellen:

[27]	1	Da	$\bigwedge\xi\, ((A \vee (B \vee \Gamma)) \rightarrow \Delta)$
	2	Also	$([\theta, \xi, A] \vee ([\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma])) \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$
	3	Da	$[\theta, \xi, \Gamma]$
	⇒ 4	Also	$[\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma]$
	⇒ 5	Also	$[\theta, \xi, A] \vee ([\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma])$
	6	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$

In der ersten Zeile findet das Prinzip schematischen Ausdruck; in A, B, Γ, Δ sei genau ξ frei. In der zweiten Zeile wird das Prinzip auf den interessierenden θ-Fall spezialisiert. Die beiden ersten Schritte – Notieren des Prinzips und Spezialisierung auf den interessierenden Fall –

dienen nur der vollständigen schematischen Beschreibung des Szenarios. In der dritten Zeile wird vorhandenes Wissen über den interessierenden Fall eingebracht. Um im sechsten Schritt die gewünschte Subjunktorbeseitigung vollziehen zu können, muss die θ-Entität, auf die Γ zutrifft, unter den einschlägigen Fall subsumiert werden. Dies geschieht durch Adjunktoreinführung in den durch Doppelpfeil markierten Schritten 4 und 5.

Ü 4 a) Notieren Sie das informell besprochene Beispiel in Analogie zu [27] und machen Sie sich die Entsprechungen deutlich, z.B. 'Torsten' entspricht θ. Vgl. zum zweiten Schritt den Abschnitt 3.2.4 sowie 4.3.1.

b) Geben Sie eine weitere Instanz für das Schema [27]!

Die Adjunktoreinführung ist ein unverzichtbarer Zug in der lebens- und sonderweltlich bewährten Subsumtionspraxis. Seine Selbstverständlichkeit führt zu der üblichen intuitiven Raffung, in der er leicht als eigenständiger Folgerungsschritt verschwindet. Dieser Umstand lässt es dann als verständlich (wenn auch nicht als entschuldbar) erscheinen, wenn die Adjunktoreinführung als für die diskursive Praxis verzichtbares Manöver dargestellt wird. – Die Schlussfigur lässt sich so wiedergeben:

[28]	Ξ	A	Ξ	A
	Also	$A \vee B$	Also	$B \vee A$

Man darf also von einer Aussage A auf eine Adjunktion aus A und B schließen und auch eine Adjunktion aus B und A folgern. – Die Regel der Adjunktoreinführung (=AE) lautet:

[29] Wenn man eine Aussage A gewonnen hat und B eine Aussage ist, dann darf man sowohl die Adjunktion aus A und B als auch die Adjunktion aus B und A folgern.

Zurück zur Ostseefolklore: Angenommen, es ist bekannt, dass Torsten Däne oder Finne ist. Ferner gilt: Alle Dänen erhalten einen Bonus und alle Finnen erhalten einen Bonus. Also erhält Torsten in beiden Fällen einen Bonus. Schematisch:

[30]	1	Da	$\bigwedge\xi\ (A \rightarrow \Delta)$
	2	Da	$\bigwedge\xi\ (\Gamma \rightarrow \Delta)$
	3	Da	$[\theta, \xi, A] \vee [\theta, \xi, \Gamma]$
	4	Also	$[\theta, \xi, A] \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$
	5	Also	$[\theta, \xi, \Gamma] \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$
$\Rightarrow$	6	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$

In den beiden ersten Zeilen stehen die beiden (Vergabe)Prinzipien. Die dritte Zeile ist die Adjunktion, die zwei Untersuchungskorridore, zwei Fälle öffnet, die jeweils einem der Adjunkte entsprechen. Aus Zeile 1 ergibt sich mittels UB in Zeile 4, dass θ im ersten Fall ([θ, ξ, A]) auch die Δ-Eigenschaft hat: Wenn θ ein A-Ding ist, dann ist θ auch ein Δ-Ding. Für den zweiten Fall ergibt sich analog, dass θ ein Δ-Ding ist, falls θ ein Γ-Ding ist. Abschließend kann man in Zeile 6 folgern: Ist jedes der beiden Adjunkte eine hinreichende Bedingung dafür, dass das θ-Objekt Δ ist, dann ergibt sich dieses Sukzedens auch im Lichte der fallaufspannenden Adjunktion.

Ü 5 a) Notieren Sie das informell besprochene Beispiel in Analogie zu [30] und machen Sie sich die Entsprechungen deutlich!

b) Geben Sie eine weitere Instanz für das Beweisschema [30]!

Für die Adjunktorbeseitigung ergibt sich folgende Schlussfigur:

[31]	Ξ	$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
	Ξ'	$\mathrm{A} \rightarrow \Delta$
	Ξ''	$\mathrm{B} \rightarrow \Delta$
	Also	Δ

Die Regel der Adjunktorbeseitigung (=AB) ist dementsprechend zu formulieren:

[32] Wenn man die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Subjunktion aus A und einer Aussage Δ und die Subjunktion aus B und Δ gewonnen hat, dann darf man Δ folgern.

Die Adjunktion ist die Hauptprämisse des Schlusses nach AB, die für die beiden Fälle spezifischen Subjunktionen stellen die Nebenprämissen dar. – AE gibt den Weg vor, um auf eine Adjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Adjunktion beweisbar bzw. – allgemein – wahr. Insofern fixiert AE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Adjunktionen. AB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, die als Sukzedentia zweier verfügbarer Subjunktionen auftreten, deren Antezedentia gerade das linke resp. das rechte Adjunkt sind. Sind die Adjunktion und die zwei Subjunktionen wahr, dann ist auch die gefolgerte Aussage wahr. Insofern spezifiziert AB die Rolle von Adjunktionen – und nebenbei auch von Subjunktionen – als Wahrheitsbasis.

AB setzt wegen der zwei subjunktoralen Nebenprämissen oft das Führen von Unterbeweisen voraus. Wegen dieser Schwierigkeit ist auf die Einübung des Umgangs mit dem Adjunktor besonderer Wert zu legen. Das Gesetz von der Adjunktion von Subjunktionsgliedern besagt:

Bedingt A B und bedingt Γ Δ, dann bedingt die Adjunktion der Antezedentia, also $A \vee \Gamma$, die Adjunktion der Sukzedentia, also $B \vee \Delta$:

[33]	Es-gilt	$((A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)) \to ((A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta))$	

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion; der Beweisweg ist demnach durch SE festgelegt. Man hat $(A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta)$ im Ausgang von der Annahme von $(A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)$ zu gewinnen, um dann in der letzten Zeile das Gewünschte frei von Abhängigkeiten zu folgern. Die Annahme und die sich anbietende zweifache Konjunktorbeseitigung eröffnen die Ableitung:

[33]+	1	Sei	$(A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)$	
	2	Also	$A \to B$	| KB; 1
	3	Also	$\Gamma \to \Delta$	| KB; 1

Die Restaufgabe besteht demnach darin, das Sukzedens, $(A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta)$, im Ausgang von der Annahme des Antezedens in Zeile 1 zu folgern. Da das Sukzedens wiederum eine Subjunktion darstellt, gibt SE nochmals den Weg vor: $B \vee \Delta$ ist im Ausgang von der Annahme von $A \vee \Gamma$ zu folgern:

[33]▫	1	Sei	$(A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)$	
	2	Also	$A \to B$	| KB; 1
	3	Also	$\Gamma \to \Delta$	| KB; 1
	4	Sei	$A \vee \Gamma$	

Mit der in Zeile 4 angenommenen Adjunktion ist ein Untersuchungsraum mit zwei Optionen, zum einen A, zum anderen Γ, geöffnet. Man hat zu zeigen, dass beide Fällen hinreichende Bedingung für $B \vee \Delta$ sind. In anderen Worten: Man muss die zwei Subjunktionen $A \to (B \vee \Delta)$ und $\Gamma \to (B \vee \Delta)$ gewinnen. Dazu ist zunächst im Ausgang von der Annahme von A die Adjunktion aus B und Δ zu gewinnen. Das gelingt durch SB und anschließende AE, so dass sich nach Abschluss des linken Falls der bisherige Beweisverlauf wie folgt darstellt:

[33]°	1	Sei	$(A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)$	
	2	Also	$A \to B$	| KB; 1
	3	Also	$\Gamma \to \Delta$	| KB; 1
	4	Sei	$A \vee \Gamma$	

5	Sei	A	
6	Also	B	| SB; 2,5
7	Also	$B \vee \Delta$	| AE; 6
8	Also	$A \rightarrow (B \vee \Delta)$	| SE; 5-7

Die Zeilen 5 bis 7 bilden den Unterbeweis, der in Zeile 8 die SE ermöglicht. Der Kern des Beweises ist nun zur Hälfte vollzogen: Die Adjunktion in Zeile 4 gibt zwei Optionen vor, von denen die eine durch das Gewinnen der Aussage in Zeile 8 ausgewertet wurde. Mindestens eine von zwei Optionen, A oder Γ, ist laut Zeile 4 der Fall. Wenn A der Fall ist, dann gilt gemäß Zeile 8 $B \vee \Delta$. Lässt sich das auch im Falle von Γ zeigen? Der rechte Fall gelingt in analoger Weise zum linken Fall. Ausgehend von der Annahme des linken Adjunkts, Γ, kann man mittels SB und AE $B \vee \Delta$ gewinnen und so SE anwenden (Zeilen 9 bis 12):

[33]*	1	Sei	$(A \rightarrow B) \wedge (\Gamma \rightarrow \Delta)$	
	2	Also	$A \rightarrow B$	| KB; 1
	3	Also	$\Gamma \rightarrow \Delta$	| KB; 1
	4	Sei	$A \vee \Gamma$	
	5	Sei	A	
	6	Also	B	| SB; 2,5
	7	Also	$B \vee \Delta$	| AE; 6
	8	Also	$A \rightarrow (B \vee \Delta)$	| SE; 5-7
	9	Sei	Γ	
	10	Also	Δ	| SB; 3,9
	11	Also	$B \vee \Delta$	| AE; 10
	12	Also	$\Gamma \rightarrow (B \vee \Delta)$	|SE; 9-11

Nun kann AB auf die Zeilen 4, 8 und 12 angewendet werden: Es sind eine Adjunktion sowie zwei Subjunktionen verfügbar, wobei letztere jeweils dasselbe Sukzedens und eines der Adjunkte als Antezedens haben. Gefolgert wird jenes Sukzedens, welches sich in beiden Fällen ergibt. Nach AB schließen sich die üblichen SE-Anwendungen an:

[33]**	0	Es-gilt	$((A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)) \to ((A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta))$	
	1	Sei	$(A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)$	
	2	Also	$A \to B$	| KB; 1
	3	Also	$\Gamma \to \Delta$	| KB; 1
	4	Sei	$A \vee \Gamma$	
	5	Sei	A	
	6	Also	B	| SB; 2,5
	7	Also	$B \vee \Delta$	| AE; 6
	8	Also	$A \to (B \vee \Delta)$	| SE; 5-7
	9	Sei	Γ	
	10	Also	Δ	| SB; 3,9
	11	Also	$B \vee \Delta$	| AE; 10
	12	Also	$\Gamma \to (B \vee \Delta)$	| SE; 9-11
	13	Also	$B \vee \Delta$	| AB; 4,8,12
	14	Also	$(A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta)$	| SE; 4-13
	15	Also	$((A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)) \to ((A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta))$	| SE; 1-14

Der Beweis ist mit einer grafischen Kommentierung und dem Regelkommentar versehen. In der Folge wird ein durch Indizes kommentiertes Beweisschema für die Kommutativität des Adjunktors vorgelegt:

[34]	0	Es-gilt	$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$	
	1	Sei$_{1}$	$A \vee B$	
	2	Sei$_{1,2}$	A	
	3	Also$_{1,2}$	$B \vee A$	| AE; 2
	4	Also$_{1}$	$A \to (B \vee A)$	| SE; 2-3
	5	Sei$_{1,5}$	B	
	6	Also$_{1,5}$	$B \vee A$	| AE; 5
	7	Also$_{1}$	$B \to (B \vee A)$	| SE; 5-6
	8	Also$_{1}$	$B \vee A$	| AB; 1,4,7

9	Also	$(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$	| SE; 1-8
10	Sei$_{10}$	$B \vee A$	
11	Sei$_{10,11}$	B	
12	Also$_{10,11}$	$A \vee B$	| AE; 11
13	Also$_{10}$	$B \rightarrow (A \vee B)$	| SE; 11-12
14	Sei$_{10,14}$	A	
15	Also$_{10,14}$	$A \vee B$	| AE; 14
16	Also$_{10}$	$A \rightarrow (A \vee B)$	| SE; 14-15
17	Also$_{10}$	$A \vee B$	| AB; 10,13,16
18	Also	$(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$	| SE; 10-17
19	Also	$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$	| BE; 9,18

Der Beweis hat zwei Teile: Um BE anzuwenden, sind beide Richtungen der Bisubjunktion als Subjunktionen zu gewinnen (Zeilen 9 und 18). Um jeweils die Sukzedentia im Ausgang von der Annahme der Antezedentia zu gewinnen sind Adjunktionen zu beseitigen. Fallunterscheidungen, die zu jeweils zwei Subjunktionen führen (Zeilen 4 und 7 und Zeilen 13 und 16), bilden das Gerüst zur Anwendung von AB.

Ü 6 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$

b) $(((A \vee B) \wedge (A \rightarrow \Delta)) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (\Delta \vee \Gamma)$

c) $(((A \vee B) \wedge (A \rightarrow \Gamma)) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \Gamma$

d) $(A \vee (B \vee \Gamma)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee \Gamma)$

e) $(A \wedge (B \vee \Gamma)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge \Gamma))$

f) $(A \vee (B \wedge \Gamma)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma))$

4.2.5. Der Negator

Zur Erinnerung: Der Negator ’$\neg$__’ ist ein einstelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung des Negators ’$\neg$__’ auf eine Formel Δ ist die Negation $\neg\Delta$; dabei ist Δ das Negatum. Der Negator ist von den hier betrachteten Junktoren der einzige einstellige (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Negation geschlossen werden darf und was aus einer Negation gefolgert werden darf. Die Antworten sind wiederum einfach, weichen aber in ihrer Struktur erkennbar von dem bislang gegebenen Muster ab: Man darf auf eine Negation schließen, also auf $\neg A$, falls man eine Aussage Δ und ihre Negation im Ausgang von der Annahme von A gewonnen hat. Man darf ferner aus der doppelten Negation einer Aussage Δ, also aus $\neg\neg\Delta$, auf Δ schließen. – Bei der Erläuterung beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'nicht' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Negatoreinführung: Liegt kognitiver Trouble vor, dann darf an den Ursachen etwas getan werden. 'Trouble' meint: In einem Diskurs ist eine Aussage Δ und ihre Negation $\neg\Delta$ gewonnen worden. Die ›Ursachen‹ sind die verfügbaren Annahmen, von denen Δ bzw. $\neg\Delta$ abhängen. Die Regel erlaubt es, im Ursachenfeld Ordnung zu schaffen: Vorausgesetzt ist, dass die Widerspruchsglieder im Ausgang von der letzten noch verfügbaren Annahme gewonnen wurden. Die Aussage eben dieser Annahme darf als in letzter Instanz widerspruchsverursachend negiert werden. Die Annahme, die ›gekillt‹ wird, wird zusammen mit allen im Ausgang von ihr gefolgerten Zeilen unverfügbar, während die letzte Zeile, in der gerade die Negation der angenommen Aussage gefolgert wurde, verfügbar wird. Die Regel ist also eine Art Troubleshooter. Es resultieren als Schlussfiguren:

[35] Wäre	A	Wäre	A	
...	...	...	...	
Ξ	Δ	Ξ	$\neg\Delta$	
...	...	...	...	
Ξ'	$\neg\Delta$	Ξ'	Δ	, wobei A als letzte Annahme verfügbar ist
Also	$\neg A$	Also	$\neg A$	

Ist eine Folgerung gemäß Negatoreinführung gestattet, so befreit man sich durch diese Folgerung von der als letzter verfügbaren Annahme. So wie die Subjunktoreinführung ist die Negatoreinführung eine tilgende Schlussregel (↑4.2.1). Damit die mit einer Annahme angestrebte Regelanwendung (Subjunktor- oder Negatoreinführung) in einer Ableitung leichter erkennbar ist, werden die Annahmen, die auf Negatoreinführung abzielen, unter Verwendung des Performators 'Wäre__' getätigt. Hier handelt es sich nur um eine Lesehilfe; für die Anwendung aller Schlussregeln sind die beiden Annahmeperformatoren 'Sei__' und 'Wäre__' gleichwertig. – Die Regel der Negatoreinführung (=NE) lässt sich so formulieren:

[36] Wenn man zuletzt eine Aussage Δ resp. $\neg\Delta$ im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen hat und wenn man außerdem im Ausgang von derselben Annahme $\neg\Delta$ resp. Δ gewonnen hat, dann darf man die Negation von A folgern.

Da man sich im Zuge einer Anwendung von NE von der erwähnten Annahme befreit, sind nach dem Schlussakt von dieser Zeile an bis einschließlich der Zeile, in der das zweite Widerspruchsglied gewonnen wird, alle gefolgerten Aussagen nicht mehr verfügbar. Evtl. nach der negierten Annahme angenommene Aussagen müssen erinnerlich bereits unverfügbar gemacht worden sein, wenn diese als letzte Annahme verfügbar ist. Die gefolgerte Negation in der letzten Zeile wird allerdings verfügbar. Der von der negierten Annahme bis zur Gewinnung des zweiten Widerspruchsglieds reichende Abschnitt bildet den Prämissenabschnitt des Schlusses nach NE. Man beachte, dass die angenommenen und gefolgerten Satzaussagen des Prämissenabschnitts, sofern sie nicht schon unverfügbar waren, auch dann unverfügbar werden, wenn der Schluss nicht nur nach NE, sondern auch nach einer anderen Regel korrekt ist. – Der Schluss gemäß Negatorbeseitigung ist vergleichsweise einfach:

[37] Ξ $\neg\neg\Delta$

Also Δ

Die Regel der (doppelten) <u>N</u>egator<u>b</u>eseitigung (=NB) lautet:

[38] Wenn man die Negation der Negation einer Aussage Δ gewonnen hat, dann darf man Δ folgern.

NE gibt den Weg vor, um auf eine Negation zu schließen: Wer auf $\neg\mathrm{A}$ schließen will, muss einen Widerspruch erzeugen, der (auch und ›letztlich‹) durch A ›verursacht‹ ist. Geschieht der Schluss auf $\neg\mathrm{A}$ frei von Abhängigkeiten, ist also die Annahme von A die einzige verfügbare Annahme vor der Anwendung von NE gewesen, dann ist die gefolgerte Negation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert NE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Negationen. – NB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern man ihre doppelte Negation gewonnen hat. Ist die doppelte Negation wahr, d.h. frei von Abhängigkeiten gewonnen, dann ist auch die doppelt negierte Aussage wahr.

Die erste zum Beweis aufgegebene Aussage ist das junktorenlogische (Nicht)Widerspruchsprinzip bzw. das Principium Contradictionis: Es trifft nicht zu, dass A und die Negation von A zugleich gegeben sein können:

[39] Es-gilt $\neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)$

Um auf die Aussage $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$ zu schließen, muss man im Ausgang von der Annahme ihres Negatums eine Aussage und ihre Negation gewinnen. Es wären etwa die Aussagen Γ bzw.

$\neg\Gamma$ Aussagen der gewünschten Form, wenn man sie im Ausgang von einer Annahme von $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ gewinnen könnte. Nun ergibt sich aus $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ durch KB sowohl Γ wie auch $\neg\Gamma$; damit ist der Beweisgang vorgezeichnet. Mit Indexkommentar:

[39]+	0	Es-gilt	$\neg(\Gamma \wedge \neg \Gamma)$	
	1	Wäre$_1$	$\Gamma \wedge \neg \Gamma$	
	2	Also$_1$	Γ	| KB; 1
	3	Also$_1$	$\neg \Gamma$	| KB; 1
	4	Also	$\neg(\Gamma \wedge \neg \Gamma)$	| NE; 1-3

Damit ist das erste Exemplar eines <u>indirekten Beweises</u> vorgeführt: Um mit NE auf $\neg A$, hier: $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$, schließen zu können, nimmt man A, hier: $\Gamma\wedge\neg\Gamma$, an und erzeugt daraus einen Widerspruch. Hängen die Glieder des Widerspruchs nur noch von der Annahme des indirekten Beweises ab, dann ist mit NE der gewünschte Beweis erbracht. In Bezug auf die Schlussfigur [35] bestehen im vorliegenden Fall also insgesamt folgende Entsprechungen: Γ entspricht Δ; $\neg\Gamma$ entspricht $\neg\Delta$; $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ entspricht A; $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$ entspricht $\neg A$.

In der Folge ist das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten, das Tertium-non-datur, zu beweisen. Dabei wird die zweite, die <u>klassische</u> Form des indirekten Beweises illustriert:

[40] Es-gilt $A \vee \neg A$

Zwischen A und $\neg A$ gibt es kein ›Drittes‹. Zu beweisen ist eine Adjunktion; und diese Aufgabe führt zunächst zu AE. Um aber AE einzusetzen, müsste man eines der beiden Adjunkte schon gewonnen haben; dies könnte nur durch Annahmen geschehen. Damit aber hätte man nicht $A\vee\neg A$, sondern nur $A\rightarrow(A\vee\neg A)$ bzw. $\neg A\rightarrow(A\vee\neg A)$ bewiesen. Auch diese Aussagen sind ehrenwerte Theoreme, aber vom Tertium-non-datur durchaus verschieden.

Wenn der ordentliche Weg versagt, muss man einen außerordentlichen beschreiten. Dieser ergibt sich durch Hintereinanderschaltung von NE und NB: Man nimmt die Negation des Beweiskandidaten an, erzeugt in Abhängigkeit davon einen Widerspruch und schließt mit NE auf die doppelte Negation des Tertium-non-datur. Der Schluss mit NB führt dann sofort zum Ziel; damit ergibt sich als Beweiskontur:

[40]+	1	Wäre$_1$	$\neg(A \vee \neg A)$	
	...	...	...	
	k	Also	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	| NE
	k+1	Also	$A \vee \neg A$	| NB

Gesucht sind nun eine Aussage und ihre Negation, die im Ausgang von der ersten Annahme gewonnen werden können. An dieser Stelle bleibt nur die Möglichkeit, Annahmeakte zu vollziehen in der Hoffnung, die Annahmen im Fortgang tilgen zu können. Um die erste Annahme, wie gewünscht, ›ins Geschehen‹ einzubeziehen, legt es sich nahe, das Negatum zu erzeugen, indem man A oder aber $\neg A$ annimmt, um dann durch AE die Adjunktion zu gewinnen:

[40]°	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	2	Wäre$_{1,2}$	A	
	3	Also$_{1,2}$	$A \vee \neg A$	| AE; 2

Mit $A \vee \neg A$ und $\neg(A \vee \neg A)$ hat man eine Aussage und ihre Negation gewonnen, allerdings nur die erstere im Ausgang von der letzten Annahme (Zeile 2). Das lässt sich mit Hilfe der Wiederholungsregel (↑4.2.2) beheben. Jetzt wurden beide Widerspruchsglieder im Ausgang von der Annahme in Zeile 2 gewonnen – NE bietet sich an.

[40]*	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	2	Wäre$_{1,2}$	A	
	3	Also$_{1,2}$	$A \vee \neg A$	| AE; 2
	4	Also$_{1,2}$	$\neg (A \vee \neg A)$	| W; 1
	5	Also$_1$	$\neg A$	| NE; 2-4

Die soeben vollzogene Kombination von Redehandlungen ist noch einmal zu reflektieren: In Zeile 1 war die Negation einer Adjunktion verfügbar. In Zeile 5 wurde in alleiniger Abhängigkeit von dieser Negation einer Adjunktion eines der Adjunkte negiert gewonnen. Dieser Übergang ist durch AR-AE-W-NE stets möglich. Damit ist eine oft gewinnbringende Umgangsweise mit Negationen exemplifiziert. Als heuristische Maxime: Hast du die Negation einer Adjunktion gewonnen, die sich nicht unmittelbar ›ausbeuten‹ lässt, dann gewinne mittels AR, AE, W und NE die Negationen eines Adjunkts (oder auch beider Adjunkte)!

Mit Blick auf den weiteren Beweisgang kann nun der mit AE abermals das Negatum der Aussage in Zeile 1 gewonnen werden. Damit wurden die Widerspruchsglieder für eine weitere Anwendung von NE im Ausgang von der als letzter verfügbaren und gleichzeitig einzigen noch verfügbaren Annahme gewonnen. NE führt zu einer doppelten Negation – es bietet sich NB an, was den Beweis zu Ende bringt:

[40]**	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$
	2	Wäre$_{1,2}$	A

3	$Also_{1,2}$	$A \vee \neg A$	| AE; 2
4	$Also_{1,2}$	$\neg (A \vee \neg A)$	| W; 1
5	$Also_{1}$	$\neg A$	| NE; 2-4
6	$Also_{1}$	$A \vee \neg A$	| AE; 5
7	Also	$\neg \neg (A \vee \neg A)$	| NE; 1-6
8	Also	$A \vee \neg A$	| NB; 7

Die NE-Anwendung in Zeile 7 ist zulässig, weil sich in den Zeilen 1 und 6 ein Widerspruch vorfindet. Die Zeilen 4 und 6 taugen nicht zur Lizensierung der NE in Zeile 7, weil Zeile 4 seit der NE-Anwendung in Zeile 5 nicht mehr verfügbar ist. – Als allgemeines Rezept lässt sich dem Beweis für das Tertium-non-datur entnehmen: Kommt man nicht auf ordentlichem Wege zum Beweis einer Aussage Δ, dann kann man die Möglichkeit über NE und NB in Betracht ziehen, wobei man mit der Negation der zu beweisenden Aussage startet. Dieser Beweistyp ist der klassische indirekte Beweis, weil die die klassische Logik charakterisierende Regel NB eine wesentliche Rolle spielt. Das allgemeine Schema für das klassische indirekte Beweisen bzw. Schließen hat folgende Gestalt:

[35]+	Wäre	$\neg A$	
	...	...	
	Ξ	Δ	
	...	...	
	Ξ'	$\neg \Delta$	, wobei $\neg A$ als letzte Annahme verfügbar ist
	Also	$\neg \neg A$	
	Also	A	

Der letzte Schritt, die doppelte Negatorbeseitigung, ist für das klassische indirekte Schließen wesentlich. Mit NB sind die Beweismöglichkeiten wesentlich erweitert: Eine Aussage gleich welchen Hauptoperators kann man, falls sie auf klassisch direktem Weg beweisbar ist, auch klassisch indirekt beweisen, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Als Faustregel für die Beweissuche gilt somit: Wenn man einen Beweis für eine Aussage mit τ als Hauptoperator sucht, arbeitet man zunächst mit der τ-Einführung als übergreifende Regel. Beispiel: Versuche zunächst, eine Konjunktion über KE zu beweisen. Bei negativem Ausgang ist der klassische indirekte Weg zu erproben!

In der Folge wird ohne weiteren Kommentar der Beweis eines Kontrapositionsgesetzes notiert; jegliche Kommentierung entfällt, so dass das Schema eines rein objektsprachlichen Beweises erscheint:

[41]	0	Es gilt	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
	1	Sei	$A \rightarrow B$
	2	Sei	$\neg B$
	3	Wäre	A
	4	Also	B
	5	Also	$\neg B$
	6	Also	$\neg A$
	7	Also	$\neg B \rightarrow \neg A$
	8	Also	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
	9	Sei	$\neg B \rightarrow \neg A$
	10	Sei	A
	11	Wäre	$\neg B$
	12	Also	$\neg A$
	13	Also	A
	14	Also	$\neg \neg B$
	15	Also	B
	16	Also	$A \rightarrow B$
	17	Also	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
	18	Also	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Ü 7 a) Überführen Sie das Beweisschema in ein kommentiertes Beweisschema!

b) Verdeutlichen Sie sich den Beweisgang auf Basis der benutzten Regeln!

Das zuletzt zu beweisende Ex-falso-quodlibet, besser Ex-contradictione-quodlibet, besagt, lax geredet, dass aus einem Widerspruch Beliebiges folgt. Akzeptiert man also einen Widerspruch als wahr, dann könnte man aus dem Widerspruch und dem erörterten Prinzip Beliebiges beweisen. Der Unterschied zwischen wahr und falsch und damit auch die Möglichkeit des Unterscheidenkönnens wäre aufgehoben:

[42]	0	Es-gilt	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Delta$	
	1	Sei_1	$A \wedge \neg A$	
	2	$\text{Wäre}_{1,2}$	$\neg \Delta$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	A	KB; 1
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\neg A$	KB; 1
	5	Also_1	$\neg \neg \Delta$	NE; 2-4
	6	Also_1	Δ	NB; 5
	7	Also	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Delta$	SE; 1-6

Da der Beweiskandidat eine Subjunktion ist, wird in Zeile 1 das Antezedens angenommen. Für die Herleitung von Δ in Zeile 6 ist der (klassische) indirekte Weg gewählt, indem man in Zeile 2 $\neg\Delta$ annimmt. KB führt in 3 und 4 zu der für NE erforderten Diskurslage. Dabei ist darauf zu achten, dass KB erst nach der Annahme in Zeile 2 angewendet wird, damit der Widerspruch im Ausgang von dieser Annahme gewonnen wurde. In Zeile 5 wird dann die Annahme des indirekten Beweises negiert. NB und SE sorgen für die abschließenden Schritte.

Ü 8 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $\neg \neg A \leftrightarrow A$

b) $(A \wedge \neg A) \rightarrow \neg \Delta$

c) $(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$

d) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$

e) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$

4.3. Regeln für die Quantoren

In der Folge kommen die Regeln für den Universal- und den Partikularquantor zur Sprache. Mit Hilfe dieser beiden Quantoren und des im nächsten Abschnitt dargestellten Identitätsprädikators können später Mindest-, Höchst- und Anzahlquantoren definiert werden; dabei wird der Eins- bzw. der Einzigkeitsquantor eine hervorragende Position im Blick auf die Organisation der Bezugnahme einnehmen (↑5.3, 7).

4.3.1. Der Universalquantor

Zur Erinnerung: Der Universalquantifikator '⋀..' ist ein einstelliger, variablenbestimmender und quantorenerzeugender Operator; das Ergebnis der Anwendung von '⋀..' auf eine Variable ξ ist der ξ bindende Quantor ⋀ξ__. Der Universalquantor ⋀ξ__ ist ein einstelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Quantor; das Ergebnis der Anwendung von ⋀ξ__ auf eine Formel Δ ist eine universalquantifizierte Formel, ⋀ξΔ – die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ. Kommt in Δ höchstens ξ frei vor, so wird die Formel ⋀ξΔ auch als universale Aussage bzw. als Universalaussage geführt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Universalquantifikation geschlossen werden darf und was aus einer Universalquantifikation gefolgert werden darf: Falls eine Eigenschaft, ausgedrückt durch Δ, auf eine beliebige repräsentative Entität, die durch einen Parameter β vertreten wird, zutrifft, dann darf man schließen, dass Δ auf alle Gebilde zutrifft, dann darf man also auf ⋀ξΔ schließen. Umgekehrt: Aus einer Universalquantifikation ⋀ξΔ, daraus also, dass Δ von allen Gebilden gilt, darf man folgern, dass Δ auch auf jedes einzelne θ zutrifft. – Zum Verständnis beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'Für alle..' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Um die Aufmerksamkeit auf das hier Wesentliche zu konzentrieren, wird nun die Verschiedenheitsforderung (↑4.2.1) ergänzt: Für die schematischen Satzsequenzen soll nicht nur gelten, dass Formeln, die durch verschiedene Mitteilungszeichen bezeichnet werden, keine Teilformeln voneinander sind, sondern auch, dass verschiedene Mitteilungszeichen für Parameter, Variablen und Terme für teiltermfremde und damit verschiedene Parameter, Variablen und Terme stehen, dass also etwa Vorkommen von 'θ', 'β', 'ω', 'ξ' in einem Beweisschema durch 'der-Vater-von(x)', 'y', '*x*', '*y*', aber nicht durch 'der-Vater-von(y)', 'y', '*x*', '*x*' instanziiert werden dürfen. Α, Β, Γ, Δ seien jeweils parameterfreie Formeln, in denen jeweils höchstens die Variablen frei sind, die durch evtl. vorangestellte Quantoren gebunden sind oder als Substituenda für die Substitutionsoperation dienen. Diese Festlegungen betreffen die im Folgenden bewiesenen Formelschemata. Instanzen dieser Formelschemata, die diese Einschränkungen verletzen, sind dennoch beweisbar, die Beweise gestalten sich jedoch unter Umständen anders. – Die Regelformulierungen und die Schlussfiguren sind jedoch weiterhin so allgemein wie möglich. Für sie gelten daher nur die Einschränkungen die ausdrücklich in der Regelformulierung aufgerufen sind.

Zunächst zur Universalquantorbeseitigung: Der Schluss vom Allgemeinen aufs Einzelne, von einer Universalquantifikation auf eine Instanz, wurde bereits im Rahmen der Darlegung der grammatischen Begrifflichkeit erläutert (↑3.1, 3.2.4). Man kann also direkt die Schlussfigur notieren:

[43] Ξ $\bigwedge\xi\Delta$

Also $[\theta, \xi, \Delta]$

Dabei ist θ ein geschlossener Term. Die Regel der Universal(quantor)beseitigung (=UB) kann so formuliert werden:

[44] Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ξ gewonnen hat und θ ein geschlossener Term ist, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ für ξ in Δ folgern.

Wenn alle Menschen sterblich sind und Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich. Das (Theorem)Schema zu dieser (Theorem)Instanz, die generalisierte Subjunktorbeseitigung, wird so bewiesen:

[45]	0	Es-gilt	$(\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]) \rightarrow [\theta, \xi, \Gamma]$	
	1	Sei	$\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]$	
	2	Also	$\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma)$	| KB; 1
	3	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$	| KB; 1
	4	Also	$[\theta, \xi, \Delta] \rightarrow [\theta, \xi, \Gamma]$	| UB; 2
	5	Also	$[\theta, \xi, \Gamma]$	| SB; 4,3
	6	Also	$(\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]) \rightarrow [\theta, \xi, \Gamma]$	| SE; 1-5

Der metasprachliche Substitutionsoperator '[..,..,..]' dient in dem schematischen Beweis [45] und in der Schlussfigur [43] dazu, ganz generell auf Substitutionsergebnisse zu referieren, also insbesondere auf Formeln, die aus offenen Formeln entstehen, in dem für eine freie Variable ein geschlossener Term eingesetzt wird. In einem einzelnen Beweis (im Gegensatz zu einem Beweisschema, wie [45]) wird bei UB das konkrete Ergebnis der im Zuge dieser UB vollzogenen Substitution direkt notiert. Aus diesem Grund tauchen die Substitutionsklammern in einer Instanz zu [45], zum Beispiel in [46], nicht auf:

[46]	0	Es-gilt	$(\bigwedge x\,(\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{St}(x)) \wedge \mathrm{M(s)}) \rightarrow \mathrm{St(s)}$	
	1	Sei	$\bigwedge x\,(\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{St}(x)) \wedge \mathrm{M(s)}$	
	2	Also	$\bigwedge x\,(\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{St}(x))$	| KB; 1
	3	Also	$\mathrm{M(s)}$	| KB; 1

4	Also	$M(s) \rightarrow St(s)$	| UB; 2
5	Also	$St(s)$	| SB; 4,3
6	Also	$(\bigwedge x\, (M(x) \rightarrow St(x)) \wedge M(s)) \rightarrow St(s)$	| SE; 1-5

Die materialen Redeteile sind wie folgt zu lesen: 'M(..)' als '.. ist ein Mensch'; 'St(..)' als '.. ist sterblich'; 's' als 'Sokrates'. – UB kann in dem Sinne iteriert angewendet werden, als eine mehrfache Universalquantifikation bzgl. desselben Gebildes mehrfach spezialisiert werden kann: Aus '$\bigwedge x \bigwedge y$ Vertraut(x, y)' lässt sich '$\bigwedge y$ Vertraut(Sokrates, y)' und dann 'Vertraut(Sokrates, Sokrates)' schließen. Der geschlossene Term θ, hier 'Sokrates', darf demnach, wie die zweite Folgerung zeigt, in Δ, hier: '$\bigwedge y$ Vertraut(Sokrates, y)', schon Teilterm sein.

Die Regel der Universalquantoreinführung kann informell so formuliert werden: Wenn man von einem repräsentativen Gebilde, vertreten durch den Parameter β, gezeigt hat, dass ihm die durch Δ ausgedrückte Eigenschaft zukommt, dann darf man daraus schließen, dass allen Gebilden die Eigenschaft Δ zukommt, dann darf man also auf $\bigwedge\xi\Delta$ schließen. Man betrachte die Aussage: Alle Bayern sind Europäer. Ein Beweis könnte so aussehen: Sei z ein Bayer. Nun sind alle Bayern Deutsche. Wenn z Bayer ist, ist er demzufolge Deutscher. Also ist z Deutscher. Ferner sind alle Deutschen Europäer. Wenn also z Deutscher ist, ist er auch Europäer. Also ist z Europäer. Also ist z Europäer, falls er Bayer ist. Damit gilt insgesamt: Alle Bayern sind Europäer. Das Schema dieses Beweises hat folgende Gestalt:

[47]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \Gamma)$	
	1	Sei	$[\beta, \xi, \Delta]$	
	2	Da	$\bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \mathrm{A})$	
	3	Also	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \mathrm{A}]$	| UB; 2
	4	Also	$[\beta, \xi, \mathrm{A}]$	| SB; 3,1
	5	Da	$\bigwedge\xi\, (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)$	
	6	Also	$[\beta, \xi, \mathrm{A}] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	| UB; 5
	7	Also	$[\beta, \xi, \Gamma]$	| SB; 4,6
	8	Also	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	| SE; 1-7
	$\Rightarrow$ 9	Also	$\bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \Gamma)$	| UE; 8

Ü 9 a) Notieren Sie das in Prosa entwickelte Beispiel im Stil von [47]!

b) Legen Sie eine Liste mit den Entsprechungen an (z.B.: 'Bayer(x)' = Δ)!

c) Finden Sie eine weitere Instanz zu dem Beweisschema [47]!

Ziel ist der Nachweis, dass alle Gebilde die Eigenschaft haben, Γ zu sein, falls sie Δ sind. Gezeigt wird dies für die β-Gegebenheit, und zwar nach der ›Logik der Subjunktion‹ und unter Anziehung zweier allgemeiner Tatsachen, die in Zeile 2 und Zeile 5 notiert sind. In Zeile 8 ist gezeigt, dass die Eigenschaft, Γ zu sein, falls Δ, zutrifft, von dem repräsentativ gewählten β-Ding gilt. Das legitimiert den durch den Doppelpfeil markierten Schluss der Universalquantoreinführung. Die Schlussfigur hat folgende Gestalt:

[48] Ξ [β, ξ, Δ] , wobei β kein Teilterm von Δ oder einer verfügbaren Annahme ist

Also $\bigwedge\xi\Delta$

Die an die Prämisse angefügte Bedingung garantiert, dass β wirklich eine repräsentative Gegebenheit ist und keine besonderen Eigenschaften mittransportiert, die diese Repräsentativität stören; die Parameterbedingung wird erst später im Detail erläutert, wenn Vertrautheit im Umgang mit den neuen Regeln hergestellt ist (↑4.3.2). – Die Regel der <u>U</u>niversal(quantor)<u>e</u>inführung (=UE) lautet:

[49] Wenn man das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Δ noch Teilterm einer verfügbaren Annahme ist, dann darf man die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Das erste Theorem greift sowohl auf Elemente der Beispielbetrachtung [47] wie auch auf den Nachweis der Transitivität des Subjunktors (↑[15]) zurück. Wie immer wird der Zusammenhang von Bedeutung und Beweisweg ins Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt.

[50] Es-gilt $(\bigwedge\omega\, (B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\, (\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\, (B \to \Delta)$

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion. Um eine Subjunktion zu beweisen, nimmt man zunächst ihr Antezedens an, um im Ausgang davon ihr Sukzedens zu gewinnen. Der Beweis ist mit einem Indexkommentar ausgestattet:

[50]+ 1	Sei$_1$	$\bigwedge\omega\, (B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\, (\Gamma \to \Delta)$		
...	...	...		
k	Also$_1$	$\bigwedge\omega\, (B \to \Delta)$		
k+1	Also	$(\bigwedge\omega\, (B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\, (\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\, (B \to \Delta)$	| SE	

Die verbleibende Teilaufgabe besteht in der Folgerung von $\bigwedge\omega(B\to\Delta)$ im Ausgang von der Annahme in der ersten Zeile. Die Aussage der Zeile k ist eine Universalquantifikation. Aussagen dieser Art werden gemäß UE gefolgert. Dazu ist zu zeigen, dass der Bedingungszusammenhang zwischen Β und Δ auf eine beliebig, aber fest gewählte, eben eine repräsentative, Entität β zutrifft: [β,ω,Β]→[β,ω,Δ]. Ist diese Subjunktion in Abhängigkeit von der erstens angenommenen Aussage gewonnen, dann greift UE:

[50]°	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)$	
	...	...	...	
	k-1	Also_1	$[\beta, \omega, B] \to [\beta, \omega, \Delta]$	
	k	Also_1	$\bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$	| UE
	k+1	Also	$(\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$	| SE

Die Aussage von k-1 ist eine Subjunktion, die in der bekannten Weise gemäß SE gewonnen wird. Herzustellen ist insgesamt folgende Diskurslage:

[50]▫	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \omega, B]$	
	...	...	...	
	k-2	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	k-1	Also_1	$[\beta, \omega, B] \to [\beta, \omega, \Delta]$	| SE
	k	Also_1	$\bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$	| UE
	k+1	Also	$(\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$	| SE

Damit ist auch die Restaufgabe gestellt: Folgere aus der in Zeilen 1 und 2 gegebenen Basis die Aussage von k-2. Das erstens Angenommene ist eine Konjunktion, die man gemäß KB zerlegen kann. In Zeile 3 und 4 gewinnt man dann die einzelnen Universalquantifikationen:

[50]*	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \omega, B]$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma)$	| KB; 1
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)$	| KB; 1
	...	...	...	
	k-2	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	k-1	Also_1	$[\beta, \omega, B] \to [\beta, \omega, \Delta]$	| SE

	k	Also_1	$\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \to \Delta)$	| UE
	k+1	Also	$(\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \to \Delta)$	| SE

Die Aussagen von 3 und 4 betrachten generelle Zusammenhänge zwischen der B-, der Γ- und der Δ-Eigenschaft. In diesem Beweiskontext interessiert jedoch der repräsentative Spezialfall β. Mit UB gewinnt man aus 3 und 4 die hier zielführende Spezialisierung:

[50]**	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \mathrm{B}]$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \to \Gamma)$	| KB; 1
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	| KB; 1
	5	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \mathrm{B}] \to [\beta, \omega, \Gamma]$	| UB; 3
	6	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Gamma] \to [\beta, \omega, \Delta]$	| UB; 4
	…	…	…	
	k-2	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	...	...	...	

Damit ergibt sich nur noch die Aufgabe, aus den Subjunktionen in 5 und 6 und aus dem Antezedens der ersten Subjunktion, welches in Zeile 2 angenommen worden ist, die Aussage von k-2 zu gewinnen. Diese Aufgabe wurde beim Beweis der Transitivität des Subjunktors bereits gelöst (↑[15]). Insgesamt ergibt sich dann folgender Beweis:

[50]°°	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \mathrm{B}]$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \to \Gamma)$	| KB; 1
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (\Gamma \to \Delta)$	| KB; 1
	5	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \mathrm{B}] \to [\beta, \omega, \Gamma]$	| UB; 3
	6	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Gamma] \to [\beta, \omega, \Delta]$	| UB; 4
	7	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Gamma]$	| SB; 5,2
	8	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	| SB; 6,7
	9	Also_1	$[\beta, \omega, \mathrm{B}] \to [\beta, \omega, \Delta]$	| SE; 2-8
	10	Also_1	$\bigwedge\omega\ (\mathrm{B} \to \Delta)$	| UE; 9

	11	Also	$(\bigwedge\omega\,(\mathrm{B} \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\,(\mathrm{B} \to \Delta)$	| SE; 1-10

Dabei werden die Zeilen unter Wegfall der k-Bezifferung laufend nummeriert und der Regelkommentar vervollständigt. – Das zweite Theorem hält fest, dass man aus der Adjunktion zweier Universalquantifikationen auf die Universalquantifikation zweier Adjunktionen schließen darf:

[51]	0	Es-gilt	$(\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma) \to \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	
$\to$	1	Sei_1	$\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$\bigwedge\xi\Delta$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| UB; 2
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \xi, \Delta] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$	| AE; 3
	5	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	| UE; 4
	6	Also_1	$\bigwedge\xi\Delta \to \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	| SE; 2-5
	7	$\text{Sei}_{1,7}$	$\bigwedge\xi\Gamma$	
	8	$\text{Also}_{1,7}$	$[\beta, \xi, \Gamma]$	| UB; 7
	9	$\text{Also}_{1,7}$	$[\beta, \xi, \Delta] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$	| AE; 8
	10	$\text{Also}_{1,7}$	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	| UE; 9
	11	Also_1	$\bigwedge\xi\Gamma \to \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	| SE; 7-10
	12	Also_1	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	| AB; 1,6,11
	13	Also	$(\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma) \to \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	| SE; 1-12

Das Antezedens der zu beweisenden Subjunktion erzwingt eine Fallunterscheidung. Sowohl im Ausgang vom ersten (Zeile 2-5) wie auch im Ausgang vom zweiten Fall (Zeile 7-10) folgt das Gewünschte, was jeweils durch SE dokumentiert wird. Mit AB kann man dann das gemeinsame Sukzedens folgern; damit ist die Möglichkeit zur abschließenden Anwendung von SE gegeben. – Schließlich sei noch eine quantorenlogische Variante des Nichtwiderspruchsprinzips bewiesen:

[52]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi \neg (\Delta \wedge \neg \Delta)$	
	1	Wäre_1	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Delta]$	
	2	Also_1	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 1
	3	Also_1	$\neg [\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 1

4	Also	$\neg ([\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Delta])$	NE; 1-3
5	Also	$\bigwedge\xi \neg (\Delta \wedge \neg \Delta)$	UE; 4

Bei diesem Beweis kommt es darauf an, die geeignete ›Zielscheibe‹ für den indirekten Beweis zu finden. Dazu muss man sich klarmachen, welche Aussage für die Anwendung von UE passt. Da diese Aussage eine Negation ist, startet man mit dem Negatum. Die Beweiszüge 1 bis 4 sind vom Beweis des junktorenlogischen Widerspruchsprinzips bekannt (↑[39]).

Ü 10 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $(\bigwedge\omega (B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega B) \rightarrow \bigwedge\omega \Gamma$

b) $\bigwedge\omega (B \wedge \Gamma) \leftrightarrow (\bigwedge\omega B \wedge \bigwedge\omega \Gamma)$

c) $\bigwedge\omega (B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\bigwedge\omega B \rightarrow \bigwedge\omega \Gamma)$

d) $(\bigwedge\omega (B \vee \Gamma) \wedge \bigwedge\omega \neg \Gamma) \rightarrow \bigwedge\omega B$

UE gibt den Weg vor, um auf eine Universalquantifikation zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Universalquantifikation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert UE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Universalquantifikationen. UB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, die aus der Substitution eines geschlossenen Terms für die Variablen in der universalquantifizierten Formel entstehen, also auf Spezialisierungen der Universalaussage. Ist die Universalquantifikation wahr, dann ist auch die Spezialisierung wahr. Insofern spezifiziert UB die Rolle von Universalaussagen als Wahrheitsbasis.

4.3.2. Der Partikularquantor

Zur Erinnerung: Der Partikularquantifikator '$\bigvee$..' ist ein einstelliger, variablenbestimmender und quantorenerzeugender Operator; das Ergebnis der Anwendung von '$\bigvee$..' auf eine Variable ξ ist der ξ bindende Quantor $\bigvee\xi$__. Der Partikularquantor $\bigvee\xi$__ ist ein einstelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Quantor; das Ergebnis der Anwendung von $\bigvee\xi$__ auf eine Formel Δ ist eine partikularquantifizierte Formel, $\bigvee\xi\Delta$ – die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ. Kommt in Δ höchstens ξ frei vor, so wird die Formel $\bigvee\xi\Delta$ auch als partikulare Aussage bzw. als Partikularaussage geführt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Partikularquantifikation geschlossen werden darf bzw. was aus einer Partikularquantifikation gefolgert werden darf. Zum ersten: Falls eine Δ-Eigenschaft auf eine θ-Entität zutrifft, dann darf man daraus schließen, dass für wenigstens eine Entität die Δ-Eigenschaft gilt. Kurz: Besitzt ein bestimmtes Einzelnes eine

Eigenschaft, dann gibt es etwas, was diese Eigenschaft aufweist. Zum zweiten: Hat man eine Partikularquantifikation gewonnen, dann darf man aus ihr all das folgern, was aus einer zugehörigen ›Ersatzannahme‹ folgt. Hat man gewonnen, dass eine Δ-Eigenschaft auf wenigstens ein ξ zutrifft, dann darf man daraus all das folgern, was man ausgehend davon gewinnen kann, dass Δ auf ein beliebig, aber fest gewähltes β zutrifft. – Zum Verständnis beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'Es gibt ein..' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Partikularquantoreinführung: Man darf daraus, dass für einen singulären Gegenstand etwas gilt, folgern, dass es etwas gibt bzw. dass für wenigstens ein Gebilde gilt, dass es die Eigenschaft hat, die dem singulären Gegenstand zukommt. UB erlaubt den Schluss vom Universalen aufs Singuläre; die jetzt erörterte Regel gestattet den Übergang vom Singulären aufs Partikulare. Die Schlussfigur:

[53]	Ξ	[θ, ξ, Δ]
	Also	⋁ξΔ

Wenn man etwa die Aussage '3=3' gewonnen hat, dann darf man daraus die Aussagen '⋁*x* *x*=3', '⋁*x* 3=*x*', '⋁*x* *x*=*x*' folgern. Im ersten Fall entspricht '3' θ und '*x*=3' entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann ['3', '*x*', '*x*=3'], also '3=3' dem [θ, ξ, Δ]. Im zweiten Fall entspricht wiederum '3' θ und '3=*x*' entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann ['3', '*x*', '3=*x*'], also '3=3', dem [θ, ξ, Δ]. Im dritten Fall entspricht wiederum '3' θ und '*x*=*x*' entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann ['3', '*x*', '*x*=*x*'], also '3=3', dem [θ, ξ, Δ].

Material gesprochen: Im ersten Fall schließt man daraus, dass 3 die Eigenschaft hat, zu 3 in der Identitätsbeziehung zu stehen, dass es etwas gibt, das zu 3 in der Identitätsbeziehung steht. Im zweiten Fall schließt man daraus, dass 3 die Eigenschaft hat, dass 3 zum erstgenannten Gebilde in der Identitätsbeziehung steht, dass es etwas gibt, zu dem 3 in der Identitätsbeziehung steht. Im dritten Fall schließt man daraus, dass 3 zu sich in der Identitätsrelation steht, dass wenigstens ein Gebilde zu sich in der Identitätsbeziehung steht.

Aus '⋁*x* *x*=3' kann man weiter auf '⋁*z*⋁*x* *x*=*z*' schließen und aus '⋁*x* 3=*x*' lässt sich '⋁*y*⋁*x* *y*=*x*' folgern. Die Prämisse des Schlusses muss also keineswegs eine atomare Aussage sein. Im ersten Fall hat 3 die Eigenschaft, dass es etwas gibt, das zu 3 in der Identitätsbeziehung steht. Also gilt, dass für wenigstens ein Gebilde zutrifft, dass es etwas gibt, das zu ihm in der Identitätsrelation steht; ['3', '*z*', '⋁*x* *x*=*z*'] entspricht in diesem Beispiel [θ, ξ, Δ]. Im zweiten Fall hat 3 die Eigenschaft, dass 3 zu wenigstens einem Gebilde in der Identitätsbeziehung steht.

Also gibt es wenigstens eine Gegebenheit, die zu wenigstens einem Gebilde in der Identitätsrelation steht; [’3’, ’*y*’, ’$\bigvee x\ y{=}x$’] entspricht in diesem Beispiel [θ, ξ, Δ]. Die Eigenschaft, die das Einzelne besitzt, kann also komplex sein. Formal ausgedrückt: θ kann Teilterm einer molekularen Formel Δ sein. – Die Regel der Partikular(quantor)einführung (=PE) lässt sich abschließend so formulieren:

[54] Wenn man das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, dann darf man die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Was auf alle zutrifft, gilt auch für einzelne Gegenstände; und wenn etwas von einem einzelnen Gegenstand gilt, trifft es auch auf wenigstens eine Gegebenheit zu. Vom Universalen gibt es also über das Singuläre einen ›Durchgang‹ zum Partikularen, eben dies zeigt der folgende unkommentierte Beweis:

[55]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi\Delta \rightarrow \bigvee\xi\Delta$
	1	Sei	$\bigwedge\xi\Delta$
	2	Also	[θ, ξ, Δ]
	3	Also	$\bigvee\xi\Delta$
	4	Also	$\bigwedge\xi\Delta \rightarrow \bigvee\xi\Delta$

Die soeben formulierte Regel wird im zweiten Folgerungsschritt angewendet. – Die Regel der Partikularquantorbeseitigung wird oft als schwierig empfunden. Aus einer Partikularquantifikation darf man schließen, was man im Ausgang von einem repräsentativen Fall, der Ersatzannahme für die Quantifikation, gewonnen hat.

Zunächst ein Beispiel: Zu begründen ist die Aussage ’Alle Menschen haben einen Vater’ bzw. grammatisch formatiert, ’Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch ist, dann gibt es ein *y*, so dass *y* Vater von *x* ist.’ Begründung:

[56]	0	Es-gilt	$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow \bigvee y$ Vater(y, x))	
	1	Sei_1	Mensch(u)	
	2	Da_1	$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow \bigvee z$ Zeugte(z, x))	
	3	Also_1	Mensch(u) $\rightarrow \bigvee z$ Zeugte(z, u)	| UB; 2
	4	Also_1	$\bigvee z$ Zeugte(z, u)	| SB; 1,3
	5	$\text{Sei}_{1,5}$	Zeugte(v, u)	

	6	$\text{Da}_{1,5}$	$\bigwedge x \bigwedge y$ (Vater(x, y) $\leftrightarrow$ Zeugte(x, y))	
	7	$\text{Also}_{1,5}$	$\bigwedge y$ (Vater(v, y) $\leftrightarrow$ Zeugte(v, y))	| UB; 6
	8	$\text{Also}_{1,5}$	Vater(v, u) $\leftrightarrow$ Zeugte(v, u)	| UB; 7
	9	$\text{Also}_{1,5}$	Vater(v, u)	| BB; 8,5
	10	$\text{Also}_{1,5}$	$\bigvee y$ Vater(y, u)	| PE; 9
	$\Rightarrow$ 11	Also_{1}	$\bigvee y$ Vater(y, u)	| PB; 4,5-10
	12	Also	Mensch(u) $\rightarrow \bigvee y$ Vater(y, u)	| SE; 1-11
	13	Also	$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow \bigvee y$ Vater(y, x))	| UE; 12

Dieser Begründungsinstanz ist folgendes Begründungsschema zugeordnet:

[57]	0	Es-gilt	$\bigwedge \xi\, (\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee \omega\, \Psi(\omega, \xi))$	
	1	Sei_{1}	$\Phi(\beta)$	
	2	Da_{1}	$\bigwedge \xi\, (\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee \zeta\, X(\zeta, \xi))$	
	3	Also_{1}	$\Phi(\beta) \rightarrow \bigvee \zeta\, X(\zeta, \beta)$	| UB; 2
	4	Also_{1}	$\bigvee \zeta\, X(\zeta, \beta)$	| SB; 1,3
	5	$\text{Sei}_{1,5}$	$X(\beta^*, \beta)$	
	6	$\text{Da}_{1,5}$	$\bigwedge \xi \bigwedge \omega\, (\Psi(\xi, \omega) \leftrightarrow X(\xi, \omega))$	
	7	$\text{Also}_{1,5}$	$\bigwedge \omega\, (\Psi(\beta^*, \omega) \leftrightarrow X(\beta^*, \omega))$	| UB; 6
	8	$\text{Also}_{1,5}$	$\Psi(\beta^*, \beta) \leftrightarrow X(\beta^*, \beta)$	| UB; 7
	9	$\text{Also}_{1,5}$	$\Psi(\beta^*, \beta)$	| BB; 5,8
	10	$\text{Also}_{1,5}$	$\bigvee \omega\, \Psi(\omega, \beta)$	| PE; 9
	$\Rightarrow$ 11	Also_{1}	$\bigvee \omega\, \Psi(\omega, \beta)$	| PB; 4,5-10
	12	Also	$\Phi(\beta) \rightarrow \bigvee \omega\, \Psi(\omega, \beta)$	| SE; 1-11
	13	Also	$\bigwedge \xi\, (\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee \omega\, \Psi(\omega, \xi))$	| UE; 12

Es entspricht Φ dem Prädikator 'Mensch(..)', lies: '.. ist ein Mensch', und Ψ dem Prädikator 'Vater(..,..)', lies: '..ist Vater von..'; X korrespondiert 'Zeugte(..,..)', lies: '..zeugte..'. Anstatt der allgemeineren Formelmitteilungszeichen Δ, Γ, B usf. wurden hier die Prädikatorenmitteilungszeichen gewählt: So wird die Aufmerksamkeit nicht durch prima facie wenig transparente, weil geschachtelte, Substitutionsverhältnisse abgelenkt. Die hier interessierenden Schritte finden zwischen den Zeilen 4 und 11 statt: In Zeile 4 wird eine Partikularquantifikation gewonnen, und zwar im Folgerungsmodus. Die Partikularquantifikation wird zur weiteren Verwendung als Prämisse dadurch aufbereitet, dass ein Repräsentant für das wenigstens eine ζ gewählt wird, das zu β in der Relation *X* steht. Das ist insofern legitim, als ja nach PE für eine singuläre Gegebenheit gelten muss, dass sie in *X* zu β steht. Andererseits ist nicht klar, welches Singuläre dies ist. Das repräsentative Gebilde, hier β*, soll nun zwar alle die Eigenschaften haben dürfen, die auf alles zutreffen; insofern ist gegen den UB-Schritt von Zeile 6 auf Zeile 7 nichts einzuwenden. Es soll aber ansonsten nur die in der Partikular- bzw. in der repräsentativen Ersatzannahme ausgedrückte Eigenschaft besitzen. Was auf alles zutrifft, soll auch von β* gelten; ansonsten soll von β* aber auch nur gelten, dass es in *X* zu β steht. Um diesen Ausschluss zu garantieren, werden der Regel der Partikularquantorbeseitigung einige später erläuterte Kautelen hinzugefügt.

In Zeile 10 ist man insoweit zum Ziel gelangt, als man das gewünschte Sukzedens erreicht hat. Nun ›erinnert‹ man sich daran, dass man das Ergebnis im Ausgang von der repräsentativen Ersatzannahme erzielt hat und geht zu dem eigentlich gewonnenen Rahmen zurück, der durch die Partikularquantifikation gegeben ist. Dieser Folgerungszug ist die Partikularquantorbeseitigung. Anwendungszeilen bzw. -abschnitte sind die Zeile 4, deren Satzaussage die Partikularaussage ist, und der Abschnitt von Zeile 5 bis Zeile 10, der einem Unterbeweis entspricht. Die Verfügbarkeiten ändern sich: Die Ersatzannahme in Zeile 5 und alle folgenden gefolgerten Aussagen werden unverfügbar; lediglich die zuletzt gefolgerte Aussage (in Zeile 11) wird verfügbar. Diese Aussage hat man jetzt im Ausgang von derselben Annahme gewonnen wie zuvor die Partikularquantifikation (in Zeile 4). Dieser Sachverhalt gestattet die anschließende Subjunktoreinführung. – Die Schlussfigur der Partikularquantorbeseitigung hat folgende Gestalt:

[58]	Ξ	$\bigvee\xi\Delta$	
	Sei	[β, ξ Δ]	
	…	…	
	Ξ'	Γ	, wobei [β, ξ Δ] als letzte Annahme verfügbar ist + Kautelen
	Also	Γ	

Der Schluss tilgt die Ersatzannahme. – Die folgende Regel der Partikularquantorbeseitigung (=PB) enthält auch die in [58] nur global angedeuteten Kautelen:

[59] Wenn man die Partikularquantifikation einer Formel Δ bezüglich einer Variable ξ gewonnen hat und wenn man unmittelbar danach das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für ξ in Δ angenommen hat und wenn man im Ausgang von dieser Annahme zuletzt eine Aussage Γ gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Γ noch von irgendeiner Satzaussage vor der als letzter verfügbaren Annahme ist, dann darf man nochmals Γ folgern.

Ist eine Folgerung gemäß Partikularquantorbeseitigung gestattet, so befreit man sich durch diese Folgerung von der letzten noch verfügbaren Annahme. Da man sich im Zuge einer Anwendung von PB von der Ersatzannahme befreit, sind nach dem Schlussakt von der Zeile der Ersatzannahme an bis einschließlich der nun vorletzten Zeile alle gefolgerten Aussagen nicht mehr verfügbar. Evtl. nach der Ersatzannahme angenommene Aussagen müssen erinnerlich bereits unverfügbar gemacht worden sein, wenn die Ersatzannahme als letzte Annahme verfügbar ist. Die mit PB gefolgerte Aussage Γ in der letzten Zeile wird allerdings verfügbar. Der von der Ersatzannahme bis zur nunmehr vorletzten Zeile reichende Abschnitt bildet den Prämissenabschnitt des Schlusses nach PB, während die vorangehende Partikularquantifikation die Prämisse dieses Schlusses bildet. Man beachte, dass die angenommenen und gefolgerten Satzaussagen des Prämissenabschnitts, soweit sie nicht schon unverfügbar waren, auch dann unverfügbar werden, wenn der Schluss nicht nur nach PB, sondern auch nach einer anderen Regel korrekt ist.– Zunächst soll durch den Beweis einschlägiger Aussagen Vertrautheit mit PB hergestellt werden. Die Partikularquantifikation einer Adjunktion aus Δ und Γ ist gleichwertig der Adjunktion aus den Partikularquantifikationen von Δ und Γ. Der Beweis wird mit einer grafischen Kommentierung versehen:

[60] 0 Es-gilt $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma) \leftrightarrow (\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma)$

1 Sei $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$

2 Sei $[\beta, \xi, \mathrm{B}] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$

3 Sei $[\beta, \xi, \mathrm{B}]$

4 Also $\bigvee\xi\,\mathrm{B}$ | PE; 3

5 Also $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | AE; 4

6 Also $[\beta, \xi, \mathrm{B}] \rightarrow \bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | SE; 3-5

7 Sei $[\beta, \xi, \Gamma]$

8 Also $\bigvee\xi\,\Gamma$ | PE; 7

9 Also $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | AE; 8

10 Also $[\beta, \xi, \Gamma] \rightarrow \bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | SE; 7-9

11 Also $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | AB; 2,6,10

12 Also $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$ | PB; 1,2-11

13 Also $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma) \rightarrow (\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma)$ | SE; 1-12

14 Sei $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \vee \bigvee\xi\,\Gamma$

15 Sei $\bigvee\xi\,\mathrm{B}$

16 Sei $[\beta', \xi, \mathrm{B}]$

17 Also $[\beta', \xi, \mathrm{B}] \vee [\beta', \xi, \Gamma]$ | AE; 16

18 Also $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$ | PE; 17

19 Also $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$ | PB; 15,16-18

20 Also $\bigvee\xi\,\mathrm{B} \rightarrow \bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$ | SE; 15-19

21 Sei $\bigvee\xi\,\Gamma$

22 Sei $[\beta^*, \xi, \Gamma]$

23 Also $[\beta^*, \xi, \mathrm{B}] \vee [\beta^*, \xi, \Gamma]$ | AE; 22

24 Also $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$ | PE; 23

25 Also $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$ | PB; 21,22-24

26 Also $\bigvee\xi\,\Gamma \rightarrow \bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$ | SE; 21-25

27 Also $\bigvee\xi\,(\mathrm{B} \vee \Gamma)$ | AB; 14,20,26

	28	Also	$(\bigvee\xi\, B \vee \bigvee\xi\, \Gamma) \rightarrow \bigvee\xi\, (B \vee \Gamma)$	| SE; 14-27
	29	Also	$\bigvee\xi\, (B \vee \Gamma) \leftrightarrow (\bigvee\xi\, B \vee \bigvee\xi\, \Gamma)$	| BE; 13,28

Beim Weg von links nach rechts findet in Zeile 12 eine Partikularbeseitigung auf Basis einer Adjunktorbeseitigung in Zeile 11 statt. Auf dem Weg von rechts nach links findet in Zeile 27 eine Adjunktorbeseitigung nach zwei Partikularbeseitigungen in den Zeilen 19 und 25 statt. Diese Schrittfolge wird durch die jeweiligen Startformeln, einmal Partikularaussage, einmal Adjunktion, vorgegeben. – Die folgende Aussage ist eine Variante der einfachen Quantorumformung: Die Universalquantifikation einer Formel Δ ist gleichwertig der Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ. Material: Eine Eigenschaft trifft genau dann auf alle Gebilde zu, wenn es kein Gebilde gibt, auf das sie nicht zutrifft:

[61]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi\Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\neg\, \Delta$	
	1	Sei_1	$\bigwedge\xi\Delta$	
	2	$\text{Wäre}_{1,2}$	$\bigvee\xi\neg\, \Delta$	
	3	$\text{Sei}_{1,2,3}$	$\neg\, [\beta, \xi, \Delta]$	
	4	$\text{Wäre}_{1,2,3,4}$	$\bigvee\xi\neg\, \Delta$	
	5	$\text{Also}_{1,2,3,4}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| UB; 1
	6	$\text{Also}_{1,2,3,4}$	$\neg\, [\beta, \xi, \Delta]$	| W; 3
	7	$\text{Also}_{1,2,3}$	$\neg \bigvee\xi\neg\, \Delta$	| NE; 4-6
	8	$\text{Also}_{1,2}$	$\neg \bigvee\xi\neg\, \Delta$	| PB; 2,3-7
	9	Also_1	$\neg \bigvee\xi\neg\, \Delta$	| NE; 2-8
	10	Also	$\bigwedge\xi\Delta \rightarrow \neg \bigvee\xi\neg\, \Delta$	| SE; 1-9
	11	Sei_{11}	$\neg \bigvee\xi\neg\, \Delta$	
	12	$\text{Wäre}_{11,12}$	$\neg\, [\beta, \xi, \Delta]$	
	13	$\text{Also}_{11,12}$	$\bigvee\xi\neg\, \Delta$	| PE; 12
	14	$\text{Also}_{11,12}$	$\neg \bigvee\xi\neg\, \Delta$	| W; 11
	15	Also_{11}	$\neg\neg\, [\beta, \xi, \Delta]$	| NE; 12-14
	16	Also_{11}	$[\beta, \xi, \Delta]$	| NB; 15
	17	Also_{11}	$\bigwedge\xi\Delta$	| UE; 16
	18	Also	$\neg \bigvee\xi\neg\, \Delta \rightarrow \bigwedge\xi\Delta$	| SE; 11-17

19 Also $\bigwedge\xi\Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\neg \Delta$ | BE; 10,18

Bei der Links-Rechts-Richtung ist die wiederholte Annahme der zu negierenden Partikularaussage in den Zeilen 2 und 4 zu beachten. Nur so kann auch tatsächlich diese Aussage negiert werden (Zeile 7). Durch die Negation der Partikularquantifikation wurde eine Aussage gewonnen, die den Parameter in der Ersatzannahme (β) nicht mehr zum Teilterm hat. Daher ist anschließend PB legitim. Um nun aber die Abhängigkeit von der ersten Annahme der zu negierenden Partikularquantifikation zu tilgen ist die NE nochmals durchzuführen. Der Widerspruch besteht hier zwischen der angenommenen Aussage und der Aussage in Zeile 8. Bei der Rechts-Links-Richtung kommt es auf die Findung der Annahme des indirekten Beweises an, die in Zeile 12 erfolgt: Zu folgern ist eine Universalaussage; dazu benötigt man nach UE eine Aussage der Art $[\beta, \xi, \Delta]$. Diese erhält man, indem man ihre Negation, also $\neg[\beta, \xi, \Delta]$, zum Widerspruch führt. Aus $\neg\neg[\beta, \xi, \Delta]$ ergibt sich dann mit NB das Gewünschte.

Zuletzt ist eine komplexe Quantorumformung zu betrachten: Die Universalquantifikation einer Subjunktion aus Δ und Γ ist gleichwertig der Negation der Partikularquantifikation der Konjunktion aus Δ und der Negation von Γ:

[62] Es-gilt $\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$

Material gesprochen: Sind alle Δ-Dinge Γ, dann gibt es kein Δ-Gebilde, das nicht Γ ist. Der Beweiskandidat ist eine Bisubjunktion. Nach BE ist damit die übergreifende Gestalt des Beweises festgelegt. Die Links-Rechts-Richtung geht aus von der Annahme der Universalaussage:

[62]°	1	Sei$_1$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$
	...	...	...
	k	Also$_1$	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$
	k+1	Also	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma) \rightarrow \neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$
	...	...	...

Um die Negation der Partikularaussage zu erhalten, nimmt man die Partikularaussage in der Absicht an, sie zum Widerspruch zu führen. Die angenommene Partikularquantifikation wird mit Blick auf PB durch eine repräsentative Ersatzannahme ersetzt:

[62]*	1	Sei$_1$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$
	2	Wäre$_{1,2}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$
	3	Sei$_{1,2,3}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Gamma]$

...	...	...	
k	Also_{1}	$\neg \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \neg\,\Gamma)$	
k+1	Also	$\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma) \rightarrow \neg \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \neg\,\Gamma)$	
…	…	…	

Die Inspektion der Zeilen 1 und 3 macht auch schon klar, wie der Widerspruch zu erzeugen ist: Die erste Annahme ist auf β zu spezialisieren: $[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$. Mit dem ersten Konjunkt aus Zeile 3 erhält man dann mit SB $[\beta, \xi, \Gamma]$, was dem zweiten Konjunkt aus Zeile 3 widerspricht. Allerdings ist hier der Negationskandidat, die Annahme des indirekten Beweises, nicht in der ›Schusslinie‹ von NE. Mittels einer erneuten Annahme der Partikularquantifikation kann das geleistet werden. Danach schließt sich der projektierte Weg an:

[62]+ 1	Sei_{1}	$\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma)$	
2	$\text{Wäre}_{1,2}$	$\bigvee\xi\,(\Delta \wedge \neg\,\Gamma)$	
3	$\text{Sei}_{1,2,3}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg\,[\beta, \xi, \Gamma]$	
4	$\text{Wäre}_{1,2,3,4}$	$\bigvee\xi\,(\Delta \wedge \neg\,\Gamma)$	
5	$\text{Also}_{1,2,3,4}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 3
6	$\text{Also}_{1,2,3,4}$	$\neg\,[\beta, \xi, \Gamma]$	| KB; 3
7	$\text{Also}_{1,2,3,4}$	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	| UB; 1
8	$\text{Also}_{1,2,3,4}$	$[\beta, \xi, \Gamma]$	| SB; 7,5
9	$\text{Also}_{1,2,3}$	$\neg \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \neg\,\Gamma)$	| NE; 4-8
10	$\text{Also}_{1,2}$	$\neg \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \neg\,\Gamma)$	| PB; 2,3-9
11	Also_{1}	$\neg \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \neg\,\Gamma)$	| NE; 2-10
12	Also	$\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma) \rightarrow \neg \bigvee\xi\,(\Delta \wedge \neg\,\Gamma)$	| SE; 1-11

Der Widerspruch für die erste NE-Anwendung steht in den Zeilen 6 und 8. In Zeile 9 hat man dann die gewünschte Aussage erhalten, muss sich aber daran erinnern, dass diese Aussage im Ausgang von der Ersatzannahme in Zeile 3 gewonnen hat. Da die Aussage in Zeile 9 aber β nicht zum Teilterm hat, lässt sich PB anwenden. Damit ist wiederum mit Zeile 2 und Zeile 10 eine Aussage und ihre Negation gegeben. Durch NE macht man sich frei von der ersten Annahme des indirekten Beweises und ist im Ziel.

Die Umkehrrichtung steht unter der Annahme $\neg\bigvee\xi(\Delta\wedge\neg\Gamma)$. Um die Zielaussage für die geforderte SE, $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\Gamma)$, zu erreichen, muss man zunächst $[\beta,\xi,\Delta]\rightarrow[\beta,\xi,\Gamma]$ in Abhängigkeit von der

Annahme gewinnen. Dazu wiederum hat man das Antezedens dieser Subjunktion anzunehmen. Mit Blick auf die übergeordnete Annahme kann man dann indirekt verfahren und die Annahme von $\neg[\beta,\xi,\Gamma]$ zum Widerspruch führen:

[62]**	13	Sei_{13}	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	
	14	$\text{Sei}_{13,14}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	
	15	$\text{Wäre}_{13,14,15}$	$\neg [\beta, \xi, \Gamma]$	
	16	$\text{Also}_{13,14,15}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Gamma]$	| KE; 14,15
	17	$\text{Also}_{13,14,15}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	| PE; 16
	18	$\text{Also}_{13,14,15}$	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	| W; 13
	19	$\text{Also}_{13,14}$	$\neg \neg [\beta, \xi, \Gamma]$	| NE; 15-18
	20	$\text{Also}_{13,14}$	$[\beta, \xi, \Gamma]$	| NB; 19
	21	Also_{13}	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	| SE; 14-20
	22	Also_{13}	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	| UE; 21
	23	Also	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma) \rightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	| SE; 13-22
	24	Also	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	| BE; 12,23

Ü 11 Legen Sie für folgende Aussagenschemata kommentierte Beweisschemata vor:

a) $\bigvee\xi\ (\mathrm{B} \wedge \Gamma) \rightarrow \bigvee\xi\ \mathrm{B} \wedge \bigvee\xi\ \Gamma$

b) $\bigwedge\xi\ (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\bigvee\xi\ \mathrm{B} \rightarrow \bigvee\xi\ \Gamma)$

c) $\bigvee\xi\ \mathrm{B} \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi \neg \mathrm{B}$

d) $\neg \bigwedge\xi\ \mathrm{B} \leftrightarrow \bigvee\xi \neg \mathrm{B}$

e) $\neg \bigvee\xi\ \mathrm{B} \leftrightarrow \bigwedge\xi \neg \mathrm{B}$

f) $\bigvee\xi\ (\mathrm{B} \wedge \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi\ (\mathrm{B} \rightarrow \neg \Gamma)$

g) $\bigwedge\xi\ (\mathrm{B} \rightarrow \neg \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ (\mathrm{B} \wedge \Gamma)$

h) $\bigvee\xi\ (\mathrm{B} \wedge \neg \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi\ (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)$

i) $\bigwedge\xi\ \mathrm{B} \vee \bigvee\xi \neg \mathrm{B}$

PE gibt den Weg vor, um auf eine Partikularquantifikation zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Partikularquantifikation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert PE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Partikularquantifikationen. PB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, die aus der repräsentativen Annahme einer gegebenen Partikularquantifikation folgen. Ist die Partikularquantifikation wahr und ist die gefolgerte Aussage auch sonst frei von Abhängigkeiten, dann ist auch die gefolgerte Aussage wahr. Insofern fixiert PB die Rolle von Partikularquantifikationen als Wahrheitsbasen.

PB und UE sind die Quantorregeln, die ausdrücklich Parameter ins Spiel bringen. Parameter werden benötigt, weil Individuenkonstanten oder andere von Parametern verschiedene geschlossene Terme für die Formulierung von PB und UE untauglich sind. Ersetzte man etwa in UE die Rede vom Parameter β durch jene von dem geschlossenen Term θ, dann könnte man aus der Aussage ’2 ist eine Primzahl’ die Universalaussage ’$\bigwedge x$ *x* ist eine Primzahl’ folgern. Bestimmte Individuen haben bestimmte, sie von anderen unterscheidende Eigenschaften; und diese unterscheidenden Eigenschaften, im Beispiel: das Primzahlsein, können eben nicht im Folgerungswege auf alle anderen übertragen werden. – Auch bei PB können die Parameter in ihrer Funktion nicht durch andere geschlossene Terme ersetzt werden: Bildete man die repräsentative Ersatzannahme zu ’$\bigvee x$ *x* ist eine gerade Zahl’ etwa mit der Individuenkonstante ’5’, so ergäbe sich ’5 ist eine gerade Zahl’; mit einer Zusatzprämisse wie ’5 ist eine ungerade Zahl’ resultierte dann über KE, PE und PB die Aussage ’$\bigvee x$ (*x* ist eine gerade Zahl und *x* ist eine ungerade Zahl)’. Auch in diesem Falle sind Individuenkonstanten deshalb ungeeignet, weil die Individuen sie charakterisierende spezielle Eigenschaften in den Folgerungszusammenhang mitbringen.

Sowohl UE wie auch PB enthalten Kautelen, die sichern, dass die Parameter nicht mehr als die ihnen zugedachte universal bzw. partikulär repräsentierende Rolle spielen. Diese sind exemplarisch zu erläutern. (i) In UE ist verlangt, dass der Parameter β nicht Teilterm der Formel Δ ist. Man betrachte das folgende Schlussfragment:

[63]	1	Da	$\bigwedge x\, x = x$
	2	Also	z = z
	3	Also	$\bigwedge x\, x =$ z
	4	Also	$\bigvee z \bigwedge x\, x = z$

In Zeile 1 ist eine logische Wahrheit notiert, die später (↑4.4) noch bewiesen wird. Mit UB gelangt man zur Spezialisierung in Zeile 2. Mit dem kritischen Schritt der inkorrekten Universaleinführung erhält man die Universalaussage von Zeile 3. PE ergibt die falsche Aussage, dass wenigstens ein Gebilde mit allem identisch ist. Inhaltlich gesprochen wird an der kritischen Stelle folgender Übergang vollzogen: Aus dem Umstand, dass ein universal repräsentatives Gebilde mit sich identisch ist, schließt man darauf, dass alle Gebilde mit dem universal repräsentativen zusammenfallen. Das erfolgt dadurch, dass man den Parameter ’z’ ›stehenlässt‹. Dadurch aber wird z eine ganz neue Eigenschaft zugeschrieben. Bezieht man den kritischen Schritt auf die Formulierung von UE unter [49], so resultiert: ’z’ entspricht β, ’*x*’ entspricht ξ, ’*x*=z’ entspricht Δ und [’z’, ’*x*’, ’*x*=z’], also ’z=z’, entspricht [β, ξ, Δ]. Der Parameter ’z’ ist unzulässigerweise in Δ noch Teilterm. Eine korrekte UE müsste alle Vorkommen von ’z’ erfassen, also ’*x*=*x*’ als Δ wählen. Die Kautel schließt demnach aus, dass der repräsentative Gegenstand durch Stehenlassen eine neue Eigenschaft erhält.

(ii) In UE ist ferner gefordert, dass der Parameter β nicht in einer verfügbaren Annahme Teilterm ist, also nicht in einer Aussage, von der die Universalquantifikation bzw. ihre Parametrisierung abhängt. Man betrachte das folgende Schlussfragment:

[64]	1	Da	$\bigvee x\; x = 2$
	2	Sei	$z = 2$
	3	Also	$\bigwedge z\; z = 2$
	4	Also	$\bigwedge z\; z = 2$

Es ist eine logische Wahrheit, dass wenigstens ein Gebilde mit 2 identisch ist (↑4.4), daraus wird hier über inkorrekte UE und PB die falsche Aussage gefolgert, dass alle Gebilde mit 2 identisch sind. Inhaltlich gesehen, besteht der Fehlschluss darin, dass ein partikulärer Repräsentant universalisiert wird. Bezieht man den kritischen Schritt auf die Formulierung von UE unter [49], dann resultieren folgende Entsprechungen: ’z=2’ ist eine verfügbare Annahme, ’*z*’ bzw. ’z’ entsprechen ξ bzw. β, ’*z*=2’ korrespondiert Δ und [’z’, ’*z*’, ’*z*=2’] also ’z=2’, entspricht [β, ξ, Δ].

(iii) Die PB enthält die Bestimmung, dass der Parameter β nicht Teilterm einer Satzaussage vor der Ersatzannahme sein darf, also insbesondere nicht Teilterm einer Aussage, von der Γ abhängt außer der Ersatzannahme. Man betrachte den folgenden inkorrekten Beweisversuch:

[65]	0	Es-gilt	$\bigvee x\; (x = 2 \wedge \neg\, x = 2)$
	1	Da	$\bigvee x\; x = 2 \wedge \bigvee x \neg\, x = 2$
	2	Also	$\bigvee x\; x = 2$
	3	Sei	$z = 2$
	4	Also	$\bigvee x \neg\, x = 2$

5 Sei $\neg\, z = 2$

6 Also $z = 2 \wedge \neg\, z = 2$

7 Also $\bigvee x\, (x = 2 \wedge \neg\, x = 2)$

8 Also $\bigvee x\, (x = 2 \wedge \neg\, x = 2)$

9 Also $\bigvee x\, (x = 2 \wedge \neg\, x = 2)$

Ausgangspunkt ist eine arithmetische Wahrheit, Endpunkt eine logische Falschheit. Es handelt sich nicht um einen Beweis, da in Zeile 8 keine PB vollzogen wird und die Aussage in der letzten Zeile dementsprechend nicht frei von Abhängigkeiten gewonnen wird. Die Entsprechung von Beispiel und Regelformulierung für den Schritt 8: ’$\bigvee x(x{=}2\wedge\neg x{=}2)$’ entspricht Γ, ’$\bigvee x\neg x{=}2$’ korrespondiert $\bigvee\xi\Delta$, wobei ’x’ ξ und ’$\neg x{=}2$’ Δ korrespondiert. Vor der repräsentativen Ersatzannahme (Zeile 5) für die Partikularquantifikation in Zeile 4 erscheint der Parameter ’z’ entgegen der Regel bereits in der Annahme in Zeile 3 in ’z=2’ als Teilterm. Die Regel schließt ein solches vorgängiges Vorkommen aus. Sie verhindert dadurch, dass zweimal derselbe Parameter gewählt wird. Inhaltlich: Repräsentiert ein Individuum schon den Sachverhalt, mit 2 identisch zu sein, dann darf es nicht noch zusätzlich die ganz andere Eigenschaft repräsentieren, von 2 verschieden zu sein. Für Ersatzannahme ist also stets ein neuer Parameter zu wählen!

Dieselbe Kautel in PB schließt aus, dass der für die Ersatzannahme gewählte Parameter β schon in der Partikularquantifikation $\bigvee\xi\Delta$, und damit in der Formel Δ, vorkommt, was wiederum der Idee der partikulären Repräsentation widerspräche. Beispiel:

[66] 0 Es-gilt $\bigvee x\, \neg\, x = x$

1 Da $\bigwedge x\, \bigvee y\, \neg\, x = y$

2 Also $\bigvee y\, \neg\, \mathrm{x} = y$

3 Sei $\neg\, \mathrm{x} = \mathrm{x}$

4 Also $\bigvee x\, \neg\, x = x$

5 Also $\bigvee x\, \neg\, x = x$

Die Entsprechungen lassen sich in folgender Tabelle notieren:

[67]	ξ	‘y’
	β	‘x’
	Δ	‘$\neg\, \mathrm{x} = y$’

$\bigvee \xi \Delta$	‘$\bigvee y \neg$ x = y’
$[\beta, \xi, \Delta]$	[’x’, ’y’, ’$\neg$ x = y’]
Γ	‘$\bigvee x \neg x = x$’

x repräsentiert bereits eine Eigenschaft, nämlich die Eigenschaft, mit wenigstens einem *y* nicht identisch zu sein, und kann deshalb nicht noch zusätzlich partikuläre Repräsentationsaufgaben übernehmen, also die spezielle Eigenschaft repräsentieren, mit x nicht identisch zu sein. Auch in diesem Falle ist stets ein neuer Parameter für die Bildung der Ersatzannahme zu wählen.

(iv) PB verlangt schließlich, dass der für die Ersatzannahme gewählte Parameter β nicht Teilterm der Konklusion Γ sein darf:

[68]	0	Es-gilt	$\bigwedge x$ Primzahl(x)
	1	Da	$\bigwedge x$ (x = 2 $\rightarrow$ Primzahl(x))
	2	Da	$\bigvee x$ x = 2
	3	Sei	x = 2
	4	Also	x = 2 $\rightarrow$ Primzahl(x)
	5	Also	Primzahl(x)
	6	Also	Primzahl(x)
	7	Also	$\bigwedge x$ Primzahl(x)

Im Ausgang von zwei Wahrheiten wurde eine arithmetische Falschheit erschlossen, indem die PB ›zu früh‹ vollzogen worden ist: Eine Aussage mit nur partikular repräsentierendem Parameter wurde dadurch für die UE in Zeile 7 freigegeben. Die Aussage ’Primzahl(x)’ entspricht dabei Γ. – Regelgemäß ist, anbei bemerkt, die Universalquantorbeseitigung in Schritt 4: Was für alle gilt, gilt auch für das Gebilde, das vorübergehend die Eigenschaft, mit 2 identisch zu sein, repräsentiert.

Ü 12 Untersuchen Sie die folgenden Satzsequenzen und stellen Sie fest, in welchen davon inkorrekt gefolgert wird (also ein Schritt nach keiner Folgerungsregel korrekt ist) und in welchen davon zwar alle Schritte nach einer Regel korrekt sind, die Aussage im letzten Glied aber nicht frei von Abhängigkeiten gewonnen wird. Erstellen Sie für letztere einen Indexkommentar oder eine grafische Kommentierung.

a) 1 Sei $\bigvee x$ Gerade-Zahl(x)

	2	Sei	Gerade-Zahl(w)
	3	Sei	$\bigvee u$ Ungerade-Zahl(u)
	4	Sei	Ungerade-Zahl(w)
	5	Also	Gerade-Zahl(w) $\wedge$ Ungerade-Zahl(w)
	6	Also	$\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))
	7	Also	$\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))
	8	Also	$\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))
b)	1	Sei	$\bigvee x$ Gerade-Zahl(x)
	2	Sei	Gerade-Zahl(w)
	3	Also	$\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)
	4	Also	$\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)
	5	Also	$\bigvee x$ Gerade-Zahl(x) $\rightarrow$ $\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)
c)	1	Sei	$\bigwedge x\ x = x$
	2	Also	$\mathrm{u} = \mathrm{u}$
	3	Also	$\bigwedge x\ x = \mathrm{u}$
	4	Also	$\bigvee z \bigwedge x\ x = z$
d)	1	Sei	$\bigvee y\ y > 2$
	2	Sei	$1 > 2$
	3	Sei	$\neg\, 1 > 2$
	4	Also	$1 > 2 \wedge \neg\, 1 > 2$
	5	Also	$\bigvee y\ (y > 2 \wedge \neg\, y > 2)$
	6	Also	$\bigvee y\ (y > 2 \wedge \neg\, y > 2)$

e) Überprüfen Sie in den Beweisen [47], [50], [51], [52], [56], [60], [61] die UE- und PB-Anwendungen auf Korrektheit, indem Sie jeweils eine Entsprechungstabelle (vgl. [67]) notieren, an der man erkennen kann, dass die erforderlichen Parameterbedingungen erfüllt sind! Beachten Sie dabei die Verschiedenheitsforderung!

4.4. Regeln für den Identitätsprädikator

Zur Erinnerung: Das Identitätszeichen '..=..' ist ein zweistelliger, termbestimmender und formelerzeugender Operator, also ein zweistelliger Prädikator. Die Anwendung des Identitätsprädikators '..=..' auf Terme θ_1, θ_2 führt zu Identitätsformeln $\theta_1 = \theta_2$. Handelt es sich bei θ_1 und θ_2 um geschlossene Terme, dann liegt eine Identitätsaussage bzw. eine geschlossene Identitätsformel vor.

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Identitätsaussage geschlossen werden darf, und was aus einer Identitätsaussage (und gegebenenfalls weiteren Prämissen) gefolgert werden kann. Die Einführungsregel erlaubt, auf die Identität eines Gegenstandes mit sich selbst zu schließen, also auf eine Aussage $\theta = \theta$; dieser Schluss ist an keine Bedingung geknüpft, mithin prämissenfrei. Die Beseitigungsregel gestattet, aus einer Identität $\theta_1=\theta_2$ und der Tatsache, dass die θ_1-Entität bzw. die θ_2-Entität eine Δ-Eigenschaft hat, also aus $[\theta_1, \xi, \Delta]$ bzw. $[\theta_2, \xi, \Delta]$, zu folgern, dass auch θ_2 bzw. θ_1 die Δ-Eigenschaft besitzt, also $[\theta_2, \xi, \Delta]$ bzw. $[\theta_1, \xi, \Delta]$. – Zum Verständnis beider Schlusslizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen '..ist identisch mit..' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Die Schlussfigur für die Identitätseinführung ist denkbar einfach:

[69] Also $\theta = \theta$

Es sind keine Prämissen vorhanden. Die Regel der Identitätseinführung (=IE) lautet entsprechend:

[70] Wenn θ ein geschlossener Term ist, dann darf die Identitätsaussage $\theta = \theta$ folgern.

Die Identität beliebiger Gegenstände mit sich selbst gibt es nach IE demzufolge ›gratis‹. Dieser Umstand wird durch die Totalreflexivität der Identität ausdrücklich gemacht:

[71]	0	Es-gilt	$\bigwedge x\, x = x$	
	1	Also	$x = x$	| IE
	2	Also	$\bigwedge x\, x = x$	| UE; 1

Die Identitätsbeseitigung artikuliert die Intuition, dass, ungenau gesprochen, Identische ihre Eigenschaften teilen. Ist Jesse James ein Verbrecher und Mr. Smith niemand anders als Jesse James, dann ist auch Mr. Smith ein Verbrecher. Ist 3+2 identisch mit 5 und ist 5 eine Primzahl, dann eben auch 3+2. Die Schlussfiguren zu diesen Instanzen haben folgende Gestalt:

[72]	Ξ	$\theta_1 = \theta_2$	Ξ	$\theta_1 = \theta_2$
	Ξ'	$[\theta_1, \xi, \Delta]$	Ξ'	$[\theta_2, \xi, \Delta]$

Also	$[\theta_2, \xi, \Delta]$	Also	$[\theta_1, \xi, \Delta]$

Die Identitätsaussage ist die Hauptprämisse, die Aussage $[\theta_1, \xi, \Delta]$ bzw. $[\theta_2, \xi, \Delta]$ stellt links bzw. rechts die Nebenprämisse dar. Abhängig davon, ob das linke Identitätsrelatum θ_1 in der Nebenprämisse als Substituens auftritt und das rechte Identitätsrelatum θ_2 in der gefolgerten Aussage oder eben umgekehrt, lässt sich von einer Identitätsbeseitigung in der Links-Rechts-Richtung oder eben der Rechts-Links-Richtung sprechen. – Die Regel der Identitätsbeseitigung (=IB) lautet:

[73] Wenn man die Identitätsaussage aus θ_1 und θ_2 und das Ergebnis der Substitution von θ_1 bzw. θ_2 für ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ_2 bzw. θ_1 für ξ in Δ folgern.

Der Beweis der folgenden Aussagen macht mit dem vorgestellten Regelpaar und ihrem Zusammenspiel vertraut. Zunächst ist die Identität transitiv: Ist eine Gegebenheit identisch mit einer Gegebenheit, die ihrerseits mit einer Gegebenheit identisch ist, dann ist auch die erstmit der letztgenannten identisch:

[74]	0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	
	1	Sei	$x = y \wedge y = z$	
	2	Also	$x = y$	| KB; 1
	3	Also	$y = z$	| KB; 1
	4	Also	$x = z$	| IB; 3, 2
	5	Also	$x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$	| SE; 1-4
	6	Also	$\bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	| UE; 5
	7	Also	$\bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	| UE; 6
	8	Also	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	| UE; 7

Die Schritte 1 bis 3 und 5 bis 8 sind bekannt und bedürfen als nun geläufige Routine keiner Erläuterung. Der entscheidende Schritt wird mittels IB in Zeile 4 vollzogen: Als Formel Δ fungiert 'x=*u*'. θ_1 wird durch 'y' und θ_2 durch 'z' instanziiert. Dann ist ['y', '*u*', 'x=*u*'], also 'x=y' Instanz von $[\theta_1, \xi, \Delta]$, ['z', '*u*', 'x=*u*'], also 'x=z' ist Instanz von $[\theta_2, \xi, \Delta]$ und 'y=z' ist Instanz für das Aussagenschema $\theta_1=\theta_2$. Das Besondere an diesem Schluss besteht darin, dass die Δ-Formel ihrerseits eine Identitätsformel ist. Informell würde man die soeben bewiesene Transitivität der Identität so begründen: y hat die Eigenschaft, dass x mit ihm identisch ist (Zeile 2). Nun ist y dasselbe wie z (Zeile 3). Also hat auch z die Eigenschaft, dass x mit ihm identisch ist (Zeile 4).

Sodann ist die Identität symmetrisch, gilt also in beide Richtungen:

[75]	0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$	
	1	Sei	x = y	
	2	Also	x = x	| IE
	3	Also	y = x	| IB; 1,2
	4	Also	x = y → y = x	| SE; 1-3
	5	Also	$\bigwedge y$ (x = $y \rightarrow y$ = x)	| UE; 4
	6	Also	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$	| UE; 5

Die Schritte 1 und 4 bis 6 sind bekannt. Im Schritt 2 wird nach IE ’x=x’ gefolgert. Schritt 3 ist etwas komplizierter: Als Formel Δ fungiert ’*u*=x’. θ_1 wird durch ’x’ und θ_2 durch ’y’ instanziiert. Dann ist [’x’, ’*u*’, ’*u*=x’], also ’x=x’ Instanz von [θ_1, ξ, Δ], [’y’, ’*u*’, ’*u*=x’], also ’y=x’ ist Instanz von [θ_2, ξ, Δ] und ’x=y’ ist Instanz für das Aussagenschema $\theta_1=\theta_2$. Auch hier ist die Δ-Formel ihrerseits eine Identitätsformel. Informell würde man die soeben bewiesene Symmetrie der Identität so begründen: Sei x identisch mit y. Nun hat x wie jedes Gebilde die Eigenschaft, mit sich, d.h. mit x identisch zu sein; also ist auch y identisch mit x.

An Beweis [75] ist bemerkenswert, dass darin einerseits die ›Umkehrbarkeit‹ von Identitätsaussagen bewiesen wird, dass aber andererseits die IB-Anwendung in der Links-Rechts-Richtung genügt und die Rechts-Links-Richtung der IB nicht nötig ist. Durch die Zeilen 1 bis 3 ist exemplarisch ein Weg vorgegeben, nach dem sich jede Identitätsaussage im Laufe eines Beweises ›umkehren‹ lässt: Wann immer man eine Instanz von $\theta_1=\theta_2$ gewonnen hat, lässt sich mittels IE und der Links-Rechts-Richtung von IB auf $\theta_2=\theta_1$ schließen. Das heißt weiter, dass man das Folgerungsreglement im Ganzen nicht abschwächen würde, wenn man IB so zu IB– abschwächt, dass nur noch die Links-Rechts-Richtung gestattet ist.

Ü 13 a) Formulieren Sie IB–, also eine Abschwächung von IB, die es nicht mehr erlaubt eine Identitätsbeseitigung in der Rechts-Links-Richtung durchzuführen!

b) Vergleichen Sie den Status von IB gegenüber IB– mit dem Status von W gegenüber KB und KE (↑4.2.2)!

c) Legen Sie für das folgende Aussagenschema ein kommentiertes Beweisschema vor: $\theta_1=\theta_2 \rightarrow \theta_1=\theta_2$

d) Legen Sie einen Beweis für '$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$' vor, in dem IB nicht in der Links-Rechts-Richtung, sondern nur in der Rechts-Links-Richtung angewendet wird!

e) Legen Sie einen Beweis für '$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$' vor, in dem IE nicht angewendet wird!

Totalreflexive, symmetrische und transitive zweistellige Prädikatoren bzw. – material gesprochen – Relationen werden als <u>totale Gleichheitsprädikatoren</u> bzw. als <u>totale Gleichheiten</u> geführt. Sie lassen sich auch mit einer Aussage charakterisieren, die für die Identität so lautet:

[76]	0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z))$	
	1	Sei_{1}	x = y	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	x = z	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	y = z	| IB; 1,2
	4	Also_{1}	$x = z \rightarrow y = z$	| SE; 2-3
	5	$\text{Sei}_{1,5}$	y = z	
	6	$\text{Also}_{1,5}$	x = z	| IB; 5,1
	7	Also_{1}	$y = z \rightarrow x = z$	| SE; 5-6
	8	Also_{1}	$x = z \leftrightarrow y = z$	| BE; 4,7
	9	Also_{1}	$\bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z)$	| UE; 8
	10	Also	$x = y \rightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z)$	| SE; 1-9
	11	Sei_{11}	$\bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z)$	
	12	Also_{11}	$x = y \leftrightarrow y = y$	| UB; 11
	13	Also_{11}	y = y	| IE
	14	Also_{11}	x = y	| BB; 12,13
	15	Also	$\bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z) \rightarrow x = y$	| SE; 11-14
	16	Also	$x = y \leftrightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z)$	| BE; 10,15
	17	Also	$\bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z))$	| UE; 16
	18	Also	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z))$	| UE; 17

Die hier interessierenden Folgerungen werden in den Zeilen 3, 6 und 13 vollzogen. Für den Weg von links nach rechts benötigt man IB, für den umgekehrten Weg kommt man mit IE aus.

Zuletzt sei noch ein Theoremschema erörtert, das eine wichtige Rolle bei der Elimination definierter Individuenkonstanten und Funktoren spielt: Wenn ein θ-Gegenstand die Eigenschaft

Δ hat, dann gibt es eine Gegebenheit ξ, die mit θ identisch ist und die die Δ-Eigenschaft hat. Auch die Umkehrung gilt. Jesse James ist also genau dann ein Ehrenmann, wenn es eine mit Jesse James identische Gegebenheit gibt, die ein Ehrenmann ist. – In der folgenden Formulierung präsentiert Δ wiederum eine Formel, in der höchsten ξ frei ist:

[77]	0	Es-gilt	$[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	
	1	Sei	$[\theta, \xi, \Delta]$	
	2	Also	$\theta = \theta$	| IE
	3	Also	$\theta = \theta \wedge [\theta, \xi, \Delta]$	| KE; 2,1
	4	Also	$\bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	| PE; 3
	5	Also	$[\theta, \xi, \Delta] \rightarrow \bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	| SE; 1-4
	6	Sei	$\bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	
	7	Sei	$\beta = \theta \wedge [\beta, \xi, \Delta]$	
	8	Also	$\beta = \theta$	| KB; 7
	9	Also	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 7
	10	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$	| IB; 8,9
	11	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$	| PB; 6,7-10
	12	Also	$\bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta) \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$	| SE; 6-11
	13	Also	$[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	| BE; 5,12

Zu beachten ist, dass nach der Verschiedenheitsforderung β kein Teilterm von θ ist. Andernfalls wäre in Zeile 11 keine PB zulässig. Der Umgang mit den Identitätsregeln wird durch folgende Übungen vertieft:

Ü 14 Legen Sie für folgende Aussagen bzw. Aussagenschemata kommentierte Beweise bzw. Beweisschemata vor:

a) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge x = z \rightarrow y = z)$

b) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigvee z\ (x = z \wedge z = y))$

c) $[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\xi = \theta \rightarrow \Delta)$

e) Ergänzen Sie [77] zu einem kommentierten Beweisschema!

f) Legen Sie einen Beweis vor, der eine Instanz zu [77] bildet, indem Sie ξ durch '*x*', Δ durch '*x* ist ein Ehrenmann' und θ durch 'Jesse James' instanziieren!

IE gibt den extrem kurzen, da prämissenfreien Weg vor, um eine Wahrheit zu folgern. IB eröffnet die Möglichkeit zum ›Eigenschaftentransfer‹: Aus der Identität zwischen θ_1 und θ_2 und der Tatsache, dass eines dieser Gebilde Δ ist, kann man auf den Umstand schließen, dass das andere Gebilde ebenfalls Δ ist. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist wiederum wahr, dass das letztgenannte Gebilde ein Δ-Ding ist. Insofern umreißt IB die Rolle der Identität als Wahrheitsbasis.

Anmerkung: Die Identität wird normalerweise mit dem üblicherweise LEIBNIZ zugeschriebenen Ununterscheidbarkeitsgedanken verbunden: Identisch ist, was in allen Eigenschaften übereinkommt, sich also nicht unterscheiden lässt. Das lässt sich z.B. in Sprachen zweiter Stufe ausdrücken (↑3.3.3, [18]). Für Sprachen erster Stufe mit den hier gegebenen Regeln ist jedoch ein analoges Metatheorem formulierbar: Die Identität zwischen θ_1 und θ_2 ist genau dann beweisbar, wenn beweisbar ist, dass θ_1 und θ_2 in allen Eigenschaften Δ übereinkommen. Sei beweisbar, dass $\theta_1=\theta_2$. Gelte ferner $[\theta_1, \xi, \Delta]$. Mit IB gilt dann $[\theta_2, \xi, \Delta]$. Die Umkehrung ergibt sich analog; beide Betrachtungen gelten für beliebiges Δ. – Sei umgekehrt beweisbar, dass $[\theta_1, \xi, \Delta]\leftrightarrow[\theta_2, \xi, \Delta]$ für beliebiges Δ, also auch für die Eigenschaft, mit θ_2 identisch zu sein. Dann gilt insbesondere $\theta_1=\theta_2\leftrightarrow\theta_2=\theta_2$. Mit IE ist $\theta_2=\theta_2$, also ist auch $\theta_1=\theta_2$ beweisbar.

4.5. Das Regelwerk im Überblick

Im Vortext konnten die Kernoperatoren dadurch mit Bedeutung versorgt werden, dass die Einführungs- und die Beseitigungsfrage beantwortet wurde: Bei welcher Diskurslage darf man auf eine Aussage schließen, deren Hauptoperator der jeweils zu regulierende Redeteil ist? Was darf man aus einer derartigen Aussage (und gegebenenfalls weiteren Prämissen) schließen? Durch die Angabe von Annahme- und Folgerungsregeln wurde eine passende Performatorik für eine Sprache mit einer rationalen Grammatik erster Stufe formuliert. Die Performatorik baut in folgendem Sinne auf die Grammatik auf: In der Grammatik werden Begrifflichkeiten eingeführt, die bei der Formulierung der Annahme- und Folgerungsregeln verwendet werden. Die meisten dieser Begrifflichkeiten werden ausführlich in Kapitel 3 vorgestellt und eingeübt. Einige Begrifflichkeiten wurden allerdings erst im vorliegenden Kapitel geklärt. Diese sind noch einmal zusammenzufassen, bevor die Annahme- und Folgerungsregeln kompakt aufgelistet werden:

Durch einen Akt des Annehmens, des Anziehens oder des Folgerns werden Aussagen <u>verfügbar</u> gemacht. Eine gemäß SE, NE oder PB korrekte Folgerung macht die Aussagen aller

Annahme- und Folgerungssätze ab einschließlich der als letzter verfügbaren Annahme unverfügbar, insofern sie nicht bereits unverfügbar waren, ausgenommen die Aussage, die in diesem Schritt gefolgert wurde. Die Befreiung von einer Annahme besteht gerade in einer solchen gemäß SE, NE oder PB korrekten Folgerung und erfolgt immer und nur dann, wenn eine Folgerung nach SE, NE oder PB korrekt ist. Man hat Aussagen gewonnen, falls man sie verfügbar gemacht hat und sie immer noch verfügbar sind. Man hat eine Aussage B im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen, falls A als letzte Annahme verfügbar ist und man B als Satzaussage desselben oder eines nachfolgenden Satzes gewonnen hat. Eine Folgerung hängt ab von allen noch verfügbaren Annahmen (resp. von der Klasse aus diesen Annahmen). Man hat eine Aussage frei von Abhängigkeiten gewonnen, wenn man sie gewonnen hat und keine Annahmen mehr verfügbar sind.

Der intuitive Kern der Reglementierungsvorschläge für die logischen Operatoren lässt sich so formulieren: Man darf auf eine Subjunktion $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$ schließen, wenn man B im Ausgang von einer Annahme von A gewonnen hat. Hat man umgekehrt $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$ und das Antezedens A gewonnen, dann darf man auf das Sukzedens B schließen. – Hat man Aussagen A, B gewonnen, dann darf man die Konjunktion aus A und B folgern. Umgekehrt darf man aus einer Konjunktion jedes ihrer Konjunkte folgern. – Hat man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen und umgekehrt, dann darf man auf die Bisubjunktion $\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B}$ schließen. Ist umgekehrt die Bisubjunktion $\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B}$ und eines der Bisubjunkte verfügbar, dann darf man auf das jeweils andere Bisubjunkt schließen. – Man darf aus jeder Aussage A auf die Adjunktion dieser Aussage und einer beliebigen Aussage B schließen. Umgekehrt darf man aus einer Aussage $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}$ und zwei Subjunktionen mit A resp. B als Antezedens und einer Aussage Γ als gemeinsamem Sukzedens auf Γ schließen. – Hat man eine Aussage Γ und ihre Negation $\neg\Gamma$ im Ausgang von der Annahme einer Aussage Δ gewonnen, dann darf man Δ negieren. Aus der doppelten Negation einer Aussage darf man die Aussage selbst folgern.

Hat man für einen repräsentativen Fall gezeigt, dass die Eigenschaft Δ zutrifft, so darf man auf die Universalquantifikation von Δ schließen. Umgekehrt darf man aus einer Universalquantifikation auf jede singuläre Instanz schließen. – Trifft Δ auf einen singulären Gegenstand zu, dann darf man auf die Partikularquantifikation von Δ schließen. Aus einer Partikularquantifikation darf man folgern, was aus ihrer repräsentativen Annahme folgt.

Man darf ohne Prämissen auf die Identität eines Gegenstands mit sich selbst schließen. Ist ein Gegenstand mit einem Gegenstand identisch und besitzt der erstgenannte die Δ-Eigenschaft, dann darf man daraus schließen, dass auch der zweitgenannte die Δ-Eigenschaft besitzt. – Die Schlussfiguren und die ausführlichen Regelformulierungen lesen sich auf einen Blick so:

[78] Die Annahmeregel (AR):

Sei	Δ

Man darf jede Aussage Δ annehmen.

Die Subjunktoreinführung (SE):

Sei	A	
...	...	
Ξ	B	, wobei A als letzte Annahme verfügbar ist
Also	$A \rightarrow B$	

Wenn man zuletzt eine Aussage B im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen hat, dann darf man die Subjunktion aus A und B folgern.

Die Subjunktorbeseitigung (SB):

Ξ	$A \rightarrow B$
Ξ'	A
Also	B

Wenn man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Aussage A gewonnen hat, dann darf man B folgern.

Die Konjunktoreinführung (KE):

Ξ	A
Ξ'	B
Also	$A \wedge B$

Wenn man eine Aussage A und eine Aussage B gewonnen hat, dann darf man die Konjunktion aus A und B folgern.

Die Konjunktorbeseitigung (KB):

Ξ	$A \wedge B$	Ξ	$A \wedge B$
Also	A	Also	B

Wenn man die Konjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, dann darf man sowohl A als auch B folgern.

Die Bisubjunktoreinführung (BE):

Ξ	$A \rightarrow B$
Ξ'	$B \rightarrow A$
Also	$A \leftrightarrow B$

Wenn man die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Subjunktion aus B und A gewonnen hat, dann darf man die Bisubjunktion aus A und B folgern.

Die Bisubjunktorbeseitigung (BB):

Ξ	$A \leftrightarrow B$	Ξ	$A \leftrightarrow B$
Ξ'	A	Ξ'	B
Also	B	Also	A

Wenn man die Bisubjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B sowie das linke bzw. das rechte Bisubjunkt, also A bzw. B, gewonnen hat, dann darf man das rechte bzw. linke Bisubjunkt, also B bzw. A, folgern.

Die Adjunktoreinführung (AE):

Ξ	A	Ξ	A
Also	$A \vee B$	Also	$B \vee A$

Wenn man eine Aussage A gewonnen hat und B eine Aussage ist, dann darf man sowohl die Adjunktion aus A und B als auch die Adjunktion aus B und A folgern.

Die Adjunktorbeseitigung (AB):

Ξ	$A \vee B$
Ξ'	$A \rightarrow \Delta$
Ξ''	$B \rightarrow \Delta$
Also	Δ

Wenn man die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B sowie die Subjunktion aus A und einer Aussage Δ und die Subjunktion aus B und Δ gewonnen hat, dann darf man Δ folgern.

Die Negatoreinführung (NE):

Wäre	A	Wäre	A
...	...	...	...

Ξ	Δ	Ξ	$\neg\Delta$	
...	...	...	...	
Ξ'	$\neg\Delta$	Ξ'	Δ	, wobei A als letzte Annahme verfügbar ist
Also	$\neg\mathrm{A}$	Also	$\neg\mathrm{A}$	

Wenn man zuletzt eine Aussage Δ resp. $\neg\Delta$ im Ausgang von der Annahme einer Aussage A gewonnen hat und wenn man außerdem im Ausgang von derselben Annahme $\neg\Delta$ resp. Δ gewonnen hat, dann darf man die Negation von A folgern.

Die Negatorbeseitigung (NB):

Ξ $\neg\neg\Delta$

Also Δ

Wenn man die Negation der Negation einer Aussage Δ gewonnen hat, dann darf man Δ folgern.

Die Universalquantoreinführung (UE):

Ξ $[\beta, \xi, \Delta]$, wobei β kein Teilterm von Δ oder einer verfügbaren Annahme ist.

Also $\bigwedge\xi\Delta$

Wenn man das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Δ noch Teilterm einer verfügbaren Annahme ist, dann darf man die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Die Universalquantorbeseitigung (UB):

Ξ $\bigwedge\xi\Delta$

Also $[\theta, \xi, \Delta]$

Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ξ gewonnen hat und θ ein geschlossener Term ist, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ für ξ in Δ folgern.

Die Partikularquantoreinführung (PE):

Ξ $[\theta, \xi, \Delta]$

Also $\bigvee\xi\Delta$

Wenn man das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für eine Variable ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, dann darf man die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Die Partikularquantorbeseitigung (PB):

Ξ	$\bigvee \xi \Delta$	
Sei	$[\beta, \xi\ \Delta]$	
…	…	
Ξ'	Γ	, wobei $[\beta, \xi\ \Delta]$ als letzte Annahme verfügbar ist + Kautelen
Also	Γ	

Wenn man die Partikularquantifikation einer Formel Δ bezüglich einer Variable ξ gewonnen hat und wenn man unmittelbar danach das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für ξ in Δ angenommen hat und wenn man im Ausgang von dieser Annahme zuletzt eine Aussage Γ gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Γ noch von irgendeiner Satzaussage vor der als letzter verfügbaren Annahme ist, dann darf man nochmals Γ folgern.

Die Identitätseinführung (IE):

Also	$\theta = \theta$

Wenn θ ein geschlossener Term ist, dann darf man die Identitätsaussage $\theta = \theta$ folgern.

Die Identitätsbeseitigung (IB):

Ξ	$\theta_1 = \theta_2$	Ξ	$\theta_1 = \theta_2$
Ξ'	$[\theta_1, \xi, \Delta]$	Ξ'	$[\theta_2, \xi, \Delta]$
Also	$[\theta_2, \xi, \Delta]$	Also	$[\theta_1, \xi, \Delta]$

Wenn man die Identitätsaussage aus θ_1 und θ_2 und das Ergebnis der Substitution von θ_1 bzw. θ_2 für ξ in einer Formel Δ gewonnen hat, dann darf man das Ergebnis der Substitution von θ_2 bzw. θ_1 für ξ in Δ folgern.

Die Wiederholungsregel (W):

Ξ	A
Also	A

Wenn man eine Aussage A gewonnen hat, dann darf man A folgern.

Die Regelformulierungen orientieren sich an einigen Prinzipien: Zufolge des Formalitätsprinzips wird auf die materiale Eigenart der jeweils beteiligten Formeln kein Bezug genommen; die angebotenen Regeln gelten für physikalische und theologische, für psychologische und juristische usf. Kontexte. Zufolge des Kategorizitätsprinzips sind die Festlegungen eindeutig zu halten: Werden zwei Operatoren über dasselbe Regelpaar fixiert, dann sollen diese Fixierungen gleichwertig sein. – Weitere Prinzipien betreffen das Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln und sind im Kontext des Logischen Pluralismus (↑5, Zusatz: Logischer Pluralismus) anzudeuten. Das <u>Separiertheitsprinzip</u>, nach dem jeder Operator für sich festgelegt wird, ist im obigen Reglement nicht umgesetzt: Bei BE und AB wird auf die schon festgelegten Regulierung des Subjunktors zurückgegriffen.

Die vorgelegten Regeln lassen sich von der Prämissenseite her wie folgt sortieren: IE ist die einzige <u>prämissenfreie</u> Regel, alle übrigen sind <u>prämissenführend</u>. Unter den prämissenführenden Regeln sind <u>einprämissige</u> wie etwa KB oder PE, <u>zweiprämissige</u> wie SB oder IB und <u>dreiprämissige</u> wie AB zu unterscheiden. Drei der Regeln, SE, NE und PB, haben Prämissenabschnitte, wobei PB zusätzlich noch eine Prämisse hat. – Bezüglich der Beseitigungsregeln kann bei den mehrprämissigen die <u>Hauptprämisse</u> (mit den zu beseitigenden Ausdruck als Hauptoperator) von der oder – im Falle von AB – den <u>Nebenprämissen</u> unterschieden werden.

Die erörterten Regeln sind schließlich unterscheidbar danach, ob mit dem Folgerungsschritt stets Aussagen unverfügbar gemacht resp. Abhängigkeiten getilgt werden oder nicht. <u>Abhängigkeitentilgende Regeln</u> sind SE, NE und PB.

Die logischen Regeln sind Musterbeispiele für Wortverwendungsregeln. Sie legen gemeinsam die (korrekte) Verwendung des Folgerungsperformators fest. Die einzelnen Regelpaare fixieren zusätzlich die Bedeutung des jeweiligen Operators. – Die Regelformulierung ist so gehalten, dass nicht auf die gerade gewählte Zeichengestalt abgestellt wird: Es spielt also keine Rolle, ob man nun gerade 'Also__' für den Folgerungsperformator oder '__→__' als Subjunktor wählt. Es muss beim Aufbau einer konkreten Sprache eben nur in unverwechselbarer Weise festgelegt sein, welcher Ausdruck wofür gebraucht wird. Auch die Stenonamen wie 'SB' oder 'KE' stellen nicht – wie '→B' oder '∧E' – auf die gerade gewählte optische Realisierung ab.

4.6. Literatur

Barwise, J.; Etchemendy, J.: Language, proof, and logic. Stanford 2002.

Barwise und Etchemendys Buch ist im angelsächsischen Raum ein Standardwerk zur Begleitung des elementaren Logikunterrichts. Der verwendete Kalkül ist dem hier favorisierten ähnlich, macht jedoch die performative Seite nicht explizit, sondern arbeitet stattdessen mit graphischen Mitteln. Der Text kann auch dem Anfänger zum Selbststudium empfohlen werden.

Cordes, M.; Reinmuth, F.: Ein Redehandlungskalkül. Ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens nebst Metatheorie. Version 2.0. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00532643/en/. Greifswald 2011.

Kap. 1-2 entwickeln syntaktische Grundlagen und Begrifflichkeiten; Kap. 3 entwickelt den hier propädeutisch präsentierten Kalkül in einem mengentheoretischen Rahmen.

Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schließen; in: Mathematische Zeitschrift 39 (1934), S. 176-210 und 405-431; Wiederabdruck Darmstadt 1974.

Dieser philosophische und mathematische Klassiker entwickelt (zeitgleich mit der unten aufgeführten Arbeit Jaśkowskis) die Methode des natürlichen Schließens (und zwar in der Form des Baumkalküls). Er ist interessant sowohl aus historischen wie auch aus philosophischen Gründen, dürfte aber insgesamt nur dem philosophisch und mathematisch vorgebildetem Leser zugänglich sein. Im II. Abschnitt finden sich jedoch auch die dem Anfänger offenen grundsätzlichen Überlegungen zum natürlichen Schließen.

Hinst, P.: Pragmatische Regeln des logischen Argumentierens; in: Gethmann, C.F. (Hg.): Logik und Pragmatik; Frankfurt/Main 1982, S. 199-215.

Hinst bietet eine performativ explizite lineare Variante des Gentzenschen Kalküls des natürlichen Schließens – und damit einen Ausgangspunkt der vorangehend benutzten Formatierung. Zugleich enthält der Essay Hinweise zum sprachphilosophischen Hintergrund und zur Einbettung des Schließens in andere kognitive Redehandlungen in wissenschaftlichen Zusammenhängen; ein auch für den Anfänger gut lesbarer Text.

Jaśkowski, S.: On the Rules of Suppositions in Formal Logic. In: Studia Logica 1 (1934), S. 5–32.

Jaśkowskis Arbeit entwickelt gleichzeitig mit der oben erwähnten Arbeit Gentzens die Methode des natürlichen Schließens, und zwar in dem hier favorisierten linearen Unterbeweis-Format. Für Anfänger ist der Text nur bedingt geeignet.

Siegwart, G.: Identität; in: Sandkühler, H.J. (Hg.): Enzyklopädie Philosophie, Bd.1; Hamburg 1999, S. 603-607.

Der Artikel entwickelt die verschiedenen Charakterisierungen der Identität und die hauptsächlichen philosophischen Probleme, zu denen dieser Redeteil Anlass gibt.

Tennant, N.: Natural Logic, Edinburgh 1990[2].

Tennant entwickelt ein System des natürlichen Schließens unter Beachtung philosophischer Fragen der Bedeutungsgestaltung und verbindet das System mit modelltheoretischen Fragestellungen; für Fortgeschrittene geeignet; einschlägig sind die vier ersten Kapitel.